

mapa $\times$ przestrzeni = mapo-przestrzeni
 (Galileusza)

$$c: R \rightarrow R^3$$

$$c(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ c_3(t) \end{pmatrix}$$

elementy R - liaby (skalary)

elementy R^3 - trójki liab (wektory)

Dla $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$
 definiujemy

- dodawanie

- mnożenie przez skalar

$$u + v = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{pmatrix}$$

$$\alpha u = \begin{pmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha u_2 \\ \alpha u_3 \end{pmatrix}$$

$$\alpha \in R$$

Przestrzeń wektorowa nad R

- mnożenie skalarne

dot. wektora v na wektor $u \rightarrow (u, v) = u^T v = \sum_{i=1}^3 u_i v_i \in R$

- mnożenie wektorowe

poła równoległoboku

rozpiętego we $u, v \rightarrow u \times v =$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \in R^3 \quad i, j, k \in R^3$$

wektory

- mnożenie "mierzone"

objętość równoległoboku

rozpiętego

we u, v, w

$$(u \times v, w) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \in R$$

~ normy

$$\|u\| = (u, u)^{1/2} \in R_0^+$$

norma wektora

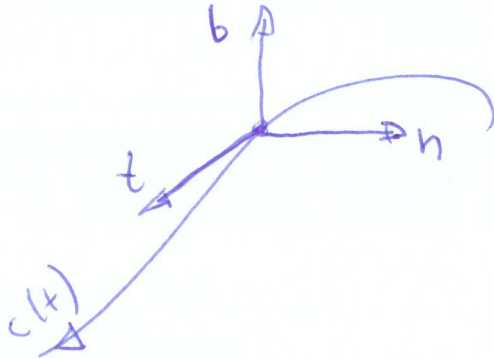
2 P 1

trajektorie

- brak teleportacji $c(t)$ - położenie (ciągłe) $\in C^0$
- brak zderzeń $\dot{c}(t)$ - prędkość (ciągła) $\in C^1$
- skończony zryw $\ddot{c}(t)$ - przyspieszenie (ciągłe) $\in C^2$
- $\ddot{c}(t)$ - zryw

wygodnie
 $c(t) \in C^\infty$

Trojścian Freneta



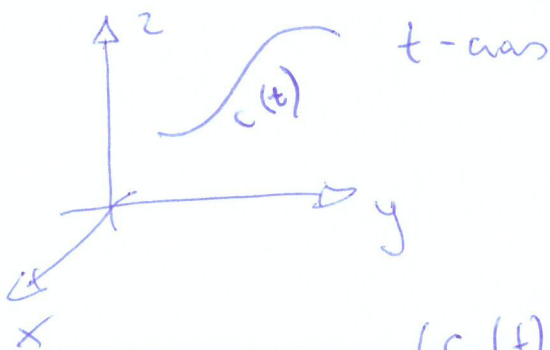
$$\bar{t} = \frac{\dot{c}}{\|\dot{c}\|}$$

$\dot{c} \neq 0$ - musi być ruch

$n \perp$ płaszczyznę normalnej

$$b = t \times n$$

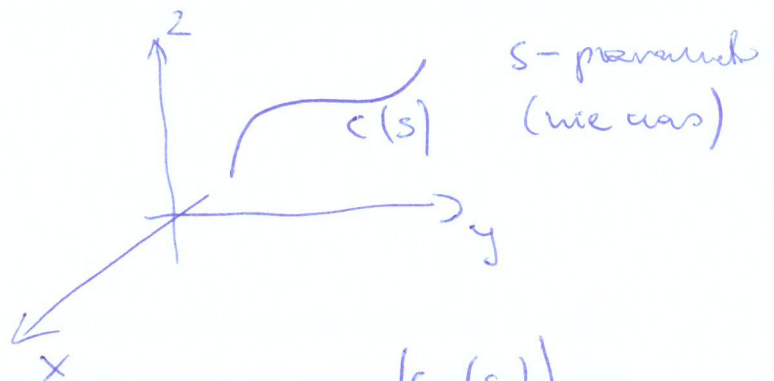
Trajektorie



$$c(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ c_3(t) \end{pmatrix}$$

więcej informacji

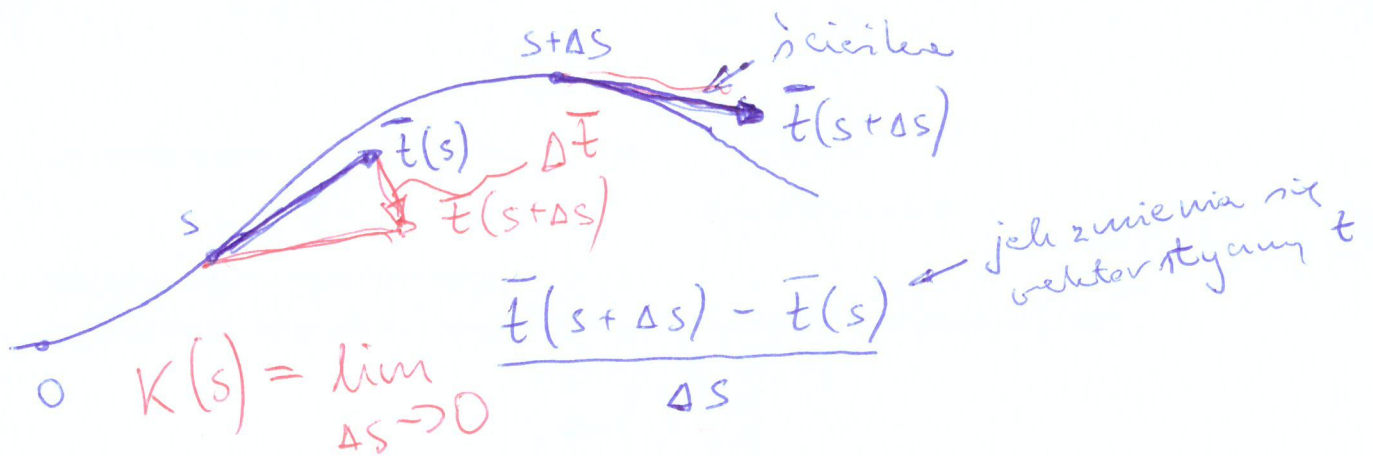
Ścieżka (tor ruchu)



$$c(s) = \begin{pmatrix} c_1(s) \\ c_2(s) \\ c_3(s) \end{pmatrix} + s(t)$$

mniej informacji

1W2



krzywizna $K(s) = \left\| \frac{d\bar{r}}{ds} \right\|$

$\bar{K}(s) = K(s) \bar{n}(s)$

$R(s) = \frac{1}{K(s)}$ ← promień krzywizny

$\bar{r} = \dot{c} \cdot \|\dot{c}\|^{-1}$ Jeśli policzyć $\frac{d\bar{r}}{ds}$? $s(t) \quad t(s)$

Znamy $\bar{r} = \frac{\dot{c}}{\|\dot{c}\|} \rightarrow \frac{d\bar{r}}{dt} \quad \bar{r}(s(t))$

Potrzebujemy $\frac{d\bar{r}}{ds} = \frac{d\bar{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}$ Speed to? $\left| \frac{d\bar{r}}{dt} \right|$

Wiemy że długość łuku $s(t) = \int_0^t \|\dot{c}(\tau)\| d\tau$

Stąd $\frac{ds}{dt} = \|\dot{c}(t)\|$ Planuj!

Po rachunkach

$$K(s) = \frac{\sqrt{\|\dot{c}\|^2 \|\ddot{c}\|^2 - (\dot{c} \cdot \ddot{c})^2}}{\|\dot{c}\|^3}$$

$K(s) = 0$ gdy brach przyspieszenia $\begin{pmatrix} t(s) \text{ i } t(s+\Delta s) \\ \text{nie pokrywają} \end{pmatrix}$

2.02

Analogiczne skrećenie (torsja)

$$\bar{T}(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\bar{b}(s+\Delta s) - \bar{b}(s)}{\Delta s}$$

$$T(s) = \|\bar{T}(s)\|$$

$T(s) = 0$ gdy trajektorie płaska

Krzywa i skrećenie jednoznacznie charakteryzuje tor ruchu

Krzywa - jak „nieprawy” jest

Skrećenie - jak „niepłaski” jest

$$[\bar{t}(s), \bar{n}(s), \bar{b}(s)] = \overset{\substack{\text{macierz } 3 \times 3 \\ \downarrow}}{R}(s)$$

$$R^{-1} = R^T$$

ortogonalna o długości 1

$$RR^{-1} = I$$

$$\left. \begin{array}{l} \|\bar{t}\| = \|\bar{n}\| = \|\bar{b}\| = 1 \\ (\bar{t}, \bar{n}) = (\bar{t}, \bar{b}) = (\bar{n}, \bar{b}) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow RR^T = R^T R = I_3$$

$R(s)$ - macierz ortogonalna której kolumny są do siebie $\perp$

Dyktanie

Jak ewoluuje $R(s)$

$$\frac{dR(s)}{ds} = ?$$

3 w 2

↓ wektory w $\mathbb{R}^3$
wzr

$$\frac{dR(s)}{ds} \stackrel{\text{wzr}}{=} R(s) \cdot A(s)$$

↑ pewna macierz 3×3
(nieznana)

$$A(s) = ?$$

$$\begin{cases} \frac{d\bar{t}}{ds} = \underline{\alpha}_1 \bar{t} + \underline{\alpha}_2 \bar{n} + \underline{\alpha}_3 \bar{b} \\ \frac{d\bar{n}}{ds} = \beta_1 \bar{t} + \underline{\beta}_2 \bar{n} + \beta_3 \bar{b} \\ \frac{d\bar{b}}{ds} = \gamma_1 \bar{t} + \gamma_2 \bar{n} + \underline{\gamma}_3 \bar{b} \end{cases}$$

Wiemy $\frac{d\bar{t}}{ds} = K \bar{n}$ stąd $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$ $\alpha_2 = K$

Wiemy $\|\bar{t}\| = 1$ czyli $(\bar{t}, \bar{t}) = 1$

Różniczkujemy po s

$$\left(\frac{d\bar{t}}{ds}, \bar{t} \right) + \left(\bar{t}, \frac{d\bar{t}}{ds} \right) = 0$$

Iloczyn skalarny przemienimy więc $\left(\frac{d\bar{t}}{ds}, \bar{t} \right) = 0$

Analog

$$\left(\frac{d\bar{n}}{ds}, \bar{n} \right) = \left(\frac{d\bar{b}}{ds}, \bar{b} \right) = 0$$

Policzmy

$$0 = \left(\bar{n}, \frac{d\bar{n}}{ds} \right) = \beta_1 \underbrace{(\bar{n}, \bar{t})}_0 + \beta_2 \underbrace{(\bar{n}, \bar{n})}_1 + \beta_3 \underbrace{(\bar{n}, \bar{b})}_0$$

Stąd $\beta_2 = 0$

Analogicznie $\left(\bar{b}, \frac{d\bar{b}}{ds} \right) = 0$ $\gamma_3 = 0$

hw 2

Wierzymy $(\bar{t}, \bar{n}) = 0$

Różniczkujemy po s

$$\left(\frac{d\bar{t}}{ds}, \bar{n} \right) + \left(\bar{t}, \frac{d\bar{n}}{ds} \right) = 0$$

A policzymy że $\frac{d\bar{t}}{ds} = K \bar{n}$ więc

$$K(\bar{n}, \bar{n}) + \beta_1(\bar{t}, \bar{t}) + \beta_3(\bar{t}, \bar{b}) = 0$$

"1 "1 "0

Stąd $\beta_1 = -K$

Analogicznie z $(\bar{t}, \bar{b}) = 0$ $\delta_1 = 0$

Mamy więc $\frac{d\bar{b}}{ds} = \delta_2 \bar{n}$ a z def $\left\| \frac{d\bar{b}}{ds} \right\| = T$

Wtedy $\left\| \frac{d\bar{b}}{ds} \right\| = |\delta_2| = T$ $\delta_2 = \pm T$ wybieramy $-T$

Zostaje β_3 wierzymy $(\bar{n}, \bar{b}) = 0$

$$\left(\frac{d\bar{n}}{ds}, \bar{b} \right) + \left(\bar{n}, \frac{d\bar{b}}{ds} \right) = 0 \quad \beta_3(\bar{b}, \bar{b}) + (-T)(\bar{n}, \bar{n}) = 0$$

"1 "1

Wtedy $\beta_3 = T$

W sumie

rownanie
Freneta -
Serreta

$$\begin{cases} \frac{d\bar{t}}{ds} = K \bar{n} \\ \frac{d\bar{n}}{ds} = -K \bar{t} + T \bar{b} \\ \frac{d\bar{b}}{ds} = -T \bar{n} \end{cases}$$

Macierz A

↑
składowe
symetryczne
 $A^T = -A$

ω2 24/2r



$$3n = N$$

$$W \rightarrow RW$$

$$RR^T = R^T R = I^3$$

$$R \in SO(3)$$

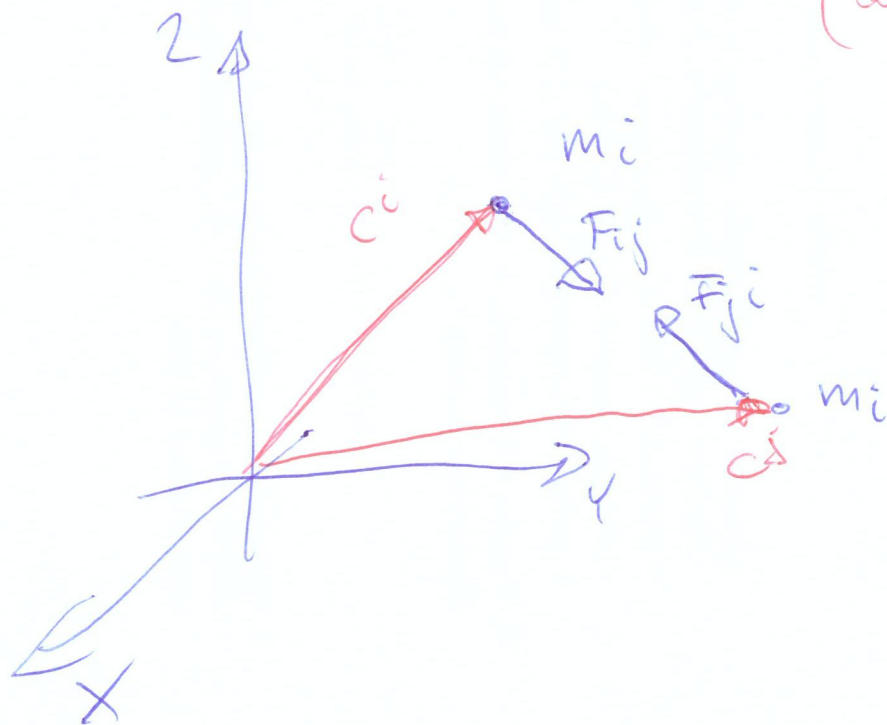
↑

$$\det R = 1$$

$$\det A \cdot B = \det A \cdot \det B$$

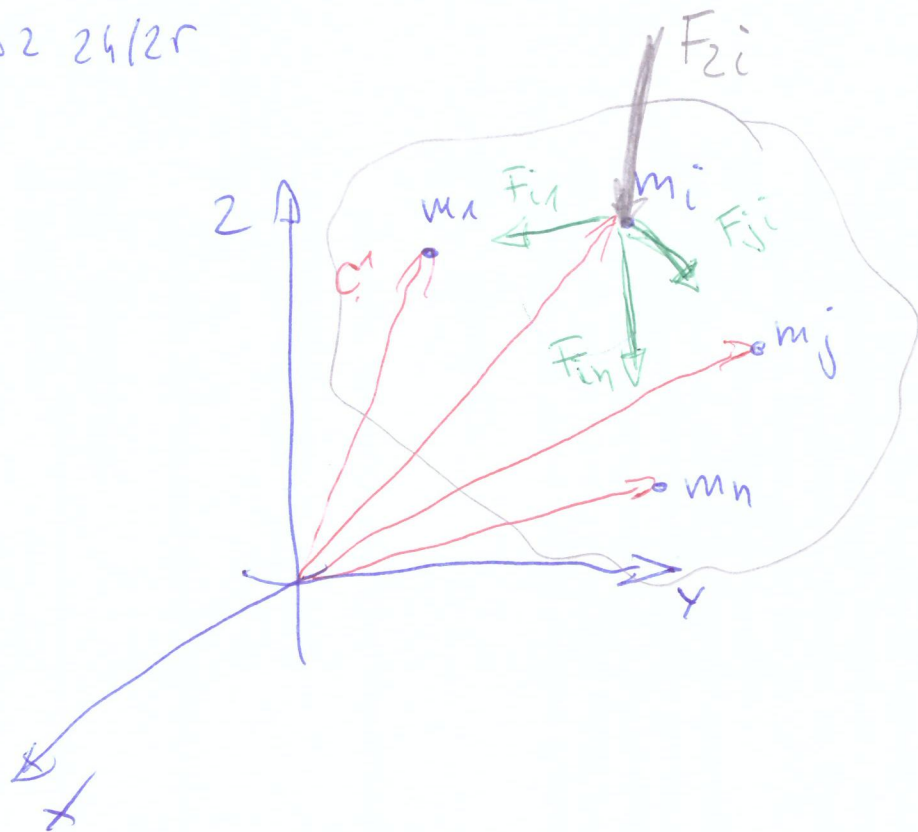
$$\det R^T R = \det R^T \cdot \det R = 1$$

$$(\det R)^2 = 1 \quad \det R = 1 \text{ or } -1$$



$$(\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji})$$

6-2 24/2r



$$m_i \ddot{\vec{c}}^i = \vec{F}_i = \underbrace{\vec{F}_{wi}}_{\text{circled}} + \vec{F}_{zi}$$

$$\vec{F}_{wi} = \sum_{j \neq i} \underbrace{\vec{F}_{ji}}_{\text{circled}}$$

$$\boxed{\vec{p}_i = m_i \dot{\vec{c}}^i}$$



$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$