



Politechnika
Wrocławska

Wybrane zagadnienia robotyki

Wykłady 9, 10

Algorytmy sterowania robotów z zastosowaniami

Alicja Mazur

KCiR, W12, PWr

Copyright © A. Mazur 2026



HR EXCELLENCE IN RESEARCH

Zawartość wykładu

Wykład dotyczy zagadnień i problemów sterowania robotów przemysłowych. W jego ramach zostaną przedstawione wybrane algorytmy sterowania definiowane w przestrzeni wewnętrznej i zewnętrznej.

- ▶ zadanie sterowania robotów
- ▶ model matematyczny robota manipulacyjnego
- ▶ zadania realizowane przez manipulatory
- ▶ podział algorytmów sterowania
- ▶ sterowanie w przestrzeni zewnętrznej – odspzęzanie we-wy
- ▶ test

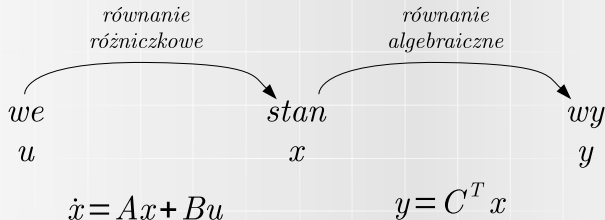
Model matematyczny robota manipulacyjnego

Zadanie sterowania robotów

Sterowanie układów nieliniowych, jakimi są roboty, oparte jest na **matematycznym modelu robota**. Z tego względu niezbędne jest posiadanie takiego modelu.

Model robota manipulacyjnego zawiera dwie grupy równań:

Automatyka



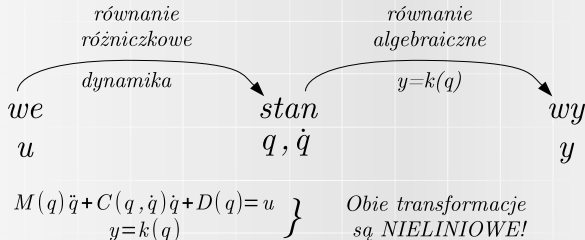
Model matematyczny robota manipulacyjnego

Zadanie sterowania robotów

Sterowanie układów nieliniowych, jakimi są roboty, oparte jest na **matematycznym modelu robota**. Z tego względu niezbędne jest posiadanie takiego modelu.

Model robota manipulacyjnego zawiera dwie grupy równań:

Robotyka



Model matematyczny robota manipulacyjnego

- Kinematyka – opisuje położenie i orientację chwytaka wyrażoną we współrzędnych zewnętrznych (roboczych)

$$y = k(q).$$

- Dynamika – opisuje II zasadę dynamiki Newtona zapisaną dla obiektu zbudowanego z połączonych ale przemieszczających się względem siebie członów

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D(q) + T(\dot{q}) = u,$$

gdzie:

- $M(q)$ – macierz bezwładności (inercji) układu,
- $C(q, \dot{q})$ – macierz sił Coriolisa i sił odśrodkowych,
- $D(q)$ – wektor sił potencjalnych, najczęściej wektor sił grawitacji,
- $T(\dot{q})$ – wektor sił tarcia,
- $q, \dot{q}, \ddot{q} \in R^n$ – wektor położenia, prędkości, przyspieszeń przegubów manipulatora,
- $u \in R^n$ – wektor sterowań, czyli przyłożonych zewnętrznych sił lub momentów.

Trzeba zaznaczyć, że w modelu dynamiki nie uwzględnia się przekładni, gdyż wprowadzają one nieliniowość, która nie pozwala na zastosowanie klasycznych algorytmów sterowania. Z tego względu będziemy rozważać model o bezpośrednich napędach, czyli *direct drives*.

Model matematyczny robota manipulacyjnego

Właściwości modelu dynamiki

► Wektor grawitacji:

- jest jednostajnie ograniczony, jeśli wszystkie przeguby są obrotowe

$$\| D(q) \| \leq D_{max} < \infty,$$

- jest ograniczony ale nie jednostajnie, jeśli przeguby są przesuwne

$$\| D(q) \| \leq D \| q \|, \quad 0 < D < \infty.$$

► Wektor tarcia ma postać Tustina

$$T(\dot{q}) = F_w \dot{q} + F_s \operatorname{sgn}(\dot{q}),$$

gdzie F_w to współczynnik tarcia wiskotycznego, zaś F_s to współczynnik tarcia statycznego. Jeśli w modelu dynamiki musimy uwzględnić tarcie, to z punktu widzenia dowodzenia zbieżności algorytmów w oparciu o teorię Lapunowa można uwzględnić tylko tarcie wiskotyczne, ponieważ jest ono funkcją ciągłą, a tylko takie ciągłe układy opisuje teoria Lapunowa.

Zadania realizowane przez manipulatory

Zadania sterowania manipulatorem w przestrzeni zewnętrznej (roboczej) mogą być sformułowane w następujący sposób:

- a) Sterowanie punktowe: mamy zadany punkt początkowy $y_p \in R^6$ i końcowy $y_k \in R^6$. Należy przeprowadzić manipulator z y_p do y_k .
- b) Śledzenie trajektorii: mamy zadany punkt początkowy $y_p \in R^6$ i końcowy $y_k \in R^6$ oraz trajektorię zadaną $y_d(t)$, taką że $t_p \leq t \leq t_k$ i $y_d(t_k) = y_k$. Należy przeprowadzić manipulator z y_p do y_k wzdłuż zadanej trajektorii $y_d(t)$.
- c) Sterowanie punktowe optymalne: mamy zadany punkt początkowy $y_p \in R^6$ i końcowy $y_k \in R^6$. Należy przeprowadzić manipulator z y_p do y_k w sposób optymalny.
- d) Optymalne śledzenie trajektorii: mamy zadany punkt początkowy $y_p \in R^6$ i końcowy $y_k \in R^6$ oraz trajektorię zadaną $y_d(t)$, taką że $t_p \leq t \leq t_k$ i $y_d(t_k) = y_k$. Należy przeprowadzić manipulator z y_p do y_k wzdłuż zadanej trajektorii $y_d(t)$ w sposób optymalny.

Kryterium optymalności może być różne – czas, energia dostarczana do układu, ruch bezkolizyjny, omijanie przeszkód etc.

Zadania realizowane przez manipulatory

Zadania mogą być realizowane w różnych przestrzeniach:

- ▶ W przestrzeni roboczej (zewnętrznej): należy wówczas wziąć pod uwagę przekształcenie we-stand i stand-wyjście, np. algorytm odsprężania wejściowo-wyjściowego.
- ▶ W przestrzeni przegubowej (wewnętrznej). Zakładamy wówczas, że zadania sterowania posiadają równoważne sformułowania w przestrzeni wewnętrznej. To oznacza, że zadane położenia mają swoje odpowiedniki w przestrzeni przegubowej, a trajektorii $y_d(t)$ odpowiada ciągła trajektoria przegubowa $q_d(t)$. Równoważność sformułowań zadania śledzenia trajektorii w przestrzeni roboczej i przegubowej ma miejsce wtedy, gdy potrafimy rozwiązać ciągłe zadanie odwrotne kinematyki.

Jeśli trajektoria przechodzi tylko przez konfiguracje regularne i nie przechodzi przez osobliwości, to łatwo można znaleźć trajektorię przegubową $q_d(t)$. Natomiast jeśli trajektoria zadana przechodzi przez osobliwość, to można zastosować np. metodę postaci normalnych aby odwrócić kinematykę w punktach osobliwych.

Podział algorytmów sterowania

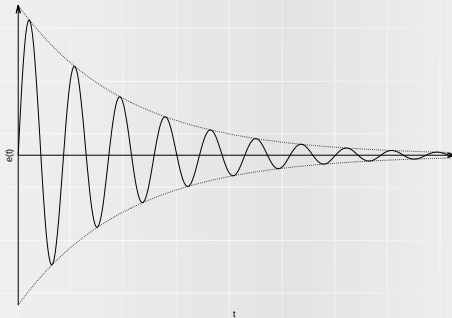
- ▶ Ze względu na przestrzeń, w której jest sformułowane zadanie:
 - ▶ zewnętrzną – np. odsprężanie we-wy,
 - ▶ wewnętrzną – np. pozostałe (duża grupa).
- ▶ Ze względu na podłączenie sterowników:
 - ▶ scentralizowane – biorą pod uwagę informacje pochodzące z całego manipulatora, np. globalna linearyzacja,
 - ▶ zdecentralizowane – biorą pod uwagę informacje pochodzące zazwyczaj tylko z jednego stopnia swobody, np. lokalne regulatory PD podłączone do poszczególnych przegubów, czyli algorytm Qu i Dorsey'a.
- ▶ Ze względu na obszar zbieżności:
 - ▶ globalne – skończone nastawy regulacji wystarczą doysterowania układu z dowolnych warunków początkowych,
 - ▶ lokalne – tylko dla warunków początkowych pewnego ograniczonego obszaru można układysterować,
 - ▶ półglobalne – lokalne, w których obszar zbieżności rozszerza się wraz ze wzrostem możliwych nastaw sterownika. Gdyby nastawy mogły być nieskończenie wielkie, to układ stałby się globalny.

Podział algorytmów sterowania

- ▶ Ze względu na szybkość zbiegania:
 - ▶ eksponencjalnie stabilny – bardzo szybko zbieżny do zera, gdyż

$$\| e(t) \| \leq Ae^{-\alpha t}, \quad A, \alpha > 0,$$

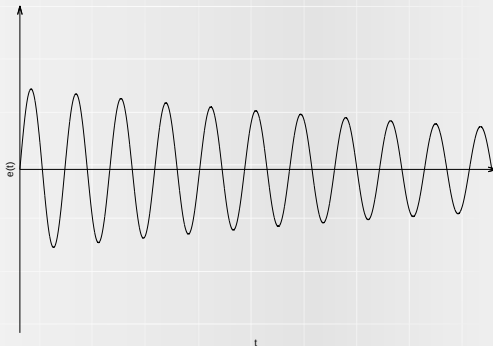
gdzie wykładnik eksponenty α musi być znany.



Podział algorytmów sterowania

- ▶ Ze względu na szybkość zbiegania:
 - ▶ asymptotycznie stabilny – wolno zbieżny do zera

$$\| e(t) \| \rightarrow 0.$$

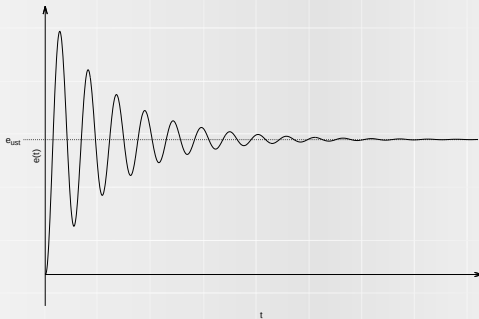


Podział algorytmów sterowania

- ▶ Ze względu na szybkość zbiegania:
 - ▶ praktycznie stabilny (BIBO stabilny)

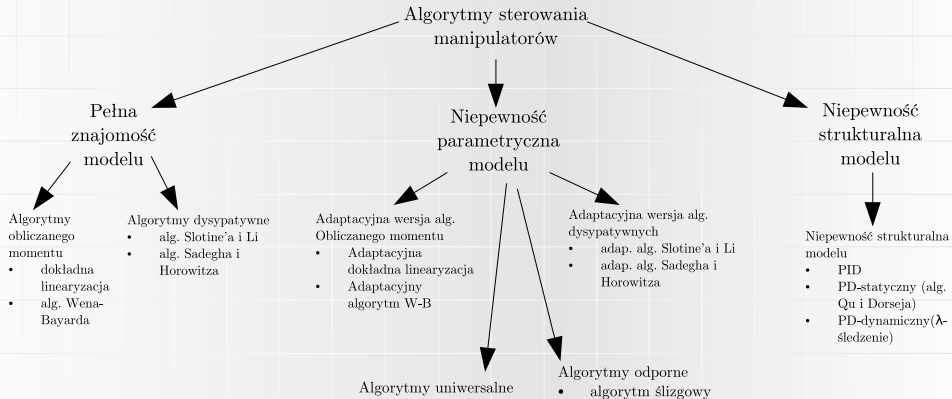
$$\| e(t) \| \rightarrow e_{ust} \neq 0,$$

gdzie wartość ustalona błędu jest różna od zera lub błąd oscyluje a amplituda oscylacji nie maleje.



Podział algorytmów sterowania

- Ze względu na stopień znajomości modelu



Sterowanie w przestrzeni zewnętrznej – odsprzęganie we-wy