

Ćwiczenia nr 1 z “Robotyki 1” AiR

Proszę przypomnieć podstawowe wiadomości z analizy (pochodne funkcji skalarnych i wektorowych wielu zmiennych) i algebry liniowej (wektory i macierze oraz operacje na nich, iloczyn skalarny i wektorowy, definicja i interpretacja fizyczna). Materiały pomocnicze są na stronie wykładowcy <http://kcir.pwr.edu.pl/~iwd/> w zakładce Robotyka 1.

Uwaga: wektory zawsze notujemy kolumnowo. Wektory piszemy boldem, a skalary normalnym fontem. Na tej liście wszystkie wektory należą do $\mathbb{R}^3$. Zarówno na tej liście jak i następnych, zadania trudniejsze, oznaczone symbolem ($\star$), przeznaczone są dla osób pragnących poszerzyć wiedzę i nie będą przerabiane na ćwiczeniach.

1. Dla dowolnej pary macierzy (3×3) wykonać ich mnożenie: a) “klasycznie”; b) dzieląc macierze na bloki: pierwsze dwa wiersze (kolejno) (2×2) , (2×1) , wiersz trzeci (kolejno) (1×2) , (1×1) , i wykonując mnożenia blokowo (wstawiając wyniki w odpowiedni blok macierzy wynikowej). Porównać otrzymane wyniki.
2. Iloczyn skalarny wektorów $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ oznaczamy jako $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$. Pokazać, że $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{y} = \text{tr}(\mathbf{x} \mathbf{y}^T)$, gdzie tr to ślad macierzy (suma elementów na diagonalu).
3. Pokazać własności: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$ oraz $\langle k\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = k\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$.
4. Iloczyn wektorowy $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$, wynosi $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1)^T$. Korzystając z iloczynu skalarnego wektorów pokazać, że $\mathbf{x} \perp (\mathbf{x} \times \mathbf{y})$, oraz $\mathbf{y} \perp (\mathbf{x} \times \mathbf{y})$. Czy stąd wynika, że $(k_1 \mathbf{x} + k_2 \mathbf{y}) \perp (\mathbf{x} \times \mathbf{y})$?
5. Pokazać własności iloczynu wektorowego: $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = -\mathbf{y} \times \mathbf{x}$, $k(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = (k\mathbf{x}) \times \mathbf{y}$, gdzie $k \in \mathbb{R}$.
6. Dla wektora $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ definiujemy macierz $\boldsymbol{\Omega}$ oznaczaną także jako $[\boldsymbol{\omega}]$, zgodnie z zależnością $\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$. Dla $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$, pokazać, że $\boldsymbol{\Omega} \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$.
7. Sprawdzić obliczeniami, czy macierz $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ posiada następujące własności:
$$\mathbf{R} \mathbf{R}^T = \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}_3, \quad \det(\mathbf{R}) = 1. \quad (1)$$
8. Jaka jest odwrotność macierzy $\mathbf{R}$ z zadania powyższego?
9. Policzyc $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}}$ dla funkcji: (k_i są stałymi)
 - (a) $f(\mathbf{q} = (q_1, q_2)^T) = k_1^2 \sin(2q_1 - q_2^2) + k_2 \cos q_1$
 - (b) $\mathbf{f}(\mathbf{q} = (q_1, q_2)^T) = \begin{bmatrix} k_1 q_2 \\ k_2(-q_1^2 - q_2) + \sin(2q_1) \cos q_2 \end{bmatrix}$
10. Policzyc $d\mathbf{f}/dt$ dla $\mathbf{f}(\mathbf{q} = (q_1(t), q_2(t))^T) = k_1 \sin(q_2) - k_2 q_1 q_2^2$
11. ($\star$) Pokazać, równoważność ($\Rightarrow, \Leftarrow$) warunków (1) oraz warunków $\|\mathbf{r}_1\| = \|\mathbf{r}_2\| = \|\mathbf{r}_3\| = 1$, $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_3$, gdzie $\mathbf{r}_i$ to kolejne kolumny macierzy $\mathbf{R} = [\mathbf{r}_1 \ \mathbf{r}_2 \ \mathbf{r}_3]$. $\|\cdot\|$ oznacza długość euklidesową wektora
Podpowiedź 1: $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \sin \angle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.
Podpowiedź 2: pokazać, że wektory $\mathbf{r}_1$ i $\mathbf{r}_2$ są prostopadłe do siebie.
12. ($\star$) Czy w zadaniu 1 (dla ogólnej macierzy $n \times n$) podział na bloki może być inny? Jaki?