

Ćwiczenia nr 3 z “Robotyki 1”

Macierze $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$, gdzie $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ (nieco niekonsekwentnie bowiem wierszowo) $\mathbf{R} \in SO(3)$ i $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^3$ opisują transformację między dowolnymi (zawierającymi zarówno rotację jak i translację) układami współrzędnych. Czasem $\mathbf{T}$ oznacza się jako $\mathbf{d}$. Obydwa oznaczenia definiują wektor przemieszczenia między początkami odpowiednich układów współrzędnych. Bazowe translacje opisujemy macierzami:

$$Tran(x, a) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & (a, 0, 0)^T \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}, \quad Tran(y, b) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & (0, b, 0)^T \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}, \quad Tran(z, c) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & (0, 0, c)^T \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix},$$

a rotacje macierzami:

$$Rot(x, \alpha) = \begin{bmatrix} rot(x, \alpha) & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}, \quad Rot(y, \beta) = \begin{bmatrix} rot(y, \beta) & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}, \quad Rot(z, \gamma) = \begin{bmatrix} rot(z, \gamma) & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Pokazać, że złożenie translacji wzdłuż dowolnych osi jest przemienne.
2. Dla jakich sytuacji złożenie translacji z obrotem (i vice versa) wzdłuż wybranych osi jest (nie-)przemienne.
3. Dla parametryzacji oś-kąt $(\mathbf{v}, \theta)$ macierz $\mathbf{R} \in SO(3)$ jej odpowiadająca ma postać:

$$rot(\mathbf{v}, \theta) = \mathbf{R} = \mathbf{I}_3 + \sin(\theta)[\mathbf{v}] + (1 - \cos(\theta))[\mathbf{v}]^2, \quad (1)$$

gdzie $[\mathbf{v}]$ jest znaną operacją tworzenia macierzy skośnysymetrycznej ze znanego wektora $\mathbf{v}$. Pokazać, korzystając z (1), że macierz $\mathbf{R}$ odpowiadająca $(\mathbf{v}, \theta)$ jest identyczna z tą dla $(-\mathbf{v}, -\theta) = (-\mathbf{v}, 2\pi - \theta)$.

4. Na podstawie wzoru poprzedniego określić, jak dla danej macierzy $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \in$

$SO(3)$ wyznaczyć wektor $\mathbf{v}$ i kąt θ przy pomocy elementów składowych macierzy $\mathbf{R}$. Zastanowić się, dla jakich macierzy Państwa pomysł jest dobrze, a dla jakich źle, uwarunkowany numerycznie. (czyli mogą wystąpić kłopoty z akceptowalnie dokładnym określeniem tych danych)

5. Potrenować kolejne przemieszczanie układów współrzędnych np. przy transformacji:

$$rot(x, \pi/2)rot(z, \pi)rot(y, -\pi/2)rot(x, -\pi)rot(z, \pi/2)$$

zwracając szczególną uwagę jak określamy kąty obrotu dodatnie, a jak ujemne. Można także dodać translacje wzdłuż osi x, y, z w różnych miejscach.

6. Dokończyć listę (listy) poprzednie, gdy są zaległości.
7. (*) Pokazać (korzystając z zależności i rysunku z wykładu kolejnego), że

$$\mathbf{R} = rot(z, \alpha)rot(y, \beta)rot(z, \theta)rot(y, -\beta)rot(z, -\alpha)$$

z jednostkowym wektorem $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^T = (c_\alpha s_\beta, s_\alpha s_\beta, c_\beta)^T$ opisuje obrót dookoła osi $\mathbf{v}$ o kąt θ , zgodnie z zależnością (1). Uwaga: sporo liczenia. Podpowiedź: wyliczyć $\mathbf{R}$ jako funkcję sinusów i kosinusów α, β, θ , a potem to co się da wyrazić przez składowe wektora $\mathbf{v}$.

8. (*) Niech będzie dany wektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ obracany wokół wektora jednostkowego $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$ o kąt θ . Pokazać, że wynikiem będzie

$$\mathbf{v}_{rot} = \cos(\theta)\mathbf{v} + \sin(\theta)\mathbf{k} \times \mathbf{v} + (1 - \cos(\theta))\langle \mathbf{k}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{k}$$

Podpowiedź, a może rozbić wektor $\mathbf{v}$ na składowe?