

Ćwiczenia nr 10 z “Robotyki 1”

Przypominam:

- definicja nawiasu Liego pól wektorowych A, B z wektorem konfiguracji $\mathbf{q}$:

$$[A, B] = \frac{\partial B}{\partial \mathbf{q}} A - \frac{\partial A}{\partial \mathbf{q}} B$$

- dystrybucja $D_0 = \text{span}_{C^\infty}(\{g_1, g_2, \dots, g_m\})$ rozpięta przez pola wektorowe pochodzące z układu bezdryfowego: $\dot{\mathbf{q}} = \sum_{i=1}^m g_i(\mathbf{q}) u_i$, który z kolei pochodzi z ograniczeń w formie Pfaffa
- definicja małej flagi - ciągu dystrybucji $D_{i+1} = D_i + [D_0, D_i]$, $i = 0, \dots$
- stopień nieholonomiczności dystrybucji $\mathcal{D}_0$ w punkcie $\mathbf{q}$ jest to minimalna wartość indeksu p , dla której $r_p(\mathbf{q}) = n$, gdzie n to wymiar przestrzeni konfiguracyjnej, a $r_i(\mathbf{q})$ to wymiar dystrybucji D_i w konfiguracji $\mathbf{q}$.

Dla wymienionych poniżej układów zadanych już jako układy sterowania, należy:

1. podać ile wynoszą: n – wymiar q , r – liczba ograniczeń, m – liczba generatorów ukl. bezdryfowego.
2. Policzyc: $D_0(\mathbf{q}), D_1(\mathbf{q}), D_2(\mathbf{q}), \dots$,
3. Policzyc: $r_0(\mathbf{q}), r_1(\mathbf{q}), r_2(\mathbf{q}), \dots$,
4. Określić wektor wzrostu w $\mathbf{q}$, oraz stopień nieholonomiczności dystrybucji w $\mathbf{q}$.
5. Czy układ jest nieholonomiczny (tj. czy ograniczenia $A(\mathbf{q})$ z których wygenerowano układ sterowania są nieholonomiczne)?
6. Czy możemy określić stopień nieholonomiczności? Jeśli tak, ile wynosi?

Układy do zbadania (wszystkie lub wybrane) to:

1. koło bez poślizgu poprzecznego (jednokołowiec – unicycle) $\mathbf{q} = (x, y, \phi)^T$,
 $g_1(\mathbf{q}) = (\cos(\phi), \sin(\phi), 0)^T$, $g_2(\mathbf{q}) = (0, 0, 1)^T$,
2. koło z dwoma poślizgami: poprzecznym i podłużnym: $\mathbf{q} = (x, y, \phi, \theta)^T$,
 $g_1(\mathbf{q}) = (\cos(\phi), \sin(\phi), 0, 1)^T$, $g_2(\mathbf{q}) = (0, 0, 1, 0)^T$,
3. samochód kinematyczny (z poprzedniej listy, zadanie 1 z x, y dla tylnej osi): $\mathbf{q} = (x, y, \phi, \theta)^T$,
 $g_1(\mathbf{q}) = (L \cos \phi \cos \theta, L \sin \phi \cos \theta, \sin(\theta), 0)^T$, $g_2(\mathbf{q}) = (0, 0, 0, 1)^T$,
4. Dziwny układ: $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)^T$,
 $g_1(\mathbf{q}) = (1, 0, -1)^T$, $g_2(\mathbf{q}) = (0, 1, 0)^T$.
(bez liczenia) Czy może być sterowalny? (odpowiedzieć patrząc jedynie na równania)
5. Układ nilpotentny: $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)^T$,
 $g_1(\mathbf{q}) = (1, 0, q_2)^T$, $g_2(\mathbf{q}) = (0, 1, 0)^T$.
6. Jeszcze jeden układ: $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)^T$,
 $g_1(\mathbf{q}) = (1, 0, q_2^3)^T$, $g_2(\mathbf{q}) = (0, 1, 0)^T$.

Pytania dla ciekawskich:

1. (*) Czym istotnym różni się układ z punktu 5 od jednokołowca (z pkt. 1)? Wskazówka: policzyć $[g_1, [g_1, g_2]]$, $[g_2, [g_1, g_2]]$, dla jednego i drugiego układu.
2. (*) Niech $m = 2$, czyli układ bezdryfowy ma dwa sterowania. Ile minimalnie musimy policzyć pól typu $[g_i, g_j]$, by uniknąć liczenia pól zależnych (np. zerowych, związanych antysymetrią czy tożsamością Jacobiego), a ile typu $[g_k, [g_i, g_j]]$ (uwzględniając, że bez nadmiaru liczymy pola postaci $[g_i, g_j]$).
3. (*) Ile minimalnie musimy policzyć pól typu $[g_i, g_j]$, by uniknąć liczenia pól zależnych, gdy $m > 2$?
4. (*) Jak łatwo wygenerować układ podlegający ograniczeniu (-om) holonomicznemu (-ym)? (Od czego by tu zacząć? Od ograniczeń? A może nie? Jeśli nadal nie wiesz - różniczkuj!)
5. (*) Stosując definicję nawiasu Liego ważną np. dla macierzy kwadratowych $[A, B] = AB - BA$, pokazać tożsamość Jacobiego:

$$\forall E, F, H : \quad [E, [F, H]] + [H, [E, F]] + [F, [H, E]] = 0$$

6. (*) Wiadomo, że dla przestrzeni R^3 iloczyn wektorowy jest przykładem nawiasu Liego. Jak można pokazać (zinterpretować) tożsamość Jacobiego? (trochę uciążliwie: wziąć 3. wektory i liczyć fizycznie ich iloczyny wektorowe, a może inaczej?)