

Podstawy robotyki

Wykład VI

Dynamika manipulatora

Robert Muszyński **Janusz Jakubiak**

Instytut Cybernetyki Technicznej
Politechnika Wrocławska



Dynamika manipulatora

Dynamika opisuje sposób zachowania się manipulatora poddanego wymuszeniu w postaci momentów/sił napędowych

- ▶ Proste zadanie dynamiki, $\tau \longrightarrow q$
- ▶ Odwrotne zadanie dynamiki, $q \longrightarrow \tau$

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau,$$

Formalizmy do wyprowadzania równań dynamiki:

1. Newtona-Eulera
2. Eulera-Lagrange'a
3. Kane'a



Porównanie formalizmów wyprowadzania równań dynamiki

Eulera-Lagrange'a:

- ▶ systematyczny,
- ▶ wyprowadzone równania ruchu są w zwartej, analitycznej formie, wygodnej przy projektowaniu układu sterowania
- ▶ umożliwia efektywne dodanie złożonych efektów mechanicznych, takich jak elastyczności przegubów/ramion

Newtona-Eulera:

- ▶ ze swej natury rekurencyjny, efektywny obliczeniowo



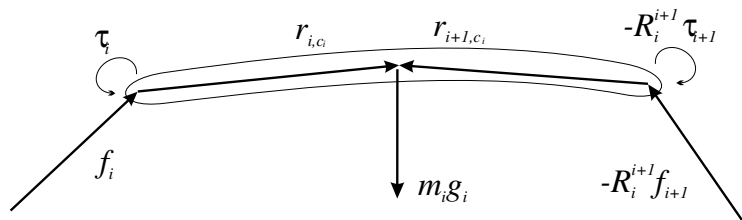
Założenia metody Newtona-Eulera

Prawa mechaniki newtonowskiej wykorzystywane w formalizmie Newtona–Eulera:

1. każda akcja wywołuje reakcję;
2. prędkość zmian pędu ciała jest równa sumie sił przyłożonych do niego;
3. prędkość zmian popędu ciała jest równa sumie momentów sił przyłożonych do niego.



Założenia metody Newtona-Eulera – ilustracja



m_i – masa i -tego ogniwa;

r_{i,c_j} – wektor z przegubu i -tego do śr. masy ogniwa j -tego;

$r_{i,i+1}$ – wektor z przegubu i -tego do $i + 1$ -ego;

f_i – siła wywierana przez ogniwo $i - 1$ na ogniwo i -te;

τ_i – moment wywierany przez ogn. $i - 1$ na ogn. i -te;

g_i – przyspieszenie ziemskie wyrażone w i -tym układzie.



Założenia metody Newtona-Eulera – siły

prędkość zmian pędu ciała jest równa sumie sił przyłożonych do niego

$$\frac{d(mv)}{dt} = f, \quad (1)$$

m – masa ciała,

v – prędkość środka masy,

f – wypadkowa sił zewnętrznych.

U nas $\frac{dm}{dt} = 0$ stąd

$$ma = f,$$

$a = \dot{v}$ – przyspieszenie środka masy ciała.



Założenia metody Newtona-Eulera – momenty sił

prędkość zmian popędu ciała jest równa sumie momentów sił przyłożonych do niego

$$\frac{d(I_0\omega_0)}{dt} = \tau_0, \quad (2)$$

I_0 – moment bezwładności ciała wyrażony w inercyjnym układzie odniesienia,

ω_0 – prędkość kątowna ciała,

τ_0 – wypadkowy moment przyłożony do ciała.

Równanie (2) w lokalnym układzie współrzędnych ma postać¹:

$$I\dot{\omega} + \omega \times (I\omega) = \tau.$$

¹przy $I = \text{const}$



Założenia metody Newtona-Eulera – prawo równowagi

Równanie równowagi sił:

$$f_i - R_i^{i+1} f_{i+1} + m_i g_i = m_i a_{c,i},$$

gdzie $a_{c,i}$ – przyspieszenie środka masy i -tego ogniwa wyrażone w układzie inercyjnym.

Równanie równowagi momentów:

$$\begin{aligned} \tau_i - R_i^{i+1} \tau_{i+1} + f_i \times r_{i,c_i} + \\ - (R_i^{i+1} f_{i+1}) \times r_{i+1,c_i} = I_i \alpha_i + \omega_i \times (I_i \omega_i), \end{aligned}$$

gdzie I_i – macierz inercji ogniwa i -tego wyrażona w ukł. współ. równoległym do ukł. i -tego o środku umieszczonym w środku masy ogniwa i -tego, α_i – przyspieszenie kątowe ogniwa i -tego wyrażone w układzie inercyjnym.



Idea metody Newtona–Eulera

Idea metody Newtona–Eulera: dla danych współrzędnych uogólnionych i ich pochodnych q, \dot{q}, \ddot{q} określić wektory sił f_1, f_2, \dots, f_n i momentów $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ w następujący sposób:

- ▶ dla danych q, \dot{q}, \ddot{q} określić wszystkie prędkości i przyspieszenia występujące w układzie;
- ▶ mając wszystkie prędkości i przyspieszenia wyznaczyć siły i momenty występujące w układzie.



Metoda Newtona–Eulera

W celu wykorzystania metody Newtona–Eulera należy:

- ▶ zakładając

$$\omega_0 = 0, \alpha_0 = 0, a_{c,0} = 0, a_{e,0} = 0,$$

$a_{e,i}$ – przyspieszenie końca i -tego ogniwa, wyliczyć równania:

$$\omega_i = (R_{i-1}^i)^T \omega_{i-1} + b_i \dot{q}_i, \quad b_i = (R_0^i)^T z_{i-1},$$

$$\alpha_i = (R_{i-1}^i)^T \alpha_{i-1} + b_i \ddot{q}_i + \omega_i \times b_i \dot{q}_i,$$

$$a_{e,i} = (R_{i-1}^i)^T a_{e,i-1} + \dot{\omega}_i \times r_{i,i+1} + \omega_i \times (\omega_i \times r_{i,i+1}),$$

$$a_{c,i} = (R_{i-1}^i)^T a_{e,i-1} + \dot{\omega}_i \times r_{i,c_i} + \omega_i \times (\omega_i \times r_{i,c_i}),$$

dla $i = 1, 2, \dots, n$.



Metoda Newtona–Eulera

- ▶ zakładając

$$f_{n+1} = 0, \tau_{n+1} = 0$$

wyliczyć równania

$$f_i = R_i^{i+1} f_{i+1} - m_i g_i + m_i a_{c,i},$$

$$\tau_i = R_i^{i+1} \tau_{i+1} - f_i \times r_{i,c_i} +$$

$$+ (R_i^{i+1} f_{i+1}) \times r_{i+1,c_i} + I_i \alpha_i + \omega_i \times (I_i \omega_i),$$

dla $i = n, n - 1, \dots, 1$.



Metoda Newtona–Eulera

Otrzymane równania są postaci:

$$\sum_{k=1}^n d_{ik}(q)\ddot{q}_k + \sum_{j,k=1}^n c_{jk}^i(q)\dot{q}_j\dot{q}_k + g_i(q) = \tau_i,$$

dla $i = 1, 2, \dots, n$. Definiując

$$c_{ij}(q, \dot{q}) \triangleq \sum_{k=1}^n c_{jk}^i \dot{q}_k,$$

otrzymujemy wektorowe równanie dynamiki:

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau,$$



Model dynamiki

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau,$$

- $D(q)$ – macierz inercji (symetryczna i dodatniookreślona);
- $C(q, \dot{q})$ – macierz sił Coriolisa i odśrodkowych;
- $G(q)$ – wektor sił związanych z siłami grawitacji;
- τ – wektor sił i momentów niepotencjalnych działających na układ (tarcia, opory ruchu, więzy, sterowania).

Własności modelu dynamiki

- ▶ $D(q)$ – macierz symetryczna i dodatniookreślona;
- ▶ $\frac{d}{dt}D(q(t)) = C(q(t), \dot{q}(t)) + C^T(q(t), \dot{q}(t))$



Formalizm Eulera-Lagrange'a

Zgodnie z zasadą najmniejszego działania dla układu o współrzędnych uogólnionych q i prędkościach uogólnionych \dot{q}

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt \longrightarrow \min,$$

gdzie $L(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - V(q)$ – lagranżian układu.
 $K(q, \dot{q})$ – energia kinetyczna układu
 $V(q)$ – energia potencjalna.



Formalizm Eulera-Lagrange'a

Warunkiem koniecznym minimum działania jest spełnienie równań Lagrange'a II rodzaju:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial q_i} = u_i(t), \quad (3)$$

dla $i = 1, \dots, n$, gdzie u_i – wszystkie momenty i siły zewnętrzne typu niepotencjalnego.



Macierz pseudoinercji

J_k^k – macierz pseudoinercji k tego przegubu wyrażona w układzie k tym

$$J_k^k = \int_{m_k} \begin{bmatrix} x^2 & xy & xz & x \\ xy & y^2 & yz & y \\ xz & yz & z^2 & z \\ x & y & z & 1 \end{bmatrix} dm$$

Uwagi:

- ▶ J_k^k jest symetryczna
- ▶ element $(J_k^k)_{44}$ jest równy masie ogniwa k
- ▶ 3 pierwsze elementy 4 kolumny opisują położenie środka masy ogniwa k (przemnożone przez masę ogniwa)



Obliczanie równania dynamiki

$$D_{ij} = \text{tr} \sum_{k=1}^n \frac{\partial A_0^k}{\partial q_i} J_k^k \left(\frac{\partial A_0^k}{\partial q_j} \right)^T$$

$$G_i = - \sum_{k=1}^n m_k \left\langle \bar{g}, \frac{\partial A_0^k}{\partial q_i} \bar{r}_k \right\rangle,$$

gdzie $\bar{g} = \begin{bmatrix} g \\ 0 \end{bmatrix}$ a $\bar{r}_k = \begin{bmatrix} r_k \\ 0 \end{bmatrix}$, r_k – położenie środka masy ogniwa k

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^n C_{kj}^i \dot{q}_k, \quad C_{kj}^i = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial D_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial D_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial D_{jk}}{\partial q_i} \right)$$



Manipulator jako obiekt sterowania

Dla manipulatora o dynamice i kinematyce danej układem równań:

$$\begin{cases} \tau = D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) \\ y = k(q) \end{cases},$$

położmy

$$x(t) = q(t), \quad \xi(t) = \dot{q}(t), \quad u(t) = \tau(t).$$

Wówczas otrzymamy układ rr pierwszego rzędu

$$\begin{cases} \dot{x} = \xi \\ \dot{\xi} = -D^{-1}(x)(C(x, \xi)\xi + G(x)) + D^{-1}(x)u, \\ y = k(x) \end{cases}$$

czyli afiniczny układ sterowania o postaci:

$$\begin{cases} \dot{x} = \xi \\ \dot{\xi} = F(x, \xi) + G(x)u, \\ y = k(x) \end{cases}$$

