

1. Korzystając z twierdzenia o odwróceniu zwrócić wyprocedzić warunki wystarczający podanego niżej algorytmu rozwiązywania układu równań liniowych $\dot{x} = Ax$. Algorytm: $x_{k+1} = Ax_k$, x_0 - p. startowy.

2. Pokazać, że macierz fundamentalna $\Phi(t,s)$ układu liniowego $\dot{x} = A(t)x$ spełnia zależność

$$\frac{\partial \Phi^T(s,t)}{\partial t} = -A^T(t)\Phi^T(s,t).$$

3. Sprawdzić, że dla stałej macierzy $A(t) = A$ mamy Peano-Bokana drugie $e^{tA} = \Phi(t,0)$.

4. Sprawdzić, że macierz $M(t) = \int_0^t \Phi(t,s)B(s)B^T(s)\Phi^T(t,s)ds$ spełnia równanie Lapunowa

$$\dot{M} = B(t)B^T(t) + A(t)M(t) + M(t)A^T(t).$$

5. Udowodnić lemat Gronwalla-Bellmana.

Wskazać i zauważyć, że

$$\frac{\phi(t)}{a \int_0^t \phi(s)\phi(s)ds + b} \leq 1.$$

6. Na podstawie twierdzenia Woznińskiego określić asymptotyczną stabilność układów liniowych:

a). $\dot{x} = -tx$, $\dot{y} = -y$

b). $\dot{x} = -x + \frac{2y}{1+t^2}$, $\dot{y} = -y$

c). $\dot{x} = -2x + 2y \sin t$, $\dot{y} = -2y$

d). $\dot{x} = -t^2x + y \cos t$, $\dot{y} = -t^2y - x \cos t$.