

# Cyfrowe przetwarzanie obrazów i sygnałów

## Wykład 7

### AiR III

**Joanna Ratajczak**

KCiR (W4/K7)

Copyright © 2015 Joanna Ratajczak<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Niniejszy dokument zawiera materiały do wykładu z przedmiotu Cyfrowe Przetwarzanie Obrazów i Sygnałów. Jest on udostępniony pod warunkiem wykorzystania wyłącznie do własnych, prywatnych potrzeb i może być kopiowany wyłącznie w całości, razem ze stroną tytułową.

# Wykrywanie cech w obrazach cyfrowych

Poprzez **cechę** rozumiemy specyficzne konfiguracje pikseli układające się w pewne struktury

- krawędzie,
- linie,
- narożniki,
- skupiska,
- tekstury,
- szkielety.

# Wykrywanie krawędzi w obrazach cyfrowych

- Detekcja krawędzi najczęściej sprowadza się do poszukiwania w obrazie lokalnych nieciągłości funkcji jasności lub koloru.
- Chcemy wykryć nagłą zmianę intensywności.
- Problem z szumami – zmiana intensywności nie może być izolowana.
- Zmiana intensywności w jednym kierunku, kierunek do niego prostopadły lokalnie nie powinien wykazywać zmiany intensywności.
- Celem detekcji jest ekstrakcja krawędzi i usunięcie pozostałych fragmentów obrazu.
- Jeden z etapów automatycznej analizy obrazu.

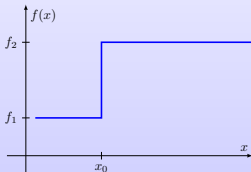
# Wykrywanie krawędzi w obrazach cyfrowych

- Aproksymacja gradientu funkcji obrazu (jasności). Zwykle wykorzystujemy filtrację.
  - Dobry filtr to taki, który daje wysokie odpowiedzi dla pikseli należących do szukanej struktury i niskie odpowiedzi dla pikseli nie należących do szukanej struktury.
- Przykładanie szablonów (template matching).
- Dopasowywanie lokalnych modeli.
- Rozkład na kształty elementarne.

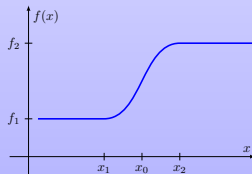
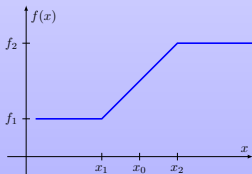
# Krawędź

**Krawędź** jest nagłą zmianą intensywności.

Krawędź idealna



Krawędź rzeczywista



# Krawędź

krawędź pionowa idealna

10	10	200	200	200
10	10	200	200	200
10	10	200	200	200
10	10	200	200	200
10	10	200	200	200

krawędź pionowa rzeczywista

10	50	100	150	200
10	50	100	150	200
10	50	100	150	200
10	50	100	150	200
10	50	100	150	200

# Krawędź

krawędź pozioma idealna

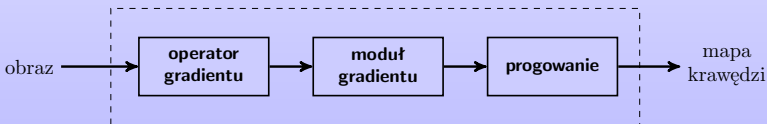
10	10	10	10	10
10	10	10	10	10
200	200	200	200	200
200	200	200	200	200
200	200	200	200	200

krawędź pozioma rzeczywista

10	10	10	10	10
50	50	50	50	50
100	100	100	100	100
150	150	150	150	150
200	200	200	200	200

# Operatory gradientowe

- Najprostsze metody wykrywania krawędzi na obrazie.
- Pierwsza pochodna obrazu – wykorzystywana do detekcji krawędzi oraz jej kierunku.
- Krawędź uznana jest za istniejącą, jeśli wartość gradientu intensywności w pewnych punktach przekracza ustalony próg.



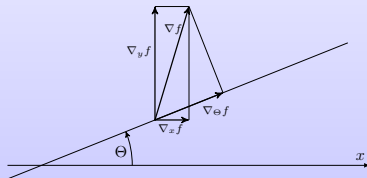
Wada:

- Uwypuklenie zakłóceń impulsowych



## Operatory gradientowe

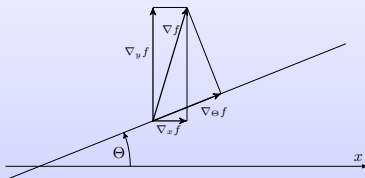
Szybkość zmian funkcji obrazu w dowolnym kierunku  $\Theta$  jest dana przez pochodną kierunkową



$$\nabla_x f = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \nabla_y f = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\nabla_{\Theta} f = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \Theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \Theta$$

## Operatory gradientowe

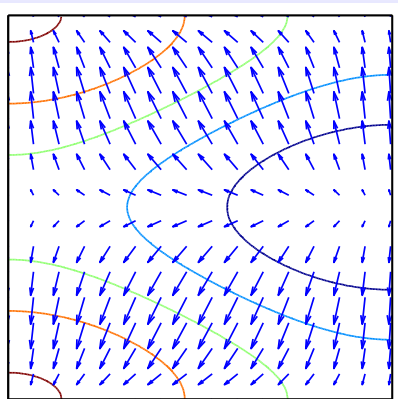
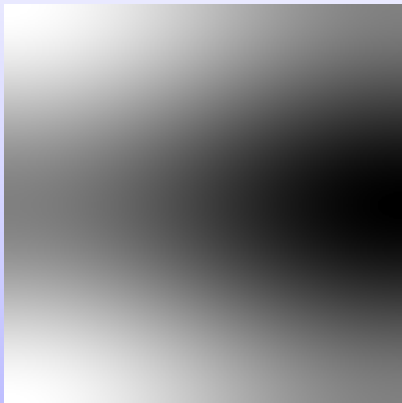


Wektor gradientu wskazuje kierunek największej zmiany jasności obrazu.

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla_x f \\ \nabla_y f \end{bmatrix}$$

$$\nabla_{\Theta} f = (\nabla f, \mathbf{1}_{\Theta}) = (\nabla f)^T \mathbf{1}_{\Theta} \quad \Theta_{max} = \arctg \frac{\nabla_y f}{\nabla_x f}$$

# Operatory gradientowe



## Moduł gradientu

Moduł gradientu (norma euklidesowa)

$$|\nabla f| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

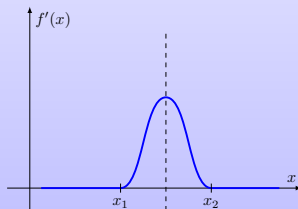
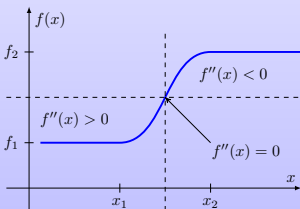
Inne normy nie wymagające pierwiastkowania

- taksówkowa (Manhattan):  $|\nabla_x f| + |\nabla_y f|$ ,
- maksimum:  $\max\{|\nabla_x f|, |\nabla_y f|\}$

nie dają wyniku niezależnego od orientacji gradientu (są wrażliwe na obrót układu współrzędnych). Największe odchylenia powstają przy obrocie o  $\frac{\pi}{4}$ .

## Operatory Roberta

- Wyznacza krawędź jako maksimum pierwszej pochodnej (gradientu).



## Operatory Robertsa

- Dyskretna realizacja gradientu

$$\nabla_x f(x, y) = f(x, y) - f(x - 1, y)$$

$$\nabla_y f(x, y) = f(x, y) - f(x, y - 1)$$

$$\sqrt{(\nabla_x f(x, y))^2 + (\nabla_y f(x, y))^2}$$

- Liniowe filtry lokalne (operatory Robertsa)

0	0	0
0	1	-1
0	0	0

0	0	0
0	1	0
0	-1	0

## Operatory Roberta

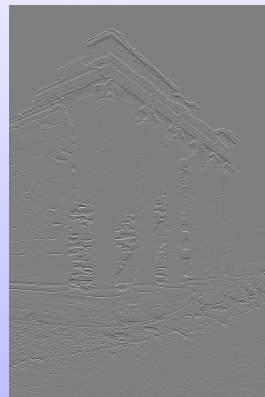
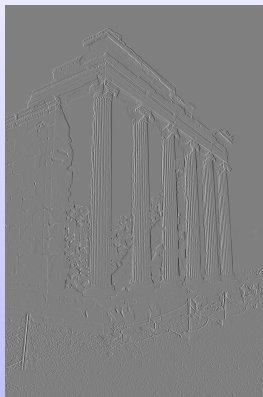
$$\nabla_{xy}f(x, y) = f(x, y) - f(x - 1, y - 1)$$

$$\nabla_{\perp xy}f(x, y) = f(x, y - 1) - f(x - 1, y)$$

0	0	0
0	1	0
0	0	-1

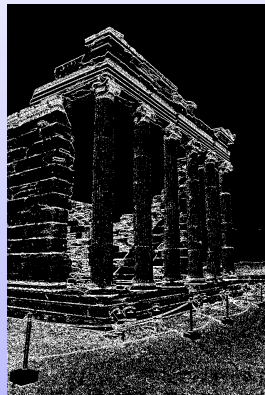
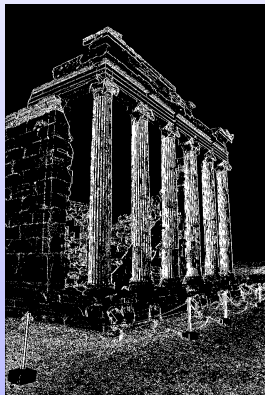
0	0	0
0	0	-1
0	1	0

## Operatory Roberta





# Operatory Roberta



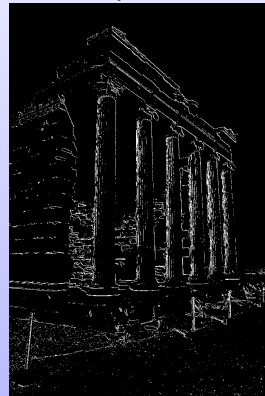
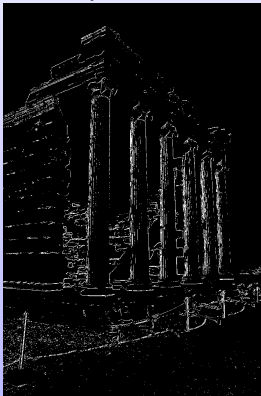
## Operatory Roberta



# Operatory Roberta

$\nabla_{xy}$

$\nabla_{\perp xy}$



## Operatory Robertsa

- Prosty w realizacji.
- Wyraźnie kierunkowy charakter.
- Wrażliwy na szum – skutek lokalności, bierze pod uwagę tylko pojedyncze piksele.

## Operatory Prewitta

- Najmniejsze operatory tego typu są reprezentowane maskami  $3 \times 3$ .
- Gradyenty wyznaczone są poprzez różnice centralne

$$\nabla_x f(x, y) = \frac{1}{2} (f(x + 1, y) - f(x - 1, y))$$

$$\nabla_y f(x, y) = \frac{1}{2} (f(x, y + 1) - f(x, y - 1))$$

- Zmniejszenie wrażliwości na szum uzyskuje się poprzez uśrednianie (wygładzanie) obrazu w kierunku ortogonalnym do kierunku w którym wyznaczana jest pochodna.

$$\nabla_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

## Operatory Prewitta

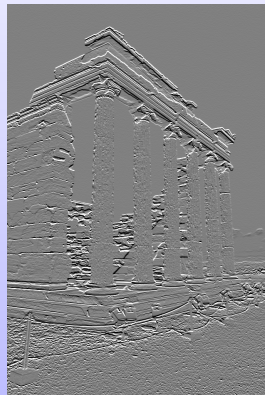
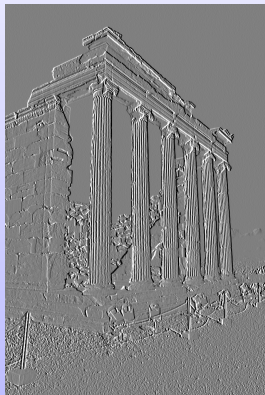
- Operatory te różniczkują w określonym kierunku i jednocześnie lokalnie odsumiają w kierunku ortogonalnym.

$$\nabla_x = \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

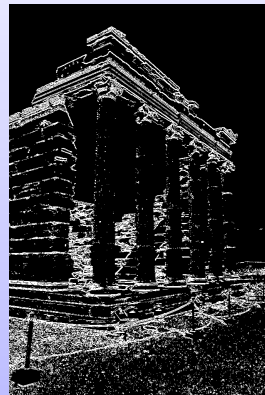
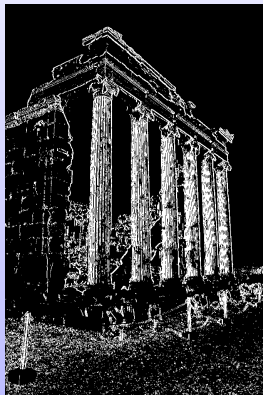
$$\nabla_y = \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

- Suma wag operatora jest równa 0. Filtr w obszarach o stałej funkcji obrazu generuje wyjście równe 0.
- Operatory Prewitta są mniej wrażliwe na zakłócenia niż operatory Roberts'a.

# Operatory Prewitta

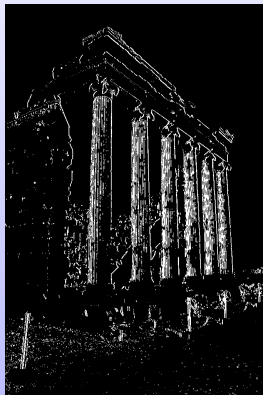


## Operatory Prewitta





# Operatory Prewitta



## Operatory Sobela

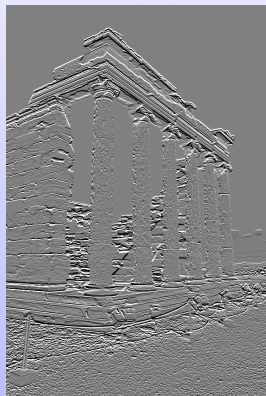
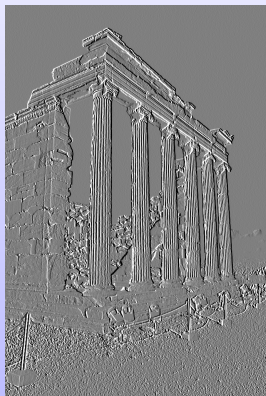
- Wyznacza krawędź jako maksimum pierwszej pochodnej.
- Aby zmniejszyć wpływ szumu wykorzystuje jednowymiarowy filtr uśredniający w postaci  $(1 \ 2 \ 1)$

$$\nabla_x = \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline -2 & 0 & 2 \\ \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

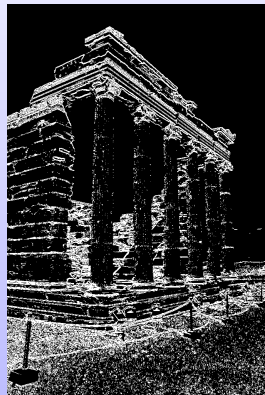
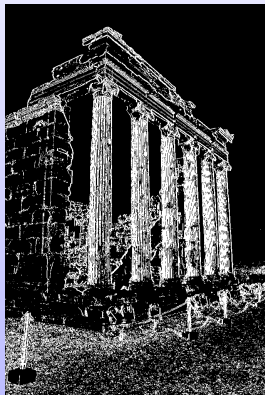
$$\nabla_y = \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & -2 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

- Współczynniki  $\pm 2$  wzmacniają najbliższe otoczenie piksela centralnego.
- Filtry Sobela posiadają lepsze własności odszumiania w stosunku do filtrów Prewitta.

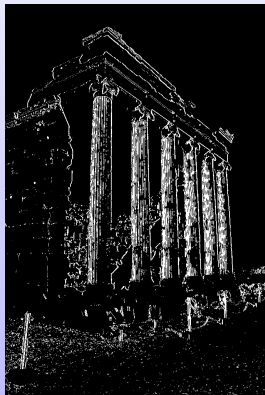
# Operatory Sobela



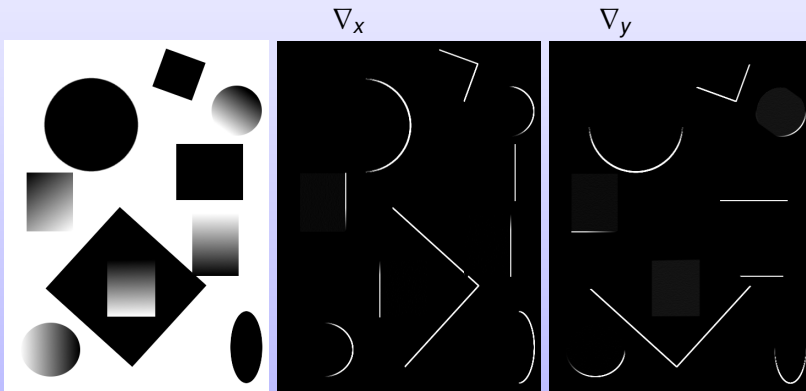
# Operatory Sobela



# Operatory Sobela

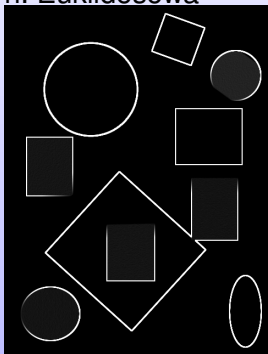


# Operatory Sobela – normy

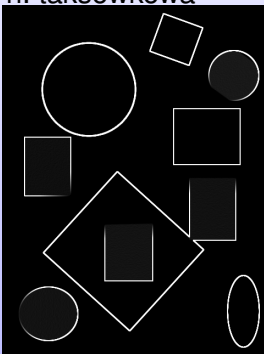


# Operatory Sobela – normy

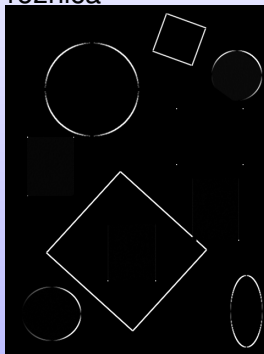
n. Euklidesowa



n. taksówkowa



różnica



# Metody gradientowe

## Wady

- Kierunkowy charakter.
- Duża wrażliwość na zakłócenia i szумы.
- Generowane grube krawędzie.

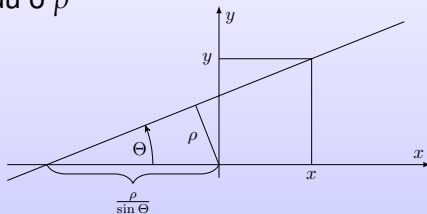
## Zalety

- Prostota.
- Łatwa implementacja.
- W większości filtry separowalne – mała złożoność obliczeniowa.



## Wrażliwość na kierunek krawędzi

Prosta przebiegająca pod kątem  $\Theta$  do osi  $x$  i odległa od początku układu o  $\rho$



$$y = ax + b$$

$$a = \operatorname{tg} \Theta = \frac{\sin \Theta}{\cos \Theta} \qquad b = \frac{\rho}{\cos \Theta}$$

dana jest równaniem uwikłanym

$$x \sin \Theta - y \cos \Theta + \rho = 0$$

## Obraz idealnej krawędzi

Niech jasność obrazu ma postać

$$f(x, y) = z_1 + (z_2 - z_1)u(x \sin \Theta - y \cos \Theta + \rho),$$

gdzie

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } t > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{jeżeli } t = 0 \\ 0 & \text{jeżeli } t < 0 \end{cases}$$

jest całką jednowymiarowej delty Diraca

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau.$$

## Operatory niezależne od kierunku

Pochodne cząstkowe funkcji jasności obrazu

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin \Theta (z_2 - z_1) \delta(x \sin \Theta - y \cos \Theta + \rho)$$

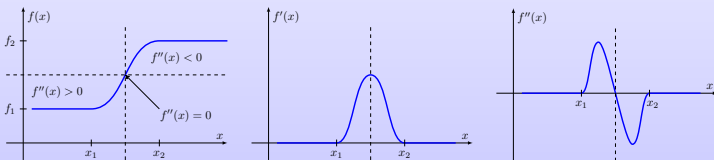
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\cos \Theta (z_2 - z_1) \delta(x \sin \Theta - y \cos \Theta + \rho)$$

Kwadrat skalarny (kwadrat modułu gradientu)

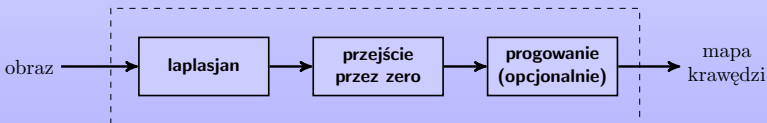
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = ((z_2 - z_1) \delta(x \sin \Theta - y \cos \Theta + \rho))^2$$

## Operatory niezależne od kierunku

- Do detekcji krawędzi wykorzystujemy punkt zmiany znaku drugiej pochodnej (przejście przez zero).



- Bardzo silna wrażliwość na szum obecny w obrazie.



# Operatory niezależne od kierunku

## Laplasjan

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \sin^2 \Theta (z_2 - z_1) \delta'(x \sin \Theta - y \cos \Theta + \rho)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \cos^2 \Theta (z_2 - z_1) \delta'(x \sin \Theta - y \cos \Theta + \rho),$$

gdzie  $\delta'$  jest wynikiem różniczkowania impulsu jednostkowego

$$\nabla^2 f = (z_2 - z_1) \delta'(x \sin \Theta - y \cos \Theta + \rho)$$

## Dyskretna realizacja Laplasjanu

$$\nabla_x^2 f(x, y) = \nabla_x f(x + 1, y) - \nabla_x f(x, y) =$$

$$f(x + 1, y) + f(x - 1, y) - 2f(x, y)$$

$$\nabla_y^2 f(x, y) = \nabla_y f(x, y + 1) - \nabla_y f(x, y) =$$

$$f(x, y + 1) + f(x, y - 1) - 2f(x, y)$$

$$\nabla_+^2 f(x, y) = f(x+1, y) + f(x-1, y) + f(x, y+1) + f(x, y-1) - 4f(x, y)$$

0	1	0
1	-4	1
0	1	0

## Dyskretna realizacja Laplasjanu

**Wada:** wrażliwość na obrót układu współrzędnych (zwłaszcza dla  $x'$  i  $y'$  – układu obróconego o  $\frac{\pi}{4}$ )

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} = \frac{1}{2} (f(x+1, y+1) + f(x-1, y-1) - 2f(x, y))$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} = \frac{1}{2} (f(x-1, y+1) + f(x+1, y-1) - 2f(x, y))$$

$$\nabla_x^2 f = \frac{1}{2} (f(x+1, y+1) + f(x-1, y-1) + f(x-1, y+1) + f(x+1, y-1) - 4f(x, y))$$

$$\frac{1}{2} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -4 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

## Dyskretna realizacja Laplasjanu

Kombinacja wypukła obu powyższych transformacji

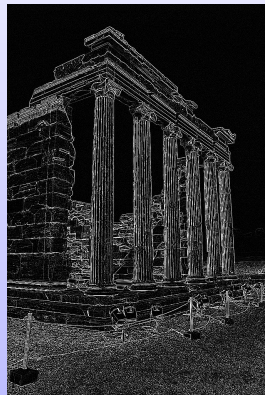
$$\nabla_o^2 = \frac{2}{3}\nabla_+^2 + \frac{1}{3}\nabla_\times^2$$

$$\frac{1}{6} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 1 \\ \hline 4 & -20 & 4 \\ \hline 1 & 4 & 1 \\ \hline \end{array}$$

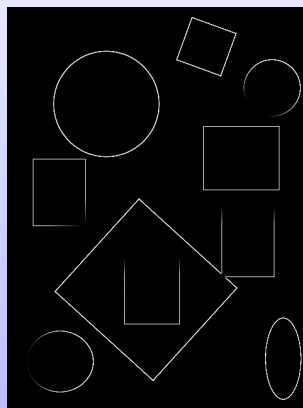
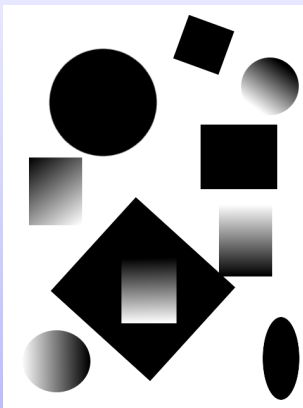
jest w bardzo małym stopniu zależna od kierunku.



# Operator Laplace'a



# Operator Laplace'a



## Szablony (templates)

- Wykorzystują operator korelacji.

Przykład 1:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

## Szablony (templates)

Przykład 2:

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & -5 \\ 3 & -5 & -5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ -5 & -5 & -5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -5 & 0 & 3 \\ -5 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & -5 \\ 3 & 0 & -5 \\ 3 & 3 & -5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -5 & 3 & 3 \\ -5 & 0 & 3 \\ -5 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 & -5 \\ 3 & 0 & -5 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -5 & -5 & -5 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -5 & -5 & 3 \\ -5 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

## Dopasowywanie lokalnych modeli

- Na podstawie informacji o otoczeniu budujemy model krawędzi w postaci funkcji dla której liczymy gradient.

Rozważmy liniową aproksymację  $f$

$$\bar{f} = ax + by + c$$

na podstawie czterech sąsiadujących ze sobą punktów:

$$f(x-1, y-1) \quad f(x, y-1)$$

$$f(x-1, y) \quad f(x, y)$$

## Dopasowywanie lokalnych modeli

optymalną w sensie minimalnego błędu średniokwadratowego

$$\begin{aligned}
 Q = & \left( a(x-1) + b(y-1) + c - f(x-1, y-1) \right)^2 + \\
 & + \left( ax + b(y-1) + c - f(x, y-1) \right)^2 + \\
 & + \left( a(x-1) + by + c - f(x-1, y) \right)^2 + \\
 & + \left( ax + by - f(x, y) \right)^2
 \end{aligned}$$

Optymalne współczynniki funkcji liniowej

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{1}{2} \left( f(x, y-1) + f(x, y) - f(x-1, y-1) - f(x-1, y) \right) \\
 b &= \frac{1}{2} \left( f(x-1, y) + f(x, y) - f(x-1, y-1) - f(x, y-1) \right)
 \end{aligned}$$

# Dopasowywanie lokalnych modeli

Gradient optymalnej liniowej aproksymacji

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Odpowiednie operatory lokalne

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

są podobne do operatora Robertsa z dokładnością do uśrednienia odpowiednio w pionie i w poziomie.