Wybrane zagadnienia robotyki

Wykład II

Modele manipulatorów

Janusz Jakubiak
Instytut Informatyki, Automatyki i Robotyki
Politechnika Wrocławska

Przekształcenia pomiędzy p. zadaniową i przegubową

- położeń
  - kinematyka prosta
  - kinematyka odwrotna
- prędkości
  - jakobian
- przyspieszeń (sił i momentów)
  - statyka
  - dynamika

Zadanie kinematyki prostej:

> *Mając dane wartości zmiennych ruchu w przegubach manipulatora znaleźć pozycję i orientację jego końcówki zwanej efektorem.*

Macierz transformacji z układu $i-1$ do układu i:

$$A_{i-1}^{i} = A_{i-1}^{i}(q_i) \in SE(3)$$

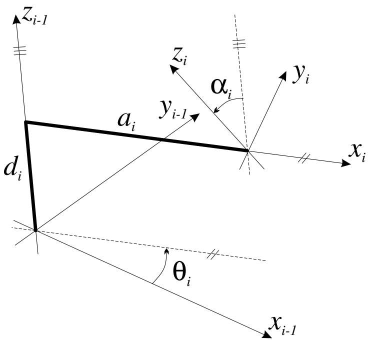
Kinematyka manipulatora:

$$K(q) = A_0^n(q) = A_0^1(q_1)A_1^2(q_2)\cdots A_{n-1}^n(q_n),$$

gdzie $q = [q_1, \ldots, q_n]^T$ – konfiguracja manipulatora.

$$A_{i-1}^{i} = \begin{bmatrix} R_{i-1}^{i} & d_{i-1}^{i} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_0^n = \begin{bmatrix} R_0^n & d_0^n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Parametry Denavita–Hartenberga



θ_i – kąt obrotu w i-tym przegubie[a],

d_i – przesunięcie wzdłuż osi z układu współrzędnych związanego z i-tym przegubem[b],

a_i – przesunięcie wzdłuż osi x bieżącego układu współrzędnych,

α_i – kąt wzajemnego skręcenia osi kolejnych przegubów.

---

[a] zmienna dla przegubu rotacyjnego

[b] zmienna dla przegubu translacyjnego

Kinematyka w oparciu o parametry DH

Przy transformacjach jednorodnych

$$A_{i-1}^{i}(q_i) = Rot(\mathcal{Z}_{i-1}, \theta_i)\,Trans(\mathcal{Z}_{i-1}, d_i)\\ Trans(\mathcal{X}_{i-1}, a_i)\,Rot(\mathcal{X}_{i-1}, \alpha_i)$$

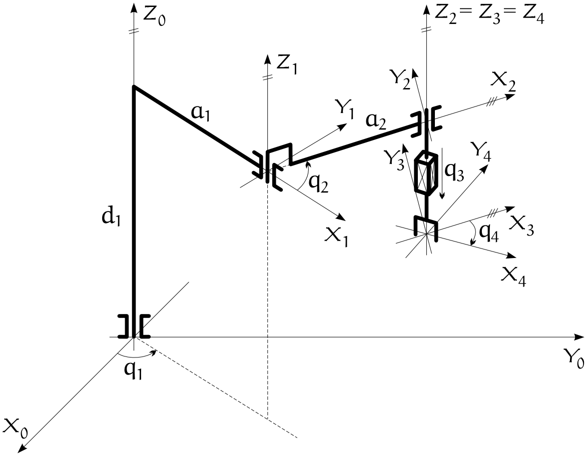
kinematyka manipulatora opisanego parametrami DH dana jest jako

$$\boxed{K(q) = A_0^n(q) = \prod_{i=1}^{n} A_{i-1}^{i}(q_i) = \begin{bmatrix} R_0^n(q) & d_0^n(q) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

Manipulator przemysłowy typu *SCARA*

robot typu SCARA produkowany przez KUKA

Manipulator typu *SCARA* – schemat



Manipulator typu *SCARA* – parametry DH

Na podstawie danych producenta

ogniwo	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	d_1	a_1	0
2	q_2	0	a_2	0
3	0	q_3	0	0
4	q_4	0	0	0

$$d_1 = 246[\mathrm{mm}]$$
$$a_1 = 125[\mathrm{mm}]$$
$$a_2 = 225[\mathrm{mm}]$$

Manipulator typu *SCARA* – kinematyka

$$A_0^1(q_1) = Rot(\mathcal{Z}, q_1)\,Tran(\mathcal{Z}, d_1)\,Tran(\mathcal{X}, a_1)$$
$$A_1^2(q_2) = Rot(\mathcal{Z}, q_2)\,Tran(\mathcal{X}, a_2)$$
$$A_2^3(q_3) = Tran(\mathcal{Z}, q_3)$$
$$A_3^4(q_4) = Rot(\mathcal{Z}, q_4)$$

$$K(q) = \begin{bmatrix} c_{124} & -s_{124} & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ s_{124} & c_{124} & 0 & a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & d_1 + q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kinematyka we współrzędnych

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1(q) \\ k_2(q) \\ k_3(q) \\ k_4(q) \\ k_5(q) \\ k_6(q) \end{bmatrix}$$

Odwrotne zadanie kinematyki

Przy kinematyce prostej danej jako

$$K(q) = A_0^n(q) = \prod_{i=1}^{n} A_i(q_i) = \begin{bmatrix} R_0^n(q) & d_0^n(q) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

odwrotne zadanie kinematyki (OZK):

Dla danej krzywej (trajektorii zewnętrznej efektora) $y(t) \in SE(3)$ ($\mathbb{R}^6$) kawałkami gładkiej dla $t \in [t_0, t_1]$, znaleźć krzywą (trajektorię wewnętrzną) $q(t)$, która realizuje $y(t)$, tzn.

$$y(t) = k(q(t)), \qquad t_0 \leqslant t \leqslant t_1$$

Metody rozwiązania OZK

- metoda bezpośrednia
- rozwiązanie OZK przez odsprzężenie kinematyczne[1]
- metoda geometryczna
- metoda jakobianowa

[1] stosowalna dla manipulatorów, których osie trzech ostatnich przegubów przecinają się w jednym punkcie

Algorytm Newtona w zarysie

Rozwijając kinematykę w szereg Taylora wokół q_0

$$y = k(q_0 + \delta q) = k(q_0) + \frac{\partial k}{\partial q}(q_0)\delta q + o^2(\delta q),$$

$q = q_0 + \delta q$ i pomijając składniki wyższego rzędu[2] dostajemy algorytm Newtona rozwiązania OZK:

$$y - k(q_0) = \frac{\partial k}{\partial q}(q_0)\delta q \Longrightarrow \boxed{\delta q = \left(\frac{\partial k}{\partial q}(q_0)\right)^{-1}(y - k(q_0))}$$

Wersja dyskretna algorytmu Newtona:

$$q_{k+1} - q_k = \left(\frac{\partial k}{\partial q}(q_k)\right)^{-1}(y - k(q_k))$$

$$\boxed{q_{k+1} = q_k + \left(\frac{\partial k}{\partial q}(q_k)\right)^{-1}(y - k(q_k))}$$

[2] przy założeniu, że δq jest dostatecznie mała

Macierz Jacobiego

Po zróżniczkowaniu kinematyki względem czasu otrzymujemy

$$\dot{y} = \frac{\partial k}{\partial q}(q)\dot{q}$$

szukamy zależności prędkości liniowej i kątowej efektora od prędkości w poszczególnych przegubach postaci

$$\dot{y} = J\dot{q},$$

gdzie J – jakobian manipulatora.

$$J = \begin{bmatrix} J_v \\ J_\omega \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} v_0^n = J_v\dot{q} \\ \omega_0^n = J_\omega\dot{q} \end{cases}$$

Analiza jakobianu umożliwia, między innymi, wyznaczenie konfiguracji osobliwych manipulatora.

Statyka manipulatora

Statyka opisuje zależność pomiędzy siłami i momentami sił przyłożonymi do przegubów manipulatora $\tau \in R^n$ a siłami i momentami sił przyłożonych do końcówki efektora $\gamma \in R^r$ w stanie równowagi manipulatora.

Na podstawie zasady pracy wirtualnej otrzymujemy wynik

$$\tau = J^T(q)\gamma$$

Dynamika manipulatora

Dynamika opisuje sposób zachowania się manipulatora poddanego wymuszeniu w postaci momentów/sił napędowych

- Proste zadanie dynamiki, $\tau \longrightarrow q$
- Odwrotne zadanie dynamiki, $q \longrightarrow \tau$

$$\boxed{D(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau,}$$

Formalizmy do wyprowadzania równań dynamiki:

1. Newtona-Eulera
2. Eulera-Lagrange'a
3. Kane'a

Model dynamiki

$$\boxed{D(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau,}$$

$D(q)$ – macierz inercji (symetryczna i dodatniookreślona);

$C(q,\dot{q})$ – macierz sił Coriolisa i odśrodkowych;

$G(q)$ – wektor sił związanych z siłami grawitacji;

τ – wektor sił i momentów niepotencjalnych działających na układ (tarcia, opory ruchu, więzy, sterowania).

Własności modelu dynamiki

- $D(q)$ – macierz symetryczna i dodatniookreślona;
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}D(q(t)) = C(q(t),\dot{q}(t)) + C^T(q(t),\dot{q}(t))$

Formalizm Eulera-Lagrange'a

Zgodnie z zasadą najmniejszego działania dla układu o współrzędnych uogólnionych q i prędkościach uogólnionych $\dot{q}$

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q})\mathrm{d}t \quad \longrightarrow \quad \text{min},$$

gdzie $L(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - V(q)$ – lagranżian układu.
$K(q, \dot{q})$ – energia kinetyczna układu
$V(q)$ – energia potencjalna.

Formalizm Eulera-Lagrange'a

Warunkiem koniecznym minimum działania jest spełnienie równań Lagrange'a II rodzaju:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L(q(t),\dot{q}(t))}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L(q(t),\dot{q}(t))}{\partial q_i} = u_i(t), \qquad (1)$$

dla $i = 1, \ldots, n$, gdzie u_i – wszystkie momenty i siły zewnętrzne typu niepotencjalnego.

Macierz pseudoinercji

J_k^k – macierz psudoinercji $k$tego przegubu wyrażona w układzie $k$tym

$$J_k^k = \int_{m_k} \begin{bmatrix} x^2 & xy & xz & x \\ xy & y^2 & yz & y \\ xz & yz & z^2 & z \\ x & y & z & 1 \end{bmatrix} dm$$

Uwagi:

- J_k^k jest symetryczna
- element $\left(J_k^k\right)_{44}$ jest równy masie ogniwa k
- 3 pierwsze elementy 4 kolumny opisują położenie środka masy ogniwa k (przemnożone przez masę ogniwa)

Obliczanie równania dynamiki

$$D_{ij} = \operatorname{tr} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial A_0^k}{\partial q_i} J_k^k \left(\frac{\partial A_0^k}{\partial q_j} \right)^T$$

$$G_i = - \sum_{k=1}^{n} m_k \left\langle \bar{g}, \frac{\partial A_0^k}{\partial q_i} \bar{r}_k \right\rangle ,$$

gdzie $\bar{g} = \begin{bmatrix} g \\ 0 \end{bmatrix}$ a $\bar{r}_k = \begin{bmatrix} r_k \\ 0 \end{bmatrix}$, r_k – położenie środka masy ogniwa k

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} C_{kj}^i \dot{q}_k , \quad C_{kj}^i = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial D_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial D_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial D_{jk}}{\partial q_i} \right)$$