

1. Sprawdź stabilność następujących układów:

a). $\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & e^{\frac{1}{2}t} \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, b). $\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & e^{3t} \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$,

c). $\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, d). $\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2\sin t \\ 0 & -(t+1) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

2. Pokaż, że punkt równowagi $(0,0)$ układu

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + (x_1^2 + x_2^2)\sin t, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + (x_1^2 + x_2^2)\cos t$$

jest eksponencyjnie stabilny i określ obszar stabilności.

Wskazówka: Wykonaj test $V(x) = x_1^2 + x_2^2$.

3. Zbadaj stabilność punktu $(0,0)$ układu

$$\dot{x}_1 = h(t)x_2 - g(t)x_1^3, \quad \dot{x}_2 = -h(t)x_1 - g(t)x_2^3, \quad g(t), h(t)$$

ciągłe i ograniczone od góry, $g(t) \geq k > 0$.

Wskazówka: Wykonaj test $V(x) = x_1^2 + x_2^2$.

4. Niech $V(x)$ oznacza gładką funkcję potencjału.

Pokaż, że układ gradientowy

$$\dot{x} = - \frac{\partial V(x)}{\partial x} = -DV(x)$$

nie ma orbit zamkniętych.

5. Niech $H(x,y)$, $x,y \in \mathbb{R}^n$ oznacza gładki hamiltonian.

Pokaż, że układ hamiltonowski

$$\dot{x} = \frac{\partial H(x,y)}{\partial y}, \quad \dot{y} = - \frac{\partial H(x,y)}{\partial x}$$

nie ma asymptotycznie stabilnego punktu równowagi.