

Punkt

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ such } c(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad c(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ c_3(t) \end{pmatrix}$$

Ciało nrtymne

$$A = \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SE(3) \text{ such } A(t): \mathbb{R} \rightarrow SE(3) \quad A(t) = \begin{bmatrix} R(t) & T(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$SE(3) = \left\{ \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid R \in SO(3), T \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$SO(3) = \left\{ R \mid R R^T = R^T R = I, \det R = 1 \right\}$$

$R_1, R_2 \in SO(3)$ to $R_1 \cdot R_2 \in SO(3)$ - zamknięte w $\mathbb{R}^9$

$A_1, A_2 \in SE(3)$ to $A_1 \cdot A_2 \in SE(3)$ - zamknięte w $\mathbb{R}^{12}$

do tego element odwrotny (R^{-1}, A^{-1})
element neutralny $E(I_3, I_4)$

$$R \in SO(3) \text{ gdy } \det R = 1$$
$$\|r_i\|^2 = r_i^T r_i = 1$$
$$[r_1, r_2, r_3]$$

$$\langle r_i, r_j \rangle = r_i^T r_j = 0 \quad i \neq j$$

Obroty elementarne

$$R(x, \alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad R(y, \beta) = \begin{bmatrix} c_\beta & 0 & s_\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\beta & 0 & c_\beta \end{bmatrix}, \quad R(z, \gamma) =$$

Reprezentacja macierzy obrotu

$f: SO(3) \rightarrow \mathbb{R}^3$ - unikat. wpisanie w (na) $SO(3)$

$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow SO(3)$ - parametryzacja $SO(3)$

Kąty Eulera

$$E: \mathbb{R}^3 \rightarrow SO(3)$$

$$E(\varphi, \theta, \psi) = R(2, \varphi) R(1, \theta) R(2, \psi) \in SO(3)$$

Zadanie

Dana macierz R

Oblicz dla niej kąty Eulera

$$R \rightarrow E(\varphi, \theta, \psi)$$

Rozwiązanie

$$R = E(\varphi, \theta, \psi) \Rightarrow \varphi, \theta, \psi$$

Niejednoznaczności

$$\theta = 0 \vee \pi$$

Wówczas

$$E(\varphi, \theta, \psi) = R(2, \varphi) R(2, \psi) = R(2, \varphi + \psi) = R$$

z tego wynika jedynie $\varphi + \psi$ a nie φ i ψ

1)

Inne współrzędne - podejrzany "formalnie"
Wektory i wartości własne

$$Rv = \lambda v \quad \leftarrow \text{definicja}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 wektor własny wartości własne ($\in \mathbb{R}$)

Interpretacja:

Co to $\lambda v \rightarrow$ wektor współliniowy z v

Wniosek: Macierz R przekształca
wektor v we "współliniowy"
(nie zmienia jego kierunku)

Oś obrotu

Jak to wygląda w przypadku macierzy obrotu

$$Rv = \lambda v \quad (1) \quad \text{std}$$

$$v^T R^T = \lambda v^T \quad (2)$$

$$(2) \cdot (1) \quad \underbrace{v^T R^T R v}_{I} = \lambda^2 v^T v = v^T v \quad \text{std}$$

$$\lambda^2 \|v\|^2 = \|v\|^2 \quad \forall v \text{ więc}$$

$$\lambda^2 = 1 \Rightarrow |\lambda| = 1$$

Równ. charakterystyczne

$$\det(\lambda I_3 - R) = 0 = \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0$$

②

Pierwiastki: $\pm 1, e^{-i\varphi}, e^{i\varphi}$

Wiemy
 $R \in SO(3)$, $\det R = 1 = \text{iloczyn wartości własnych} =$
 $= \pm 1 \cdot e^{-i\varphi} \cdot e^{i\varphi} = \pm 1 \Rightarrow -1 \text{ odrzucamy}$

Mamy więc: $\lambda = 1 \vee \lambda = e^{-i\varphi} \vee \lambda = e^{i\varphi}$

Co to znaczy że $\lambda = 1$?

$$R \sigma = 1 \sigma$$

σ - wektor, który po obrocie się nie zmienia

$\Uparrow$
 znaczy oś obrotu

Jak ją znaleźć?

$$R \sigma = \sigma \quad | \cdot R^T \text{ z lewej}$$

$$R \sigma = \sigma$$

$$R^T \sigma = \sigma$$

$$R^T R \sigma = \sigma = R^T \sigma \quad | \text{odejmujemy stronami}$$

$$(R - R^T) \sigma = 0$$

$\uparrow$ macierz symetryczna - założymy że reprezentuje ją wektor r

$$\sigma \parallel r \quad \Leftrightarrow [r] \sigma = 0 = r \times \sigma$$

Chcemy by $\|\sigma\| = 1$ & jednostkowy

$$\sigma = \frac{r}{\|r\|}$$

③ Co z systemu obrotu?

Wiemy $\text{tr } R = \sum \text{wartości własnych}$

$$\text{tr } R = 1 + \underbrace{e^{-i\varphi} + e^{i\varphi}}_{2\cos\varphi} = 1 + 2\cos\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{\text{tr } R - 1}{2} \quad \varphi \in [0, \pi)$$

$$\begin{cases} \sigma = \frac{r}{\|r\|} & [r] = (R - R^T) \\ \varphi = \arccos \frac{\text{tr } R - 1}{2} \end{cases}$$

representacja osi / kąt $(\in \mathbb{R}^4)$

Przykład: Wiemy

$$R = R(X, \alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} R - R^T &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\sin\alpha \\ 0 & 2\sin\alpha & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -r_3 & r_2 \\ r_3 & 0 & -r_1 \\ -r_2 & r_1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r = \begin{pmatrix} 2\sin\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \sigma = \frac{r}{\|r\|} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{tr } R = 1 + 2\cos\alpha \equiv 1 + 2\cos\varphi \quad \alpha = \varphi \quad \varphi = \alpha$$

2

Dalej

$$\text{tr}(\dot{T} r^T \dot{R}^T) = \text{tr}(\underbrace{r^T \dot{R}^T \dot{T}}_{\substack{\uparrow \\ \text{znovu liabe}}}) = r^T \dot{R}^T \dot{T} = \\ = \dot{T}^T \dot{R} r$$

W sumie

$$dK = \frac{1}{2} dm \text{tr}(\dot{R} r r^T \dot{R}^T) + \\ + dm \dot{T}^T \dot{R} r + \frac{1}{2} dm \|\dot{T}\|^2$$

całkujemy po całym ciele B
r & zmienna do całkowania

$$K = \int_B dK = \frac{1}{2} \int_B \text{tr}(\dot{R} r r^T \dot{R}^T) dm + \\ + \int_B \dot{T}^T \dot{R} r dm + \frac{1}{2} \int_B \|\dot{T}\|^2 dm = \\ = \frac{1}{2} \text{tr}(\dot{R} \underbrace{\int_B r r^T dm}_{[1]} \dot{R}^T) + \\ + \dot{T}^T \dot{R} \underbrace{\int_B r dm}_{[2]} + \frac{1}{2} \|\dot{T}\|^2 \underbrace{\int_B 1 dm}_{= m_B}$$

[1] $J_B = \int_B r r^T dm$ & macierz pseudoinercji ciała B

[2] $r_B = \frac{1}{m_B} \int_B r dm$ & położenie środka masy ciała B
(w os. wt B)

Stąd

$$K = \frac{1}{2} \text{tr}(\dot{R} J_B \dot{R}^T) + m_B \dot{T}^T \dot{R} r_B + \frac{1}{2} m_B \|\dot{T}\|^2$$

$$\begin{bmatrix} \int_B x \, dm \\ \int_B y \, dm \\ \int_B z \, dm \\ \int_B x \, dm & \int_B y \, dm & \int_B z \, dm & \int_B 1 \, dm \end{bmatrix}$$

$$(6.4) \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$$

$$\text{Robotyka:)} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix}$$

③ Mamy $\dot{R} = \Omega_S R$ v $\dot{R} = R \Omega_B$
 wybieramy

Kolejno

$$\text{tr}(\dot{R} J_B \ddot{R}^T) = \text{tr}(\overbrace{R \Omega_B}^A J_B \overbrace{\Omega_B^T R^T}^B) =$$

bc $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ $\rightarrow$ $= \text{tr}(\underbrace{R^T R}_{I_A} \underbrace{\Omega_B J_B \Omega_B^T}_{- \Omega_B}) =$
 $= -\text{tr}(\overbrace{\Omega_B}^A \overbrace{J_B \Omega_B}^B) = -\text{tr}(J_B \Omega_B^2)$

Drugi składnik

$$m_B \dot{T}^T \dot{R} r_B = m_B \dot{T}^T R \Omega_B r_B = m_B \dot{T}^T R \omega_B \times r_B$$

W sumie

$$K = -\frac{1}{2} \text{tr}(J_B \Omega_B^2) + m_B \dot{T}^T R (\omega_B \times r_B) + \frac{1}{2} m_B \|\dot{T}\|^2$$

Spostreżenie

gdy ułt B umieścić w środku masy

to $r_B = 0$ - znika drugi składnik

Energie
potencjalne

$$V = -m_B (\bar{g}, s_B) = -m_B (\bar{g}, R r_B + T)$$

4) Przy wprowadzeniu macierzy energii I_B

$$-\text{tr}(I_B \Omega_B^2) = \omega_B^T I_B \omega_B$$

$$L = \frac{1}{2} \omega_B^T I_B \omega_B + m_B \dot{T}^T R(\omega_B \times r_B) + \frac{1}{2} m_B \|\dot{T}\|^2 + m_B (g, R r_B + T)$$

Warto przyjąć $r_B = 0$ (bez straty na ogólności rozważań)

Eventualnie pominięcie się po części układów pętnienia i cięta ($T = \dot{T} = 0$)

Mamy lagrangian zależny od

$$L(R, T, \dot{R}, \dot{T})$$

bez wyteczny!

Karty Eulera 212

$$R = E(\varphi, \theta, \psi)$$

i diagonalna macierz bezwzględności $I_B = \text{diag}(I_{B1}, I_{B2}, I_{B3})$

i przyspieszenie ziemskie „w dół” $g = -g e_3$

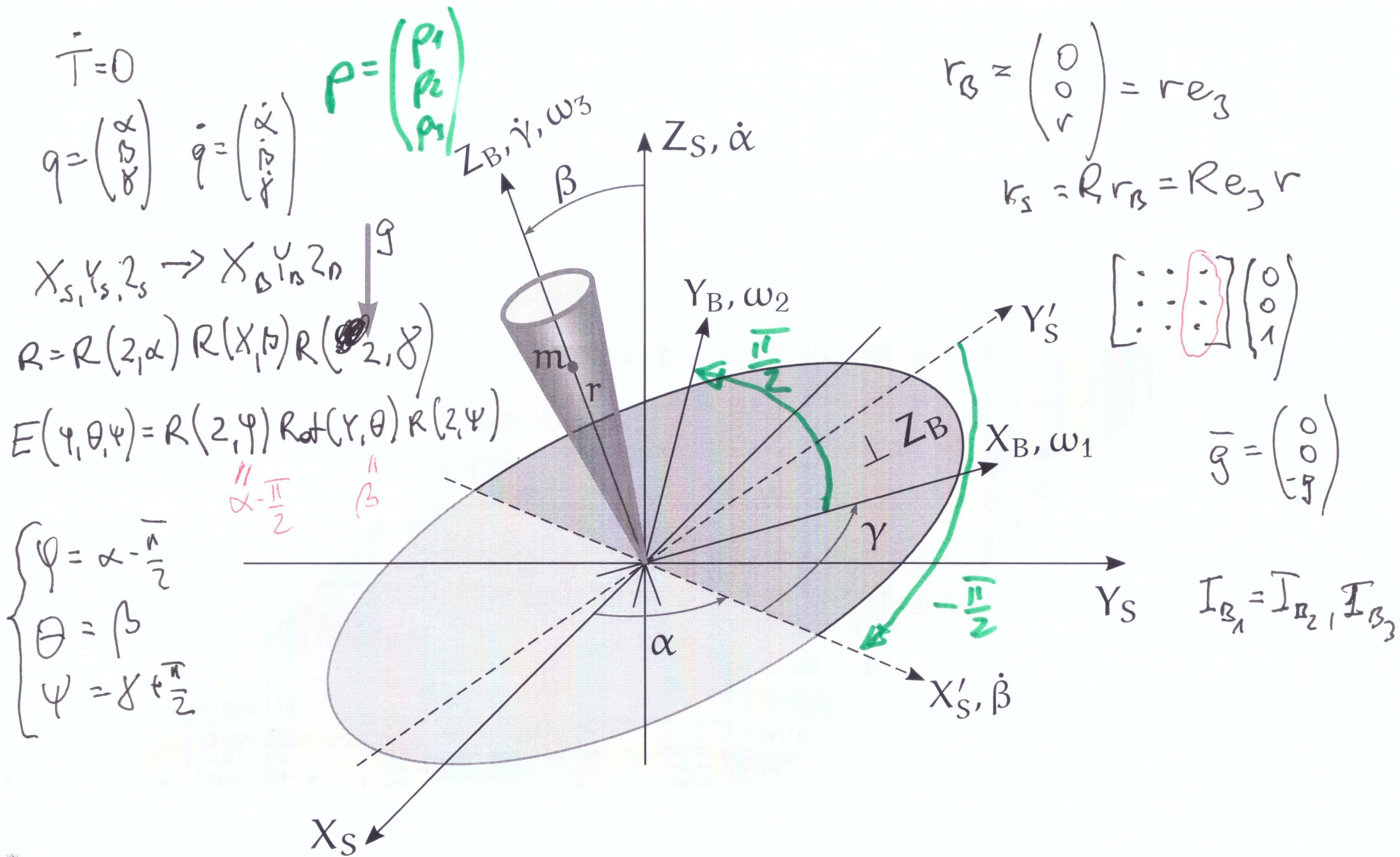
Wtedy
$$L(\varphi, \theta, \psi, T_1, T_2, T_3, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}, \dot{T}_1, \dot{T}_2, \dot{T}_3) =$$

$$= L(e, T, \dot{e}, \dot{T})$$

przy
$$e = \begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix}$$

KONIEC :)

A rozwiązanie jest! Standardowo :)



Rysunek 7.1: Bąk Lagrange'a

Bok Lagrange'a - analiza ruchu

3. składowe hamiltonianu we postaci

$$\underbrace{\frac{1}{2} \frac{p_3^2}{I_3}}_{\text{const}} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{p_3^2 \cos^2 \beta}{I_1 \sin^2 \beta}}_{\text{+ składowe 1. + składowe 4.}}$$

||

$$\frac{1}{2} \frac{(p_1 - p_3 \cos \beta)^2}{I_1 \sin^2 \beta}$$

z drugiego rkh $\dot{\beta} = \frac{p_2}{I_1} \Rightarrow p_2 = I_1 \dot{\beta}$

składowe 2. składowe hamiltonianu

$$\frac{1}{2} \frac{p_2^2}{I_1} = \frac{1}{2} I_1 \dot{\beta}^2$$

Obliczamy

$$E = H - \frac{1}{2} \frac{p_3^2}{I_3} = \underbrace{\text{const}}_{\text{r.r } \beta} = \frac{1}{2} \frac{(p_1 - p_3 \cos \beta)^2}{I_1 \sin^2 \beta} + \frac{1}{2} I_1 \dot{\beta}^2 + m g r \cos \beta$$

Gdy to rozwiemy z 1. i 3. rkh
wyliczymy α i δ

Podstawmy $u = \cos \beta$

$$\dot{u} = -\sin \beta \dot{\beta} \quad \text{i stąd}$$

$$\dot{u}^2 = \sin^2 \beta \dot{\beta}^2 = (1 - u^2) \dot{\beta}^2$$

$$\dot{\beta}^2$$

2 wyrażenie na E

$$\frac{1}{2} I_1 \dot{\beta}^2 = E - \frac{1}{2} \frac{(p_1 - p_3 u)^2}{I_1 (1 - u^2)} - mgr u$$

Przyrównując $\frac{\dot{u}^2}{(1 - u^2)} = \frac{2E}{I_1} - \frac{(p_1 - p_3 u)^2}{I_1^2 (1 - u^2)} - \frac{2mgr u}{I_1}$

Stąd
$$\dot{u}^2 = (1 - u^2) \left(\frac{2E - 2mgr u}{I_1} \right) - \frac{(p_1 - p_3 u)^2}{I_1^2}$$



prawa strona wielomian 3. stopnia
ze względu na u

$$\dot{u}^2 = (1 - u^2) (a - bu) - (c - du)^2 = f(u)$$

a, b, c, d - jakies stałe współczynniki

$$\dot{u}^2 = bu^3 - au^2 - bu + a - c^2 + 2cd u - d^2 u^2 =$$

$$\dot{u}^2 = bu^3 - (a + d^2)u^2 + (2cd - b)u + a - c^2$$

$u = \cos \beta$ więc by to miało sens $u \in [-1, 1]$

i w tym przedziale gdzie $f(u) \geq 0$ ($6a = \dot{u}^2$)

U nas 1. i 3. $r_k H$

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = \frac{c - du}{1 - u^2} \\ \dot{\beta} = \frac{(d - e)u^2 - cu + e}{1 - u^2} \end{cases} \quad 2 \quad e = \frac{p_3}{I_3}$$

Co dzieje się z α

$$\dot{\alpha} = \frac{L(u)}{1 - u^2} \quad \text{zawrnie} \geq 0$$

Kierunek zmian kąta α zależy od $L(u)$

Możliwe przebiegi $L(u)$ - rys 7.3

$L(u)$

- 1° albo cały czas dodatnie w przedziale (u_1, u_2)
- 2° albo cały czas ujemne
- 3° albo czasem dodatnie czasem ujemne

Ad 1°

oś będzie obracać się w prawo

Ad 2°

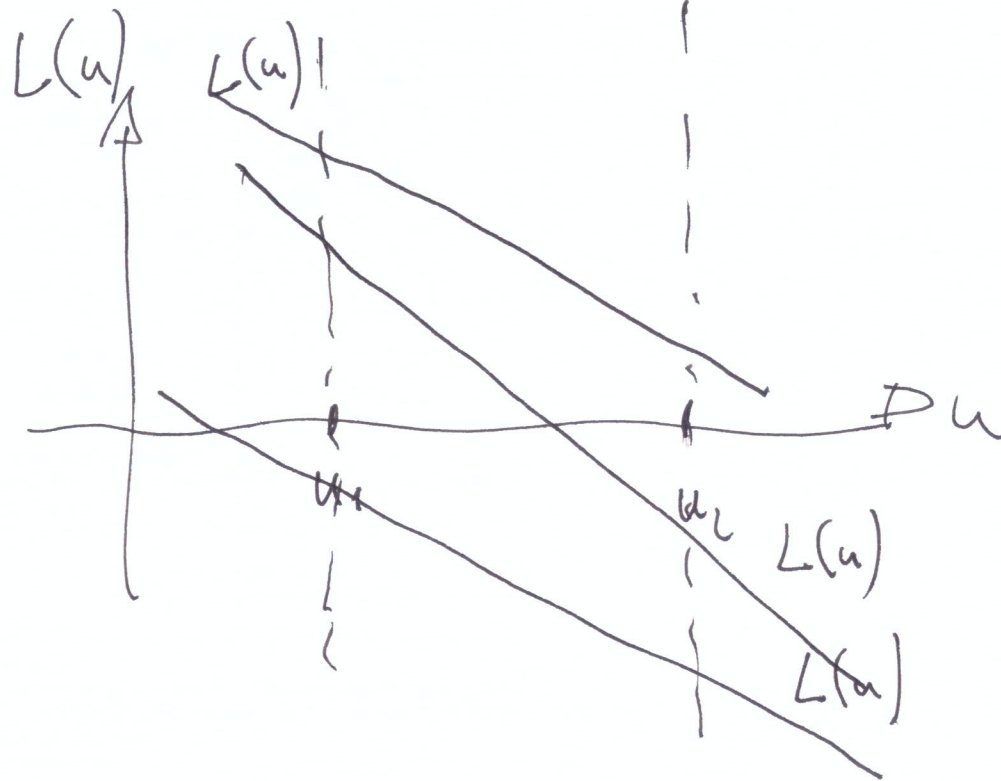
oś będzie obracać się w lewo

Ad 3°

oś będzie zmieniać kierunek obrotu

Rysunki 7.4 - 7.6

$$S = A S_D$$



Ce z betem γ ?

$$\gamma^0 = \frac{(d-e)u^2 - cu + e}{1-u^2} = \frac{\bar{L}(u)}{1-u^2} + \text{zawne} \geq 0$$

Kierunek winowania bęka zależy od $\bar{L}(u)$

Rysunek 7.7

1° Bęka winuje w lewo

2° Bęka winuje w prawo

ale też

3° Bęka zmieni kierunek winowania
(chwilami przestaje winować!)

Mamy pełny opis jakościowy ruchu bęka
(bez wyliczeń ilościowych)

Nie wiemy np. kiedy bęka zacznie obracać
się w lewo, ale wiemy że będzie to robił.