Cyfrowe przetwarzanie obrazów i sygnałów
Wykład 4
AiR III

Joanna Ratajczak

KCiR (W4/K7)

Copyright © 2015 Joanna Ratajczak[1]

[1] Niniejszy dokument zawiera materiały do wykładu z przedmiotu Cyfrowe Przetwarzanie Obrazów i Sygnałów. Jest on udostępniony pod warunkiem wykorzystania wyłącznie do własnych, prywatnych potrzeb i może być kopiowany wyłącznie w całości, razem ze stroną tytułową.

Liczba zespolona Z to liczba składająca się z części rzeczywistej i urojonej

$$Z = \mathrm{Re}(Z) + j\ \mathrm{Im}(Z),$$

gdzie $j = \sqrt{-1}$.
Liczba sprzężona względem Z to liczba $Z^* = \mathrm{Re}(Z) - j\ \mathrm{Im}(Z)$.

Liczbę zespoloną można wyrazić we współrzędnych biegunowych

$$Z = \left|Z\right|(\cos\theta + j\ \sin\theta),$$

gdzie moduł liczby zespolonej $\left|Z\right| = \sqrt{\mathrm{Re}^2(Z) + \mathrm{Im}^2(Z)}$.

Ponieważ prawdziwy jest wzór Eulera

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\ \sin\theta$$

to

$$Z = \left|Z\right|e^{j\theta}.$$

Postaci liczby zespolonej

Postać algebraiczna

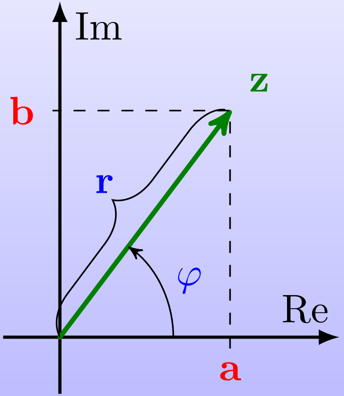
$$Z = \mathrm{Re}(Z) + j\ \mathrm{Im}(Z)$$

Postać trygonometryczna

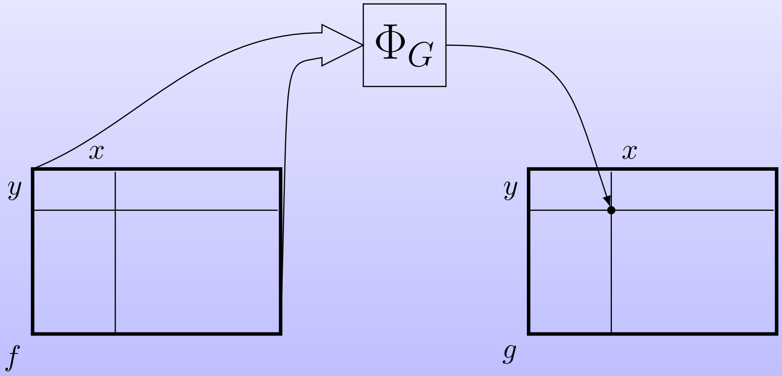
$$Z = |Z|(\cos\varphi + j\ \sin\varphi)$$

Postać wykładnicza

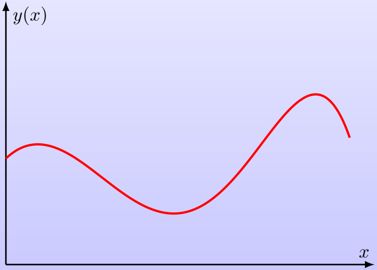
$$Z = |Z|e^{j\varphi}.$$



Transformacja globalna



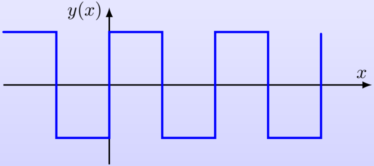
Sygnał analogowy



$$y = f(x)$$

Rozkład sygnału na funkcje bazowe

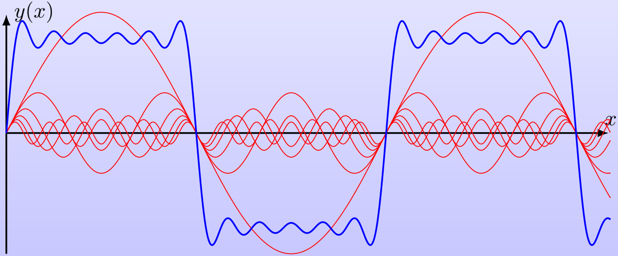
Każdy sygnał możemy zastąpić kombinacją liniową innych funkcji bazowych.



$$y(x) = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli} \quad k2\pi \le x < k2\pi + \pi \\ -1 & \text{jeżeli} \quad k2\pi + \pi < x \le (k+1)2\pi \end{cases}$$

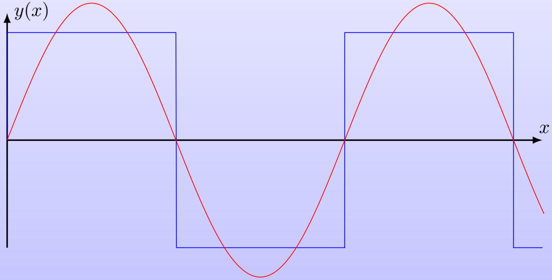
$$\begin{aligned} \bar{y}(x) &= \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \dots\right) = \\ &= \frac{4}{\pi}\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2i+1}\sin((2i+1)x) \end{aligned}$$

Rozkład sygnału na funkcje bazowe



Suma 6 składników ($i = 0, \ldots, 5$).

Rozkład sygnału na funkcje bazowe

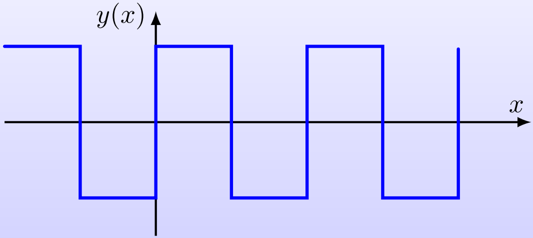


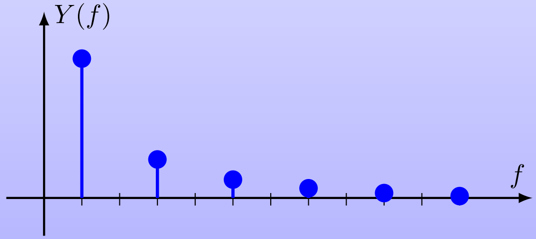
Wpływ liczby składników na jakość przybliżenia.

Transformata częstotliwościowa

- funkcje bazowe są np. funkcjami sinus o wzrastającej częstotliwości (funkcje harmoniczne)
- przejście z dziedziny rzeczywistej w dziedzinę częstotliwości
- transformacja jest operacją odwracalną
- nawet niewielka zmiana wartości w dziedzinie częstotliwości przy tych samych funkcjach bazowych może dać całkiem inną funkcją w dziedzinie rzeczywistej

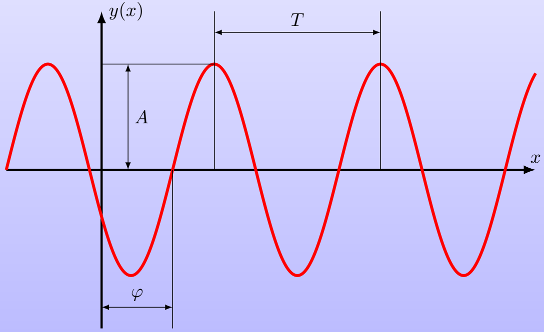
Transformata częstotliwościowa





Charakterystyka funkcji sinus

$$y(x) = A\sin(\frac{2\pi}{T}x - \varphi)$$



$\omega = \frac{2\pi}{T}$ – pulsacja, $f = \frac{1}{T}$ – częstotliwość

Transformata Fouriera

- funkcjami bazowymi są funkcje sinusów i cosinusów kolejnych harmonicznych

$$y(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) + B_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}x\right)$$

- A_k i B_k tworzą liczbę zespoloną
- każdy współczynnik zespolony daje informacje na temat amplitudy i fazy funkcji bazowej

$$|C_k| = \sqrt{\mathrm{Re}^2(C_k) + \mathrm{Im}^2(C_k)}$$

$$\varphi_{C_k} = \operatorname{arc\,tg} \frac{\mathrm{Im}(\mathrm{C_k})}{\mathrm{Re}(\mathrm{C_k})}$$

Transformata Fouriera

Zapis równoważny

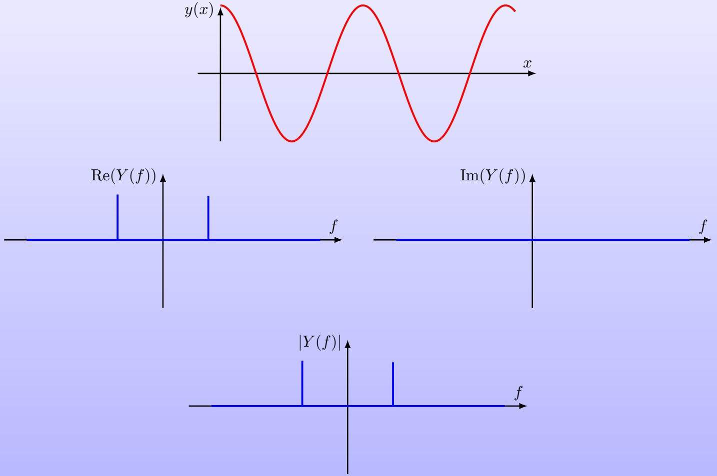
$$y(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j\frac{2\pi k}{T}x} \qquad e^{jx} = \cos(x) + j\sin(x)$$

$$y(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_k| \left(\cos\left(\frac{2\pi k}{T}x + \varphi_k \right) + j\sin\left(\frac{2\pi k}{T}x + \varphi_k \right) \right)$$

$$C_k = |C_k| e^{j\varphi_k} = \frac{1}{T} \int_T y(x) e^{-\frac{j2\pi k}{T}x}\, \mathrm{d}x$$

- współczynniki są miarą podobieństwa funkcji $y(x)$ i funkcji bazowej

Transformata Fouriera – przykład



Własności transformacji Fouriera

- Operacja liniowa.
- Transformacja Fouriera jest w pełni odwracalna.

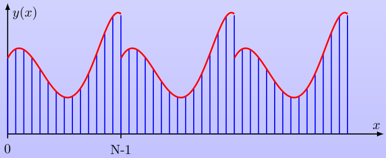
$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} y(x) e^{-j2\pi fx} \, \mathrm{d}x$$

$$y(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(f) e^{j2\pi fx} \, \mathrm{d}f$$

- Transformata splotu dwóch funkcji jest równa iloczynowi transformat i odwrotnie.

Dyskretna transformata Fouriera

- w miejsce całek pojawiają się sumy
- funkcje bazowe również są funkcjami dyskretnymi
- sygnał traktowany jest jako jeden okres i uzupełniany swoimi powtórzeniami



- zakładamy, że N próbek stanowi okres funkcji

Dyskretna transformata Fouriera

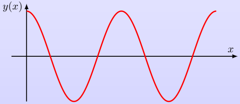
$$f_k = \beta \sum_{n=0}^{N-1} l_n e^{\frac{-j2\pi nk}{N}}, \qquad \text{dla } k = 0, 1, \ldots, N-1$$

gdzie:

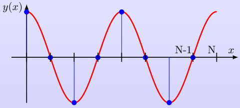
- f_k – k-ty element transformaty F,
- l_n – n-ty element ciągu wejściowego L,
- β – współczynnik normalizujący,
- N – liczba próbek w L.

$$\text{DFT} - y(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{N}2x\right)$$

$$\text{DFT} - y(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{N}2x\right)$$

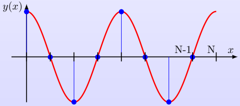


$$\text{DFT} - y(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{N}2x\right)$$



$$N = 8 \qquad y_n = \{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0\}$$

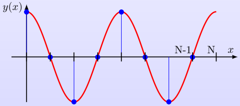
DFT – $y(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{N}2x\right)$



$$N = 8 \qquad y_n = \{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0\}$$

$$Y_k = \beta \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{\frac{-j2\pi nk}{N}}, \qquad \text{dla } k = 0, 1, \ldots, N-1$$

$$\text{DFT} - y(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{N}2x\right)$$

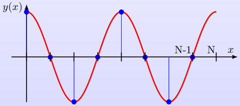


$$N = 8 \qquad y_n = \{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0\}$$

$$Y_0 = 1\sum_{n=0}^{7} y_n e^{\frac{-j2\pi n0}{8}} = 1 + 0 + (-1) + 0 + 1 + 0 + (-1) + 0 = 0$$

$$Y_k = \{Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6, Y_7\} = \{0, \ , \ , \ , \ , \ , \ , \ \}$$

$$\text{DFT} - y(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{N}2x\right)$$

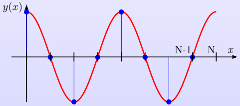


$$N = 8 \qquad y_n = \{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0\}$$

$$Y_1 = 1\sum_{n=0}^{7} y_n e^{\frac{-j2\pi n1}{8}} = 1 + 0 + j + 0 + (-1) + 0 + (-j) + 0 = 0$$

$$Y_k = \{Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6, Y_7\} = \{0, 0, \ , \ , \ , \ , \ , \ \}$$

$$\text{DFT} - y(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{N}2x\right)$$

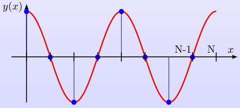


$$N = 8 \qquad y_n = \{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0\}$$

$$Y_2 = 1\sum_{n=0}^{7} y_n e^{\frac{-j2\pi n2}{8}} = 1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 = 4$$

$$Y_k = \{Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6, Y_7\} = \{0, 0, 4, \ , \ , \ , \ , \ \}$$

DFT – $y(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{N} 2x\right)$

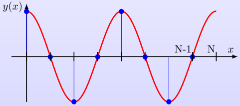


$$N = 8 \qquad y_n = \{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0\}$$

$$Y_3 = 1 \sum_{n=0}^{7} y_n e^{\frac{-j2\pi n3}{8}} = 1 + 0 + (-j) + 0 + (-1) + 0 + j + 0 = 0$$

$$Y_k = \{Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6, Y_7\} = \{0, 0, 4, 0, \ \ , \ \ , \ \ , \ \ \}$$

DFT – $y(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{N}2x\right)$

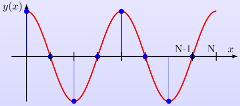


$$N = 8 \qquad y_n = \{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0\}$$

$$Y_4 = 1\sum_{n=0}^{7} y_n e^{\frac{-j2\pi n4}{8}} = 1 + 0 + (-1) + 0 + 1 + 0 + (-1) + 0 = 0$$

$$Y_k = \{Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6, Y_7\} = \{0, 0, 4, 0, 0, \ \ , \ \ , \ \ \}$$

$$\text{DFT} - y(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{N}2x\right)$$

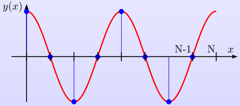


$$N = 8 \qquad y_n = \{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0\}$$

$$Y_5 = 1\sum_{n=0}^{7} y_n e^{\frac{-j2\pi n5}{8}} = 1 + 0 + j + 0 + (-1) + 0 + (-j) + 0 = 0$$

$$Y_k = \{Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6, Y_7\} = \{0, 0, 4, 0, 0, 0, \ \ , \ \ \}$$

$$\text{DFT} - y(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{N}2x\right)$$

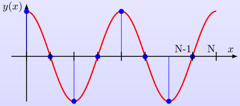


$$N = 8 \qquad y_n = \{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0\}$$

$$Y_6 = 1\sum_{n=0}^{7} y_n e^{\frac{-j2\pi n6}{8}} = 1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 = 4$$

$$Y_k = \{Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6, Y_7\} = \{0, 0, 4, 0, 0, 0, 4, \ \}$$

$$\text{DFT} - y(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{N} 2x\right)$$

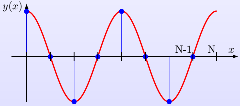


$$N = 8 \qquad y_n = \{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0\}$$

$$Y_7 = 1 \sum_{n=0}^{7} y_n e^{\frac{-j2\pi n7}{8}} = 1 + 0 + (-j) + 0 + (-1) + 0 + j + 0 = 0$$

$$Y_k = \{Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6, Y_7\} = \{0, 0, 4, 0, 0, 0, 4, 0\}$$

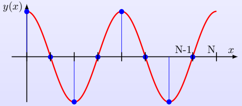
DFT – $y(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{N}2x\right)$



$N = 8$

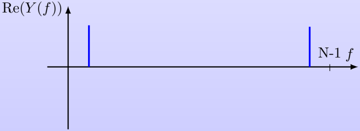
$$y_n = \{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0\}$$
$$Y_k = \{0, 0, 4, 0, 0, 0, 4, 0\}$$

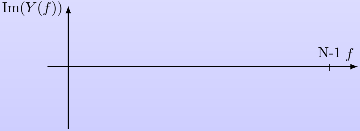
DFT – $y(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{N}2x\right)$



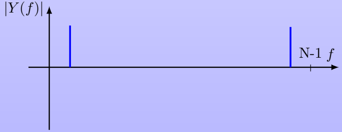
$N = 8$

$$y_n = \{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0\}$$
$$Y_k = \{0, 0, 4, 0, 0, 0, 4, 0\}$$

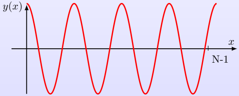




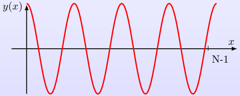
$$Y(2) = 4 + j0,\ Y(N-2) = 4 + j0$$



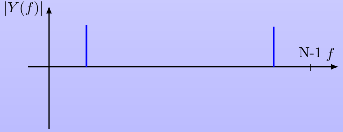
DFT – $y(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{N}4x\right)$



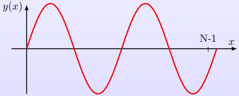
DFT – $y(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{N}4x\right)$



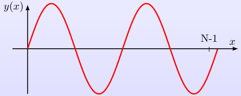
$$Y(4) = C + j0,\ Y(N-4) = C + j0$$

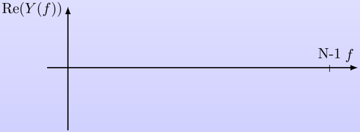


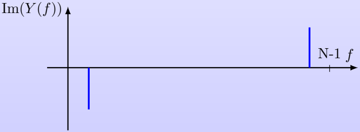
DFT – $y(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{N}2x\right)$



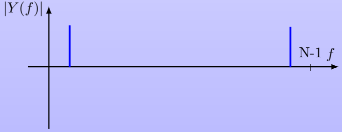
DFT – $y(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{N}2x\right)$



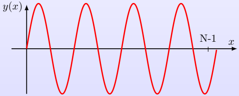




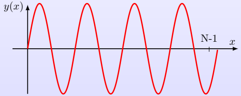
$$Y(2) = 0 - jC,\ Y(N-2) = 0 + jC$$

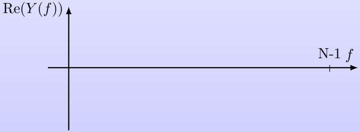


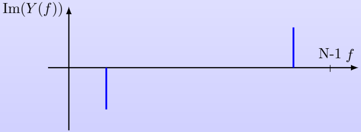
DFT – $y(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{N}4x\right)$



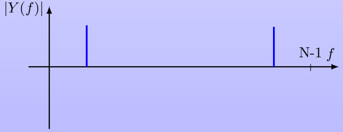
DFT – $y(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{N}4x\right)$



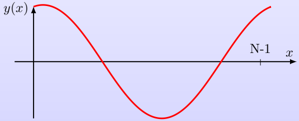




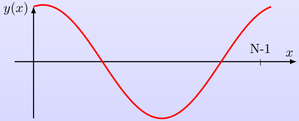
$$Y(4) = 0 - jC,\; Y(N-4) = 0 + jC$$

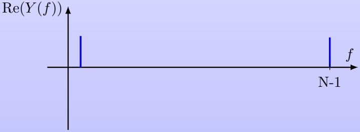


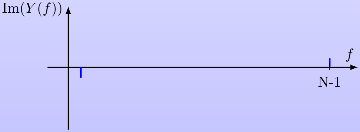
$$\text{DFT} - y(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{N}x - \frac{\pi}{8}\right)$$



$$\text{DFT} - y(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{N}x - \frac{\pi}{8}\right)$$

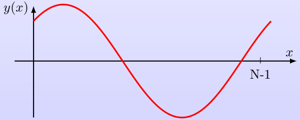




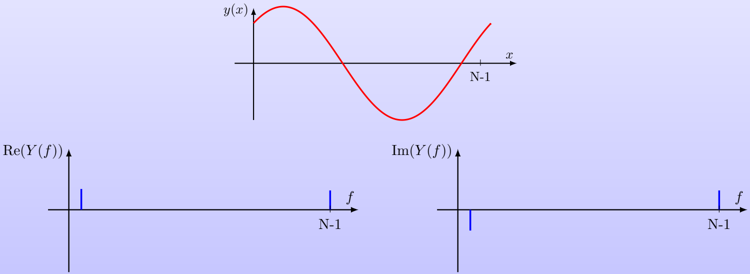


$$Y(1) = C_1 - jC_2,\ Y(N-1) = C_1 + jC_2$$

$$\text{DFT} - y(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{N}x - \frac{\pi}{4}\right)$$

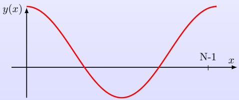


$$\text{DFT} - y(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{N}x - \frac{\pi}{4}\right)$$

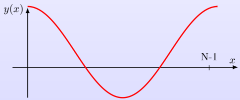


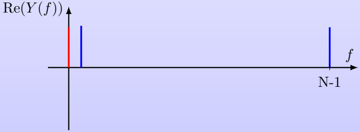
$$Y(1) = C_3 - jC_4,\ Y(N-1) = C_3 + jC_4$$

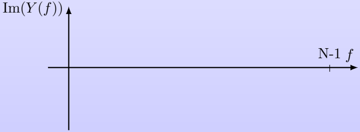
DFT – $y(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{N}x\right) + 0.5$



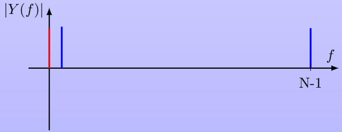
DFT – $y(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{N}x\right) + 0.5$



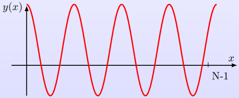




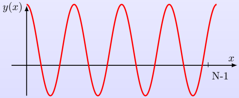
$$Y(0) = D,\ Y(1) = C - j0,\ Y(N-1) = C + j0$$

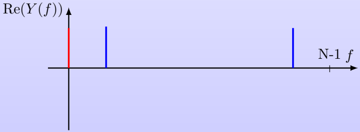


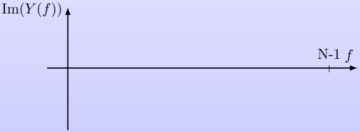
DFT – $y(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{N}4x\right) + 0.5$



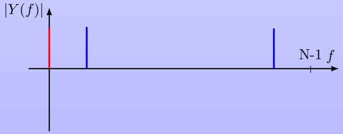
$$\mathrm{DFT} - y(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{N}4x\right) + 0.5$$





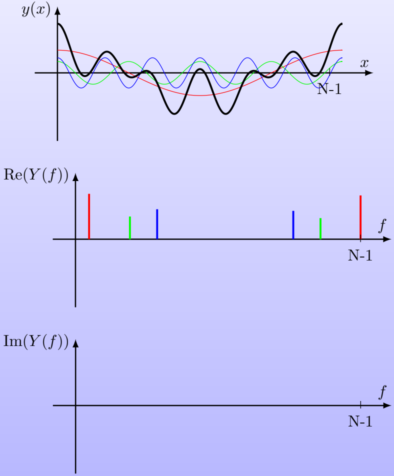


$$Y(0) = D,\ Y(4) = C - j0,\ Y(N-4) = C + j0$$



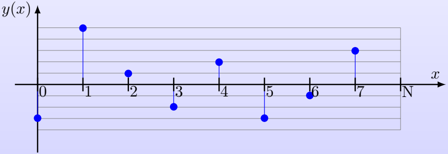
DFT – sygnał złożony

$$y(x) = \cos(\frac{2\pi}{N}x) + \frac{1}{2}\cos(\frac{2\pi}{N}4x) + \frac{2}{3}\cos(\frac{2\pi}{N}6x)$$

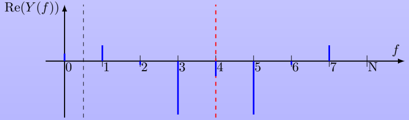


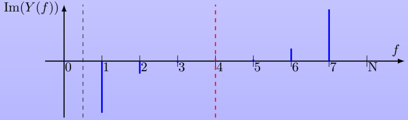
DFT – sygnał dowolny

$$y_n = \{-3, 5, 1, -2, 2, -3, -1, 3\}$$



$$Y_k = \{2;\ 4.19 - 4.12j;\ -1 - 1j;\ -14.19 - 0.12j;$$
$$-4;\ -14.19 + 0.12j;\ -1 + 1j;\ 4.19 + 4.12j\}$$





Dyskretna transformata Fouriera 2D

- Dyskretna transformata Fouriera dla obrazu $W \times H$

$$F(u,v) = \frac{1}{\sqrt{HW}} \sum_{m=0}^{H-1} \sum_{n=0}^{W-1} f(x,y) e^{-j2\pi(\frac{xu}{H} + \frac{yv}{W})}$$

- Dyskretna odwrotna transformata Fouriera

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{WH}} \sum_{u=0}^{H-1} \sum_{v=0}^{W-1} F(u,v) e^{j2\pi(\frac{xu}{H} + \frac{yv}{W})}$$

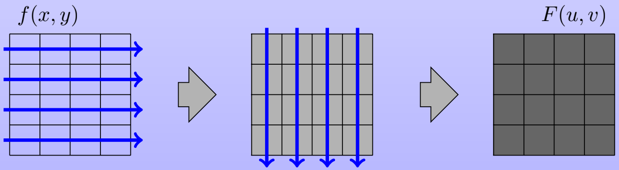
Dyskretna transformata Fouriera 2D

Transformata Fouriera jest separowalna względem wymiarów

$$F(u,v) = \frac{1}{\sqrt{HW}} \sum_{n=0}^{W-1} I(u,y) e^{-j2\pi \frac{yv}{W}},$$

gdzie

$$I(u,y) = \frac{1}{\sqrt{HW}} \sum_{n=0}^{H-1} f(x,y) e^{-j2\pi \frac{xu}{H}}.$$

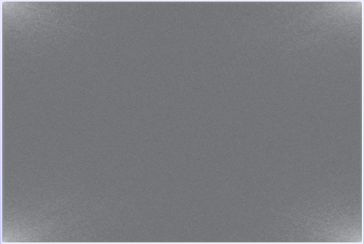


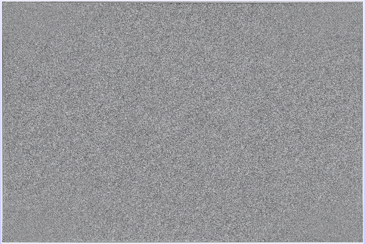
Transformata obrazu

$\mathrm{Re}(FFT(Obraz))$

$\mathrm{Im}(FFT(Obraz))$

Moduł i faza

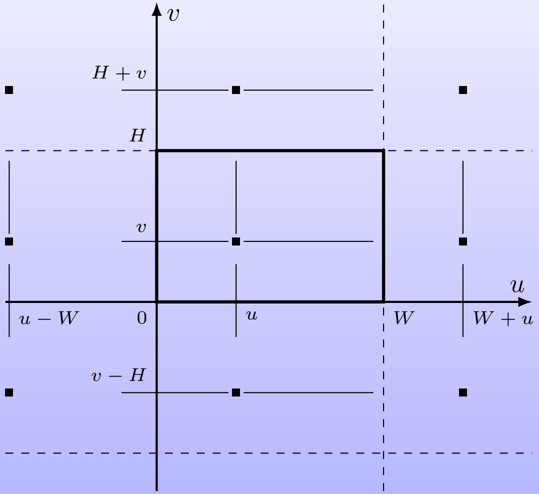




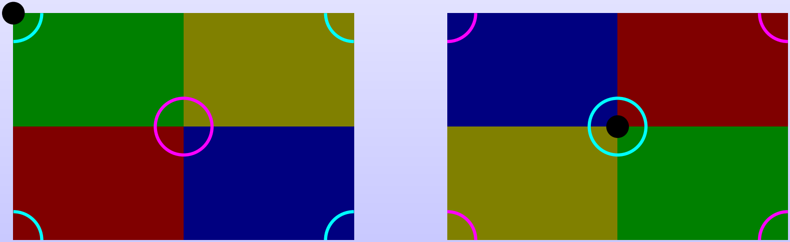
$$|FFT(Obraz)| = \sqrt{\mathrm{Re}^2(FFT(Obraz)) + \mathrm{Im}^2(FFT(Obraz))}$$

$$\varphi(Obraz) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\mathrm{Im}^2(FFT(Obraz))}{\mathrm{Re}^2(FFT(Obraz))}\right)$$

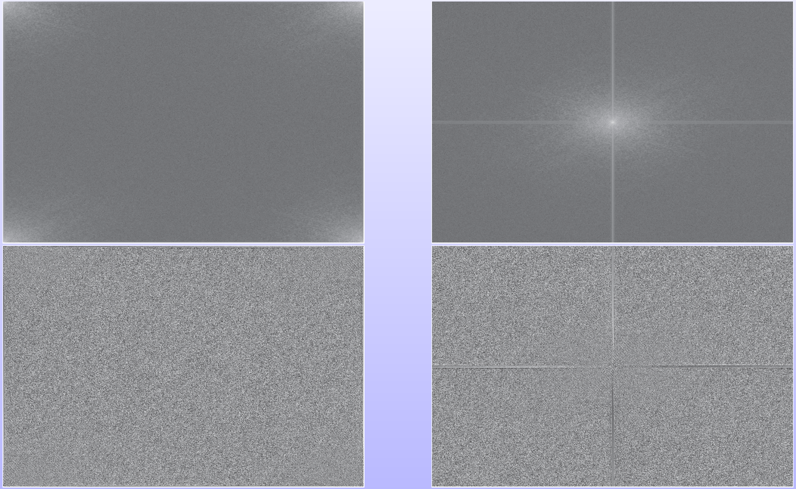
Cykliczność DFT 2D



Przesunięcie obrazu transformaty

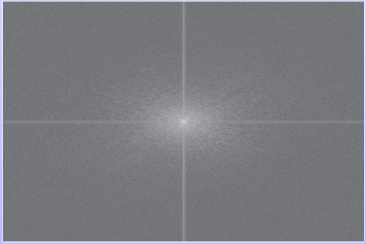


Przesunięcie obrazu transformaty

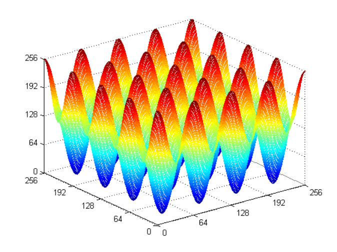


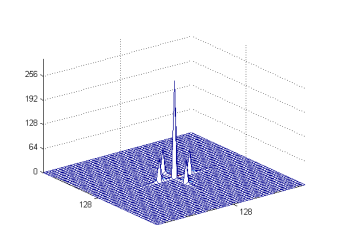
Logarytmiczna skala modułu

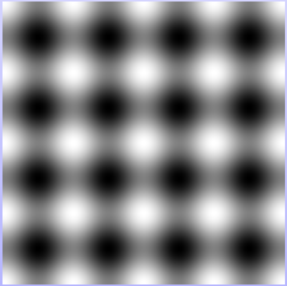
Ze względu na to że składowa stała ma zwykle dużo większą wartość od pozostałych częstotliwości moduł zwykle przedstawia się w skali logarytmicznej (operacja przeprowadzana tylko w celach wizualnych).

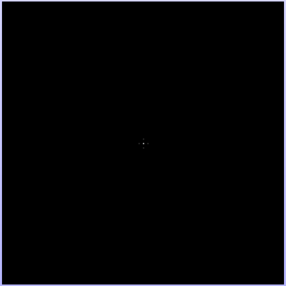


DFT 2D – przykład



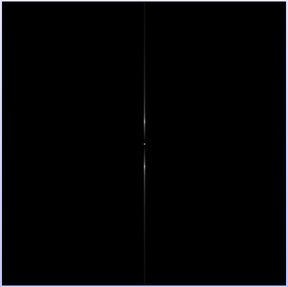




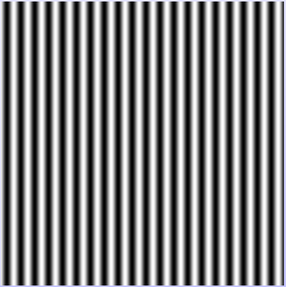


DFT 2D – przykład

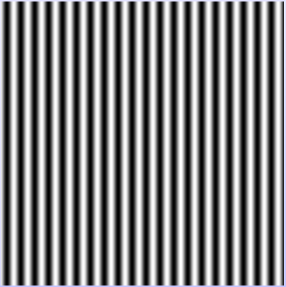
DFT 2D – przykład

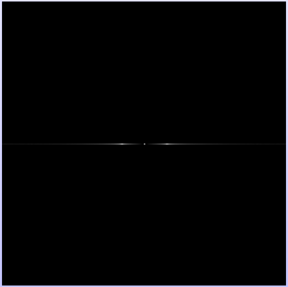


DFT 2D – przykład

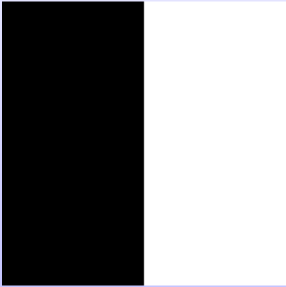


DFT 2D – przykład

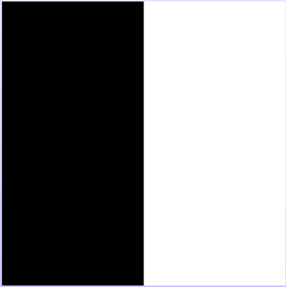


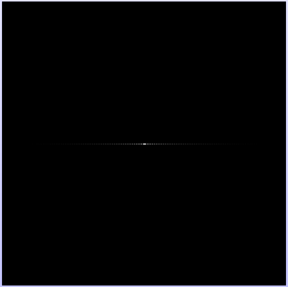


DFT 2D – przykład



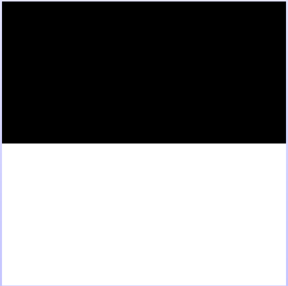
DFT 2D – przykład

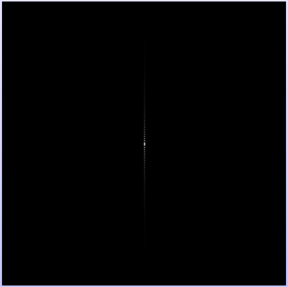




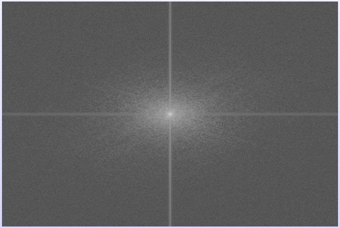
DFT 2D – przykład

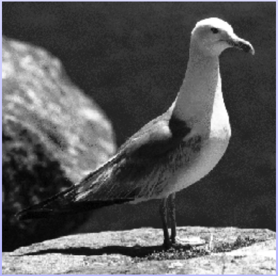
DFT 2D – przykład

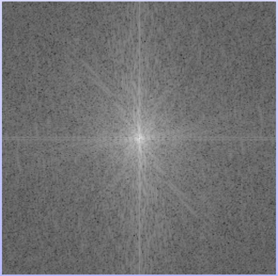




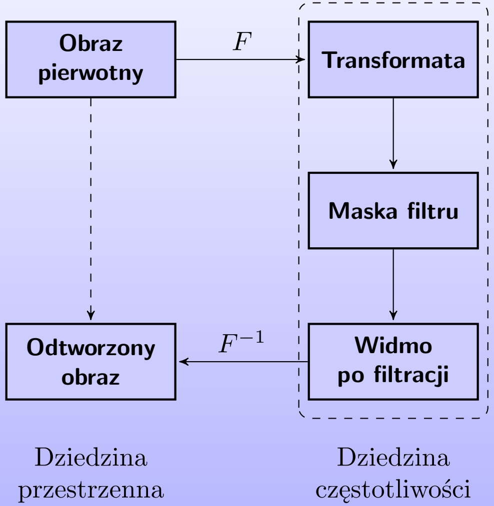
DFT 2D – przykład





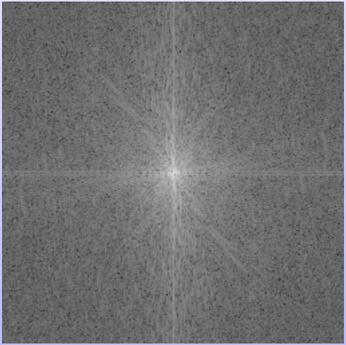


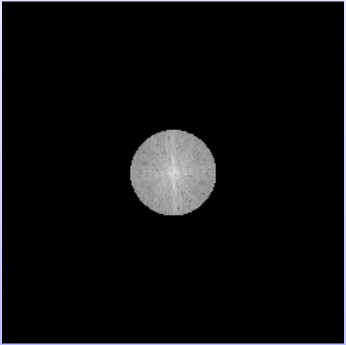
Idea filtracji w dziedzinie częstotliwości



Filtracja w dziedzinie częstotliwości

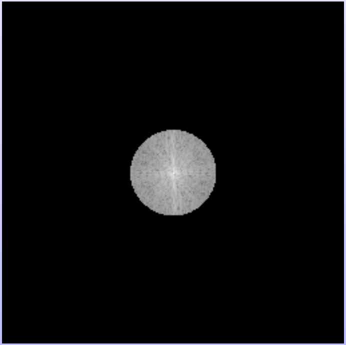
filtracja dolnoprzepustowa





Filtracja w dziedzinie częstotliwości

filtracja dolnoprzepustowa



Filtracja w dziedzinie częstotliwości

filtracja górnoprzepustowa