

1. Pokazać, że układ dynamiczny

$$\dot{x} = -\lambda y + xy, \quad \dot{y} = \lambda x + \frac{1}{2}(x^2 - y^2), \quad x, y \in \mathbb{R}, \lambda > 0,$$

jest hamiltonowski. Wyznaczyć hamiltonian i sporządzić portret fazowy układu.

2. Wykazać, że układ dynamiczny

$$\dot{x} = x^2 - y^3, \quad \dot{y} = 2x(x^2 - y), \quad x, y \in \mathbb{R},$$

ma całkę pierwszą.

3. Znaleźć całkę pierwszą układu

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = x - 2x^3$$

i narysować jego portret fazowy.

4. Znaleźć całkę pierwszą i narysować portret fazowy układu równań Lotki-Volterra

$$\dot{x} = ax - bxy, \quad \dot{y} = -cy + bxy, \quad x, y \in \mathbb{R}_+, a, b, c > 0,$$

5. Zbadać stabilność punktu
- $(0,0)$
- układu

$$\dot{x} = -y + x(x^2 + y^2) \sin \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \dot{y} = x + y(x^2 + y^2) \sin \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Wskazówka: Przejść do współrzędnych biegunowych

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

6. Wyprowadzić formułę na nawias Liaga pól wektorowych

$$[X, Y](x) = \frac{d}{dt} \bigg|_{t=0} \text{Ad}_x^t Y(x) = DY(x)X(x) - DX(x)Y(x).$$