Podstawy Programowania

Wykład X

Złożoność obliczeniowa

Robert Muszyński
Katedra Cybernetyki i Robotyki, PWr

Zagadnienia: efektywność programów/algorytmów, sposoby zwiększania efektywności algorytmów, zasada 80–20, ocena efektywności algorytmów, ocena złożoności obliczeniowej, rzeczywista a teoretyczna złożoność obliczeniowa, porównanie metod sortowania, efektywność w praktyce, sfera problemów algorytmicznych, problemy nieobliczalne.

Copyright © 2007–2014 Robert Muszyński

Niniejszy dokument zawiera materiały do wykładu na temat podstaw programowania w językach wysokiego poziomu. Jest on udostępniony pod warunkiem wykorzystania wyłącznie do własnych, prywatnych potrzeb i może być kopiowany wyłącznie w całości, razem ze stroną tytułową.

– Skład FoilTEX –

Sprawność programów (algorytmów)

Jakość programów (algorytmów):

- poprawność/niezawodność
- przenośność
- łatwość utrzymania
- efektywność
  - ⋆ szybkość działania } kompromis
  - ⋆ wielkość
    - ∗ objętość kodu
    - ∗ wielkość struktur danych

© R. Muszyński, 14 stycznia 2019

Sposoby zwiększania efektywności programów

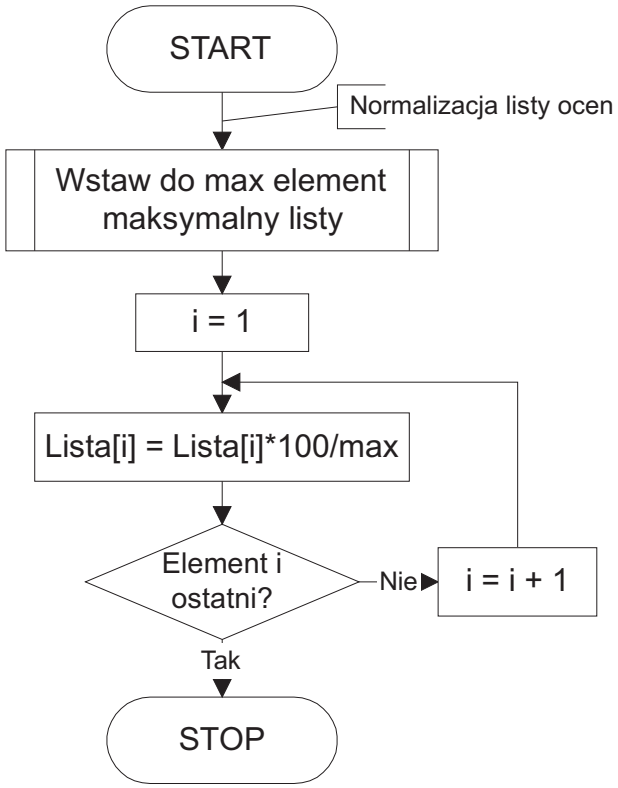
- na etapie planowania programu (np. dobór algorytmu)
- na etapie uruchamiania programu (np. wpisanie procedury w miejsce wywołania)

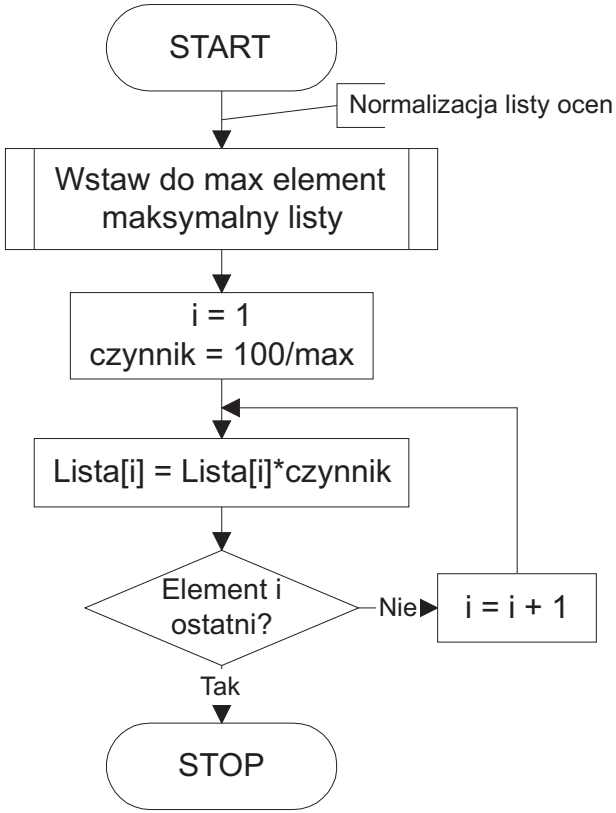
Zasada 80–20

Program spędza 80% czasu w 20% swojego kodu.

© R. Muszyński, 14 stycznia 2019

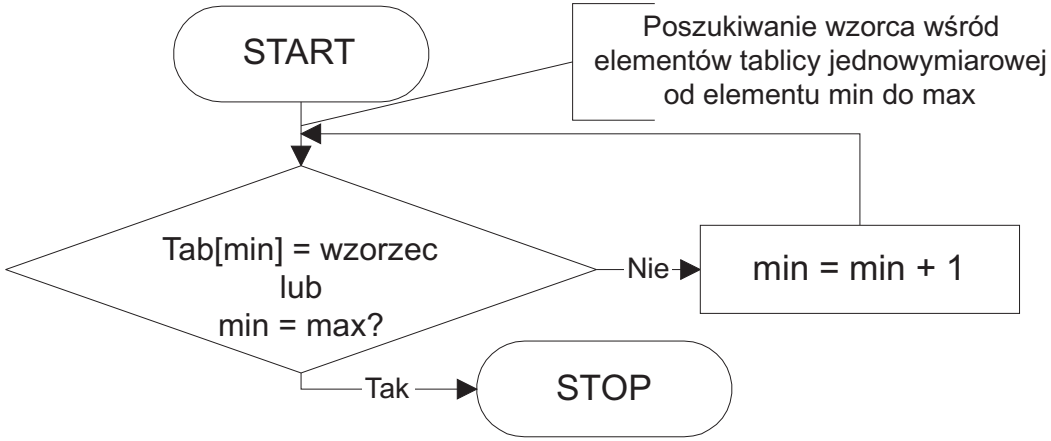
Poprawa efektywności — przykład

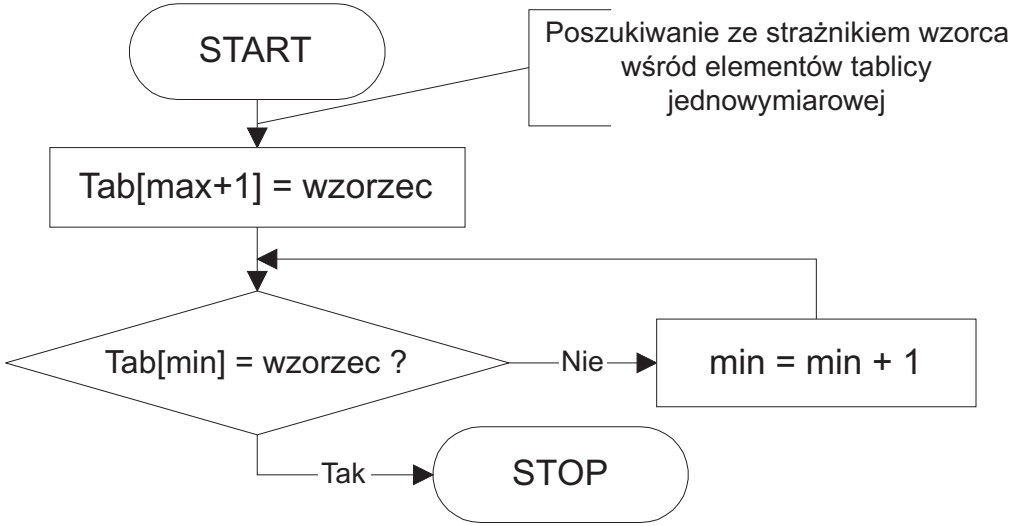




© R. Muszyński, 14 stycznia 2019

Poprawa efektywności — inny przykład





© R. Muszyński, 14 stycznia 2019

Ocena efektywności programów (algorytmów)

- Funkcja wielkości zbioru danych wejściowych
- Wyrażona liczbą elementarnych operacji/jednostek pamięci — złożoność obliczeniowa (czasowa)/pamięciowa
- Przypadki: najgorszy, najlepszy, średni
- Rodzaj komputera
- Język programowania
- Rodzaj kompilatora

} niezależna

- Zbiór danych wejściowych

© R. Muszyński, 14 stycznia 2019

Rodzaj komputera

Przykładowe czasy sortowania

8170 liczb

Typ komputera	Czas
komputer osobisty	51.915s
stacja robocza	11.508s
minikomputer	2.382s
mainframe	0.431s
superkomputer	0.087s

n liczb

n	k. osobisty	s. robocza
125	12.5ms	2.8ms
250	49.3ms	11.0ms
500	195.8ms	43.4ms
1000	780.3ms	172.9ms
2000	3114.9ms	690.5ms

parabole

© R. Muszyński, 14 stycznia 2019

Zbiór danych wejściowych

Działanie algorytmów przeszukiwania dla n elementów

element szukany	n=	liniowo			binarnie		
		7	13	14	7	13	14
1-szy		1	1	1	3	3	3
n-ty		7	13	14	3	4	4
[n/2]+1		4	7	8	1	1	4
[n/2]		3	6	7	3	4	1

Przypadki: najgorszy, najlepszy, średni

© R. Muszyński, 14 stycznia 2019

Zbiór danych wejściowych

Jak poprzednio, inne kryterium układu tabeli

przypadek	liniowo			binarnie		
n=	7	13	n	7	13	n
najgorszy	7	13	n	3	4	$[\log_2 n+1]$
najlepszy	1	1	1	1	1	1
średni	3.5	6.5	n/2	2.8	3.7	$\log_2 n$

Dla $n=10^9$ wartość $[\log_2 n+1]$ wynosi 30.

© R. Muszyński, 14 stycznia 2019

Porównanie metod sortowania

Liczba porównań (Po) i przesunięć (Pr) obiektów w metodach sortowania

algorytm\przypadek		najgorszy	najlepszy	średni
proste wstawianie	Po=	$(n^2-n)/2-1$	$n-1$	$(n^2+n-2)/4$
	Pr=	$(n^2+3n-4)/2$	$2(n-1)$	$(n^2-9n-10)/4$
proste wybieranie	Po=	$(n^2-n)/2$	$(n^2-n)/2$	$(n^2-n)/2$
	Pr=	$n^2/4+3(n-1)$	$3(n-1)$	$n(\ln n+0.57)$
sortowanie bąbelkowe	Po=	$(n^2-n)/2$	$(n^2-n)/2$	$(n^2-n)/2$
	Pr=	$3(n^2-n)/2$	0	$3(n^2-n)/4$

Wady przedstawionego sposobu porównywania algorytmów:

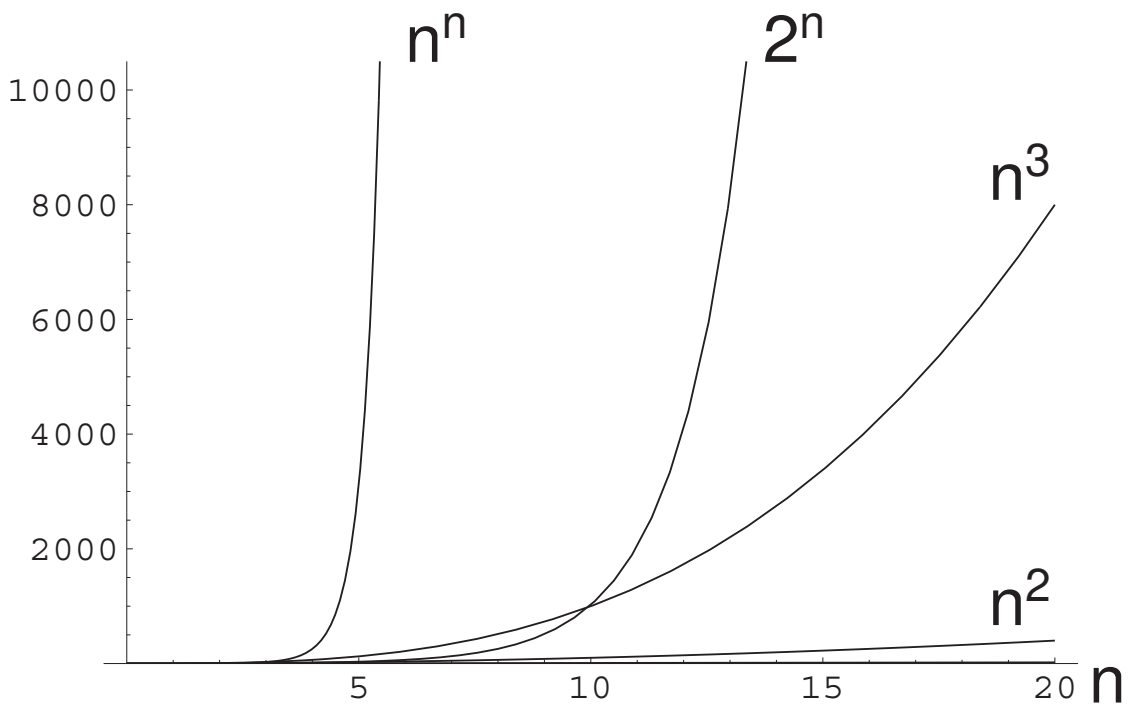
- niedokładne (pominięte np. sterowanie wykonywaniem pętli)
- niemożliwe do przeprowadzenia dla wielu z algorytmów

© R. Muszyński, 14 stycznia 2019

Złożoność obliczeniowa i jej ocena

- proporcjonalna do liczby operacji elementarnych
- istotny składnik najszybciej rosnący ze wzrostem rozmiaru problemu. Stąd klasy złożoności obliczeniowej algorytmów:
  - ⋆ logarytmiczne — $O(\log_2 n)$
  - ⋆ liniowe — $O(n)$
  - ⋆ wielomianowe — $O(n^2)$, $O(n^3)$, $O(n^4)\ldots$
  - ⋆ wykładnicze — $O(2^n)$,
  - ⋆ inne — $O(n\log_2 n)$, $O(n^{1.2})$, $O(n!)$, $O(n^n)$, $O\left(n^{n^n}\right)\ldots$

© R. Muszyński, 14 stycznia 2019



Przykładowe przebiegi funkcji.

© R. Muszyński, 14 stycznia 2019

Tempo wzrostu wybranych funkcji

n	10	50	100	300	1 000
$[\log_2 n]$	3	5	6	8	9
n^2	100	2 500	10 000	90 000	1 000 000
n^3	1 000	125 000	(7 cyfr)	(8 cyfr)	(10 cyfr)
2^n	1024	(16 cyfr)	(31 cyfr)	(91 cyfr)	(302 cyfry)
$n!$	(7 cyfr)	(65 cyfr)	(161 cyfr)	(623 cyfry)	niewyobrażalna
n^n	(11 cyfr)	(85 cyfr)	(201 cyfr)	(744 cyfry)	niewyobrażalna

liczba protonów w znanym wszechświecie ma 126 cyfr

liczba mikrosekund od „wielkiego wybuchu” ma 24 cyfry

Zapotrzebowanie na czas dla wybranych algorytmów

(przy prędkości 1 MIPS)

n	10	20	50	100	300
$O(n^2)$	1/10000 s	1/2500 s	1/400 s	1/100 s	9/100 s
$O(n^5)$	1/10 s	3.2 s	5.2 min	2.8 h	28.1 dnia
$O(2^n)$	1/1000 s	1 s	35.7 lat	4×10^{16} lat	10^{77} lat

„wielki wybuch” był w przybliżeniu 1.5×10^{10} lat temu

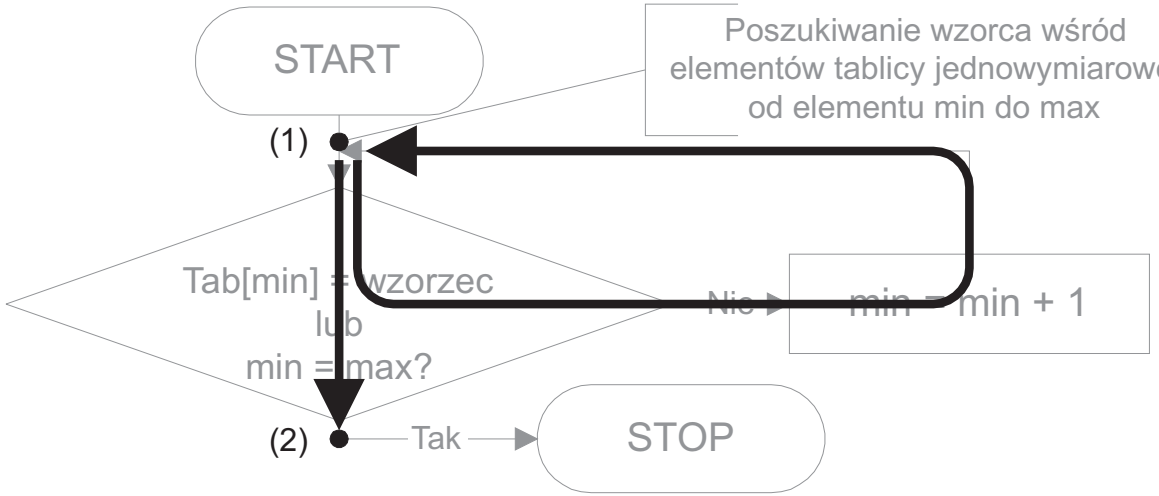
słońce wypali się za około 5×10^{9} lat

© R. Muszyński, 14 stycznia 2019

Szacowanie złożoności obliczeniowej

Do oszacowania złożoności obliczeniowej wystarczy policzyć liczbę porównań występujących w programie.

Dlaczego?

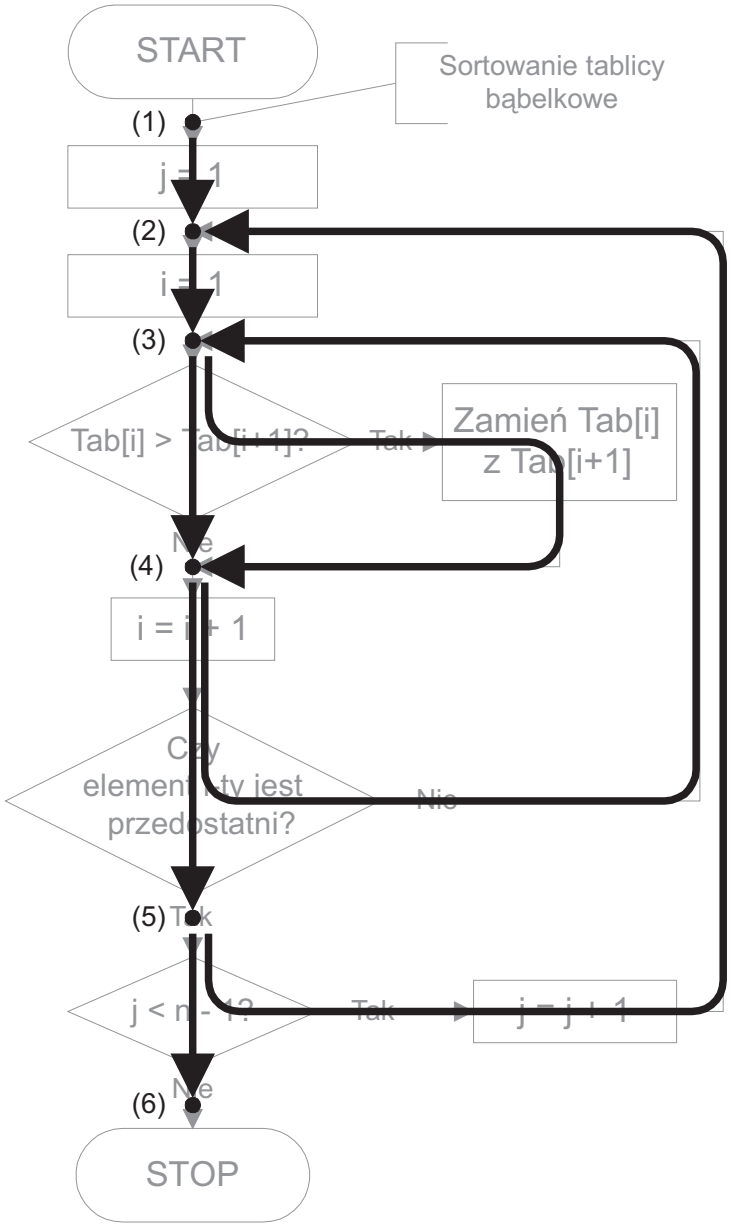


$$\text{Koszt} = n * K_{11} + K_{12}$$

n — liczba przejść pętli równa liczbie porównań

K_{ij} – koszt przejścia z punktu kontrolnego i do j (stały!)

© R. Muszyński, 14 stycznia 2019



$$\text{Koszt} = K_{12} + (n-1)K_{22} + K_{56} =$$

$$= K_{12}+(n-1)(K_{23}+(n-1)(K_{34}+K_{43})+K_{45})+K_{56} =$$

$$= (K_{34} + K_{43})n^2 +$$
$$+ (K_{23}-2K_{34}-2K_{43}+K_{45})n +$$
$$+ K_{12}-K_{23}+K_{34}+K_{43}-K_{45}+K_{56}$$

Złożoność – $O(n^2)$

© R. Muszyński, 14 stycznia 2019

Teoria a praktyka

Rzeczywiste czasy wykonania programów sortowania

Same klucze	Tablica	uporządkowana		losowa		odwrotnie uporządkowana	
	n =	256	512	256	512	256	512
proste wstawianie		12	23	366	1444	704	2836
wstawianie połówkowe		56	125	373	1327	662	2490
proste wybieranie		489	1907	509	1956	695	2675
sortowanie drzewiaste		116	253	110	241	104	226
sortowanie bąbelkowe		540	2165	1026	4054	1492	5931
sortowanie szybkie		31	69	60	146	37	79

- Usprawnienie wstawiania połówkowego nie ma praktycznie żadnego znaczenia
- Sortowanie bąbelkowe jest zdecydowanie najgorszą ze wszystkich metod
- Sortowanie szybkie jest rzeczywiście szybkie

© R. Muszyński, 14 stycznia 2019

Klucze + dane	Tablica	uporządkowana		losowa		odwrotnie uporząd.	
	+ dane	NIE	TAK	NIE	TAK	NIE	TAK
proste wstawianie		12	46	366	1129	704	2150
wstawianie połówkowe		56	76	373	1105	662	2070
proste wybieranie		489	547	509	607	695	1430
sortowanie drzewiaste		116	264	110	246	104	227
sortowanie bąbelkowe		540	610	1026	3212	1492	5599
sortowanie szybkie		31	55	60	137	37	75

- Metoda prostego wyboru znacznie zyskała wśród metod prostych
- Sortowanie bąbelkowe jest dalej zdecydowanie najgorsze (straciło znaczenie)
- Sortowanie szybkie umocniło nawet swoją pozycję

Generalnie wyróżniamy metody sortowania prymitywne (złożoność $O(n^2)$) oraz nowoczesne — „logarytmiczne” (złożoność $O(n \log n)$)

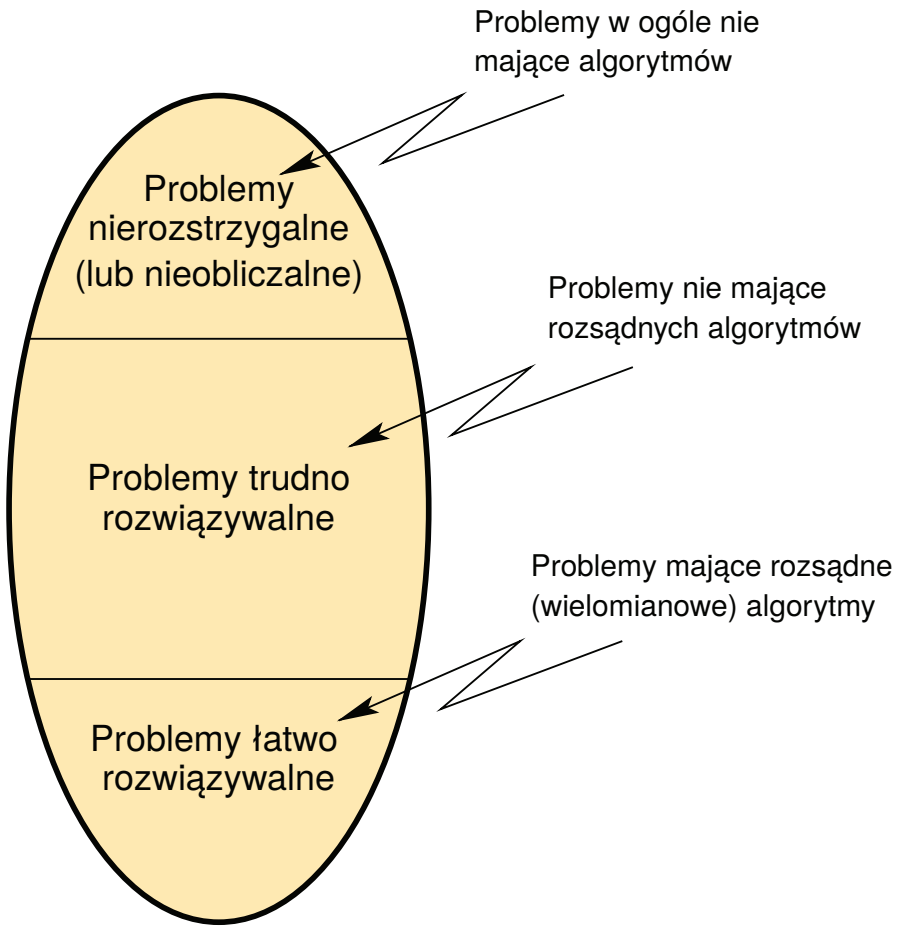
© R. Muszyński, 14 stycznia 2019

Efektywność algorytmów w praktyce

- Dla małych zbiorów danych można pominąć zagadnienia efektywności algorytmów
- Dla bardzo dużych zbiorów danych najważniejsza jest klasa złożoności obliczeniowej algorytmu (wpływ czynników stałych pominiętych w notacji duże-O może okazać się dominujący przy małych i średnich wielkościach zbiorów)
- Często ważniejsze od wyboru algorytmu o dobrej klasie złożoności jest tzw. „lokalna optymalizacja” — usprawnienie fragmentów programu stanowiących tzw. „wąskie gardła” (zasada 80–20, lub nawet 90–10)
- Malejące koszty sprzętu komputerowego i równocześnie rosnące koszty tworzenia oprogramowania prowadzą do zaniedbywania analizy efektywności oprogramowania — wówczas najważniejsze są zasady stylu programowania
- Często algorytmy o mniejszej złożoności obliczeniowej charakteryzują się większą złożonością pamięciową

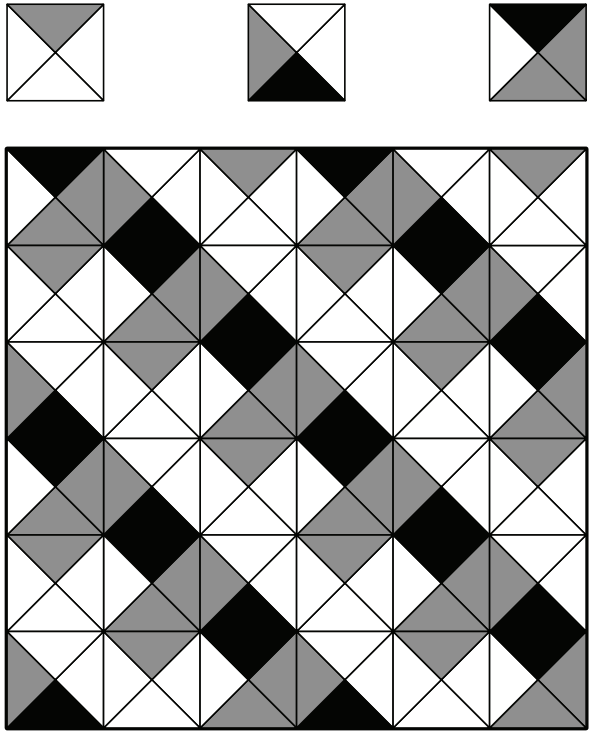
© R. Muszyński, 14 stycznia 2019

Sfera problemów algorytmicznych

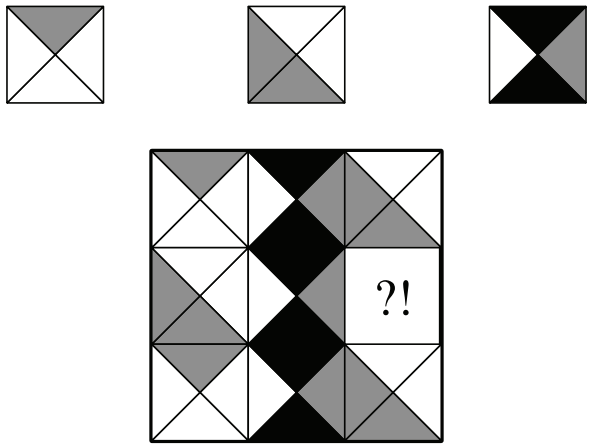


© R. Muszyński, 14 stycznia 2019

Przykład problemu nieobliczalnego — problem domina



Da się!!!



Nie da się:(

© R. Muszyński, 14 stycznia 2019

Problem domina — twierdzenie

Twierdzenie 1

Dla każdego algorytmu (zapisanego w dającym się efektywnie wykonać języku programowania), który byłby przeznaczony do rozstrzygnięcia problemu domina, istnieje nieskończenie wiele dopuszczalnych zestawów danych wejściowych, dla których algorytm ten będzie działał w nieskończoność lub poda błędną odpowiedź.

Wniosek 1

Problem domina jest problemem **nierozstrzygalnym***.*

© R. Muszyński, 14 stycznia 2019

Problem stopu

Mając jako dane wejściowe tekst poprawnego programu zapisanego w pewnym języku, zbudować algorytm, który by sprawdzał, czy program zatrzyma się dla pewnych dopuszczalnych dla niego danych.

$X \in \mathbb{N}$

1. dopóki $X \neq 1$ wykonuj
   $X \leftarrow X - 2$
2. zatrzymaj obliczenia

- algorytm zatrzymuje się dla X nieparzystych
- nie zatrzymuje się dla X parzystych

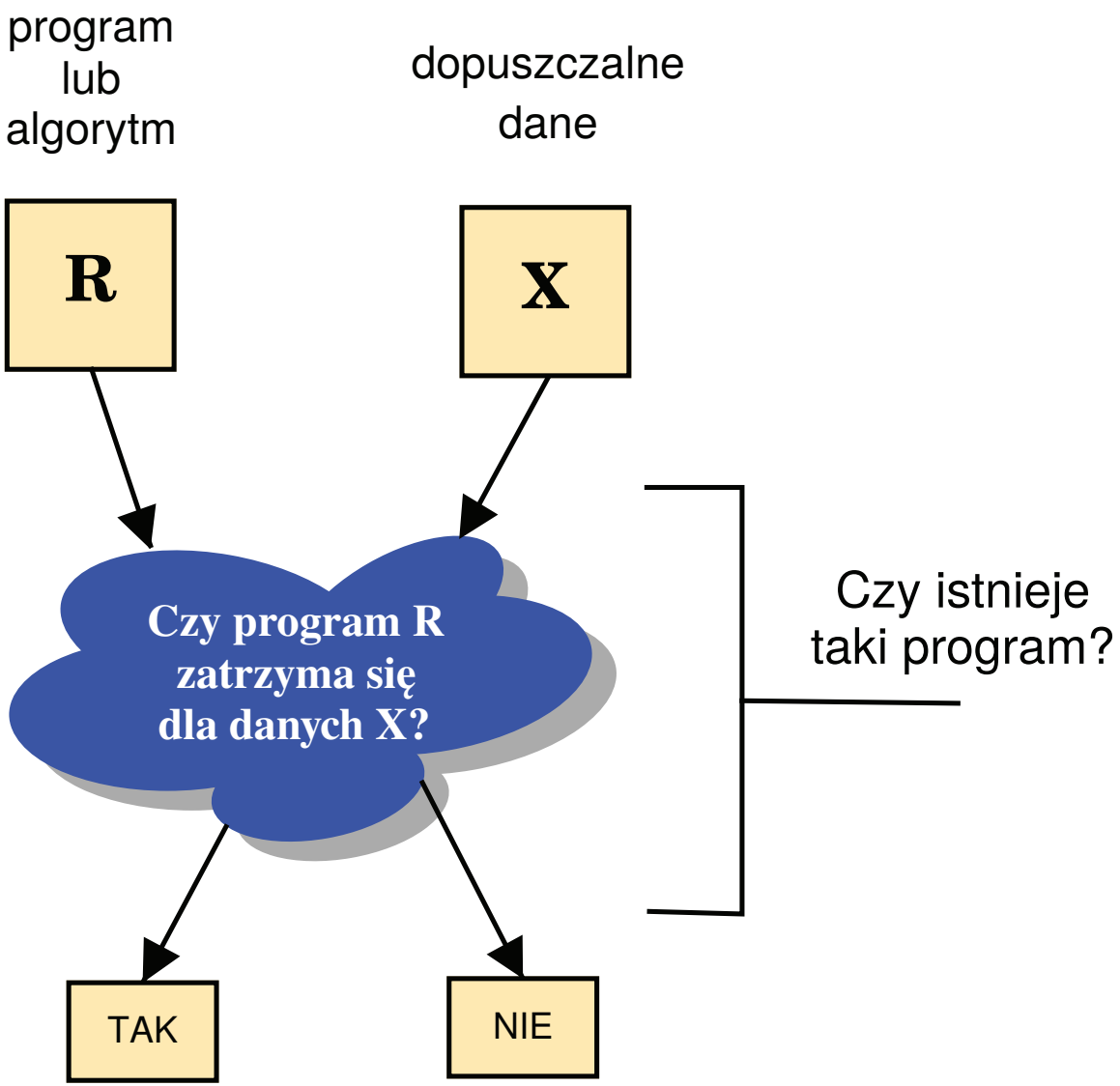
$X \in \mathbb{N}$

1. dopóki $X \neq 1$ wykonuj:
   1.1. dla X parzystego $X \leftarrow X/2$
   1.2. dla X nieparzystego $X \leftarrow 3 * X + 1$
2. zatrzymaj obliczenia

- dla wszystkich sprawdzonych liczb algorytm zatrzymał się
- nie udowodniono, że zatrzymuje się dla dowolnej liczby naturalnej

© R. Muszyński, 14 stycznia 2019

Problem stopu — rozwiązanie



© R. Muszyński, 14 stycznia 2019

Więcej w…

- Michael Sipser, „*Wprowadzenie do teorii obliczeń*”, WNT 2016
- Christos H. Papadimitriou, „*Złożoność obliczeniowa*”, Helion 2012
- Paul Beynon-Davies, „*Inżynieria systemów informacyjnych*”, WNT 2004

© R. Muszyński, 14 stycznia 2019

Podsumowanie

- Zagadnienia podstawowe

1. Wymień najważniejsze cechy dobrego oprogramowania.
2. Jakie podstawowe czynniki należy uwzględnić przy ocenie efektywności algorytmów.
3. Uporządkuj według rosnącej złożoności obliczeniowej O(n), O$(\log n)$, O(n^2), O(2^n), O$(n!)$, O(n^n), O$(n \log n)$, O(n^{n^n})
4. W jaki sposób można sprawdzić złożoność obliczeniową?
5. Dlaczego do oszacowania złożoności obliczeniowej algorytmu wystarczy policzyć liczbę wyliczanych w trakcie jego wykonania porównań?
6. Jaki jest sens poszukiwania nowych algorytmów, jeśli są już dostępne rozwiązania danego problemu?
7. Czym się różnią algorytmy o rozsądnym i nierozsądnym czasie działania?
8. Co to znaczy, że problem jest nierozstrzygalny?
9. Dlaczego problem domina jest przykładem problemu nieobliczalnego?
10. Jaka jest definicja problemu stopu?

- Zagadnienia rozszerzające

1. Podaj przykłady, kiedy algorytm (np. sortowania) o mniejszej złożoności obliczeniowej będzie działał wolniej od algorytmu o większej złożoności.

© R. Muszyński, 14 stycznia 2019

2. Zapoznaj się z klasyfikacją problemów algorytmicznych. Czym są problemy P, NP i NP-zupełne?
3. Czym są, do czego służą i czym się różnią notacje “O” (duże O), “Ω” (duże omega) i “Θ” (teta)? A notacje “o” (małe o) i “ω” (małe omega)?
4. Jakie są inne niż podane na wykładzie problemy nierozstrzygalne?
5. Jakie są sposoby rozwiązywania problemów nieobliczanych?
6. Czy przegląd zupełny może posłużyć do określenia rozstrzygalności instancji (przykładu) danego problemu?
7. Czy dla każdego problemu jesteśmy w stanie zaproponować algorytm o wykładniczej klasie złożoności obliczeniowej?

• Zadania

1. Oszacuj złożoność obliczeniową programu na przecięcia zera.
2. Oszacuj złożoność obliczeniową i pamięciową funkcji napisanego przez Ciebie programu na przetwarzanie obrazów.
3. Przejrzyj napisany przez Ciebie program na przetwarzanie obrazów i popraw jego efektywność tam, gdzie jest to możliwe.
4. Wyznacz złożoność obliczeniową w najlepszym i najgorszym przypadku algorytmu sortowania szybkiego.
5. Znajdź algorytmy na wyliczanie liczb pierwszych i dowiedz się, jaka jest ich złożoność obliczeniowa.

© R. Muszyński, 14 stycznia 2019