

Ćwiczenia nr 4 z “Robotyki 1”

1. Pokazać, że elementem odwrotnym do $\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \in SE(3)$ jest $\mathbf{Z}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T & -\mathbf{R}^T \mathbf{T} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$.

Wskazówka: założyć postać wyniku $\mathbf{Z}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$ (jakich rozmiarów są poszczególne podmacierze?) i pilnie liczyć z warunku $\mathbf{Z}\mathbf{Z}^{-1} = \mathbf{I}_4$.

2. Niech będzie dane $\mathbf{R} = \text{rot}(z, \psi)$. Policzyc $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \psi}$, a wynik zapisać w postaci $\mathbf{A}\mathbf{R}$. Wyrazić macierz $\mathbf{A}$ przy pomocy znanej operacji $[\cdot]$ oraz jednego z wersorów układu kanonicznego $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)^T$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)^T$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)^T$. Czy potrafimy “zgadnąć” wynik tego ćwiczenia dla $\text{rot}(y, \theta)$ oraz $\text{rot}(x, \phi)$? Po zgadnięciu, jednak sprawdzić!

3. Prędkość obrotową w przestrzeni/ciele $\boldsymbol{\omega}_s/\boldsymbol{\omega}_b$ definiujemy zależnościami:

$$[\boldsymbol{\omega}_s] = \boldsymbol{\Omega}_s = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T, \quad [\boldsymbol{\omega}_b] = \boldsymbol{\Omega}_b = \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}},$$

Dla parametryzacji $RPY(\phi, \theta, \psi)$ macierzy $\mathbf{R} \in SO(3)$ wyliczyć prędkość obrotową w przestrzeni $\boldsymbol{\omega}_s$ oraz w ciele $\boldsymbol{\omega}_b$ jako funkcję ϕ, θ, ψ oraz ich pochodnych. Wynik przedstawić w postaci macierzowej: $\boldsymbol{\omega}_s = \mathbf{W} \cdot (\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi})^T$. Zastanowić się, jak zoptymalizować obliczenia, by liczyć tylko niezbędne wyrażenia. Ćwiczenie można zrobić dwoma sposobami:

- (a) “fizycznie”: różniczkować i mnożyć aż do skutku (tego nie robić na ćwiczeniach, zbyt uciążliwe i długotrwałe),
- (b) $RPY(\phi, \theta, \psi) = \text{rot}(z, \phi)\text{rot}(y, \theta)\text{rot}(x, \psi)$ i teraz różniczkować standardowo iloczyn oraz korzystać z wyników zadania poprzedniego. Oczywiście $(AB)^T = B^T A^T$ oraz $\text{rot}(os, \alpha)^T = \text{rot}(os, -\alpha)$. Uwaga na brak przemienności, zachować właściwą kolejność działań.

Uwaga: po wyliczeniu $\boldsymbol{\omega}_s$ łatwiej liczyć $\boldsymbol{\omega}_b$ korzystając z przekształconej zależności $\boldsymbol{\omega}_s = \mathbf{R}\boldsymbol{\omega}_b$

4. Czy teraz potrafimy wytłumaczyć szczególne uporządkowanie współrzędnych wektora $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ w operacji $[\boldsymbol{\omega}]$?
5. Jak pokazano na wykładzie, skrętnik $\mathbf{v}_b$ z układu ciała transformuje się do układu przestrzeni $\mathbf{v}_s$ zgodnie z zależnością: $\mathbf{v}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & [\mathbf{T}]\mathbf{R} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \mathbf{v}_b$. Wyliczyć jak transformuje się skrętnik z układu przestrzeni do układu ciała.

Wskazówka: postępować analogicznie jak przy liczeniu macierzy odwrotnej do $\begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$, czyli: założyć postać wyniku (jakiej macierzy i jak poklatkowanej?), sformułować równania i je rozwiązać.

6. sprawdzić obliczeniami, czy macierz $\begin{bmatrix} c_\alpha & 0 & s_\alpha & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ s_\alpha & 0 & -c_\alpha & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ należy do grupy $SE(3)$?

7. (*) Wskazać (opisać) podgrupy grupy $SE(3)$: $SO(3)$, $SO(2)$, $SE(2)$, R^1 , R^2 , R^3 . Ile ich jest? Jaką mają interpretację robotyczną (czyli w jakich przypadkach ruch robota może być opisany elementem danej grupy)? Przykłady: ploter xy, robot mobilny poruszający się na płaszczyźnie xy (albo wspinający się po ścianie yz).

8. (*) Jaki jest wymiar grup $SO(4)$, $SO(5)$, ..., $SO(n)$? A także $SE(4)$, $SE(5)$, ..., $SE(n)$?