Podstawy robotyki

Wykład V

Jakobian manipulatora i osobliwości

Robert Muszyński **Janusz Jakubiak**
Instytut Cybernetyki Technicznej
Politechnika Wrocławska

Metoda bezpośrednia uzyskania macierzy Jacobiego

Jeśli kinematyka manipulatora dana jest równaniem:

$$y = k(q), \qquad y \in \mathbb{Y},\ q \in \mathbb{Q},$$

wtedy po zróżniczkowaniu względem czasu otrzymujemy

$$\dot{y} = \frac{\partial k}{\partial q}(q)\dot{q}$$

- wyznaczyć kinematykę manipulatora $k(q)$,
- wybrać współrzędne,
- wyrazić kinematykę w wybranych współrzędnych,
- formalnie zróżniczkować kinematykę $k \rightarrow \frac{\partial k}{\partial q}$.

Metoda pośrednia uzyskania macierzy Jacobiego

Dla kinematyki danej w postaci

$$T_0^n = \begin{bmatrix} R_0^n & d_0^n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

szukamy zależności prędkośći liniowej i kątowej efektora od prędkości w poszczególnych przegubach w postaci

$$\dot{y} = J\dot{q},$$

gdzie J – jakobian manipulatora.
Szukamy jakobianu

$$J = \begin{bmatrix} J_v \\ J_\omega \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} v_0^n = J_v\dot{q} \\ \omega_0^n = J_\omega\dot{q} \end{cases}$$

Metoda pośrednia uzyskania macierzy Jacobiego

- Prędkość liniowa

$$v_0^n = \dot{d}_0^n$$

- Prędkość kątowa

$$R_0^n (R_0^n)^T = I$$

$$\frac{\mathrm{d}R_0^n}{\mathrm{d}q}(R_0^n)^T + R_0^n \frac{\mathrm{d}(R_0^n)^T}{\mathrm{d}q} = 0$$

Zdefiniujmy

$$S \triangleq \frac{\mathrm{d}R_0^n}{\mathrm{d}q}(R_0^n)^T.$$

Wówczas

$$S^T = \left(\frac{\mathrm{d}R_0^n}{\mathrm{d}q}(R_0^n)^T\right)^T = R_0^n \frac{\mathrm{d}(R_0^n)^T}{\mathrm{d}q}.$$

Metoda pośrednia. . . – prędkość kątowa

$$S \triangleq \frac{\mathrm{d}R_0^n}{\mathrm{d}q}(R_0^n)^T$$

$$S^T = R_0^n \frac{\mathrm{d}(R_0^n)^T}{\mathrm{d}q}$$

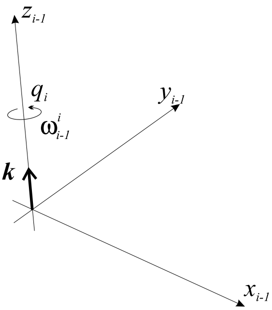
Mamy więc

$$\boxed{S + S^T = 0}$$

$$S(\omega_0^n) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \omega_0^n = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}.$$

$$S(\omega_0^n)p = \omega_0^n \times p$$

Metoda pośrednia. . . – prędkość kątowa



- przegub rotacyjny

$$\omega^i_{i-1} = \dot{q}_i k, \qquad k = [0, 0, 1]^T$$

- przegub translacyjny

$$\omega^i_{i-1} = 0$$

Metoda pośrednia. . . – prędkość kątowa

Można pokazać, że

$$\omega_0^n = \omega_0^1 + R_0^1\omega_1^2 + \ldots + R_0^{n-1}\omega_{n-1}^n.$$

W naszym przypadku

$$\omega_0^n \ = \ \rho_1\dot{q}_1 k + \rho_2\dot{q}_2 R_0^1 k + \ldots + \rho_n\dot{q}_n R_0^{n-1} k \ = \ \sum_{i=1}^{n}\rho_i\dot{q}_i z_{i-1},$$

gdzie $z_{i-1} = R_0^{i-1}k$ – trzecia kolumna macierzy R_0^{i-1},

$$\rho_i = \begin{cases} 0 \text{ – przegub translacyjny} \\ 1 \text{ – przegub rotacyjny} \end{cases}.$$

Metoda pośrednia. . . – prędkość liniowa

Wyliczając różniczkę zupełną $\dot{d}_0^n$ otrzymujemy

$$\dot{d}_0^n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial d_0^n}{\partial q_i} \dot{q}_i.$$

Zatem w j-tej kolumnie macierzy J_v znajduje się wektor $\frac{\partial d_0^n}{\partial q_i}$.
Przypomnijmy

$$\begin{bmatrix} R_{i-1}^i & d_{i-1}^i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = Rot(z_{i-1}, \theta_i) Trans(z_{i-1}, d_i)$$

$$Trans(x_{i-1}, a_i) Rot(x_{i-1}, \alpha_i) = \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} c_{\alpha_i} & s_{\theta_i} s_{\alpha_i} & a_i c_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i} c_{\alpha_i} & -c_{\theta_i} s_{\alpha_i} & a_i s_{\theta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Metoda pośrednia. . . – prędkość liniowa

Stąd

$$d^i_{i-1} = d_i k + a_i R^i_{i-1} i = q_i k + a_i R^i_{i-1} i.$$

Przy poruszanym tylko i-tym przegubie

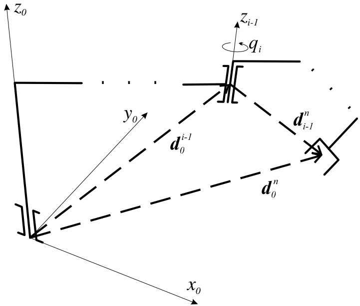
$$\dot{d}^n_0 = R^{i-1}_0 \dot{d}^i_{i-1} = \dot{q}_i R^{i-1}_0 k = \dot{q}_i z_{i-1}.$$

A zatem

$$\boxed{\frac{\partial d^n_0}{\partial q_i} = z_{i-1}}$$

Metoda pośrednia. . . – prędkość liniowa

- przegub rotacyjny



$$d_0^n = d_o^{i-1} + R_0^{i-1} d_{i-1}^n$$

Ponieważ d_0^{i-1}, R_0^{i-1} niezależna od q_i

$$\dot{d}_0^n = R_0^{i-1} \dot{d}_{i-1}^n.$$

Prędkość liniowa powodowana ruchem q_i

$$\dot{d}_{i-1}^n = \dot{q}_i k \times d_{i-1}^n.$$

Metoda pośrednia. . . – prędkość liniowa

Stąd

$$\dot{d}_0^n = R_0^{i-1}(\dot{q}_i k \times d_{i-1}^n) = \dot{q}_i R_0^{i-1} k \times R_0^{i-1} d_{i-1}^n = \dot{q}_i z_{i-1} \times (d_0^n - d_0^{i-1}).$$

Mamy zatem

$$\boxed{\frac{\partial d_0^n}{\partial q_i} = z_{i-1} \times (d_0^n - d_0^{i-1})}$$

Metoda pośrednia...– podsumowanie

Podsumowując jakobian dany jest w postaci

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 & \dots & J_n \end{bmatrix}$$

gdzie i-ta kolumna

$$J_i = \begin{bmatrix} z_{i-1} \times (d_0^n - d_0^{i-1}) \\ z_{i-1} \end{bmatrix}$$

dla przegubu rotacyjnego lub

$$J_i = \begin{bmatrix} z_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

dla przegubu translacyjnego.

Związek pomiędzy jakobianem a macierzą Jacobiego

Po wybraniu współrzędnych w przestrzeni zewnętrznej jako współrzędne kartezjańskie + kąty orientacji dostajemy

$$J(q) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M(y) \end{bmatrix} \frac{\partial k}{\partial q}(q)$$

gdzie $M(y) = \begin{bmatrix} m_1(y) & m_2(y) & m_3(y) \end{bmatrix}$,
$m_i(y)$ – wektory jednostkowe osi obrotu wokół których mierzone są kąty orientacji.
Np. dla kątów Eulera

$$M(y) = \begin{bmatrix} -\cos\phi\cot\theta & -\sin\phi\cot\theta & 1 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ \frac{\cos\phi}{\sin\theta} & \frac{\sin\phi}{\sin\theta} & 0 \end{bmatrix}$$

określone dla $0 < \theta < \pi$.

Metoda jakobianowa rozwiązania OZK

Mamy dane

$$\dot{y} = \frac{\partial k}{\partial q}\dot{q}, \qquad y(t), \quad t \in [t_0, t_k]. \tag{1}$$

Szukamy $q(t)$ dla $t \in [t_0, t_k]$. W tym celu wyliczamy $y(t_0)$ i przy użyciu algorytmu Newtona znajdujemy $q(t_0)$. Następnie rozwiązujemy równanie różniczkowe

$$\dot{q} = \left(\frac{\partial k}{\partial q}\right)^{-1} \dot{y} \tag{2}$$

z warunkiem początkowym $q(t_0)$.

Metoda jakobianowa – Inwers uogólniony

Równania (1) są postaci

$$y_{(m\times 1)} = A_{(m\times n)} q_{(n\times 1)}.$$

Przy danym y szukamy q, gdy $m \leqslant n$, $\mathrm{rank} A = m$.
Będziemy szukali rozwiązania szczegółowego minimalizującego energię

$$H(q) = \frac{1}{2}\langle q, q\rangle$$

przy ograniczeniach $y = Aq$. Tworzymy funkcję Lagrange'a

$$L(q) = \frac{1}{2}\langle q, q\rangle + \lambda^T(y - Aq) = \frac{1}{2}\langle q, q\rangle + \langle \lambda, y - Aq\rangle.$$

Z warunków na minimum mamy

$$\frac{\partial L}{\partial q} = q^T - \lambda^T A = 0 \qquad \Rightarrow \qquad q = A^T\lambda.$$

Metoda jakobianowa – inwers uogólniony

Stąd

$$y = AA^T\lambda$$

co prowadzi do

$$\lambda = \left(AA^T\right)^{-1} y. \tag{3}$$

Wstawiając (3) do wyniku minimalizacji dostajemy

$$q = A^T \left(AA^T\right)^{-1} y = A^+ y.$$

Macierz

$$A^+ = A^T \left(AA^T\right)^{-1}$$

nazywa się pseudoinwersem Moore'a–Penrose'a.

Metoda jakobianowa – inwers uogólniony

Równania $y = Aq$ będą spełnione, jeżeli do rozwiązania szczegółowego $q = A^+ y$ dodamy element z taki, że $Az = 0$, co oznacza, że

$$z \in \mathrm{Ker} A.$$

Stąd rozwiązanie ogólne

$$q = A^+ y + z, \qquad z \in \mathrm{Ker} A,$$

lub przy

$$z = (I - A^+ A)\omega, \qquad \omega \in \mathbb{R}^n$$

ostatecznie

$$q = A^+ y + (I - A^+ A)\omega, \qquad \omega \in \mathbb{R}^n.$$

Metoda jakobianowa – inwers uogólniony

Sprawdźmy

$$y = Aq = AA^+ y + (A - \underbrace{AA^+ A}_{A})\omega = Iy + 0 = y.$$

Skoro ω dowolne, dobierzmy je tak by optymalizować np. manipulowalność

$$\omega = \operatorname*{grad}_{q} \left(-\sqrt{\det(AA^T)} \right).$$

Metoda jakobianowa rozwiązania OZK. Podsumowanie.

Przy równaniu

$$y = k(q), \qquad y \in \mathbb{Y},\ q \in \mathbb{Q}, \tag{4}$$

$\dim \mathbb{Y} = m$, $\dim \mathbb{Q} = n$, i danym $y_d(t)$ dla $t \in [t_0, t_k]$ (lub y_d) znaleźć $q(t)$ (lub q) takie, że (4) spełnione dla $y_d(t)$ (lub y_d).

Metoda jakobianowa rozwiązania OZK. Podsumowanie.

- gdy $n = m$ i macierz Jacobiego nieosobliwa:

$$\dot{q}(t) = \left(\frac{\partial k}{\partial q}(q(t))\right)^{-1} \dot{y}(t), \qquad k(q(t_0)) = y(t_0),$$

- gdy $n \geqslant m$ i $\mathrm{rank}\frac{\partial k}{\partial q}(q(t)) = m$:

$$\dot{q}(t) = \left(\frac{\partial k}{\partial q}(q(t))\right)^{+} \dot{y}(t), \qquad k(q(t_0)) = y(t_0),$$

lub ogólniej

$$\dot{q}(t) = \left(\frac{\partial k}{\partial q}(q(t))\right)^{+} \dot{y}(t) + \left(I - \left(\frac{\partial k}{\partial q}(q(t))\right)^{+} \frac{\partial k}{\partial q}(q(t))\right) \omega(t).$$

Metoda jakobianowa rozwiązania OZK. Podsumowanie.

Metoda Newtona

- gdy $n = m$ i macierz Jacobiego nieosobliwa:

$$q_{k+1} = q_k + \left(\frac{\partial k}{\partial q}(q_k)\right)^{-1} (y_d - k(q_k)),$$

- gdy $n \geqslant m$ i $\mathrm{rank}\frac{\partial k}{\partial q}(q(t)) = m$:

$$q_{k+1} = q_k + \left(\frac{\partial k}{\partial q}(q_k)\right)^{+} (y_d - k(q_k)),$$

$$\left(\frac{\partial k}{\partial q}(q_k)\right)^{+} = \left(\frac{\partial k}{\partial q}\right)^{T} \left(\frac{\partial k}{\partial q}\left(\frac{\partial k}{\partial q}\right)^{T}\right)^{-1} (q_k)$$

Osobliwości

Macierz Jacobiego kinematyki manipulatora $\frac{\partial k}{\partial q}(q)$ określa zależność

$$\dot{y} = \frac{\partial k}{\partial q}(q)\dot{q}, \qquad y \in \mathbb{Y}, q \in \mathbb{Q}, \dim \mathbb{Y} = m, \dim \mathbb{Q} = n,$$

co można zapisać jako

$$\mathrm{d}y = \frac{\partial k}{\partial q}(q)\mathrm{d}q,$$

gdzie różniczki $\mathrm{d}y$ i $\mathrm{d}q$ określają kierunki w $\mathbb{Y}$ i $\mathbb{Q}$. Jeśli więc

$$\mathrm{rank}\frac{\partial k}{\partial q}(q) < \min(n, m)$$

istnieją w $\mathbb{Y}$ kierunki, które nie mogą zostać wygenerowane przez jakiekolwiek kierunki w $\mathbb{Q}$.

Osobliwości

Definicje

Punktem regularnym kinematyki k nazywamy taką konfigurację $q \in \mathbb{Q}$, że

$$\mathrm{rank}\frac{\partial k}{\partial q}(q) = \min(n, m).$$

Punktem osobliwym nazywamy takie $q \in \mathbb{Q}$, że

$$\mathrm{rank}\frac{\partial k}{\partial q}(q) < \min(n, m).$$

Niech $q \in \mathbb{Q}$ będzie konfiguracją osobliwą. Wówczas

$$\mathrm{d}y = \frac{\partial k}{\partial q}(q)\mathrm{d}q,$$

oraz $\mathrm{Ker}\frac{\partial k}{\partial q}(q) \neq 0$. Oznacza to, że $\exists \mathrm{d}q \neq 0$ która daje zerową zmianę $\mathrm{d}y$.

Osobliwości

W otoczeniu osobliwości:

- ruch w pewnych kierunkach w $\mathbb{Y}$ jest nieosiągalny;
- pewne ruchy w $\mathbb{Q}$ nie powodują ruchu w $\mathbb{Y}$;
- ograniczone prędkości efektora mogą wymagać nieograniczonych prędkości w przegubach;
- może nie istnieć jednoznaczne rozwiązanie OZK;
- duże siły na efektorze mogą powodować niewielkie siły w przegubach.

Osobliwości

Przy zależności

$$\mathrm{d}y = \frac{\partial k}{\partial q}(q)\mathrm{d}q,$$

wirtualna praca układu

$$\mathrm{d}w = F^T \mathrm{d}y - \tau^T \mathrm{d}q,$$

gdzie F – wektor sił i momentów na chwytaku, τ – wektor momentów/sił w przegubach, wyraża się jako

$$\mathrm{d}w = \left(F^T \frac{\partial k}{\partial q}(q) - \tau^T \right) \mathrm{d}q,$$

co równe jest zeru jeśli manipulator pozostaje w równowadze. Stąd

$$\tau = \left(\frac{\partial k}{\partial q}(q) \right)^T F,$$