Cyfrowe przetwarzanie obrazów i sygnałów
Wykład 10
AiR III

Joanna Ratajczak

KCiR (W4/K7)

Morfologia matematyczna

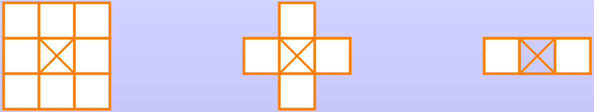
- Stanowi zbiór narzędzi opartych na podstawach matematycznych do tworzenia wydajnych algorytmów przetwarzania.
- Podstawową jednostką jest zbiór punktów (pikseli).
- Wykorzystuje informacje o kształcie do przetwarzania obrazów.
- Stanowi alternatywę do tradycyjnego przetwarzania sygnałów opartego na operatorach liniowych (np. konwolucja).

Podział:

- binarna morfologia matematyczna,
- morfologia matematyczna w skali szarości.

Operacje morfologiczne

W obrazach, **operacje morfologiczne** są relacją pomiędzy dwoma zbiorami. Pierwszym z nich jest obraz, drugim odpowiednio mała „próbka” zwana **elementem strukturalnym**. Element strukturalny jest systematycznie przesuwany nad obrazem, a wynik relacji dla każdej pozycji jest zapisywany w obrazie wyjściowym.



– „1”, – „0”, – punkt środkowy

Zastosowanie operacji morfologicznych

- Wstępne przetwarzanie obrazów
  - filtracja szumów,
  - upraszczanie sylwetek, itp.
- Uwydatnianie struktury obiektów
  - szkieletyzacja,
  - pocienianie,
  - pogrubianie, itp.
- Oddzielanie obiektów od tła.
- Opis ilościowy obiektów (miara powierzchni, itp.)

Operacje na zbiorach

Niech $\Omega \subset X \times Y$

- Zawieranie się podzbioru w zbiorze $\subset$ lub $\supset$,
- Część wspólna zbiorów $\cap$
- Suma zbiorów $\cup$
- Zbiór pusty $\varnothing$
- Dopełnienie zbioru $U \subset \Omega$:

$$U^c = \{u \in \Omega \colon u \notin U\}\,; \quad U \cup U^c = \Omega$$

- Przesunięcie (translation) U_h:

$$U_h = \{u \in \Omega \colon \exists v \in U, u = v + h\}$$

Dopasowywanie (Hit-or-Miss)

Element strukturalny zawiera dwa podzbiory (phases)

$$B^1, B^2 \in B; \quad B^1 \cap B^2 = \varnothing$$

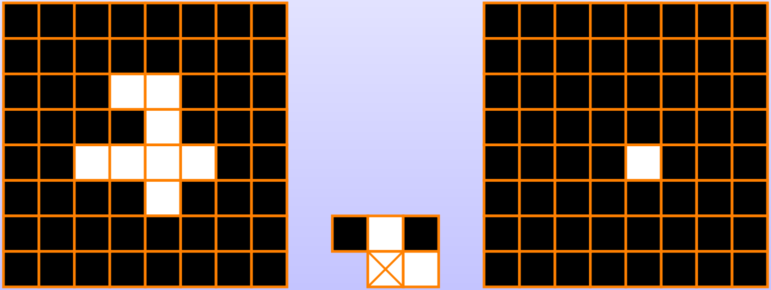
B^1 – punkty, które mają należeć do sylwetki „1”, □

B^2 – punkty, które mają należeć do tła „0”, ■

$$U \otimes B = \left\{ u \in \Omega \colon (B^1_u \in U) \wedge (B^2_u \in U^c) \right\}$$

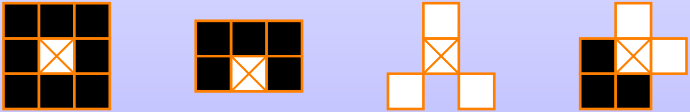
Do każdego piksela obrazu wejściowego przykładany jest element strukturalny. Jeśli konfiguracja pikseli sąsiednich jest identyczna jak w elemencie strukturalnym to piksel obrazu wyjściowego przyjmuje wartość „1”.

Dopasowywanie (Hit-or-Miss)



Dopasowywanie (Hit-or-Miss)

- Bazowa operacja morfologii matematycznej.
- Można z niej wyprowadzić pozostałe operacje morfologiczne.
- Może służyć do wykrywania cech na obrazie (np. narożniki).



Rozszerzanie (Dilation) sylwetki

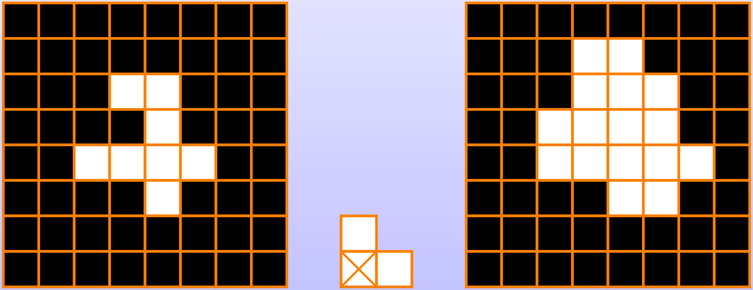
Transformacja rozszerzania (dilation) sylwetki $\oplus$ łączy dwa zbiory operacją sumy Minkowskiego.

$$U \oplus B = \left\{ u \in \Omega \colon \widetilde{B} \cap U \neq \varnothing \right\}$$

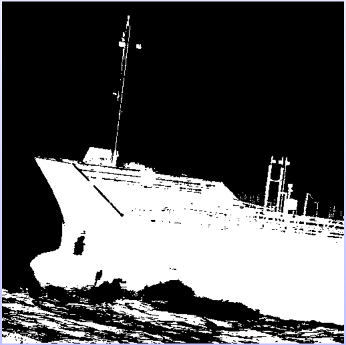
$\widetilde{B}$ – symetryczny obraz B względem punktu środkowego.

Do każdego piksela obrazu przykłada się element strukturalny w jego punkcie centralnym. Jeśli choć jeden piksel sąsiedztwa przykryty przez element strukturalny jest równy „1”, to wynikowy piksel również przyjmuje wartość „1”.

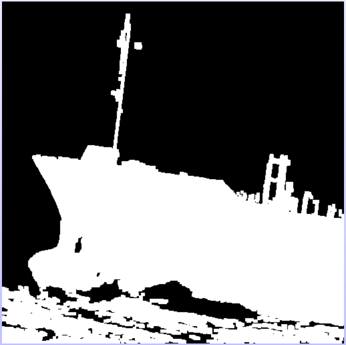
Rozszerzanie (Dilation) sylwetki

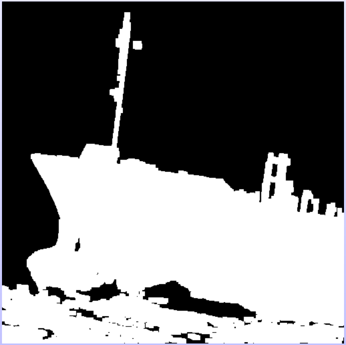


Rozszerzanie (Dilation) sylwetki

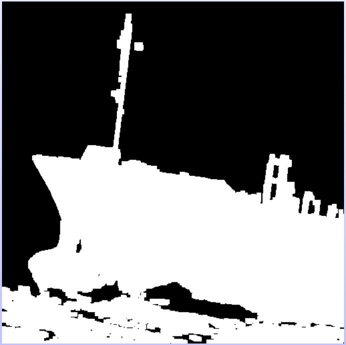


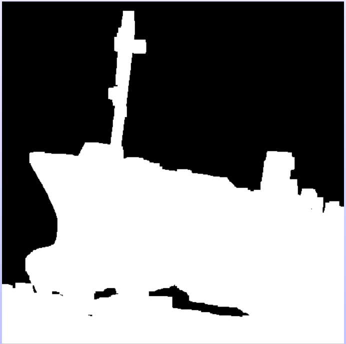
Rozszerzanie (Dilation) sylwetki





Rozszerzanie (Dilation) sylwetki





Rozszerzanie (Dilation) sylwetki

Własności:

- przemienność

$$U \oplus B = B \oplus U$$

- łączność

$$U \oplus (B \oplus C) = (U \oplus B) \oplus C$$

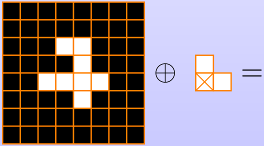
- niezmienniczość ze względu na przesunięcie

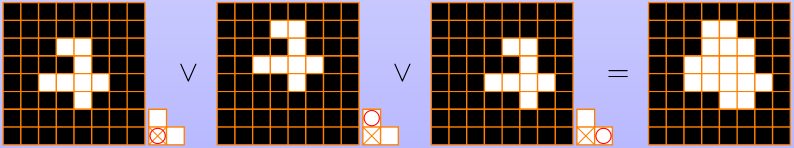
$$U_h \oplus B = (U \oplus B)_h$$

Rozszerzanie (Dilation) sylwetki

Przyspieszanie obliczeń

$$U \oplus B = \bigcup_{b \in B} U_b$$





Rozszerzanie (Dilation) sylwetki

- Operacja nieodwracalna i addytywna.
- Obiekty zwiększają rozmiary.
- Znikają detale.
- Zostają wypełnione „dziury” i „zatoki”.
- Łączenie obiektów blisko położonych.
- Jeśli element strukturalny jest symetryczny to rozrost jest jednakowy w każdą stronę (operacja wypełniania lub wzrostu).
- Modyfikując element strukturalny modyfikuje się kierunek rozrostu.

Zwężanie (Erosion) sylwetki

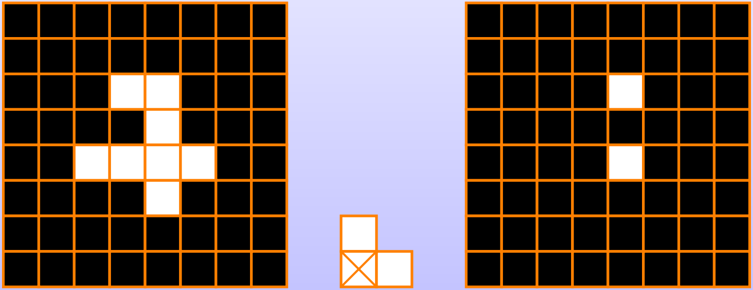
Transformacja zwężania (erosion) sylwetki $\ominus$ łączy dwa zbiory operacją różnicy Minkowskiego

$$U \ominus B = \left\{ u \in \Omega \colon \widetilde{B}_u \subset U \right\}$$

$\widetilde{B}$ – symetryczny obraz B względem punktu środkowego.

Do każdego piksela obrazu przykłada się element strukturalny w jego punkcie centralnym. Jeśli choć jeden piksel sąsiedztwa przykryty przez element strukturalny jest równy „0”, to wynikowy piksel również przyjmuje wartość „0”.

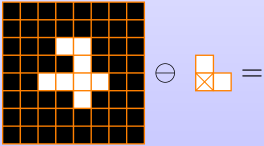
Zwężanie (Erosion) sylwetki

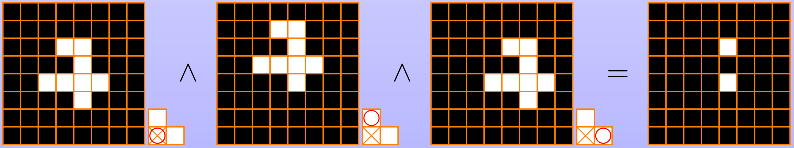


Zwężanie (Erosion) sylwetki

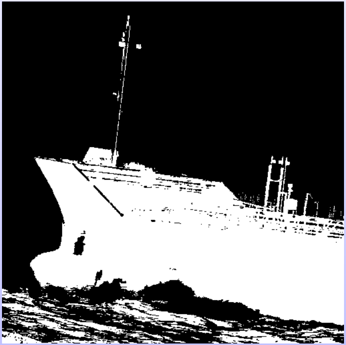
Przyspieszanie obliczeń

$$U \ominus B = \bigcap_{b \in B} U_b$$

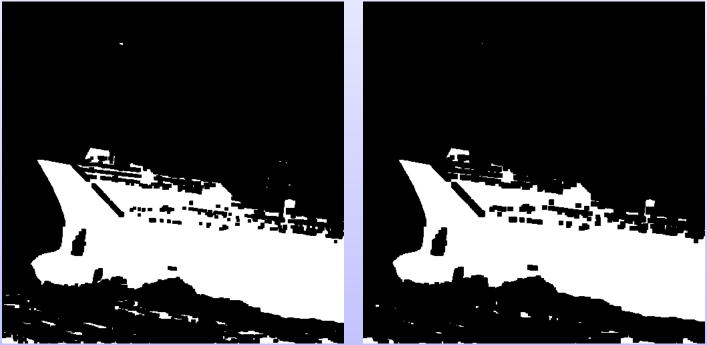




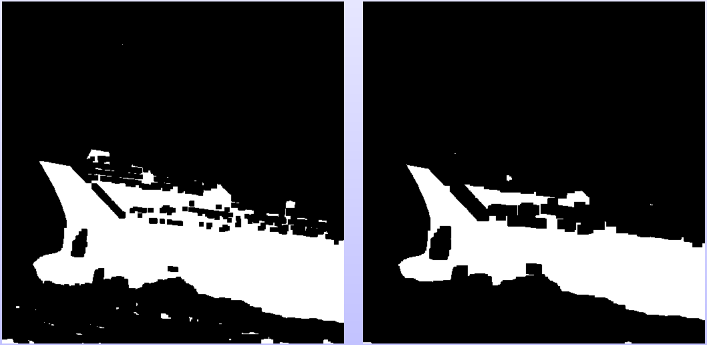
Zwężanie (Erosion) sylwetki



Zwężanie (Erosion) sylwetki



Zwężanie (Erosion) sylwetki



Zwężanie (Erosion) sylwetki

Własności:

- brak przemienności

$$U \ominus B \neq B \ominus U$$

- niezmienniczość ze względu na przesunięcie

$$U_h \ominus B = (U \ominus B)_h$$

Zwężanie (Erosion) sylwetki

- Operacja nieodwracalna i addytywna.
- Eliminuje drobne szczegóły.
- Wygładza drobne szczegóły.
- Pomniejsza sylwetkę.
- Znika szum.
- Jeśli element strukturalny jest symetryczny to zwężanie jest jednakowe w każdą stronę (operacja skurczenia lub redukcji).
- Modyfikując element strukturalny modyfikuje się kierunek zwężania.

Dualność operacji zwężania i rozszerzania

$$(U \oplus B)^c = \left\{ u \in \Omega\colon\ \widetilde{B} \cap U \ = \varnothing \right\} = \left\{ u \in \Omega\colon\ \widetilde{B}_u \subset U^c \right\} = U^c \ominus B$$

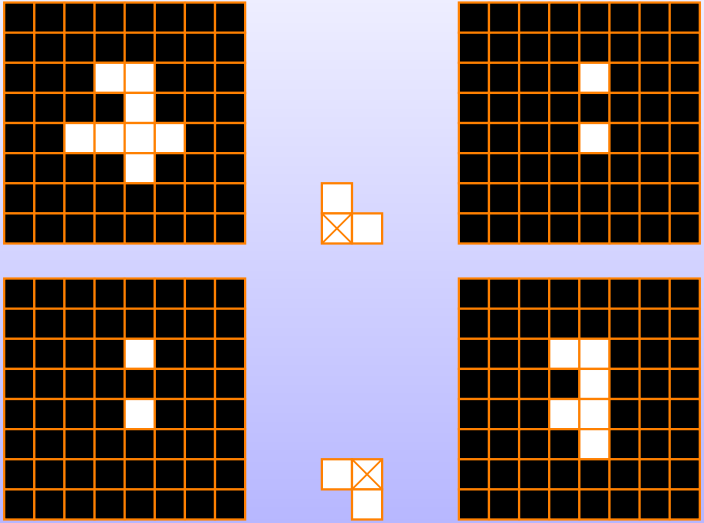
$$(U \ominus B) \ominus C = U \ominus (B \oplus C)$$

Otwarcie (Opening) sylwetki

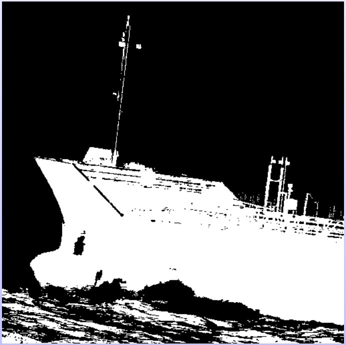
Nałożenie wyniku operacji rozszerzania na wynik operacji zwężania obrazu pierwotnego.

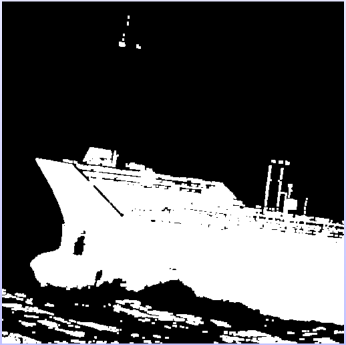
$$U \circ B = (U \ominus \widetilde{B}) \oplus B$$

Otwarcie (Opening) sylwetki

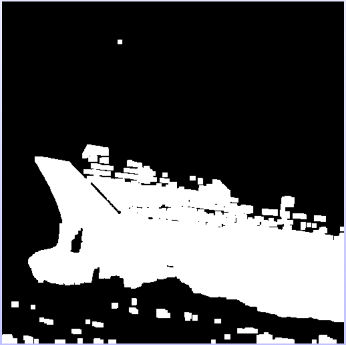


Otwarcie (Opening) sylwetki





Otwarcie (Opening) sylwetki

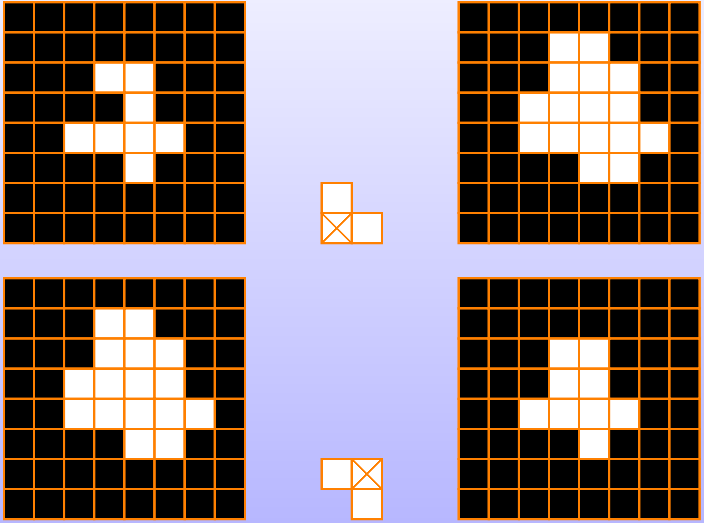


Domknięcie (Closing) sylwetki

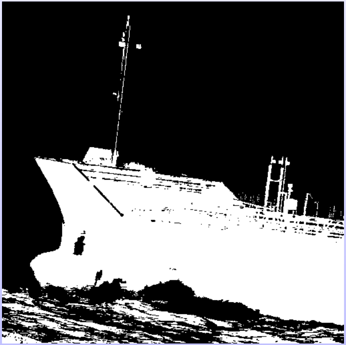
Nałożenie wyniku operacji zwężania na wynik operacji rozszerzenia obrazu pierwotnego.

$$U \bullet B = (U \oplus \widetilde{B}) \ominus B$$

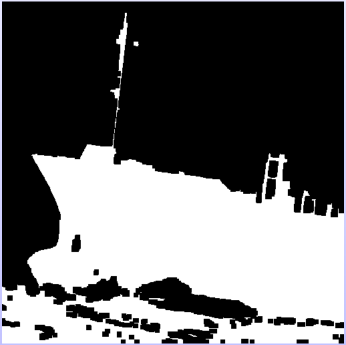
Domknięcie (Closing) sylwetki



Domknięcie (Closing) sylwetki



Domknięcie (Closing) sylwetki



Własności otwarcia i domknięcia

- Dualność

$$U^c \circ B = (U^c \ominus \widetilde{B}) \oplus B = (U \oplus \widetilde{B})^c \oplus B = ((U \oplus \widetilde{B}) \ominus B)^c = (U \bullet B)^c$$

$$(U \circ B)^c = ((U \ominus \widetilde{B}) \oplus B)^c = (U \ominus \widetilde{B})^c \ominus B = (U^c \oplus \widetilde{B}) \ominus B = U^c \bullet B$$

- Monotoniczność

$$U \circ B \subset U \subset U \bullet B$$

$$u \in U \Rightarrow \widetilde{B}_u \subset (U \oplus \widetilde{B}) \Rightarrow u \in (U \oplus \widetilde{B}) \ominus B \Rightarrow u \in (U \bullet B)$$

$$(U \circ B) = (U^c \bullet B)^c \subset (U^c)^c = U$$

- Idempotentność

$$U \circ B = (U \circ B) \circ B$$

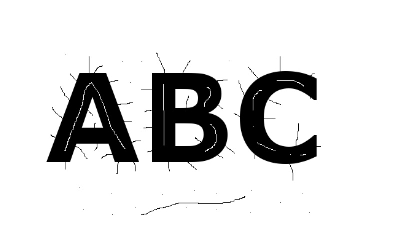
$$U \bullet B = (U \bullet B) \bullet B$$

Cechy otwarcia i domknięcia

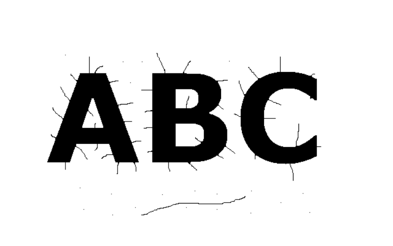
- Otwarcie usuwa drobne obiekty i drobne szczegóły, jak półwyspy, wypustki, może też rozłączyć niektóre obiekty z przewężeniami.
- Domknięcie łączy bliskie obiekty, uzupełnia małe dziury i zatoki, wygładza krawędzie.
- Obydwie operacje nie zmieniają kształtu ani wymiarów dużych obiektów o wyrównanym gładkim brzegu.
- Użycie symetrycznego elementu strukturalnego usuwa z obrazu detale mniejsze niż element strukturalny. Dają możliwość usuwania z obrazu pewnych szczególnie uciążliwych zakłóceń.

Usuwanie zakłóceń

obraz oryginalny

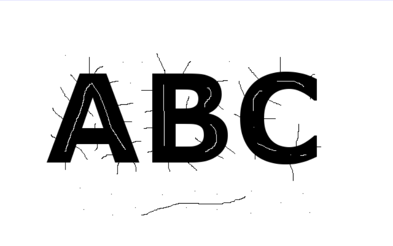


close(src)

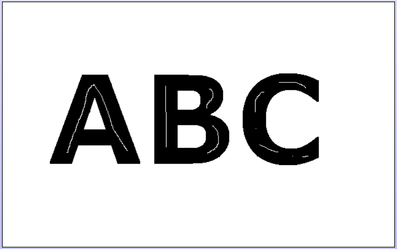


Usuwanie zakłóceń

obraz oryginalny

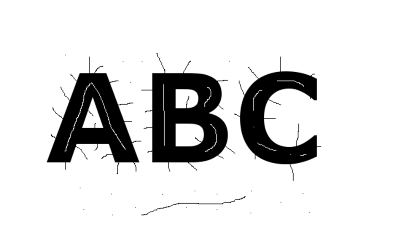


open(src)

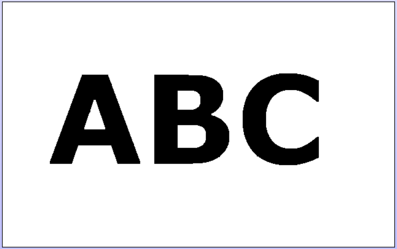


Usuwanie zakłóceń

obraz oryginalny



open(close(src))

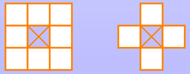


Znajdowanie brzegu (contouring)

- Operacja pocieniania opiera się o operację „Hit or Miss"

$$U \bigcirc B = U - U \otimes B$$

- Może być powtarzane wielokrotnie, aż do momentu gdy następny krok nie wprowadza żadnych zmian w obrazie.
- Wyodrębnienie konturu (ośmio- lub czterospójnego) analizowanej figury otrzymuje się przy zastosowaniu elementu strukturalnego



Znajdowanie brzegu

- Granica zewnętrzna obiektu

$$G(U) = (U \oplus B) - U$$

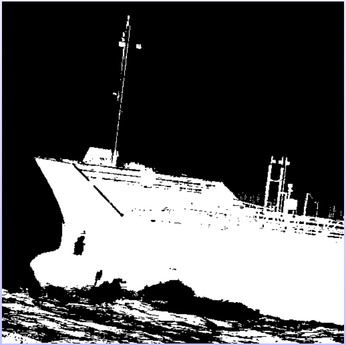
- Granica wewnętrzna obiektu

$$G(U) = U - (U \ominus B)$$

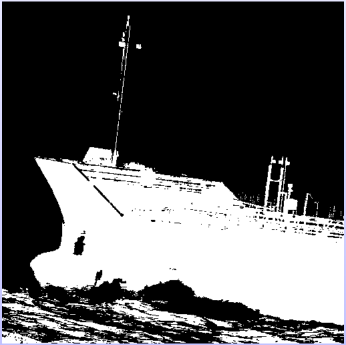
- Gradient morfologiczny

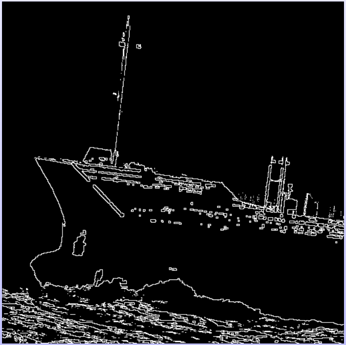
$$Grad(U) = (U \oplus B) - (U \ominus B)$$

Znajdowanie brzegu (contouring)

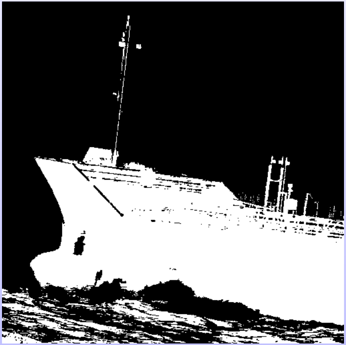


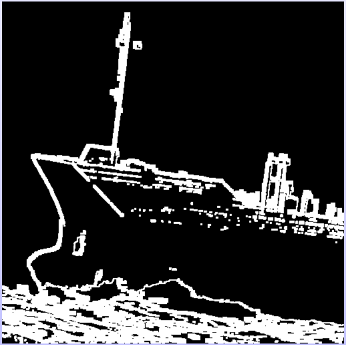
Znajdowanie brzegu (contouring)





Znajdowanie brzegu (contouring)

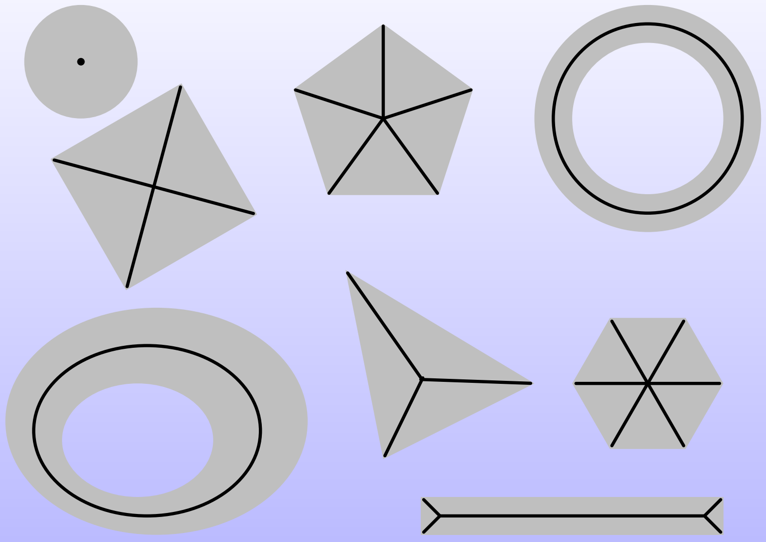




Znajdowanie szkieletu (thinning)

Celem jest znalezienie szkieletu obiektu.

- Szkielet jest liniową reprezentacją obiektu.
- **Szkielet** jest zbiorem wszystkich punktów równoodległych od co najmniej dwóch punktów należących do brzegu.
- Inaczej: zbiór wszystkich środków okręgów stycznych w co najmniej dwóch punktach do krawędzi obiektu.
- Szkielet figury jest znacznie mniejszy od niej, ale w pełni odzwierciedla jej podstawowe topologiczne własności.



Znajdowanie szkieletu (thinning)

Wyznaczanie szkieletu polega na wielokrotnym stosowaniu operacji pocieniania aż do momentu kiedy kolejne operacje nie wpływają na wygląd obrazu wynikowego.

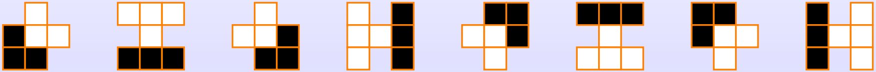
$$U \bigcirc L^i = (((\ldots(U \bigcirc L^1) \bigcirc L^2) \bigcirc L^3) \ldots \bigcirc L^i)$$

Warunki na $\{L^i\}$

- zachowanie punktów łączących (dokładnie 2 sąsiadów)
- zachowanie punktów końcowych (dokładnie 1 sąsiad)

Przykład $\{L^i\}$

L^1 L^2 L^3 L^4 L^5 L^6 L^7 L^8



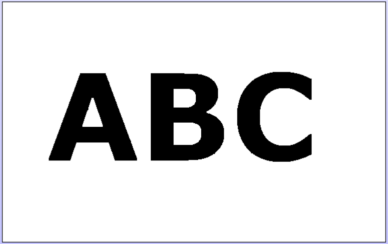
Algorytm

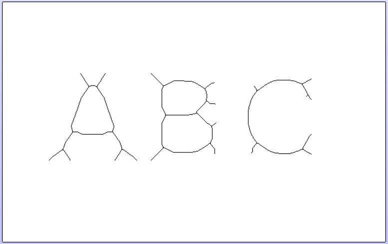
$$U_0 = U$$

$$U_{k+1} = (((\ldots(U_k \bigcirc L^1) \bigcirc L^2) \bigcirc L^3) \ldots \bigcirc L^i)$$

Warunek stopu: $U_{k+1} = U_k$

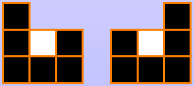
Znajdowanie szkieletu (thinning)





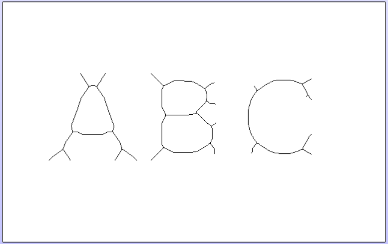
Znajdowanie szkieletu (thinning)

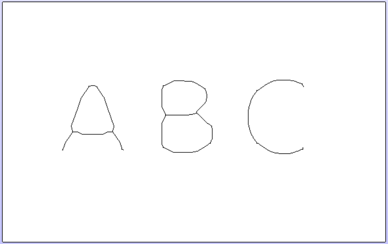
- Szkielet figury w dużym stopniu zależy od regularności brzegu figury.
- Aby usunąć zniekształcenia można zastosować algorytm „obcinania gałęzi" – redukowanie odcinków posiadających wolne zakończenie.
- Osiem elementów strukturalnych utworzonych poprzez obroty



- Wykonuje się określoną liczbę iteracji.

Znajdowanie szkieletu (thinning)





Rozszerzenie na obrazy w skali szarości

- Rozszerzanie można traktować jako filtr maksymalny

$$g(x,y) = \max_{i_m, j_n \in B(i,j)} f(i_m, j_n).$$

- Zwężanie można traktować jako filtr minimalny

$$g(x,y) = \min_{i_m, j_n \in B(i,j)} f(i_m, j_n).$$