Podstawy robotyki

Wykład IV

Kinematyka odwrotna manipulatora

Robert Muszyński **Janusz Jakubiak**
Instytut Informatyki, Automatyki i Robotyki
Politechnika Wrocławska

Odwrotne zadanie kinematyki

Przy kinematyce prostej danej jako

$$K(q) = A_0^n(q) = \prod_{i=1}^{n} A_i(q_i) = \begin{bmatrix} R_0^n(q) & d_0^n(q) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

odwrotne zadanie kinematyki (OZK):

> *Dla danej krzywej (trajektorii zewnętrznej efektora) $y(t) \in SE(3)$ ($\mathbb{R}^6$) kawałkami gładkiej dla $t \in [t_0, t_1]$, znaleźć krzywą (trajektorię wewnętrzną) $q(t)$, która realizuje $y(t)$, tzn.*
>
> $$y(t) = k(q(t)), \qquad t_0 \leqslant t \leqslant t_1$$

Metody rozwiązania OZK

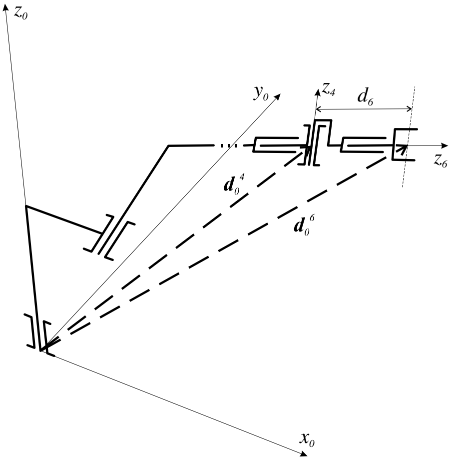
- metoda bezpośrednia
- rozwiązanie OZK przez odsprzężenie kinematyczne[1]
- metoda geometryczna
- metoda jakobianowa

[1] stosowalna dla manipulatorów, których osie trzech ostatnich przegubów przecinają się w jednym punkcie

Metoda bezpośrednia rozwiązania OZK

$$
\left.
\begin{array}{r}
T_0^n = A_1 A_2 \cdots A_n \\
\hline
A_1^{-1} T_0^n = A_2 A_3 \cdots A_n \\
A_2^{-1} A_1^{-1} T_0^n = A_3 A_4 \cdots A_n \\
\cdots \\
A_{n-1}^{-1} \cdots A_1^{-1} T_0^n = A_n
\end{array}
\right\}_{n \times 12}
$$

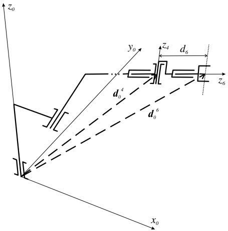
Rozwiązanie przez odsprzężenie kinematyczne 1



Dane:

$$R_0^6(q_1,\ldots,q_6) = R$$
$$d_0^6(q_1,\ldots,q_6) = d$$

Rozwiązanie przez odsprzężenie kinematyczne 2



Dane:

$$R_0^6(q_1, \ldots, q_6) = R$$

$$d_0^6(q_1, \ldots, q_6) = d$$

1. Wyznaczyć q_1, q_2, q_3 tak aby

$$d_0^4 = d - d_6 R k \qquad k = (0, 0, 1)^T$$

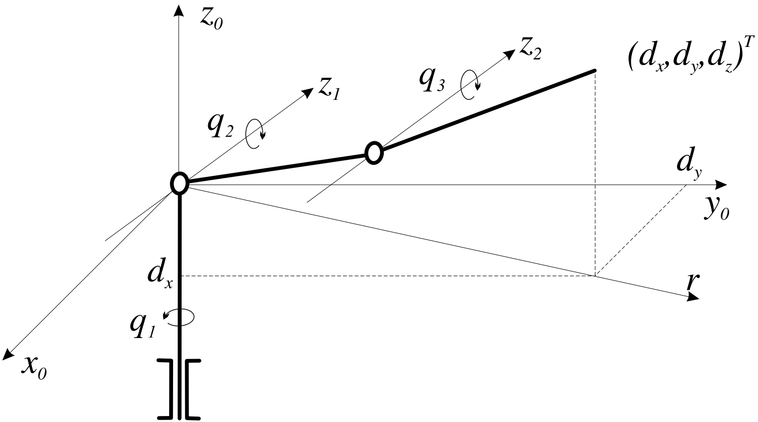
2. Policzyć na podstawie q_1, q_2, q_3 macierz

$$R_0^3 = R_0^1 R_1^2 R_2^3$$

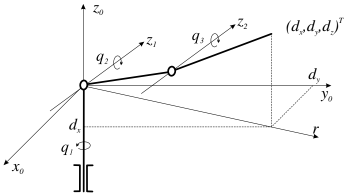
3. Wyznaczyć q_4, q_5, q_6 korzystając z zależności

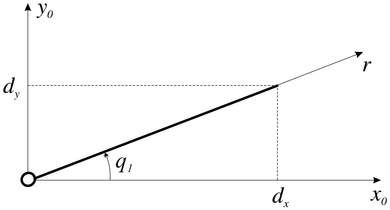
$$R_3^6 = (R_0^3)^{-1} R_0^6 = (R_0^3)^T R$$

Metoda geometryczna rozwiązania OZK 1

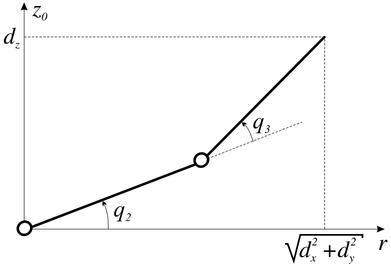


Metoda geometryczna rozwiązania OZK 2





$q_1 = \mathrm{atan2}(d_y, d_x)$



podwójne wahadło

Metoda jakobianowa rozwiązania OZK – wstęp

Dla kinematyki danej równaniem:

$$y = k(q), \qquad y \in \mathbb{Y},\ q \in \mathbb{Q},$$

przy $\dim \mathbb{Q} = \dim \mathbb{Y} = n$, warunkiem koniecznym istnienia gładkiego $k^{-1}(y)$ jest nieosobliwość *macierzy Jacobiego* $\frac{\partial k}{\partial q}$ kinematyki k

$$\mathrm{rank}^2 \frac{\partial k}{\partial q} = n.$$

[2] gdzie „rank” oznacza rząd macierzy

Algorytm Newtona w zarysie

Rozwijając kinematykę w szereg Taylora wokół q_0

$$y = k(q_0 + \delta q) = k(q_0) + \frac{\partial k}{\partial q}(q_0)\delta q + o^2(\delta q),$$

$q = q_0 + \delta q$ i pomijając składniki wyższego rzędu[3] dostajemy <u>algorytm Newtona</u> rozwiązania OZK:

$$y - k(q_0) = \frac{\partial k}{\partial q}(q_0)\delta q \Longrightarrow \boxed{\delta q = \left(\frac{\partial k}{\partial q}(q_0)\right)^{-1}(y - k(q_0))}$$

Wersja dyskretna algorytmu Newtona:

$$q_{k+1} - q_k = \left(\frac{\partial k}{\partial q}(q_k)\right)^{-1}(y - k(q_k))$$

$$\boxed{q_{k+1} = q_k + \left(\frac{\partial k}{\partial q}(q_k)\right)^{-1}(y - k(q_k))}$$

[3] przy założeniu, że δq jest dostatecznie mała