

Ćwiczenia nr 2 z “Robotyki 1”

1. Wersory $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ w takiej właśnie kolejności tworzą układ ortonormalny prawoskrętny. Wyliczyć wersor $\mathbf{i}$, gdy dane są wersory $\mathbf{j} = (0, 1, 0)^T$ i $\mathbf{k} = (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})^T$, uprzednio sprawdzając, czy spełniają one odpowiednie własności.
2. Utworzyć własny układ ortonormalny prawoskrętny wg przepisu: wziąć dowolny, niezerowy wektor. Unormować go. Wybrać dowolny wektor prostopadły do niego (korzystać z iloczynu skalarnego). Ten także unormować. Dookreślić ostatni wersor, by układ był prawoskrętny.
3. Mamy dwa układy wersorów układów ortonormalnych zaczepione w tym samym punkcie: $\mathbf{i}_0 = (0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})^T$, $\mathbf{j}_0 = (1, 0, 0)^T$, $\mathbf{k}_0 = (0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})^T$, oraz $\mathbf{i}_1 = (0, -1, 0)^T$, $\mathbf{j}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$, $\mathbf{k}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})^T$. Wyliczyć wyznaczniki macierzy utworzonych z wersorów $\mathbf{i}_s, \mathbf{j}_s, \mathbf{k}_s$, $s = 0, 1$ i wywnioskować lewo- czy prawo-skrętność układów. Skorygować (minimalnie) wersory by obydwa układy były prawoskrętne. Policzyc macierz obrotu $\mathbf{R}_0^1$ transformującą współrzędne z układu 1 do 0. Dany jest punkt w układzie 0 o współrzędnych $(-1, 2, -3)^T$. Jakie są jego współrzędne w układzie 1?

4. Macierzami rozpinającymi (czyli bazowymi dla) $SO(3)$ są elementarne obroty wokół osi zadane zależnościami:

$$rot(x, \alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\alpha & -s_\alpha \\ 0 & s_\alpha & c_\alpha \end{bmatrix}, \quad rot(y, \beta) = \begin{bmatrix} c_\beta & 0 & s_\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\beta & 0 & c_\beta \end{bmatrix}, \quad rot(z, \gamma) = \begin{bmatrix} c_\gamma & -s_\gamma & 0 \\ s_\gamma & c_\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

gdzie $c_w = \cos(w)$, $s_w = \sin(w)$

Jedną z parametryzacji grupy $SO(3)$ jest RPY określone wzorem:

$$RPY(\alpha, \beta, \gamma) = rot(z, \alpha)rot(y, \beta)rot(x, \gamma), \quad (1)$$

5. Pokazać, że złożenie obrotów wokół tej samej osi jest przemienne, a wokół różnych – nie.
6. Wyliczyć macierz $\mathbf{R}$ odpowiadającą kątom Roll-Pitch-Yaw (Kiwanie-Kołysanie-Myszkowanie) $RPY(-\pi/2, \pi/4, \pi/2)$.
7. Wyliczyć symbolicznie macierz $\mathbf{R}$ odpowiadającą kątom RPY (α, β, γ) .
8. Na podstawie ćwiczenia poprzedniego wyznaczyć kąty RPY odpowiadające dowolnej macierzy $SO(3) \ni \mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$. Czy kąty są określone jednoznacznie? Jeśli nie, i rozwiązań jest skończenie wiele, to jakie trójki są równoważne? Dla jakiej postaci macierzy $\mathbf{R}$ rozwiązań jest nieskończenie wiele? Czy dla innej parametryzacji powyższa macierz (tj. $\mathbf{R}$ dla której istnieje ∞ wiele rozwiązań) jest identyczna?
9. (★) Jaka może być największa suma współrzędnych wersora? (czyli wersor $(v_1, v_2, v_3)^T$. Warunek $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$. $v_1 + v_2 + v_3 \rightarrow \max$)
10. (★) Niech będzie dana ogólna macierz obrotów $\mathbf{R}$ jak w zadaniu 7. Ile jest takich macierzy $\mathbf{R}$, że wystarczy podać dokładnie dwie dane (w wybranych przez siebie miejscach i o wybranych przez siebie wartościach), by liczba macierzy obrotów uwzględniająca te dane była skończona?