Podstawy robotyki

Wykład II

Ruch ciała sztywnego w przestrzeni euklidesowej

Robert Muszyński **Janusz Jakubiak**
Instytut Informatyki, Automatyki i Robotyki
Politechnika Wrocławska

Preliminaria matematyczne 1

- przestrzeń euklidesowa $(\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle)$

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3, \qquad \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$$

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T \qquad \mathbf{y} = [y_1, y_2, y_3]^T$$

- iloczyn skalarny $(\langle\cdot,\cdot\rangle)$

$$\langle \alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle = \alpha\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{y} \rangle + \beta\langle \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle$$
$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$$
$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geqslant 0$$

Preliminaria matematyczne 2

- norma (długość wektora) ($\|\cdot\|$)

$$
\begin{aligned}
&\|\mathbf{x}\| = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle^{\frac{1}{2}} \\
&\|\mathbf{x}\| \geqslant 0 \qquad\qquad \|\mathbf{x}\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{0} \\
&\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\| \\
&\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \\
&\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y})
\end{aligned}
$$

Preliminaria matematyczne 2

- norma (długość wektora) ($\|\cdot\|$)

$$
\begin{aligned}
&\|\mathbf{x}\| = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle^{\frac{1}{2}} \\
&\|\mathbf{x}\| \geqslant 0 \qquad\qquad \|\mathbf{x}\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{0} \\
&\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\| \\
&\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \\
&\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y})
\end{aligned}
$$

- metryka euklidesowa (odległość) ($\rho(\cdot, \cdot)$)

$$
\begin{aligned}
&\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \\
&\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{y} \\
&\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \rho(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \\
&\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \rho(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \geqslant \rho(\mathbf{x}, \mathbf{z})
\end{aligned}
$$

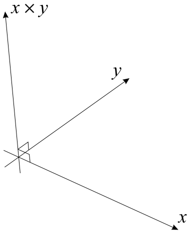
Preliminaria matematyczne 3

- iloczyn wektorowy ($\cdot \times \cdot$)

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T \qquad \mathbf{y} = [y_1, y_2, y_3]^T$$

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} =$$

$$= (x_2 y_3 - x_3 y_2)\mathbf{i} + (x_3 y_1 - x_1 y_3)\mathbf{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\mathbf{k}$$

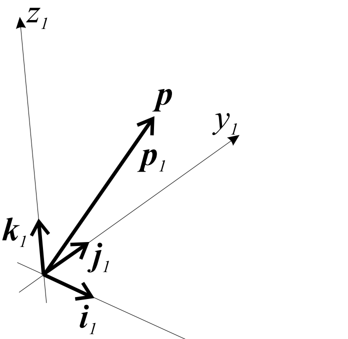


$$\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \sin \sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

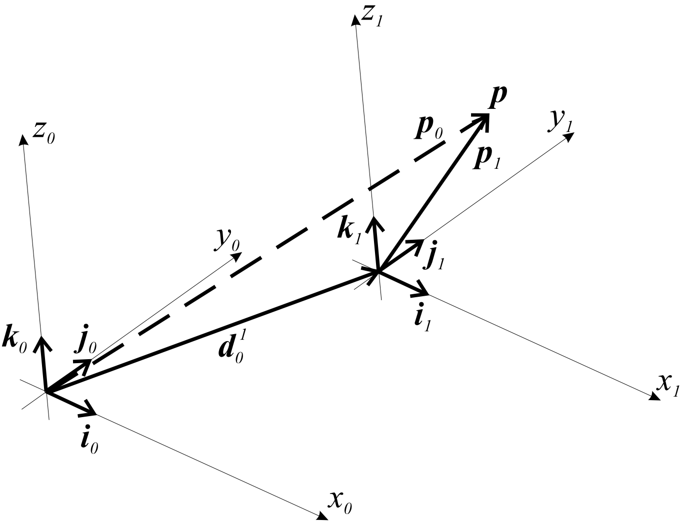
Ruch w R^3

- translacja
- rotacja

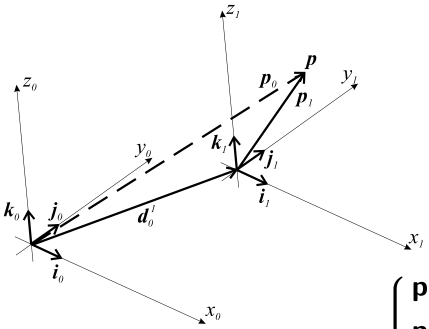
Elementarna translacja 1



Elementarna translacja 1



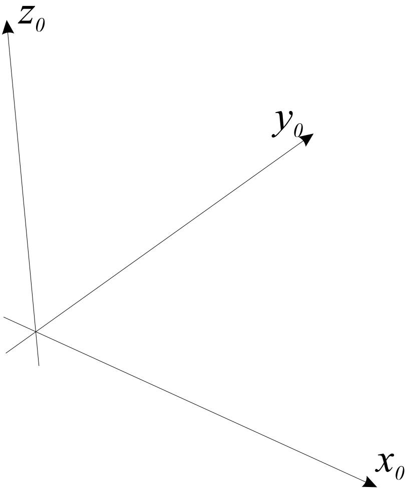
Elementarna translacja 2



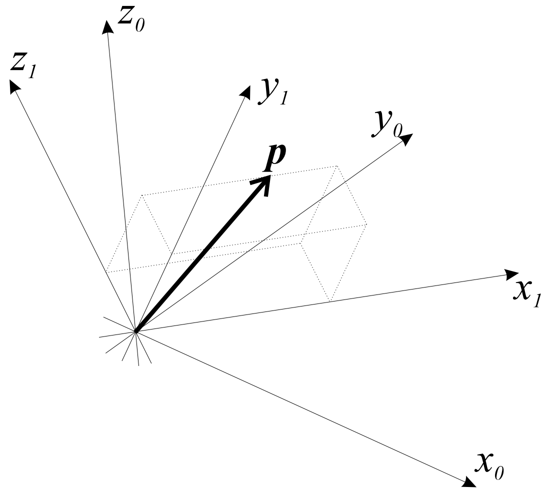
$$
\begin{cases}
\mathbf{p}_1 = p_{1x}\mathbf{i}_1 + p_{1y}\mathbf{j}_1 + p_{1z}\mathbf{k}_1 \\
\mathbf{p}_0 = p_{0x}\mathbf{i}_0 + p_{0y}\mathbf{j}_0 + p_{0z}\mathbf{k}_0 \\
\hline
\mathbf{d}_0^1 = d_{0x}^1\mathbf{i}_0 + d_{0y}^1\mathbf{j}_0 + d_{0z}^1\mathbf{k}_0
\end{cases}
$$

$$\boxed{\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{d}_0^1}$$

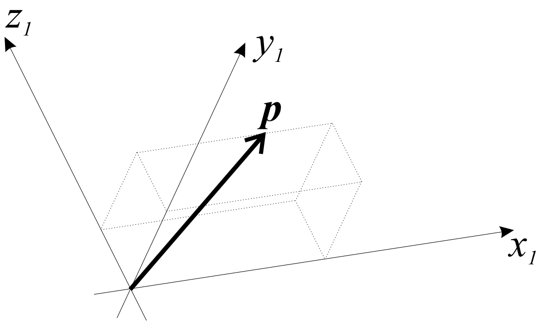
Elementarna rotacja 1



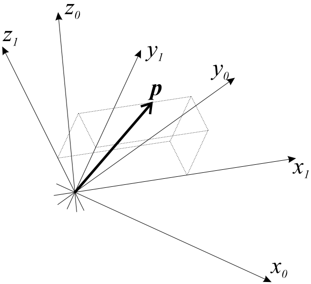
Elementarna rotacja 1



Elementarna rotacja 1



Elementarna rotacja 2



$$\begin{cases} p_{0x} = \mathbf{p}_0\mathbf{i}_0 = \mathbf{p}_1\mathbf{i}_0 = p_{1x}\mathbf{i}_1\mathbf{i}_0 + p_{1y}\mathbf{j}_1\mathbf{i}_0 + p_{1z}\mathbf{k}_1\mathbf{i}_0 \\ p_{0y} = \mathbf{p}_0\mathbf{j}_0 = \mathbf{p}_1\mathbf{j}_0 = p_{1x}\mathbf{i}_1\mathbf{j}_0 + p_{1y}\mathbf{j}_1\mathbf{j}_0 + p_{1z}\mathbf{k}_1\mathbf{j}_0 \\ p_{0z} = \mathbf{p}_0\mathbf{k}_0 = \mathbf{p}_1\mathbf{k}_0 = p_{1x}\mathbf{i}_1\mathbf{k}_0 + p_{1y}\mathbf{j}_1\mathbf{k}_0 + p_{1z}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_0 \end{cases}$$

Elementarna rotacja 3

$$\begin{cases} p_{0x} = \mathbf{p}_0\mathbf{i}_0 = \mathbf{p}_1\mathbf{i}_0 = p_{1x}\mathbf{i}_1\mathbf{i}_0 + p_{1y}\mathbf{j}_1\mathbf{i}_0 + p_{1z}\mathbf{k}_1\mathbf{i}_0 \\ p_{0y} = \mathbf{p}_0\mathbf{j}_0 = \mathbf{p}_1\mathbf{j}_0 = p_{1x}\mathbf{i}_1\mathbf{j}_0 + p_{1y}\mathbf{j}_1\mathbf{j}_0 + p_{1z}\mathbf{k}_1\mathbf{j}_0 \\ p_{0z} = \mathbf{p}_0\mathbf{k}_0 = \mathbf{p}_1\mathbf{k}_0 = p_{1x}\mathbf{i}_1\mathbf{k}_0 + p_{1y}\mathbf{j}_1\mathbf{k}_0 + p_{1z}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_0 \end{cases}$$

Elementarna rotacja 3

$$\begin{cases} p_{0x} = \mathbf{p}_0\mathbf{i}_0 = \mathbf{p}_1\mathbf{i}_0 = p_{1x}\mathbf{i}_1\mathbf{i}_0 + p_{1y}\mathbf{j}_1\mathbf{i}_0 + p_{1z}\mathbf{k}_1\mathbf{i}_0 \\ p_{0y} = \mathbf{p}_0\mathbf{j}_0 = \mathbf{p}_1\mathbf{j}_0 = p_{1x}\mathbf{i}_1\mathbf{j}_0 + p_{1y}\mathbf{j}_1\mathbf{j}_0 + p_{1z}\mathbf{k}_1\mathbf{j}_0 \\ p_{0z} = \mathbf{p}_0\mathbf{k}_0 = \mathbf{p}_1\mathbf{k}_0 = p_{1x}\mathbf{i}_1\mathbf{k}_0 + p_{1y}\mathbf{j}_1\mathbf{k}_0 + p_{1z}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_0 \end{cases}$$

$$\boxed{\mathbf{p}_0 = R_0^1\mathbf{p}_1}$$

Elementarna rotacja 3

$$\begin{cases} p_{0x} = \mathbf{p}_0\mathbf{i}_0 = \mathbf{p}_1\mathbf{i}_0 = p_{1x}\mathbf{i}_1\mathbf{i}_0 + p_{1y}\mathbf{j}_1\mathbf{i}_0 + p_{1z}\mathbf{k}_1\mathbf{i}_0 \\ p_{0y} = \mathbf{p}_0\mathbf{j}_0 = \mathbf{p}_1\mathbf{j}_0 = p_{1x}\mathbf{i}_1\mathbf{j}_0 + p_{1y}\mathbf{j}_1\mathbf{j}_0 + p_{1z}\mathbf{k}_1\mathbf{j}_0 \\ p_{0z} = \mathbf{p}_0\mathbf{k}_0 = \mathbf{p}_1\mathbf{k}_0 = p_{1x}\mathbf{i}_1\mathbf{k}_0 + p_{1y}\mathbf{j}_1\mathbf{k}_0 + p_{1z}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_0 \end{cases}$$

$$\boxed{\mathbf{p}_0 = R_0^1\mathbf{p}_1}$$

gdzie

$$R_0^1 = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1\mathbf{i}_0 & \mathbf{j}_1\mathbf{i}_0 & \mathbf{k}_1\mathbf{i}_0 \\ \mathbf{i}_1\mathbf{j}_0 & \mathbf{j}_1\mathbf{j}_0 & \mathbf{k}_1\mathbf{j}_0 \\ \mathbf{i}_1\mathbf{k}_0 & \mathbf{j}_1\mathbf{k}_0 & \mathbf{k}_1\mathbf{k}_0 \end{bmatrix}$$

Elementarna rotacja 4

Analogicznie

$$\begin{cases} p_{1x} = \mathbf{p}_1\mathbf{i}_1 = \mathbf{p}_0\mathbf{i}_1 = p_{0x}\mathbf{i}_0\mathbf{i}_1 + p_{0y}\mathbf{j}_0\mathbf{i}_1 + p_{0z}\mathbf{k}_0\mathbf{i}_1 \\ p_{1y} = \mathbf{p}_1\mathbf{j}_1 = \mathbf{p}_0\mathbf{j}_1 = p_{0x}\mathbf{i}_0\mathbf{j}_1 + p_{0y}\mathbf{j}_0\mathbf{j}_1 + p_{0z}\mathbf{k}_0\mathbf{j}_1 \\ p_{1z} = \mathbf{p}_1\mathbf{k}_1 = \mathbf{p}_0\mathbf{k}_1 = p_{0x}\mathbf{i}_0\mathbf{k}_1 + p_{0y}\mathbf{j}_0\mathbf{k}_1 + p_{0z}\mathbf{k}_0\mathbf{k}_1 \end{cases}$$

$$\boxed{\mathbf{p}_1 = R_1^0\mathbf{p}_0}$$

gdzie

$$R_1^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_0\mathbf{i}_1 & \mathbf{j}_0\mathbf{i}_1 & \mathbf{k}_0\mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_0\mathbf{j}_1 & \mathbf{j}_0\mathbf{j}_1 & \mathbf{k}_0\mathbf{j}_1 \\ \mathbf{i}_0\mathbf{k}_1 & \mathbf{j}_0\mathbf{k}_1 & \mathbf{k}_0\mathbf{k}_1 \end{bmatrix}$$

Elementarna rotacja 5

Biorąc pod uwagę, że

$$R_0^1 = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1\mathbf{i}_0 & \mathbf{j}_1\mathbf{i}_0 & \mathbf{k}_1\mathbf{i}_0 \\ \mathbf{i}_1\mathbf{j}_0 & \mathbf{j}_1\mathbf{j}_0 & \mathbf{k}_1\mathbf{j}_0 \\ \mathbf{i}_1\mathbf{k}_0 & \mathbf{j}_1\mathbf{k}_0 & \mathbf{k}_1\mathbf{k}_0 \end{bmatrix} \qquad R_1^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_0\mathbf{i}_1 & \mathbf{j}_0\mathbf{i}_1 & \mathbf{k}_0\mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_0\mathbf{j}_1 & \mathbf{j}_0\mathbf{j}_1 & \mathbf{k}_0\mathbf{j}_1 \\ \mathbf{i}_0\mathbf{k}_1 & \mathbf{j}_0\mathbf{k}_1 & \mathbf{k}_0\mathbf{k}_1 \end{bmatrix}$$

Elementarna rotacja 5

Biorąc pod uwagę, że

$$R_0^1 = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1\mathbf{i}_0 & \mathbf{j}_1\mathbf{i}_0 & \mathbf{k}_1\mathbf{i}_0 \\ \mathbf{i}_1\mathbf{j}_0 & \mathbf{j}_1\mathbf{j}_0 & \mathbf{k}_1\mathbf{j}_0 \\ \mathbf{i}_1\mathbf{k}_0 & \mathbf{j}_1\mathbf{k}_0 & \mathbf{k}_1\mathbf{k}_0 \end{bmatrix} \qquad R_1^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_0\mathbf{i}_1 & \mathbf{j}_0\mathbf{i}_1 & \mathbf{k}_0\mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_0\mathbf{j}_1 & \mathbf{j}_0\mathbf{j}_1 & \mathbf{k}_0\mathbf{j}_1 \\ \mathbf{i}_0\mathbf{k}_1 & \mathbf{j}_0\mathbf{k}_1 & \mathbf{k}_0\mathbf{k}_1 \end{bmatrix}$$

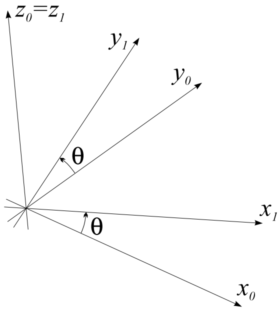
mamy

$$\boxed{R_1^0 = (R_0^1)^{-1} = (R_0^1)^T}$$

$$\det R_0^1 = \pm 1, \qquad R_0^1 \in SO(3)$$

Rotacje wokół osi układu współrzędnych

- wokół osi $\mathcal{Z}$



$$\begin{array}{lll} \mathbf{i}_1\mathbf{i}_0 = \cos\theta & \mathbf{j}_1\mathbf{i}_0 = -\sin\theta & \mathbf{k}_1\mathbf{i}_0 = 0 \\ \mathbf{i}_1\mathbf{j}_0 = \sin\theta & \mathbf{j}_1\mathbf{j}_0 = \cos\theta & \mathbf{k}_1\mathbf{j}_0 = 0 \\ \mathbf{i}_1\mathbf{k}_0 = 0 & \mathbf{j}_1\mathbf{k}_0 = 0 & \mathbf{k}_1\mathbf{k}_0 = 1 \end{array}$$

$$R_{\mathcal{Z},\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{\mathcal{Z},0} = I_3, \qquad R_{\mathcal{Z},\theta_1} R_{\mathcal{Z},\theta_2} = R_{\mathcal{Z},\theta_1+\theta_2}$$

$$R_{\mathcal{Z},\theta}^{-1} = R_{\mathcal{Z},-\theta}$$

Rotacje wokół osi układu współrzędnych

- wokół osi $\mathcal{X}$

$$R_{\mathcal{X},\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

- wokół osi $\mathcal{Y}$

$$R_{\mathcal{Y},\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Złożenia 1

- złożenie translacji

$0x_0y_0z_0 \overset{\mathbf{d}_0^1}{\Longrightarrow} 0x_1y_1z_1 \overset{\mathbf{d}_1^2}{\Longrightarrow} 0x_2y_2z_2$		
$\mathbf{p}_0$	$\mathbf{p}_1$	$\mathbf{p}_2$

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{d}_0^1 + \mathbf{p}_1 \qquad \mathbf{p}_0 = \mathbf{d}_0^2 + \mathbf{p}_2 \qquad \mathbf{p}_1 = \mathbf{d}_1^2 + \mathbf{p}_2$$

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{d}_0^1 + \mathbf{d}_1^2 + \mathbf{p}_2$$

$$\boxed{\mathbf{d}_0^2 = \mathbf{d}_0^1 + \mathbf{d}_1^2}$$

Złożenia 2

- złożenie rotacji

$$\begin{array}{|ccccc|}
0x_0y_0z_0 & \overset{R_0^1}{\Longrightarrow} & 0x_1y_1z_1 & \overset{R_1^2}{\Longrightarrow} & 0x_2y_2z_2 \\
\hline
\mathbf{p}_0 & & \mathbf{p}_1 & & \mathbf{p}_2 \\
\hline
\end{array}$$

$$\mathbf{p}_0 = R_0^1 \mathbf{p}_1 \qquad \mathbf{p}_0 = R_0^2 \mathbf{p}_2 \qquad \mathbf{p}_1 = R_1^2 \mathbf{p}_2$$

$$\mathbf{p}_0 = R_0^1 R_1^2 \mathbf{p}_2$$

$$\boxed{R_0^2 = R_0^1 R_1^2}$$

Reprezentacje macierzy rotacji 1

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 & R_3 \end{bmatrix}$$

Ograniczenia na kolumny macierzy R

$$\|R_1\| = \|R_2\| = \|R_3\| = 1$$
$$R_1 R_2 = 0 \qquad R_2 R_3 = 0 \qquad R_1 R_3 = 0$$

$\boxed{\text{9 zmiennych – 6 równań = 3 zmienne niezależne}}$

Reprezentacje macierzy rotacji 2

- kąty Eulera ZYZ $(\phi,\ \theta,\ \psi)$

$$R_0^1 = R_{\mathcal{Z},\phi} R_{\mathcal{Y},\theta} R_{\mathcal{Z},\psi} =$$

$$= \begin{bmatrix} c_\phi c_\theta c_\psi - s_\phi s_\psi & -c_\phi c_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi & c_\phi s_\theta \\ s_\phi c_\theta c_\psi + c_\phi s_\psi & -s_\phi c_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & s_\phi s_\theta \\ -s_\theta c_\psi & s_\theta s_\psi & c_\theta \end{bmatrix}$$

$$0 < \phi < 2\pi \qquad 0 < \theta < \pi \qquad 0 < \psi < 2\pi$$

- kąty Roll–Pitch–Yaw $(\phi,\ \theta,\ \psi)$

$$R_0^1 = R_{\mathcal{Z},\phi} R_{\mathcal{Y},\theta} R_{\mathcal{X},\psi}$$

$$0 < \phi < 2\pi \qquad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \qquad 0 < \psi < 2\pi$$

Transformacje jednorodne

Definicja

Przekształcenie

$$\mathbf{p}_0 = R_0^1 \mathbf{p}_1 + \mathbf{d}_0^1$$

nazywamy ruchem ciała szytwnego, gdy macierz R jest ortogonalna.

Załóżmy, że mamy dwa ruchy

$$\mathbf{p}_0 = R_0^1 \mathbf{p}_1 + \mathbf{d}_0^1$$
$$\mathbf{p}_1 = R_1^2 \mathbf{p}_2 + \mathbf{d}_1^2$$

wówczas ich złożenie

$$\mathbf{p}_0 = R_0^1 R_1^2 \mathbf{p}_2 + R_0^1 \mathbf{d}_1^2 + \mathbf{d}_0^1 = R_0^2 \mathbf{p}_2 + \mathbf{d}_0^2$$

Porównując otrzymujemy

$$\boxed{R_0^2 = R_0^1 R_1^2 \qquad \mathbf{d}_0^2 = \mathbf{d}_0^1 + R_0^1 \mathbf{d}_1^2}$$

Transformacje jednorodne 2

$$\begin{bmatrix} R_0^1 & \mathbf{d}_0^1 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1^2 & \mathbf{d}_1^2 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_0^1 R_1^2 & R_0^1 \mathbf{d}_1^2 + \mathbf{d}_0^1 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

Ruch ciała sztywnego może być reprezentowany przez transformację

$$T = \begin{bmatrix} R & \mathbf{d} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \qquad R \in SO(3) \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T \mathbf{d} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

zwaną <u>transformacją jednorodną</u>. Po rozszerzeniu reprezentacji punktów **p** o dodatkową składową

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ 1 \end{bmatrix}$$

mamy

$$\boxed{\mathbf{P}_0 = T_0^1 \mathbf{P}_1} \qquad T_0^1 \in SE(3)$$

Bazowe macierze jednorodne generujące $SE(3)$ (translacja)

$$Trans(x, a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Trans(y, b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Trans(z, c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bazowe macierze jednorodne generujące $SE(3)$ (rotacja)

$$Rot(x,\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Rot(y,\beta) = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Rot(z,\gamma) = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{T_0^1 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & d_x \\ n_y & o_y & a_y & d_y \\ n_z & o_z & a_z & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$