MMAiR, ćwiczenia

Zestaw 1

1. Wykazać, że podane niżej odwzorowania są lokalnymi dyfeomorfizmami w otoczeniu punktu 0:

   a). $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x) = (x_3, x_2, x_1 - \sin x_2)$

   b). $\varphi: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $\varphi(x) = (x_1, x_2, -x_3 \sin x_1 + x_4 \cos x_1 - x_2, x_3 \cos x_1 + x_4 \sin x_1)$

   c). $\varphi: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$, $\varphi(x) = (x_1 \sin x_2, \cos x_2 \sin x_3, x_4, x_5 + x_4^3 - x_1^{10})$

   Czy są to dyfeomorfizmy globalne?

2. Pokazać, że układ równań $x_1 y_1 - x_2 y_2 = 0$, $x_2 y_1 + x_1 y_2 = 2$ definiuje funkcję $y = g(x)$. Obliczyć pochodną $Dg(x)$ w punkcie $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = 1$.

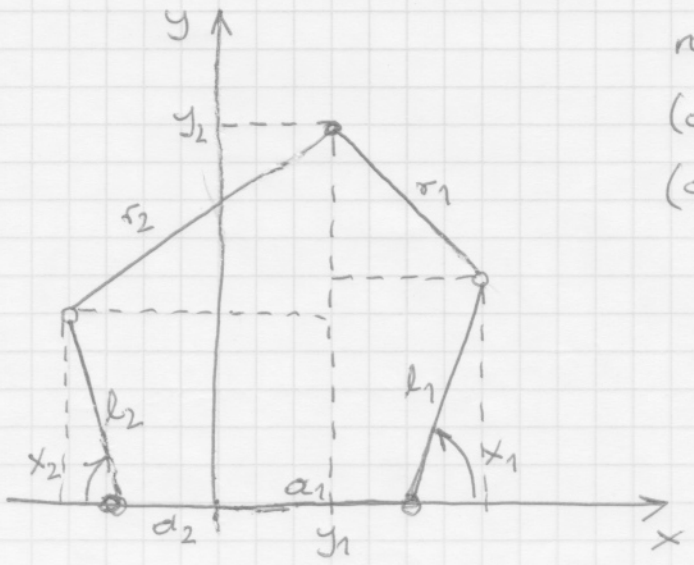
3. Dana jest kinematyka manipulatora typu podwójne wahadło: $y_1 = l_1 \cos x_1 + l_2 \cos(x_1 + x_2)$, $y_2 = l_1 \sin x_1 + l_2 \sin(x_1 + x_2)$. Pokazać, że poza konfiguracjami osobliwymi istnieje lokalne rozwiązanie odwrotnego zadania kinematyki.

4. Korzystając z twierdzenia o funkcji uwikłanej zbadać warunki, przy których wartości własne macierzy $\underset{n\times n}{A}$ są funkcją współczynników równania charakterystycznego.

5. Zbadać istnienie kinematyki i kinematyki odwrotnej mechanizmu przedstawionego na rysunku i opisanego równaniami

$$(a_1 + l_1 \cos x_1 - y_1)^2 + (y_2 - l_1 \sin x_1)^2 = r_1^2$$

$$(a_2 + y_1 + l_2 \cos x_2)^2 + (y_2 - l_2 \sin x_2)^2 = r_2^2.$$



MMAiR, ćwiczenia

Zestaw 2

1. Dla macierzy obrotu $R \in SO(3)$ wyznaczyć normy $\|R\|_2$ i $\|R\|_F$. Wyznaczyć normę $\|R\|_1$ dla macierzy $R = Rot(z, \alpha)$.

2. Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ obliczyć normy $\|A\|_1, \|A\|_2, \|A\|_F$ i $\|A\|_\infty$, a także współczynnik uwarunkowania $\varkappa(A)$.

3. Pokazać, że norma operatorowa macierzy ma własność przeniesienia $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

4. Pokazać, że $\|A\|_F^2 = tr(AA^T)$, $\underset{n \times n}{A}$.

5. Pokazać, że dla macierzy $\underset{n \times n}{A}$ zachodzi nierówność

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_F \leq \|A\|_1 \leq \sqrt{n} \|A\|_F.$$

Wskazówka: Skorzystać z nierówności $\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2$.

6. Rozważmy układ równań liniowych $Ax = b$, $\underset{n \times n}{A}$, z zaburzoną prawą stroną, tak że $A\hat{x} = b + \varepsilon$. Pokazać, że błąd względny $\delta x = \frac{\|\hat{x} - x\|}{\|x\|}$ rozwiązania spełnia warunek

$$\delta b \leq \delta x \leq \varkappa(A) \delta b,$$

gdzie $\delta b = \frac{\|\varepsilon\|}{\|b\|}$, a $\varkappa(A)$ – współczynnik uwarunkowania.

7. Korzystając z twierdzenia o submersjach i immersjach podać postać normalną podanych niżej funkcji

a). $f(x) = x_1 + x_2^2$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,

b). $f(x) = (\sin x, \cos x)$, $x \in \mathbb{R}$,

c). $f(x) = (x, tg x)$, $x \in \mathbb{R}$,

d). $f(x) = (x_1 + x_2^2, x_2)$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $f(x) \in \mathbb{R}^2$.

MMAiR, ćwiczenia

Zestaw 3

1. Zbadać istnienie i (nie)zdegenerowanie punktów krytycznych funkcji:

a). $f(x) = x^3$, $\quad x \in \mathbb{R}$

b). $f(x) = x_1^3 - 3x_1^2 x_2$, $\quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

c). $f(x) = x_1^2$, $\quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

d). $f(x) = x_1 x_2$, $\quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

e). $f(x) = x_1^2 \cos x_2 + \sin^2 x_2$, $\quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

2. Bez powoływania się na twierdzenie Morse'a wykazać, że funkcja $f(x) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$ jest LR-równoważna funkcji $g(x) = x_1^2 + x_2^2$.

3. Jak w zadaniu 2 pokazać, że funkcja $f(x) = x_1 x_2 + x_2^2$ jest LR-równoważna funkcji $g(x) = x_1^2 - x_2^2$.

4. Korzystając z twierdzenia Morse'a znaleźć postacie normalne funkcji podanych niżej, w otoczeniu $(0,0)$:

a). $f(x) = x_1^2 \cos x_2 + \sin^2 x_2$

b). $f(x) = \cos x_1 - 2x_1 x_2 + \cos x_2$

c). $f(x) = x_1 \sin x_2 + x_2 \sin x_1$

d). $f(x) = x_1^2 \cos x_3 + x_2 x_3 + x_3^2$

e). $f(x) = \sin x_1 \sin x_2 - x_3^2$

f). $f(x) = x_1 x_2 + x_2 x_3 - x_1 x_3$

MMAiR

Zestaw 4

1. Korzystając z twierdzenia o odwzorowaniach zwężających wyprowadzić warunek wystarczający podanego niżej algorytmu rozwiązania układu równań liniowych $x = Ax$. Algorytm: $x_{k+1} = Ax_k$, x_0 – p. startowy.

2. Pokazać, że macierz fundamentalna $\Phi(t,s)$ układu liniowego $\dot{x} = A(t)x$ spełnia zależność

$$\frac{\partial \Phi^T(s,t)}{\partial t} = -A^T(t)\Phi^T(s,t).$$

3. Sprawdzić, że dla stałej macierzy $A(t) = A$ wzór Peano-Bakera daje $e^{tA} = \Phi(t,0)$.

4. Sprawdzić, że macierz $M(t) = \int_0^t \Phi(t,s)B(s)B^T(s)\Phi^T(t,s)\,ds$ spełnia równanie Lapunowa

$$\dot{M} = B(t)B^T(t) + A(t)M(t) + M(t)A^T(t).$$

5. Udowodnić lemat Gronwalla-Bellmana.

Wskazówka: zauważyć, że

$$\frac{\phi(t)}{a\int_0^t \phi(s)\psi(s)\,ds + b} \leq 1.$$

6. Na podstawie nierówności Ważewskiego określić asymptotyczną stabilność układów liniowych:

a). $\dot{x} = -tx$, $\dot{y} = -y$

b). $\dot{x} = -x + \frac{2y}{1+t^2}$, $\dot{y} = -y$

c). $\dot{x} = -2x + 2y\sin t$, $\dot{y} = -2y$

d). $\dot{x} = -t^2x + y\cos t$, $\dot{y} = -t^2y - x\cos t$.

MMAiR

Zestaw 5

1. Sprawdzić stabilność następujących układów:

a). $\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & e^{\frac{1}{2}t}\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$, b). $\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}-10 & e^{3t}\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$,

c). $\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & e^{2t}\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$, d). $\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 2\sin t\\ 0 & -(t+1)\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$.

2. Pokazać, że punkt równowagi (0,0) układu

$$\dot{x}_1=-x_1+x_2+(x_1^2+x_2^2)\sin t,\quad \dot{x}_2=-x_1-x_2+(x_1^2+x_2^2)\cos t$$

jest eksponencjalnie stabilny i określić obszar stabilności.

Wskazówka: Wykorzystać $V(x)=x_1^2+x_2^2$.

3. Zbadać stabilność punktu (0,0) układu

$$\dot{x}_1=h(t)x_2-g(t)x_1^3,\quad \dot{x}_2=-h(t)x_1-g(t)x_2^3,\ g(t),h(t)$$

gładkie i ograniczone od góry, $g(t)\geq k>0$.

Wskazówka: Wykorzystać $V(x)=x_1^2+x_2^2$.

4. Niech $V(x)$ oznacza gładką funkcję potencjału.

Pokazać, że układ gradientowy

$$\dot{x}=-\frac{\partial V(x)}{\partial x}=-DV(x)$$

nie ma orbit zamkniętych.

5. Niech $H(x,y)$, $x,y\in\mathbb{R}^n$ oznacza gładki hamiltonian.

Pokazać, że układ hamiltonowski

$$\dot{x}=\frac{\partial H(x,y)}{\partial y},\quad \dot{y}=-\frac{\partial H(x,y)}{\partial x}$$

nie ma asymptotycznie stabilnego punktu równowagi.

MMAiR, ćwiczenia

Lista nr 6

1. Pokazać, że układ dynamiczny

$$\dot{x} = -\lambda y + xy, \quad \dot{y} = \lambda x + \frac{1}{2}(x^2 - y^2), \quad x, y \in \mathbb{R}, \ \lambda > 0,$$

jest hamiltonowski. Wyznaczyć hamiltonian i sporządzić portret fazowy układu.

2. Wykazać, że układ dynamiczny

$$\dot{x} = x^2 - y^3, \quad \dot{y} = 2x(x^2 - y), \quad x, y \in \mathbb{R},$$

ma całkę pierwszą.

3. Znaleźć całkę pierwszą układu

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = x - 2x^3$$

i narysować jego portret fazowy.

4. Znaleźć całkę pierwszą i narysować portret fazowy układu równań Lotki–Volterry

$$\dot{x} = ax - bxy, \quad \dot{y} = -cy + bxy, \quad x, y \in \mathbb{R}_+, \ a, b, c > 0.$$

5. Zbadać stabilność punktu $(0,0)$ układu

$$\dot{x} = -y + x(x^2+y^2)\sin\sqrt{x^2+y^2}, \quad \dot{y} = x + y(x^2+y^2)\sin\sqrt{x^2+y^2}.$$

Wskazówka: Przejść do współrzędnych biegunowych

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

6. Wyprowadzić formułę na nawias Liego pól wektorowych

$$[X,Y](x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Ad_x^t Y(x) = DY(x)X(x) - DX(x)Y(x).$$

MMAR

Lista 7

1. Korzystając z notatek do wykładu udowodnić, że składanie strumieni komutujących pól wektorowych jest przemienne

$$[X,Y](x)=0 \Rightarrow \varphi_t(\varphi_s(x)) = \varphi_s(\varphi_t(x)).$$

2. Pokazać, że dla każdej funkcji $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ zachodzi

$$L_{[X,Y]} f = L_X(L_Y f) - L_Y(L_X f).$$

3. Korzystając z własności $[fX, gY] = fg[X,Y] + fL_X gY - gL_Y fX$ wykazać, że dystrybucja $\mathcal{D} = \operatorname{span}_{C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})}\{X_1(x),\dots,X_k(x)\}$ jest inwolutywna wtedy i tylko wtedy, gdy $[X_i, X_j] \in \mathcal{D}$, dla $i,j = 1,2,\dots,k$.

4. Sprawdzić inwolutywność dystrybucji

a). $\mathcal{D}_1 = \operatorname{span}_{C^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})}\left\{\begin{pmatrix}1\\x_2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$,

b). $\mathcal{D}_2 = \operatorname{span}_{C^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})}\left\{\begin{pmatrix}\cos x_3\\\sin x_3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$,

c). $\mathcal{D}_3 = \operatorname{span}_{C^\infty(\mathbb{R}^5,\mathbb{R})}\left\{\begin{pmatrix}\cos x_3\\\sin x_3\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\sin x_3\\\cos x_3\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\cos x_3\\\sin x_3\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$.

5. Dla podanych niżej dystrybucji znaleźć funkcję $\lambda(x)$, taką że $d\lambda\mathcal{D} = 0$,

a). $\mathcal{D}_1 = \operatorname{span}_{C^\infty(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})}\left\{\begin{pmatrix}e^{x_2}\\1\end{pmatrix}\right\}$,

b). $\mathcal{D}_2 = \operatorname{span}_{C^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})}\left\{\begin{pmatrix}2x_3\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-x_1\\-2x_2\\x_3\end{pmatrix}\right\}$.

MMAiR, ćwiczenia

Zestaw 8

1. Dla liniowego układu sterowania $\dot{x} = Ax + Bu$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, wykazać, że własność osiągalności pociąga za sobą sterowalność.

2. Dla afinicznego układu sterowania $\dot{x}_1 = u$, $\dot{x}_2 = x_1^2$ wyznaczyć dystrybucję d_σ i zbadać własność osiągalności, sterowalność i lokalną sterowalność z punktu $(0,0)$,

3. Zbadać własność osiągalności sterowanych równań Eulera

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a x_2 x_3 + bu \\ \dot{x}_2 = -a x_1 x_3 + cu \\ \dot{x}_3 = du, \end{cases}$$

4. Korzystając z wyniku punktu 3 wykazać sterowalność sterowanych równań Eulera.

5. Wykazać sterowalność integratora Brockett'a

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 \\ \dot{x}_2 = u_2 \\ \dot{x}_3 = x_1 u_2 - x_2 u_1, \end{cases}$$

6. Pokazać lokalną sterowalność z punktu $(0,0)$ układu afinicznego

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^3 \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases}$$

MMAiR

Zestaw 9

1. Zbadać S-linearyzowalność układów sterowania

a). $\dot{x}_1 = e^{-x_1}x_2, \quad \dot{x}_2 = e^{x_1} + u$

b). $\dot{x}_1 = x_2 \cos^2 x_1, \quad \dot{x}_2 = \operatorname{tg} x_1 + u$

2. Zbadać F-linearyzowalność układów sterowania

a). $\dot{x}_1 = \frac{x_2}{\cos x_1}, \quad \dot{x}_2 = \sin x_1 + u$

b). $\dot{x}_1 = x_2 + x_2^2 u, \quad \dot{x}_2 = u$

c). $\dot{x}_1 = x_2 + e^{x_2}x_3 - e^{x_2}x_2^3, \quad \dot{x}_2 = x_3 - x_2^3, \quad \dot{x}_3 = 3x_2^2 x_3 - 5x_2^5 + u$

d). $\dot{x}_1 = x_2 + e^{-x_3}x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = u$

3. Pokazać, że układ sterowania

$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 x_4^2 + \sin x_3, \quad \dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = u$

reprezentujący dynamikę sterowanego układu Kula-belka nie jest F-linearyzowalny.

4. Dla układu sterowania

$\dot{x}_1 = \sin x_2, \quad \dot{x}_2 = \sin x_3, \quad \dot{x}_3 = x_4^3 + u_1, \quad \dot{x}_4 = x_5 + x_4^3 - x_1^{10},$

$\dot{x}_5 = u_2$

napisać równania równoważności dla odpowiedniej postaci Brunovsky'ego i rozwiązać je.

MMAiR

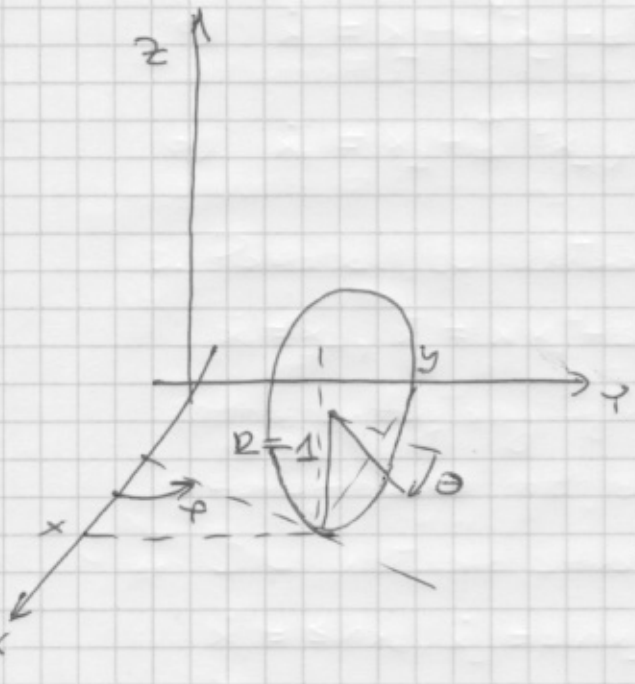
Lista nr 10

1. Dla nieredundantnego manipulatora sztywnego opisanego równaniami

$$\begin{cases} Q(q)\ddot{q} + B(q,\dot{q}) = u \\ y = k(q) \end{cases}$$

$q, u, y \in \mathbb{R}^n$ wyprowadzić algorytm śledzenia trajektorii $y_d(t)$ w przestrzeni zadaniowej korzystając z linearyzacji we/wy.

2. Dla koła toczącego się płaskowo, opisanego równaniami



$\dot{x} = \eta_1 \cos\varphi, \quad \dot{y} = \eta_1 \sin\varphi$

$\dot{\varphi} = \eta_2, \quad \dot{\theta} = \eta_1$

$\dot{\eta}_1 = u_2, \quad \dot{\eta}_2 = u_1$

$y_1 = x, \quad y_2 = y$

przeprowadzić syntezę algorytmu śledzenia trajektorii $y_d(t) = (y_{d1}(t), y_{d2}(t))$ korzystając z linearyzacji we/wy. Wprowadzić nowe współrzędne i zbadać dynamikę zerową układu.

3. Dany jest układ sterowania postaci

$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = \sin x_3, \quad \dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = u.$

Pokazać, że ten układ jest linearyzowalny w otoczeniu $0 \in \mathbb{R}^4$ korzystając z twierdzenia Jakubczyka-Respondka i z linearyzacji we/wy przy funkcji wyjścia $y = x_1$.