



Algorytmy robotyki mobilnej Fuzja sensorów i filtry bayesowskie

Janusz Jakubiak

Katedra Cybernetyki i Robotyki

2020/2021



Informacja o prawach autorskich

Prezentacja jest materiałem pomocniczym do kursu Algorytmy robotyki mobilnej. Zawarte w niej informacje, zdjęcia, wykresy i inne są chronione prawami autorskimi autorów lub wydawców. Materiały te są prezentowane w celach edukacyjnych związanych z ww. kursem. Inne ich wykorzystanie w całości lub części wymaga uzyskania zgody właścicieli praw autorskich.

Niniejsza prezentacja zawiera materiały z książki Probabilistic Robotics (S. Thurn et al.) oraz Springer Handbook on Robotics (Eds. B. Siciliano, O. Khatib)



Notacja

- ▶ x - stan rzeczywisty układu (R^n), \bar{x} - estymata stanu,
- ▶ z - obserwacja (R^m),
- ▶ $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ - wielowymiarowy rozkład normalny ze średnią μ i macierzą kowariancji Σ (parametrami: momenty)

$$\mathcal{N}(\mu, \Sigma) \sim p(X) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \Sigma}} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(x - \mu)^T \Sigma^{-1}(x - \mu) \right\}$$

- ▶ Reprezentacje rozkładu normalnego: momenty (μ, Σ), kanoniczna - macierz i wektor informacji (ξ, Ω)

$$\Omega = \Sigma^{-1} \quad \xi = \Sigma^{-1}\mu$$

- ▶ Wzór Bayesa

$$p(X|Z) = \frac{p(Z|X)p(X)}{p(Z)} = \eta p(Z|X)p(X),$$

gdzie η jest współczynnikiem normalizującym.



Wyznaczanie stanu na podstawie pomiaru - przykłady wprowadzające

Przykład 1 - trywialny

Czujnik mierzy odległość do obiektu w cm. Jeśli czujnik zwrócił wartość 40, ile wynoszą:

- ▶ odległość do obiektu?
- ▶ błąd oszacowania odległości, jeśli błąd pomiaru ma rozkład jednorodny ± 1 cm?
- ▶ błąd oszacowania, jeśli błąd pomiaru ma rozkład normalny o wariancji $\sigma = 1$ cm.

Przykład 2

Co zmieni się w sytuacji, gdy czujnik jest liniowy i zwraca wartość analogową w mV, gdzie 2 V odpowiadają 1 m?

- ▶ Jaka jest odległość do obiektu, jeśli $z = 800$ mV?
- ▶ Jaki jest błąd, jeśli błąd pomiaru ma rozkład jednorodny ± 20 mV?
- ▶ Jaki jest błąd, jeśli błąd pomiaru ma rozkład normalny o wariancji $\sigma = 20$ mV.

Przypadek idealny – brak błędu pomiaru:

$$z = \frac{2000 \text{ mV}}{1 \text{ m}} x \quad \rightarrow \quad x = \frac{z}{2000} \text{ m}$$

Uwzględnienie błędu pomiaru:

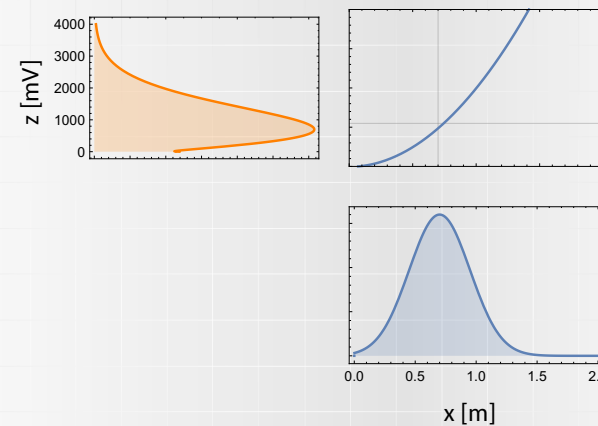
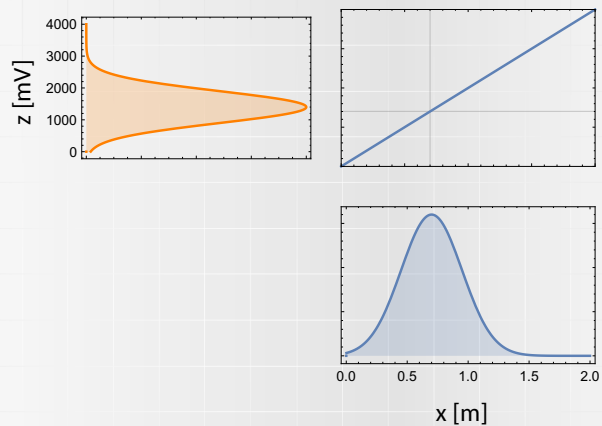
- ▶ dostępne dane: $z, p(z|x)$
- ▶ szukane: $p(x|z)$ (a właściwie: $\bar{x} = \arg \max_x p(x|z)$)
- ▶ ogólne rozwiązanie – wzór Bayesa

$$p(x|z) = \frac{p(z|x)p(x)}{p(z)}$$

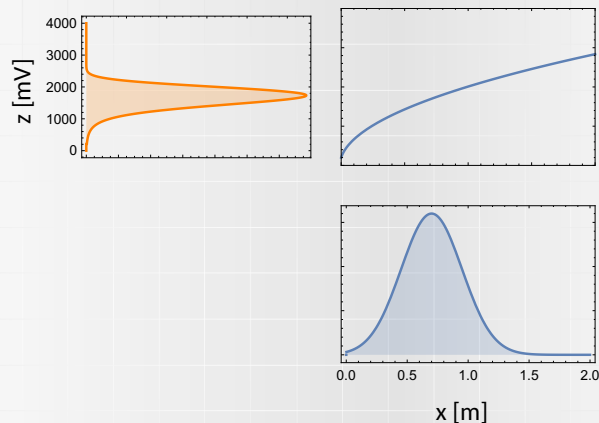
Przypomnienie: wykład 1

liniowe przekształcenie ($Y = AX + B$) rozkładu normalnego

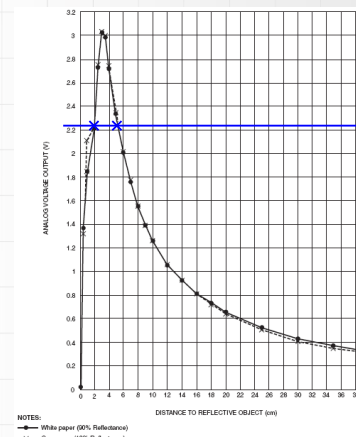
$$p(X) = \mathcal{N}(\mu, \Sigma) \quad \rightarrow \quad p(Y) = \mathcal{N}(A\mu + B, A\Sigma A^T)$$



Przypadek nieliniowy



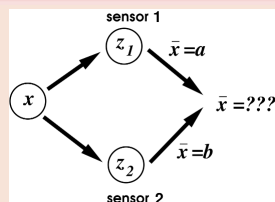
Przypadek nieliniowy



Analogowy czujnik odległości Sharp

Dlaczego potrzebujemy fuzji sygnałów?

Problem:



Rodzaje zależności między obserwacjami:

- ▶ alternatywne - rozłączne
- ▶ komplementarne - uzupełniające
- ▶ substytucyjne - zamienne

Przykład

Dostępne są czujniki A i B zwracające niezależne pomiary. Czujnik A ma dokładność ± 0.8 , czujnik B: ± 0.5 , z rozkładem jednostajnym w danym przedziale.

Pomiar stanu x dał wartość $z_A = 2.0$ w czujniku A oraz 2.9 w czujniku B.

1. Jaki jest rozkład stanu oczekiwanego \bar{x} dla każdego z czujników?
2. Jak wygląda rozkład wynikowy uwzględniający oba odczyty? Jaka jest wartość oczekiwana oraz dokładność wyniku po fuzji?
3. (*) W jaki sposób zależy dokładność pomiaru od różnicy pomiędzy odczytami z czujników?

Dlaczego potrzebujemy fuzji sygnałów?

Fuzja sygnałów – definicja

Agregacja danych z kilku czujników oraz powiązanych informacji aby otrzymać informację lepszej jakości niż używając każdego z sensorów oddzielnie^a

^aD. L. Hall and J. Llinas, "An introduction to multisensor data fusion," Proceedings of the IEEE, vol. 85, no. 1, pp. 6–23, 1997.

Rodzaje fuzji

- ▶ *bezpośrednia*, czyli *fuzja sensorów*, która korzysta wyłącznie z danych uzyskanych z czujników,
- ▶ *pośrednia (fuzja informacji)*, dane z czujników uzupełniane są przez dodatkową wiedzę (np. wiedzę *a priori* dostarczoną przez użytkownika).

Filtry bayesowskie

Zadanie filtracji

Sekwencyjny proces aktualizacji probabilistycznego modelu stanu układu, zmieniający się w czasie i uwzględniający okresowe obserwacje otrzymywane z czujników

$$P(x_k | Z^k, U^k, x_o)$$

Przykłady

filtr Kalmana, siatki probabilistyczne, sekwencyjne Monte Carlo

Architektury stosowane w fuzji

Klasyfikacja

- ▶ zcentralizowane – rozproszone
- ▶ lokalne – globalne współdziałanie elementów
- ▶ hierarchiczne – heterarchiczne

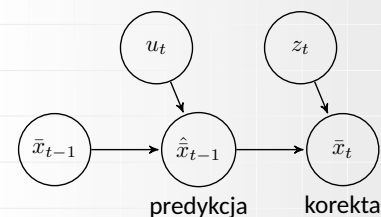
Najczęstsze układy:

- ▶ zcentralizowana, globalna i hierarchiczna
- ▶ rozproszona, globalna, heterarchiczna
- ▶ rozproszona, lokalna, hierarchiczna
- ▶ rozproszona, lokalna, heterarchiczna

Schemat filtrów bayesowskich

Filtr w pętli powtarza dwa kroki:

- ▶ *predykcji* – uaktualnienie stanu oczekiwanego na podstawie ostatniej estymaty
- ▶ *korekcji* – modyfikacji estymaty uwzględniającej bieżące pomiary



parametry: \bar{x}_{t-1}, u_t, z_t

for all x_t do

$$\hat{x}_t = \int p(x_t | u_t, x_{t-1}) \bar{x}_{t-1} dx_{t-1}$$

$$\bar{x}_t = \eta p(z_t | x_t) \hat{x}_t$$

wynik: \bar{x}_t

Filtry gaussowskie

Filtry gaussowskie korzystają z parametryzacji wielowymiarowej dystrybucji gaussowskiej za pomocą momentów lub parametryzacji kanonicznej.

W konsekwencji zakładają, że rozkład jest *unimodalny*, a zatem:

- + dobrze opisują zadania, w których zmienna losowa znajduje się w pobliżu stanu rzeczywistego
- sprawdzają się gorzej (lub wcale) w przypadku zadań z kilkoma równo prawdopodobnymi hipotezami

Filtr Kalmana (KF) (Swerling 1958, Kalman 1960)

- ▶ Filtr dla układów ciągłych, liniowych
- ▶ W chwili t prawdopodobieństwo X jest estymowane jako $\mathcal{N}(\mu_t, \Sigma_t)$.
- ▶ Zakłada się, że dla układu założenia Markowa są spełnione oraz

1. układ jest liniowy z addytywnym szumem (Gausa)

$$x_t = A_t x_{t-1} + B_t u_t + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \rightarrow \mathcal{N}(0, R_t),$$

2. funkcja wyjścia jest także liniowa z szumem (Gausa)

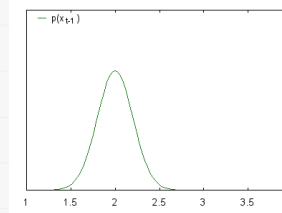
$$z_t = C_t x_t + \delta_t, \quad \delta_t \rightarrow \mathcal{N}(0, Q_t),$$

3. prawdopodobieństwo początkowe ma rozkład normalny

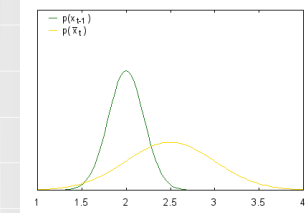
$$p(x_0) = \mathcal{N}(\mu_0, \Sigma_0).$$

Można wtedy udowodnić, że wynik ma rozkład normalny

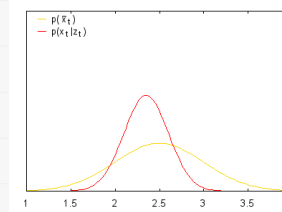
Filtrowanie gaussowskie – idea



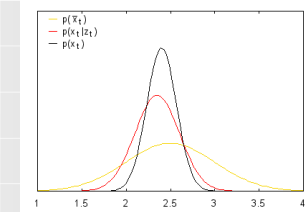
Rozkład początkowy x_{t-1}



Obliczenie predykcji \hat{x}_t



Pomiar z_t



Wynik x_t

Transformacje rozkładów normalnych

Zmiany momentów rozkładów normalnych przy przekształceniach

- ▶ liniowym ($Y = AX + B$)

$$p(X) = \mathcal{N}(\mu, \Sigma) \rightarrow p(Y) = \mathcal{N}(A\mu + B, A\Sigma A^T)$$

- ▶ sumie ($Y = X_1 + X_2$)

$$p(X_1) = \mathcal{N}(\mu_1, \Sigma_1), p(X_2) = \mathcal{N}(\mu_2, \Sigma_2), \\ \rightarrow p(Y) = \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \Sigma_1 + \Sigma_2)$$

- ▶ iloczyn

$$p(X_1)p(X_2) = \mathcal{N}(\mu_1, \Sigma_1)\mathcal{N}(\mu_2, \Sigma_2) \rightarrow \mathcal{N}(\mu_Y, \Sigma_Y),$$

$$\Sigma_Y = (\Sigma_1^{-1} + \Sigma_2^{-1})^{-1} \\ \mu_Y = \Sigma_Y \Sigma_1^{-1} \mu_1 + \Sigma_Y \Sigma_2^{-1} \mu_2$$

Filtr Kalmana – algorytm

$$\bar{\mu}_t = A_t \mu_{t-1} + B_t u_t$$

$$\bar{\Sigma}_t = A_t \Sigma_{t-1} A_t^T + R_t$$

$$K_t = \bar{\Sigma}_t C_t^T (C_t \bar{\Sigma}_t C_t^T + Q_t)^{-1}$$

$$\mu_t = \bar{\mu}_t + K_t (z_t - C_t \bar{\mu}_t)$$

$$\Sigma_t = (I - K_t C_t) \bar{\Sigma}_t$$

Predykcja nowego stanu po zastosowaniu sterowania u_t

Obliczenie wzmocnienia Kalmana

Wynikowy stan.

(zauważmy, że jeśli wzmocnienie Kalmana wynosi 0 - wynikowy stan pochodzi wyłącznie z predykcji, a jeśli $K_t = C_t^{-1}$ - tylko z obserwacji).

Algorytm EKF

$$\bar{\mu}_t = g(u_t, \mu_{t-1})$$

$$\bar{\Sigma}_t = G_t \Sigma_{t-1} G_t^T + R_t$$

$$K_t = \bar{\Sigma}_t H_t^T (H_t \bar{\Sigma}_t H_t^T + Q_t)^{-1}$$

$$\mu_t = \bar{\mu}_t + K_t (z_t - h_t(\bar{\mu}_t))$$

$$\Sigma_t = (I - K_t H_t) \bar{\Sigma}_t$$

Jakobiany:

$$G_t = g'(u_t, \mu_{t-1}), \quad g'(u_t, x_{t-1}) = \frac{\partial g(u_t, \cdot)}{\partial x_{t-1}}$$

$$H_t = h'(\mu_t) \quad h'(x_t) = \frac{\partial h(x_t)}{\partial x_t}$$

Rozszerzony f.K. (Extended Kalman filter (EKF))

EKF

Rozszerzenie filtru Kalmana dla układów nieliniowych

$$x_t = g(u_t, x_{t-1}) + \epsilon_t$$

$$z_t = h(x_t) + \delta_t$$

Przybliżenie liniowe układu w punkcie

$$\tilde{x}_t = \frac{\partial g(\cdot, \cdot)}{\partial x} \hat{x}_{t-1} + \frac{\partial g(\cdot, \cdot)}{\partial u} u_t + \epsilon_t$$

$$\tilde{z}_t = \frac{\partial h(\cdot, \cdot)}{\partial x} \hat{x}_t + \delta_t$$

Podsumowanie EKF

- ▶ Złożoność obliczeniowa pojedynczej iteracji $O(k^{2.4} + n^2)$.
- ▶ Założenie unimodalnego rozkładu (choć w praktyce EKF często działa gdy to założenie nie jest spełnione).
- ▶ Jakość estymacji zależy od nieliniowości funkcji przejścia i wyjścia w punkcie pracy.

- ▶ MHEKF (*multi-hypothesis*),
- ▶ ADF (*assumed density*) – z dopasowaniem momentów *a posteriori*,
- ▶ UKF (*unscented*) – analiza stochastyczna punktów σ ,
- ▶ IF/EIF (*extended information filter*) – dualny do KF, korzysta z reprezentacji kanonicznej

(E)IF	(E)KF
+ może reprezentować globalną niepewność	+ mniejsza złożoność obliczeniowa
+ lepsza stabilność numeryczna	
+ lepszy dla grup robotów	

1. Czym jest fuzja sygnałów?
2. Według jakich kryteriów klasyfikuje się fuzję sygnałów?
3. Czym są filtry bayesowskie i gaussowskie?
4. W jaki sposób działa filtr Kalmana? (założenia, algorytm)?
5. Czym jest rozszerzony filtr Kalmana (EKF)?