



Politechnika Wrocławska

DZIEDZINA: Dziedzina nauk inżynieryjno-technicznych

DYSCYPLINA: Automatyka, elektronika, elektrotechnika i technologie kosmiczne

ROZPRAWA DOKTORSKA

Zastosowanie parametryzacji krzywoliniowych w algorytmach śledzenia ścieżki dla różnych układów robotycznych

AUTOR:

mgr inż. Filip Dyba

PROMOTOR:

dr hab. inż. Alicja Mazur, prof. PWr

Słowa kluczowe: algorytm całkowania wstecznego, manipulator holonomiczny, nieholonomiczny manipulator mobilny, parametryzacja Bishopa, parametryzacja Serreta–Freneta, sterowanie robotów, śledzenie ścieżki

Mojej ukochanej Pauli

Od Autora

Niniejsza rozprawa, którą składam w ręce Czytelnika, jest podsumowaniem mojej pracy naukowej z ostatnich kilku lat. Jednocześnie stanowi wyraz fascynacji oraz zachwytu dla matematycznego opisu otaczającej mnie rzeczywistości. Chciałbym, aby z tej rozprawy wybrzmiał podziw dla piękna świata stworzonego, w tym również mądrze wykorzystanej technologii. Piękno to nie zostało ograniczone, lecz uchwycone modelem matematycznym. I chociaż to uchwycenie jest częściowe, bardzo ulotne i zupełnie niezupełne, to żywię głęboką nadzieję, iż Czytelnik podzieli mój zachwyt i zainspiruje się takim właśnie sposobem patrzenia.

Prowadząc badania, skupiłem się na bardzo niewielkim wycinku tej pięknej i wieloaspektowej dziedziny, jaką jest robotyka. Obrałem niszę teorii sterowania, jaką jest realizacja zadania śledzenia ścieżki i zastosowanie do tego celu formalizmu rodem z geometrii różniczkowej – parametryzacji krzywoliniowych. Pokornie uznaję, że jest to bardzo mały fragment niesamowitej rzeczywistości. Zanurzając się coraz głębiej w tej tematyce, napotykałem kolejne problemy do rozwiązania i stawiałem kolejne pytania. Poszukiwanie odpowiedzi było niezwykle rozwijające, a ich odnajdywanie (nawet jeśli były tylko częściowe) potęgowało mój zachwyt nad tym, co jest zarówno bliskie, jak i dalekie. Mam nadzieję, że Czytelnik znajdzie w niniejszej pracy rozwiązania, których szuka. A jeśli tak się nie stanie, to przynajmniej odnajdzie fundamenty do dalszej dyskusji, poszukiwań i dociekań lub odnajdzie inspirację do kontynuowania wytężonej i skrupulatnej pracy.

Czas przygotowania dysertacji i poprzedzających ją badań wymagał ode mnie sporego nakładu pracy, uważności i wytrwałości. Jednocześnie była to piękna przygoda, która zaowocowała mnóstwem fantastycznych wspomnień. Wiele mogłem się dowiedzieć i nauczyć. Mogłem odnawiać swoje myślenie i rozwijać się. W związku z tym rodzi się we mnie wdzięczność dla wielu osób, które szły ze mną tą drogą i które po drodze spotkałem.

W pierwszej kolejności pragnę podziękować moim najbliższym. Dziękuję mojej Narzeczonej, a wkrótce Żonie, **Paulinie**, która jest dla mnie cudowną i wyjątkową melodią pośród brzmienia codzienności. Dziękuję za jej nieocenione wsparcie, troskę i motywację, tak potrzebne zwłaszcza na ostatnim etapie pracy. Bardzo dziękuję za cierpliwość.

Niezmiernie dziękuję także moim Rodzicom **Sylvii** i **Piotrowi** oraz Dziadkom **Tadeuszowi**, **Julii** i **Jadwidze**, którzy wspierali mnie i kibicowali przez całą drogę. Zawsze wykazywali się niezwykłą wyrozumiałością dla moich różnorodnych pomysłów. Dziękuję za stworzenie warunków, w których mogłem beztrudno pracować naukowo. Dziękuję również za wychowanie i przekazanie wartości, które bezsprzecznie pomogły mi w przygotowaniu tejże pracy.

Nie mniejsze wyrazy wdzięczności kieruję do promotorki pracy, **Pani Profesor Alicji Mazur**, która najpierw zaprosiła mnie do tej przygody, a następnie wytrwale mi towarzyszyła. Dziękuję za wszelką dyskusję, radę, pomysł i wskazówkę. Dziękuję również za

wspieranie moich inicjatyw, stopniowe wprowadzanie do świata nauki, a także dzielenie się swoim doświadczeniem. Dzięki temu mogłem wzrastać, uczyć się samodzielności naukowej i rozwijać się w niezwykle sprzyjających warunkach.

Dziękuję także moim kolegom doktorantom oraz pracownikom Katedry Cybernetyki i Robotyki za wszelkie rady, wskazówki i dyskusje. Szczególnie dziękuję kierownictwu Katedry Cybernetyki i Robotyki, **Panu Profesorowi Ignacemu Dulębie** oraz **Pani Profesor Joannie Ratajczak**, za wsparcie wielu pomysłów, duże zaufanie i wielką otwartość. Dzięki temu mogłem znacznie łatwiej i pewniej wkraczać w świat nauki. Dziękuję **Panu Doktorowi Krzysztofowi Arentowi** za udostępnienie Laboratorium Robotyki do przeprowadzenia eksperymentów oraz za pomoc w przygotowaniu stanowiska do wykonania nagrań. Dziękuję również **Panu Profesorowi Marco Frego** z uniwersytetu w Bolzano, który otworzył dla mnie drzwi współpracy międzynarodowej.

Wreszcie, chciałbym podziękować wszystkim moim przyjaciołom i znajomym, którzy interesowali się postępami mojej pracy i zawsze* chętnie słuchali opowieści o parametryzacjach krzywoliniowych. Dziękuję, że mogłem się dzielić także tą częścią siebie w Duszpasterstwie Akademickim DACH, Duszpasterstwie Młodych Dorosłych, a także w kilku innych, mniej formalnych, gronach.

Dziś chciałbym się podzielić tą moją pasją z Czytelnikiem. Mam nadzieję, że niniejsza rozprawa będzie raczej smaczną uczcą. Życzę również – Czytelnikowi i sobie – aby była pożyteczna i inspirująca.

Filip Dyba

Wrocław, 22 września 2025 roku

*Prawie zawsze.

Spis treści

1	Wstęp	7
1.1	Motywacja pracy	8
1.2	Przegląd rozwiązań	10
1.3	Główne tezy pracy	11
1.4	Przegląd zawartości i wkładu pracy	12
2	Parametryzacje krzywoliniowe	15
2.1	Parametryzacja Serreta–Freneta	16
2.1.1	Parametryzacja unormowana	17
2.1.2	Parametryzacja nieunormowana	18
2.2	Parametryzacja Bishopa	19
2.2.1	Parametryzacja unormowana	19
2.2.2	Parametryzacja nieunormowana	20
2.2.3	Zależności między parametryzacją Bishopa a parametryzacją Serreta–Freneta	21
2.3	Parametryzacja <i>beta</i>	23
2.4	Synteza opisu ewolucji układu lokalnego	24
3	Równania robota względem ścieżki	27
3.1	Parametryzacja ortogonalna	28
3.1.1	Równania robota względem ścieżki opisane w ortogonalnej parametryzacji Serreta–Freneta	29
3.1.2	Równania robota względem ścieżki opisane w ortogonalnej parametryzacji Bishopa	31
3.1.3	Przesunięcie osobliwości poza ścieżkę	32
3.1.4	Stan początkowy odległości krzywoliniowej	35
3.2	Parametryzacja nieortogonalna	36
3.2.1	Równania robota względem ścieżki opisane w nieortogonalnej parametryzacji Serreta–Freneta	37
3.2.2	Równania robota względem ścieżki opisane w nieortogonalnej parametryzacji Bishopa	38
3.3	Opis orientacji względem ścieżki	39
3.3.1	Kąty Eulera	41
3.3.2	Kwaterniony	42
3.4	Synteza opisu robota względem ścieżki	44
4	Sformułowanie problemu sterowania	47

4.1	Realizacja zadania sterowania – śledzenia ścieżki	48
4.2	Model obiektu sterowania	49
4.2.1	Obiekt holonomiczny	50
4.2.2	Mobilny obiekt nieholonomiczny	51
4.3	Architektura układu sterowania	54
4.3.1	Algorytm całkowania wstecznego	54
4.3.2	Układ sterowania w zadaniu śledzenia ścieżki	56
5	Sterowanie obiektem holonomicznym	59
5.1	Sterownik kinematyczny	59
5.2	Sterownik dynamiczny	61
5.2.1	Pełna znajomość modelu dynamiki	62
5.2.2	Parametryczna nieznajomość modelu dynamiki	63
5.2.3	Strukturalna nieznajomość modelu dynamiki	66
5.2.4	Brak znajomości modelu dynamiki	72
5.3	Badania symulacyjne	74
5.3.1	Algorytm oparty o pełną znajomość modelu dynamiki	74
5.3.2	Algorytm adaptacyjny	76
5.3.3	Algorytm ślizgowy	78
5.3.4	Algorytm dla całkowicie nieznanego modelu dynamiki	84
5.4	Walidacja eksperymentalna	87
5.4.1	Położenie robota względem ścieżki	88
5.4.2	Postura robota względem ścieżki	95
5.5	Podsumowanie	103
6	Sterowanie mobilnym obiektem nieholonomicznym	105
6.1	Sterownik kinematyczny	106
6.2	Sterownik dynamiczny	108
6.2.1	Sterowanie w oparciu o pełną znajomość modelu dynamiki	109
6.2.2	Sterowanie odporne	110
6.3	Badania symulacyjne	116
6.3.1	Algorytm oparty o pełną znajomość modelu dynamiki	116
6.3.2	Algorytm ślizgowy	121
6.4	Podsumowanie	127
7	Porównanie metod parametryzacji	129
7.1	Minimalne wymagania na klasę krzywej	131
7.2	Ścieżki o zerowej krzywiznie	134
7.3	Osobliwości parametryzacji	140
7.4	Rotacje układu lokalnego względem krzywej	146
7.5	Rotacje układu Bishopa	148
7.6	Zmiana metody parametryzacji w trakcie manewru	155
7.7	Podsumowanie	161
8	Ograniczenia na sterowanie	165
8.1	Ograniczenie profilu prędkościowego wzdłuż ścieżki (OPP)	166
8.1.1	Opis metody	166
8.1.2	Badania symulacyjne	169

8.2	Skalowanie trajektorii robota (STR)	174
8.2.1	Opis metody	174
8.2.2	Badania symulacyjne	176
8.3	Planowanie trajektorii zadanej względem układu lokalnego na ścieżce	180
8.3.1	Opis metody	180
8.3.2	Badania symulacyjne	182
8.4	Podsumowanie	184
9	Studium przypadku: manewr przechwycenia obiektu w ruchu	187
9.1	Problem przechwycenia obiektu – przegląd rozwiązań	187
9.2	Zastosowanie parametryzacji krzywoliniowej do przechwycenia obiektu	189
9.3	Opis analizowanego studium przypadku	190
9.4	Wyniki i dyskusja badań symulacyjnych	195
9.4.1	Przechwyt obiektu poruszającego się po okręgu	195
9.4.2	Przechwyt obiektu poruszającego się po krzywej Lissajous	199
9.4.3	Przechwyt obiektu poruszającego się po okręgu – bez ekstrapolacji ruchu	201
9.4.4	Przechwyt obiektu poruszającego się po okręgu – zaszumienie pomiarów położenia celu	205
9.5	Podsumowanie	208
10	Podsumowanie	211
	Literatura	215
	Dodatki matematyczne	
A	Modele robotów	225
A.1	Manipulator RTR	225
A.1.1	Kinematyka	225
A.1.2	Dynamika	227
A.1.3	Wartości parametrów	227
A.2	Manipulator redundantny	228
A.2.1	Kinematyka	228
A.2.2	Dynamika	230
A.3	Manipulator mobilny	232
A.3.1	Kinematyka	233
A.3.2	Dynamika	235
A.3.3	Wartości parametrów	240
B	Równania krzywych geometrycznych	241
B.1	Linia prosta	241
B.2	Linia śrubowa	241
B.3	Krzywa Lissajous	241
B.4	Klotoida	242
B.5	Krzywa Béziera	243
B.6	Krzywa B-sklejana	244
B.7	Krzywa η^{3D} -sklejana	246

Rozdział 1

Wstęp

Świat od zawsze rozbudzał ciekawość człowieka, który starał się obserwować otaczającą go rzeczywistość i podejmować nad nią refleksję. Jednym z rezultatów tych przemyśleń jest ustawiczny rozwój nauki. Konkluzje, syntezy czy odkrycia często porządkują dotychczasową wiedzę, ale niejednokrotnie stawiają nas w obliczu kolejnych pytań i zawiłych problemów.

Fundamentów myśli naukowej, zwłaszcza europejskiej, należy szukać w starożytnej Grecji. To właśnie tam rodziły się pierwsze intuicyjne opisy świata, w których starano się w sposób racjonalny i systematyczny wyjaśniać obserwowane zjawiska. Powstały liczne dzieła, które do dziś są niezwykłym skarbem świadczącym o możliwościach ludzkiego umysłu oraz niezaspokojonej ciekawości. I choć są to niejednokrotnie pozycje wybitne, to często zawierają jedynie opis jakościowy. O jednej z nich, *Fizyce* Arystotelesa, ks. Michał Heller pisał jako o *przedwczesnej syntezie* omawiającej zasady i naturę ruchu we Wszechświecie [51]. Przedwczesnej, gdyż Arystoteles nie dysponował odpowiednim opisem ilościowym – aparatem matematycznym, który miał być dopiero stopniowo odkrywany.

Brak odpowiednich modeli matematycznych skutkował narodzinami wielu wątpliwości. Sporo problemów przysparzało uchwycenie intuicyjnej idei ruchu, który z jednej strony zmienia stan obiektów, a z drugiej – zachowuje je identyczne. Proces ewolucji tego rozumowania został znakomicie uchwycony w książce [51]. Wskazano tam, że kluczowym wydarzeniem w dziejach jest odkrycie rachunku różniczkowego i całkowego. Pozwolił on bowiem zrozumieć dotychczas nieuchwytnie nieskończone małe zmiany stanu. Oparte na tym formalizmie zasady dynamiki Newtona stały się początkiem nowego rozdania w dziedzinie nauk ścisłych.

Rozwiązania podane przez sir Isaaca Newtona były niewątpliwie przełomowe, lecz nie okazały ostateczne. Stanowiły raczej Wielki Początek [51]. Płynie z tego pewna nauka. Po pierwsze, odpowiedni model matematyczny świata pozwala dostrzec coś, co może umknąć opisowi czysto jakościowemu. Istotnym jest tutaj fakt, że *modelowanie* nie jest przełożeniem na język wzorów matematycznych opisu świata, który może być obarczony odczuciami lub emocjami obserwatora. Jest to raczej założenie, że „*pewna struktura matematyczna reprezentuje pewien aspekt struktury świata*” [51]. Co istotne, model nie staje się uproszczonym lub wyidealizowanym przybliżeniem rzeczywistości. Jest dokładnym odwzorowaniem precyzyjnie wyodrębnionej części struktury świata.

Po drugie, modelowany przez nas świat jest pełen zaskoczeń i jest niezwykle złożony. Jak zauważono dalej w książce [51], Newton sądził, że „*przedstawił mechanikę w wykończonych, prawie ostatecznej formie*”. Późniejsze wieki pokazały, że pomylił się w tym aspekcie.

Jednakże, jego pragnienie czy nadzieja nie mogą dziwić. Człowiek zawsze szukał uporządkowania i ujednolicenia. Wyrażały to marzenia o unifikacji, o której śniło mnóstwo wybitnych ludzi nauki. Niektóre z tych dążeń zostały spełnione, jak w przypadku Jamesa Maxwella, który podał teorię łączącą oddziaływania elektryczne i magnetyczne. Jednak inne marzenia nie doczekały się urzeczywistnienia. Kurt Gödel, formułując twierdzenie o niezupełności, rozwiął pragnienia Dawida Hilberta, by „całą matematykę ująć w postaci jednego, wielkiego systemu aksjomatycznego” [51]. Pomimo tego fascynacja modelowaniem matematycznym nie wygasła, a niektórzy naukowcy wciąż starają się zawrzeć całą fizykę w jednej matematycznej strukturze [51], mozolnie posuwając się w tym kierunku.

Niniejsza praca podejmuje refleksję nad bardzo niewielkim wycinkiem potężnej struktury świata. Przedmiotem zainteresowania jest bowiem zastosowanie parametryzacji krzywoliniowych do jednego z podstawowych problemów wyróżnianych w teorii sterowania – śledzenia ścieżki.

Parametryzacje krzywoliniowe to formalizm wywodzący się z geometrii różniczkowej. Jest to dziedzina łącząca w sobie intuicyjny model świata statycznego, czyli niezmiennych w czasie geometrycznych kształtów, z opisem dynamicznych zmian wyrażonych za pomocą formalizmu rachunku różniczkowego. Idea parametryzacji krzywoliniowych została po raz pierwszy przedstawiona w XIX wieku [44, 110]. W późniejszych latach metoda ta była udoskonalana [8, 14]. Współcześnie stosuje się wiele aplikacji, które bazują na parametryzacjach krzywoliniowych, m. in. w grafice komputerowej [90], animacjach [123], teorii obwodów [87], biologii [20, 24] czy robotyce [53].

Historia pokazuje, że niejednokrotnie uznane i ugruntowane modele matematyczne znajdowały nowe, czasem całkiem nieoczywiste zastosowania. Uznając tę prawdę, w niniejszej rozprawie podjęto refleksję nad wykorzystaniem parametryzacji krzywoliniowych do realizacji jednego z fundamentalnych zadań współczesnej robotyki – zadania śledzenia ścieżki. W ten sposób wlano nowe tchnienie w wiekową formułę matematyczną, choć ta wcale nie zdążyła zardzewieć ani odejść w zapomnienie. Szczególną uwagę poświęcono zagadnieniu modelowania różnych obiektów robotycznych względem krzywych geometrycznych stanowiących ścieżkę, czyli wartość zadaną w rozważanym problemie sterowania. Zostały zaprojektowane algorytmy sterowania, których celem jest uporządkowanie, a także ujednolicenie parametrycznych rozwiązań problemu śledzenia ścieżki.

1.1 Motywacja pracy

Zadanie śledzenia ścieżki jest jednym z podstawowych zadań sterowania, jakie zwyczajowo wyróżnia się w literaturze dla obiektów robotycznych [122]. Zagadnienie to wymaga ciągłego rozwoju, gdyż jest skomplikowane w realizacji praktycznej. Niemniej jednak, z tego podejścia płyną ewidentne korzyści. W przeciwieństwie do zadania śledzenia trajektorii, która jest krzywą sparametryzowaną czasem, w zadaniu śledzenia ścieżki nie nakłada się zależności czasowych na obiekt sterowania. Ten fakt jest niezwykle istotny. Wyśrubowane reżimy czasowe mogą bowiem prowadzić do generowania sterowań, które są niemożliwe do realizacji na obiekcie rzeczywistym ze względu na ograniczenia napędów. W praktyce często mamy do czynienia z ograniczonymi zasobami, stąd doskonalenie rozwiązań pozwalających realizować zadanie śledzenia ścieżki jawi się jako szczególnie pożądane.

Zadanie śledzenia ścieżki jest niewątpliwie bardziej złożonym problemem w porównaniu z zadaniem śledzenia trajektorii. Jednakże należy podkreślić fakt, że geometryczna

ścieżka jest częstym wynikiem algorytmów planowania ruchu robotów, np. [19, 58, 119]. Posiadając szeroką gamę metod planowania ruchu, warto skupić się na rozwijaniu i doskonaleniu algorytmów, które pozwalają wprost skorzystać z wyników planowania. Wówczas nie ma konieczności parametryzacji otrzymanych ścieżek w dziedzinie czasu. Ze względu na tę praktyczną istotność zadania śledzenia ścieżki, podjęto pracę nad rozwojem algorytmów pozwalających na jego realizację.

Warto również zwrócić uwagę na fakt, że zadanie śledzenia ścieżki jest naturalnym rozwiązaniem dla wielu najważniejszych problemów współczesnej robotyki. Ścieżka to obiekt, którego opis jest czysto geometryczny. A zatem opis zadania w pełni bazuje na odległości. To podejście jest bardzo korzystne i nadaje się do projektowania algorytmów sterowania dla pojazdów autonomicznych [62, 105]. Takie obiekty poruszają się samodzielnie w środowiskach dynamicznych, które zmieniają się w czasie. Już dzisiaj są powszechnie wykorzystywane w przemyśle, w magazynach czy trudno dostępnych terenach. Podejmowane są również próby stworzenia samochodów autonomicznych, które mogłyby poruszać się w środowiskach miejskich [10]. Zadaniem pojazdów autonomicznych często jest realizacja zadanej trasy (ścieżki) prowadzącej z punktu początkowego do punktu docelowego. Jednocześnie wymaga się, aby była utrzymywana odpowiednia odległość od charakterystycznych elementów otoczenia (np. pasy) lub innych pojazdów będących w ruchu.

Niezwykle prężnie rozwijającą się dziedziną jest także robotyka kosmiczna. Do jej najważniejszych problemów zalicza się tworzenie pojazdów do eksploracji innych planet, np. łazików będących praktyczną realizacją idei manipulatorów mobilnych [108, 124], a także usuwanie odpadów z orbity okołoziemskiej oraz autonomiczna naprawa sztucznych satelitów [98]. Do realizacji tych zadań również idealnie nadają się algorytmy śledzenia ścieżki. Kluczowym aspektem wspomnianych wyzwań jest bowiem przemierzanie określonych tras czy też śledzenie obiektów poruszających się na orbicie. W obu przypadkach kluczową rolę odgrywa aspekt odległości. Można ją określać za pomocą czujników, np. laserowych. To wprost prowadzi do zdefiniowania zadania jako śledzenia ścieżki.

Warunkowanie zachowania robota względem innych poruszających się obiektów jest typowe nie tylko dla robotyki kosmicznej. Takie aspekty zadania można również znaleźć w aplikacjach ziemskich. Zachowanie wszelkiego rodzaju rojów robotów często bazuje na idei śledzenia ścieżki wytyczonej przez robota posiadającego miano lidera roju [11, 127]. Ponownie istotne są aspekty śledzenia obiektu w ruchu, geometryczne naśladowanie przebytej trasy oraz utrzymywanie odpowiedniej odległości.

Pośród wymienionych aplikacji, oprócz istoty opisu bazującego na odległości, pojawia się aspekt śledzenia poruszającego się obiektu. Stanowi to kolejną motywację, dla której podjęto analizę zastosowania parametryzacji krzywoliniowych do realizacji zadania śledzenia ścieżki. Formalizm parametryzacji krzywoliniowych definiuje bowiem pewien nieinercjalny układ odniesienia, który porusza się wzdłuż rozważanej krzywej. Równania ewolucji tego układu lokalnego są zdeterminowane przez geometrię danej ścieżki. Można go zatem wykorzystać do zdefiniowania zachowania obiektu sterowania względem pewnego kształtu lub innego obiektu w ruchu. Ta intuicyjna interpretacja matematyczna rozważanych problemów skłania do pogłębienia wiedzy w obszarze zastosowania parametryzacji krzywoliniowych i jej uporządkowania.

Formalizm matematyczny pozwalający na parametryczny opis krzywych jest bardzo bogaty. Najbardziej powszechną metodą jest parametryzacja Serreta–Freneta [44, 110]. Jest ona obciążona jednak pewnymi wadami, jak choćby nieokreśloność układu dla zerowej krzywizny, które skutecznie ograniczają jej zakres zastosowań. Istnieją jednak także

inne metody, np. parametryzacja Bishopa [8], które niwelują problemy wynikające z metody Serreta–Freneta. Zastosowanie tych rozwiązań do zadań typu śledzenie ścieżki nie zostało dogłębnie zbadane. Istotnym aspektem jest również analiza i porównanie właściwości różnych metod. Ten cel również przyświeca niniejszej pracy. Podjęte badania były motywowane poszukiwaniem pewnej ogólnej formuły, która pozwoli na realizację zadania śledzenia ścieżki przy pomocy metod parametryzacji krzywoliniowych. Ową formułę należy dostosować do warunków i wymagań konkretnej aplikacji poprzez dobór odpowiedniego narzędzia – sposobu parametryzacji. Systematyczna identyfikacja cech tych metod ma pozwolić na proste rozeznanie, które rozwiązanie będzie optymalne dla przyjętych kryteriów.

1.2 Przegląd rozwiązań

Nie ulega wątpliwości, że algorytmy śledzenia ścieżki są niezwykle istotne z perspektywy wielu wyzwań robotyki. Z tego względu na przestrzeni lat powstało wiele rozwiązań problemu śledzenia ścieżki.

Metody pozwalające na realizację rozważanego zadania można rozróżnić ze względu na sposób definiowania ścieżki [106]. Ścieżkę można zdefiniować za pomocą punktów węzłowych, które następnie łączy się liniami prostymi [15] lub wielomianami sklejanymi [22]. Z kolei Dubins zaproponował pewne elementarne składowe ścieżek: łuki okręgów oraz styczne do nich linie proste [28]. Wreszcie, ścieżkę można reprezentować jako funkcję zależną od wirtualnego parametru. To ostatnie podejście jest najbardziej ogólne. Jego reprezentacją jest metoda oparta o parametryzację krzywoliniową, która została poddana analizie w niniejszej rozprawie.

Istnieje również szeroka gama realizacji zadania śledzenia ścieżki. Ze względu na poziom skomplikowania zadania, w literaturze można odnaleźć wiele strategii sterowania pozwalających na jego realizację [53]. Podstawowy podział metod pozwala na wyróżnienie podejścia parametrycznego oraz nieparametrycznego.

Jednymi z pierwszych rozwijanych podejść do realizacji zadania śledzenia ścieżki były metody geometryczne [118]. Wiązały się one ze zdefiniowaniem pewnego wirtualnego punktu odniesienia na ścieżce. Celem sterownika była minimalizacja odległości między obiektem sterowania a uciekającym nierzeczywistym celem. Do tej rodziny rozwiązań należy algorytm *pure pursuit*, który był realizowany w wielu wersjach [4, 99]. Czasami takie prawa śledzenia były optymalizowane za pomocą modelu Dubinsa [52].

Bardzo skuteczne i wydajne są również algorytmy sterowania oparte o nieparametryczny opis ścieżki. Bazują one bowiem na numerycznej analizie powierzchni i kształtów. W tym podejściu zadaną ścieżkę definiuje się jako zbiór punktów referencyjnych, które spełniają pewne skalarne równanie [86]. Wymaga się, aby wartość tego równania na ścieżce wynosiła 0. We wszystkich pozostałych punktach przestrzeni równanie przyjmuje wartość niezerową. W rezultacie, analizowana wielkość staje się pewną miarą odległości od krzywej. Tę koncepcję często wykorzystuje się do sterowania robotami mobilnymi, np. platformami kołowymi [26, 68, 89], obiektami latającymi [18] czy ciągnikami z przyczepami [85]. To podejście można również wykorzystać w procesie optymalizacji ruchu robota [46].

Chętnie rozwijaną techniką jest także metoda pól wektorowych [86, 92, 130, 135]. Kluczowe w tym podejściu pola wektorowe są konstruowane na podstawie geometrii zadanej

krzywej. Wymaga się, aby krzywe całkowite pola wektorowego zbiegały do zdefiniowanej ścieżki [61]. Na tej podstawie generowane są odpowiednie sterowania robota. Metoda pól wektorowych może być realizowana zarówno nieparametrycznie, jak i parametrycznie. W drugim przypadku zadaną krzywą geometryczną reprezentuje się za pomocą funkcji skalarnych, co sprowadza się do rozważania n -wymiarowych pól wektorowych [47]. Skutkuje to znaczącym wzrostem wymiarowości problemu, który zwyczajowo jest osadzony w przestrzeni dwuwymiarowej lub trójwymiarowej. Metoda pól wektorowych charakteryzuje się bardzo korzystną matematyczną reprezentacją zadania. Jest ona dogodna dla opisu krzywych zmieniających się w czasie [47], które mogą wystąpić w środowiskach z dynamicznymi przeszkodami. Jednakże to podejście jest obarczone osobliwościami wynikającymi z lokalnych ekstremów w rozwiązaniu. Problem osobliwości pól wektorowych może być rozwiązany poprzez dodatkowe zwiększenie wymiarowości zadania [136]. Alternatywne podejście zostało zaproponowane w pracy [104]. Autorzy oparli definicję pola wektorowego o elementy wynikające z parametryzacji krzywej metodą Serreta–Freneta, a jako rozwiązanie problemu rozróżniania punktów równoodległych od krzywej wskazali uwzględnienie minimalnej odległości od krzywej w opisie stanu obiektu względem krzywej. To ostatnie założenie jest fundamentalne dla parametryzacji ortogonalnych rozważanych w niniejszej rozprawie.

Innym powszechnym rozwiązaniem, stosowanym zwłaszcza do sterowania platformami mobilnymi, jest sterowanie predykcyjne [54, 133]. To podejście pozwala na generowanie optymalnych rozwiązań problemu sterowania w określonym horyzoncie czasowym. Jest to możliwe dzięki szacowaniu przyszłych stanów obiektu sterowania na podstawie jego modelu [105]. W ostatnich latach metody sterowania predykcyjnego są chętnie wspomagane za pomocą technik uczenia maszynowego [73, 128].

Wreszcie, problem śledzenia ścieżki można również rozwiązać za pomocą metod w pełni parametrycznych, które stanowią przedmiot rozważań tej pracy. W wielu dotychczasowych rozwiązaniach prym wiodła metoda Serreta–Freneta jako najbardziej intuicyjna ze względu na swój geometryczny charakter [41, 116]. To podejście dobrze sprawdziło się w wielu aplikacjach. W literaturze można odnaleźć mnóstwo przykładów zastosowań parametryzacji krzywoliniowych do sterowania robotami, m. in. manipulatorami holonomicznymi [45, 81], nieholonomicznymi platformami mobilnymi [41, 69, 84], manipulatorami mobilnymi [75, 83], obiektami latającymi [71], rojami robotów [16] czy manipulatorami kosmicznymi [27]. Dzięki możliwości modelowania ruchu układu lokalnego na ścieżce można było również realizować dodatkowe zadania, jak zatrzymanie na ścieżce [45]. Pośród mnogości rozwiązań opartych o parametryzacje krzywoliniowe można zauważyć jednak sporo ograniczeń. Wiele problemów zostało zredukowanych do rozważań ruchu pojazdów mobilnych na płaszczyźnie [69, 102, 84]. Ponadto, ze względu na ograniczenia metody, niektóre rozwiązania umożliwiały jedynie asymptotyczne zbliżanie się do ścieżki [81]. To pokazuje, że choć rozwiązania parametryczne są powszechnie cenione, pozostaje wciąż sporo przestrzeni na udoskonalenia. Dogłębne zbadanie tej tematyki i zaproponowanie stosownych rozwiązań jest jednym z głównych celów niniejszej rozprawy.

1.3 Główne tezy pracy

Autor pracy stawia następującą tezę:

Parametryzacje krzywoliniowe to narzędzie matematyczne, które można sku-

tecnie stosować do modelowania ruchu robota względem ścieżki (krzywej geometrycznej). Uzyskany opis pozwala uzyskać ograniczenia prędkościowe, które należy uwzględnić w układzie sterowania do realizacji ruchu wzdłuż ścieżki.

Szczegółowa analiza problemu prowadzi do postawienia bardziej precyzyjnych pytań badawczych i tez, które są weryfikowane w niniejszej rozprawie.

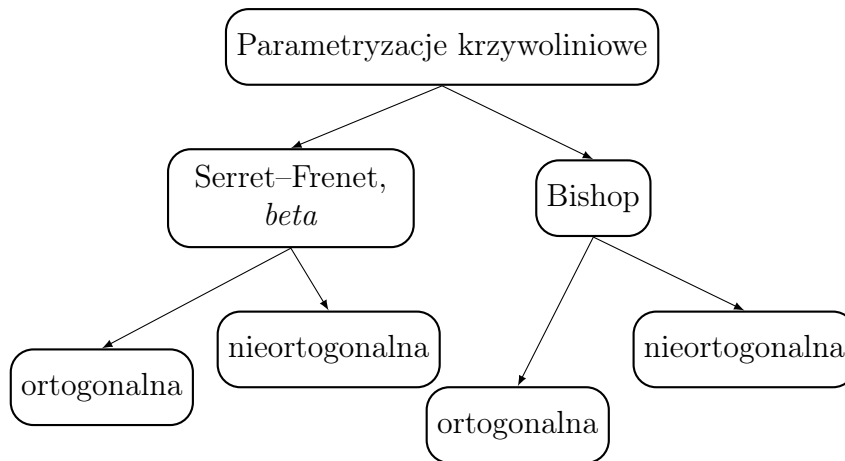
- T1 Do realizacji zadania śledzenia ścieżki można skutecznie zastosować różne metody parametryzacji krzywoliniowych: Serreta–Freneta, Bishopa, *beta*.
- T2 Istnieją globalne metody opisu robota względem ścieżki (dobrze określone w całej przestrzeni $\mathbb{R}^3$).
- T3 Możliwe jest zastosowanie metodologii typowej dla układów nieholonomicznych, np. algorytmu całkowania wstecznego, do projektowania algorytmów śledzenia ścieżki.
- T4 Sterownik dynamiczny, odpowiadający za realizację zaplanowanych profili prędkościowych wynikających z opisu względem ścieżki, może być dostosowany do poziomu znajomości parametrów dynamiki robota bez konieczności modyfikacji struktury układu sterowania w zadaniu śledzenia ścieżki.
- T5 Podejście parametryczne do realizacji zadania śledzenia ścieżki można rozszerzyć o sterowanie posturą (położenie wraz z orientacją) robota względem ścieżki w przestrzeni trójwymiarowej.
- T6 Ograniczenia na sterowania mogą być jawnie uwzględnione w algorytmach śledzenia ścieżki.
- T7 Parametryczny opis robota względem układu lokalnego na ścieżce można zastosować do śledzenia rzeczywistych obiektów.

1.4 Przegląd zawartości i wkładu pracy

Prezentowana dysertacja zawiera omówienie zastosowania parametryzacji krzywoliniowych do realizacji zadania śledzenia ścieżki przez różne układy robotyczne: manipulatory holonomiczne oraz nieholonomiczne manipulatory mobilne. W pracy przeanalizowano własności różnych metod parametryzacji, wskazując na ich wady i zalety. Na ich podstawie zdefiniowano prawa sterowania wraz z dowodami stabilności algorytmów. Wreszcie, rozważono praktyczne aplikacje wynikające z rozważanej teorii. Wyniki weryfikowano symulacyjnie oraz częściowo eksperymentalnie, na manipulatorze KINOVA[®] Gen3.

W rozdziale 1, który stanowi wstęp do niniejszej rozprawy, przedstawiono podstawowe motywacje do podjęcia badań. Sformułowano także tezy i pytania badawcze, na które poszukiwano odpowiedzi.

Podstawowym narzędziem matematycznym wykorzystanym w przedstawionych badaniach są parametryzacje krzywoliniowe. W rozdziale 2 zaprezentowano równania definiujące różne metody parametryzacji: Serreta–Freneta, Bishopa, *beta*. Rozgraniczono równania w parametryzacji unormowanej, gdy parametr ma interpretację odległości krzywoliniowej na ścieżce, oraz w parametryzacji nieunormowanej, gdy parametr jest definiowany bardziej ogólnie. Ponadto, wskazano różnice między poszczególnymi metodami, uwypuklając



Rysunek 1.1: Rozważone parametryzacje krzywoliniowe do opisu robota względem ścieżki.

wartość metody dotychczas rzadziej stosowanej w aplikacjach robotycznych – parametryzacji Bishopa. Kluczowy aspekt, który podkreślono w tym rozdziale, stanowią równania ewolucji układu lokalnego wzdłuż krzywej geometrycznej.

Następnie, w rozdziale 3 przedstawiono, w jaki sposób wykorzystać równania układu lokalnego na ścieżce, wynikające z danej metody parametryzacji krzywoliniowej, do opisu robota względem ścieżki. W tym celu wykorzystano parametryzacje:

- ortogonalną – minimalizuje wymiarowość zadania dzięki założeniu, że punkt prowadzenia robota zawsze znajduje się w płaszczyźnie normalnej. Założenie to jednak prowadzi do występowania osobliwości opisu, które zostały omówione w rozdziale 3.1;
- nieortogonalną – nie wprowadza dodatkowych ograniczeń do opisu robota względem ścieżki. W konsekwencji, konieczne jest sterowanie robotem we wszystkich kierunkach układu lokalnego.

W rozdziale 3 przedstawiono jawne równania opisu robota względem ścieżki w parametryzacji Serreta–Freneta (tożsame z parametryzacją *beta*) oraz Bishopa, w wersji ortogonalnej oraz nieortogonalnej, zgodnie ze schematem na rys. 1.1. W tej części sformułowano także równania opisujące orientację robota względem ścieżki. W tym celu wykorzystano zarówno kąty Eulera, jak i kwaterniony jednostkowe. Pointą tej części jest zdefiniowanie ogólnych równań opisujących ruch robota względem ścieżki, które konstrytuują ograniczenia prędkościowe niezbędne do realizacji zadania śledzenia ścieżki.

Rozdział 4 zawiera precyzyjne sformułowanie problemu sterowania rozważanego w niniejszej rozprawie. Przedstawiono tam najważniejsze założenia dotyczące prezentowanej metody. W szczególności pokazano, w jaki sposób należy wpisać ograniczenia prędkościowe wynikające z opisu względem ścieżki w strukturę obiektu holonomicznego oraz mobilnego obiektu nieholonomicznego. Następnie wskazano ogólne założenia dotyczące układu sterowania oraz jego konstrukcji, która jest konsekwencją wcześniej zdefiniowanych modeli obiektów.

Ogólne modele z rozdziału 4 upostaciowiono w rozdziałach 5 oraz 6, choć nie zrezygnowano z uogólnionego poziomu abstrakcji. Najpierw, w rozdziale 5 przedstawiono algorytmy sterowania dla obiektów holonomicznych. Zaproponowano rozwiązania dla różnych poziomów znajomości dynamiki obiektu. Wyróżniono przypadki:

- pełnej znajomości modelu,
- nieznanym parametrycznym,
- nieznanym strukturalnym,
- braku znajomości modelu.

Dla każdego przypadku zaproponowano algorytm sterowania i przedstawiono dla niego dowód stabilności. W szczególności, sterownik kinematyczny za każdym razem oparto na opisie robota względem ścieżki, uzyskanym na podstawie parametryzacji krzywoliniowych. Wyniki teoretyczne weryfikowano symulacyjnie dla manipulatora o trzech stopniach swobody, a także symulacyjnie i eksperymentalnie dla manipulatora redundantnego KINOVA[®] Gen3, który był dostępny w miejscu prowadzenia badań – Katedrze Cybernetyki i Robotyki Politechniki Wrocławskiej. Należy podkreślić, że zwłaszcza wyniki eksperymentów świadczą o możliwościach praktycznego zastosowania proponowanych rozwiązań i stanowią bardzo istotny aspekt walidacji.

Rozdział 6 posiada analogiczną strukturę do rozdziału 5. Ponownie przedstawiono algorytmy śledzenia ścieżki wraz z dowodami ich stabilności, jednak tym razem zostały one dostosowane do specyfiki nieholonomicznych manipulatorów mobilnych. Rozważono różne przypadki znajomości modelu dynamiki obiektu sterowania. Jednakże, za każdym razem wykorzystano opis robota względem ścieżki uzyskany za pomocą parametryzacji krzywoliniowych. Wyniki teoretyczne zweryfikowano za pomocą badań symulacyjnych dla manipulatora mobilnego typu (nh, h) .

Scenariusze symulacyjne przedstawione w rozdziałach 5 oraz 6 zostały skonstruowane tak, aby wykorzystać każdą ze zdefiniowanych wcześniej wersji parametryzacji krzywoliniowej i opisu robota względem ścieżki. Cechy charakterystyczne tych metod, z uwypukleniem najbardziej istotnych własności, zostały porównane i przeanalizowane w rozdziale 7. Celem tego rozdziału było uzyskanie syntetycznej informacji, w jakich warunkach warto stosować poszczególne metody parametryzacji, a w jakich należy unikać konkretnych rozwiązań. Na podstawie zawartej tam analizy możliwe jest wybranie odpowiedniego rozwiązania dostosowanego do ograniczeń rozważanej aplikacji.

Kolejne dwa rozdziały stanowią krok w kierunku praktycznych zastosowań proponowanych rozwiązań. W rozdziale 8 przedstawiono sposoby na uwzględnienie ograniczeń na sterowanie przy realizacji zadania śledzenia ścieżki. Z kolei w rozdziale 9 w oparciu o rozważane parametryczne podejście do zadania śledzenia ścieżki zaproponowano metodę, którą można wykorzystać do realizacji manewru przechwyty poruszającego się obiektu.

Wreszcie, rozdział 10 to zwięzłe podsumowanie pracy. Zweryfikowano tam realizację tez badawczych postawionych we wstępie, a także wskazano możliwe kierunki dalszych badań i rozwoju.

Rozdział 2

Parametryzacje krzywoliniowe

Ścieżkę w ujęciu robotycznym definiuje się jako krzywą geometryczną niezależną od czasu. Jej opis jest ściśle powiązany z długością ścieżki lub odległością, która została zrealizowana wzdłuż ścieżki. Jednym ze sposobów opisu geometrii krzywych w przestrzeni są *parametryzacje krzywoliniowe*. Te metody pozwalają zdefiniować lokalny układ współrzędnych, który porusza się wzdłuż krzywej, a jego ewolucja wynika wprost z geometrii parametryzowanego obiektu.

Definicja parametru, względem którego opisywana jest krzywa, pozwala rozróżnić parametryzację unormowaną oraz nieunormowaną [93]. W przypadku parametryzacji unormowanej równania krzywej zależą od odległości krzywoliniowej s , zwanej inaczej długością łukową. Parametr unormowany można interpretować jako długość nici zaczepionej w ustalonym punkcie początkowym i położonej idealnie wzdłuż krzywej. Parametr s pozwala zatem określić, jak daleko od początku krzywej znajduje się wybrany punkt. Parametryzacja nieunormowana względem dowolnego parametru u jest przypadkiem ogólniejszym – parametr krzywej można definiować w sposób dowolny. Wiele krzywych można opisać za pomocą parametryzacji unormowanej, m. in. linię śrubową czy kłotoidę. Jednakże w wielu przypadkach, np. dla wielomianów sklepanych, trudno uzyskać analityczną postać parametryzacji unormowanej ze względu na nieliniową zależność obu parametrów

$$s(u) = \int_0^u \left\| \frac{d\mathbf{r}(x)}{dx} \right\| dx, \quad (2.1)$$

gdzie $\|\cdot\|$ oznacza normę euklidesową wektora. Zależność (2.1) pozwala zdefiniować prędkość krzywoliniową, a więc tempo ewolucji układu lokalnego wzdłuż ścieżki. Pochodne po czasie parametru unormowanego i nieunormowanego zależą od siebie zgodnie z równaniem

$$\dot{s}(\dot{u}, u) = \dot{u} \left\| \frac{d\mathbf{r}(u)}{du} \right\|. \quad (2.2)$$

W niniejszym rozdziale przedstawiono definicje różnych metod parametryzacji krzywoliniowych zarówno w postaci unormowanej, jak i nieunormowanej.

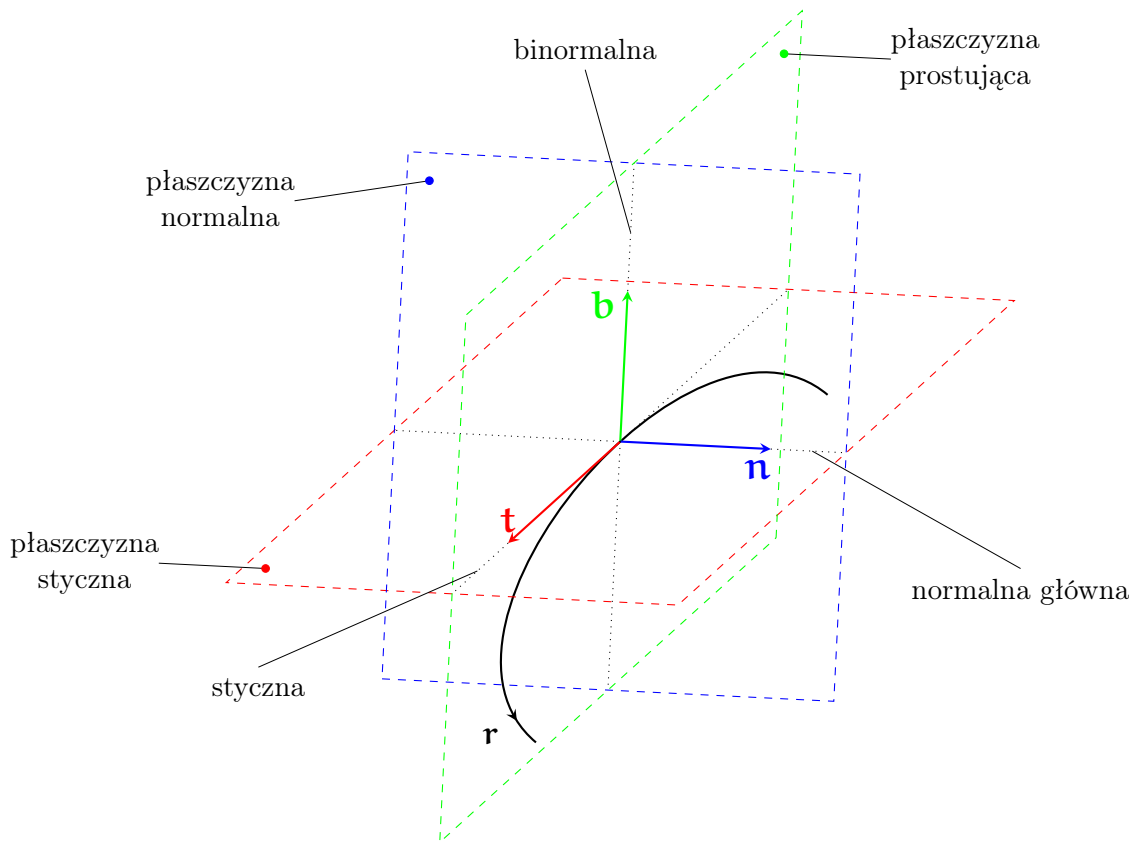
Spostrzeżenie 1. *Należy podkreślić, że niezależnie od parametru, względem którego są opisywane poszczególne wielkości definiujące geometrię krzywej w przestrzeni, wyrażają one te same wartości w globalnym układzie odniesienia. W szczególności, dla pewnej krzywej $\mathbf{r}$ zachodzi*

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(s(u)) = \mathbf{r}(u), \quad (2.3)$$

przy czym powyższe równanie pozwala opisać położenie punktu na krzywej w globalnym układzie odniesienia.

2.1 Parametryzacja Serreta–Freneta

Jedną z najpowszechniej stosowanych metod parametryzacji krzywoliniowej, która pozwala opisać zmiany geometrii krzywej w przestrzeni trójwymiarowej, jest parametryzacja Serreta–Freneta. Ta metoda została opisana niezależnie przez francuskich matematyków Josepha Alfreda Serreta [110] oraz Jeana Frédéric’a Freneta [44]. Układ lokalny, którego ruch wzdłuż krzywej można opisać, jest zbudowany z trzech wektorów, które rozpinają bazę ortonormalną w przestrzeni $\mathbb{R}^3$, określaną mianem trójszcianu Freneta [122]. Definicja wektorów bazowych układu Serreta–Freneta jest intuicyjna geometrycznie. Trójszcian Freneta rozpinają bowiem wektory: styczny do krzywej $\mathbf{t}$, normalny do krzywej $\mathbf{n}$ oraz binormalny do krzywej $\mathbf{b}$. Ich położenie w przestrzeni względem pewnej krzywej $\mathbf{r}$ przedstawiono na rys. 2.1.



Rysunek 2.1: Trójszcian Freneta.

Parametry opisujące geometrię krzywej są określane jako krzywizna κ oraz torsja τ . Krzywizna określa stopień odchylenia krzywej od linii prostej, podczas gdy torsja wyraża odchylenie krzywej od płaszczyzny [93]. Te wartości bezpośrednio wpływają na definicję ewolucji układu Serreta–Freneta wzdłuż krzywej.

Poniżej przedstawiono równania opisujące parametryzację Serreta–Freneta w postaci unormowanej oraz nieunormowanej.

2.1.1 Parametryzacja unormowana

W parametryzacji unormowanej (względem odległości krzywoliniowej s) wektory bazowe układu Serreta–Freneta definiuje się jako [93]

$$\mathbf{t}(s) = \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds}, \quad (2.4a)$$

$$\mathbf{n}(s) = \frac{\frac{d\mathbf{t}(s)}{ds}}{\left\| \frac{d\mathbf{t}(s)}{ds} \right\|}, \quad (2.4b)$$

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s). \quad (2.4c)$$

Z kolei parametry geometryczne krzywej, krzywiznę oraz torsję, oblicza się zgodnie z następującymi zależnościami [101]

$$\kappa(s) = \left\| \frac{d\mathbf{t}(s)}{ds} \right\|, \quad (2.5a)$$

$$\tau(s) = \left\| \frac{d\mathbf{b}(s)}{ds} \right\| = \frac{1}{\kappa^2(s)} \left\langle \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} \times \frac{d^2\mathbf{r}(s)}{ds^2}, \frac{d^3\mathbf{r}(s)}{ds^3} \right\rangle, \quad (2.5b)$$

gdzie $\langle \cdot, \cdot \rangle$ oznacza iloczyn skalarny wektorów.

Ewolucję układu Serreta–Freneta wzdłuż krzywej wyrażają równania [93]

$$\frac{d\mathbf{t}(s)}{ds} = \kappa(s)\mathbf{n}(s), \quad (2.6a)$$

$$\frac{d\mathbf{n}(s)}{ds} = -\kappa(s)\mathbf{t}(s) + \tau(s)\mathbf{b}(s), \quad (2.6b)$$

$$\frac{d\mathbf{b}(s)}{ds} = -\tau(s)\mathbf{n}(s). \quad (2.6c)$$

Zależności (2.6) można zapisać w postaci macierzowej jako

$$\begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{t}(s)}{ds} & \frac{d\mathbf{n}(s)}{ds} & \frac{d\mathbf{b}(s)}{ds} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}(s) & \mathbf{n}(s) & \mathbf{b}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\kappa(s) & 0 \\ \kappa(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Niech dana będzie macierz $\mathbf{S}_{\text{SF}}(s)$, której kolumny stanowią wektory bazowe układu Serreta–Freneta

$$\mathbf{S}_{\text{SF}}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{t}(s) & \mathbf{n}(s) & \mathbf{b}(s) \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Tak zdefiniowana macierz $\mathbf{S}_{\text{SF}}(s)$ jest macierzą opisującą orientację układu Serreta–Freneta w inercjalnym układzie odniesienia. Jest to macierz ortogonalna i należy do specjalnej grupy obrotów, $\mathbf{S}_{\text{SF}} \in \mathbb{SO}(3)$, więc zachodzi $\mathbf{S}_{\text{SF}}^T = \mathbf{S}_{\text{SF}}^{-1}$ [122]. Uwzględniając definicję (2.8), równanie (2.7) można zapisać jako

$$\frac{d\mathbf{S}_{\text{SF}}(s)}{ds} = \mathbf{S}_{\text{SF}}(s) \begin{bmatrix} 0 & -\kappa(s) & 0 \\ \kappa(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{S}_{\text{SF}}(s)\mathbf{W}_{\text{SF}}(s), \quad (2.9)$$

gdzie macierz $\mathbf{W}_{\text{SF}}(s)$ jest macierzą skośnie symetryczną, tzn. zachodzi $\mathbf{W}_{\text{SF}}^T = -\mathbf{W}_{\text{SF}}$.

Ewolucję układu Serreta–Freneta w czasie można wyznaczyć, korzystając z reguły łańcuchowej

$$\dot{\mathbf{S}}_{\text{SF}}(s) = \frac{d\mathbf{S}_{\text{SF}}(s)}{ds} \dot{s} = \dot{s} \mathbf{S}_{\text{SF}}(s) \mathbf{W}_{\text{SF}}(s). \quad (2.10)$$

2.1.2 Parametryzacja nieunormowana

W przypadku parametryzacji krzywej dowolnym parametrem $\mathbf{u}$, równania wektorów układu Serreta–Freneta wymagają dodatkowo normalizacji, aby rozpięły bazę ortonormalną. W związku z tym, wersory bazowe w parametryzacji nieunormowanej dane są za pomocą równań [42]

$$\mathbf{t}(\mathbf{u}) = \frac{\frac{d\mathbf{r}(\mathbf{u})}{du}}{\left\| \frac{d\mathbf{r}(\mathbf{u})}{du} \right\|}, \quad (2.11a)$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{u}) = \frac{\frac{d\mathbf{r}(\mathbf{u})}{du} \times \frac{d^2\mathbf{r}(\mathbf{u})}{du^2}}{\left\| \frac{d\mathbf{r}(\mathbf{u})}{du} \times \frac{d^2\mathbf{r}(\mathbf{u})}{du^2} \right\|}, \quad (2.11b)$$

$$\mathbf{n}(\mathbf{u}) = \mathbf{b}(\mathbf{u}) \times \mathbf{t}(\mathbf{u}). \quad (2.11c)$$

Unormowanie parametru wpływa również bezpośrednio na definicję krzywizny i torsji

$$\kappa(\mathbf{u}) = \frac{\left\| \frac{d\mathbf{r}(\mathbf{u})}{du} \times \frac{d^2\mathbf{r}(\mathbf{u})}{du^2} \right\|}{\left\| \frac{d\mathbf{r}(\mathbf{u})}{du} \right\|^3}, \quad (2.12a)$$

$$\tau(\mathbf{u}) = \frac{\left\langle \frac{d\mathbf{r}(\mathbf{u})}{du} \times \frac{d^2\mathbf{r}(\mathbf{u})}{du^2}, \frac{d^3\mathbf{r}(\mathbf{u})}{du^3} \right\rangle}{\left\| \frac{d\mathbf{r}(\mathbf{u})}{du} \times \frac{d^2\mathbf{r}(\mathbf{u})}{du^2} \right\|^2}. \quad (2.12b)$$

Postacie macierzy $\mathbf{S}_{\text{SF}}$ oraz $\mathbf{W}_{\text{SF}}$, zgodnie ze Spostrzeżeniem 1, nie zależą od unormowania parametryzacji. Dlatego ewolucję układu lokalnego Serreta–Freneta wzdłuż krzywej w parametryzacji nieunormowanej można opisać równaniem [93]

$$\frac{d\mathbf{S}_{\text{SF}}(\mathbf{u})}{du} = \frac{d\mathbf{S}_{\text{SF}}(s(\mathbf{u}))}{ds} \frac{ds}{du} = \mathbf{v} \mathbf{S}_{\text{SF}}(s(\mathbf{u})) \mathbf{W}_{\text{SF}}(s(\mathbf{u})) = \mathbf{v} \mathbf{S}_{\text{SF}}(\mathbf{u}) \mathbf{W}_{\text{SF}}(\mathbf{u}), \quad (2.13)$$

gdzie, zgodnie z równaniem (2.2), $\mathbf{v} = \frac{ds}{du} = \left\| \frac{d\mathbf{r}(\mathbf{u})}{du} \right\|$. Oznacza to, że zastosowany parametr do opisu krzywej nie zmienia jej kształtu, a zatem i ścieżka, po której porusza się układ lokalny, pozostaje taka sama. Wybór parametru do opisu krzywej wpływa jedynie na tempo ewolucji układu lokalnego zgodnie ze współczynnikiem $\mathbf{v}$.

Ewolucja w czasie układu lokalnego wynikającego z nieunormowanej parametryzacji krzywej również wynika z zasady łańcuchowej

$$\dot{\mathbf{S}}_{\text{SF}}(\mathbf{u}) = \dot{\mathbf{u}} \frac{d\mathbf{S}_{\text{SF}}(\mathbf{u})}{du}. \quad (2.14)$$

Jednakże uwzględniając równania (2.2) oraz (2.13), zależność (2.14) można sprowadzić do postaci

$$\dot{\mathbf{S}}_{\text{SF}}(\mathbf{u}) = \frac{d\mathbf{S}_{\text{SF}}(s(\mathbf{u}))}{ds} \frac{ds}{du} \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{S}}_{\text{SF}}(\mathbf{u}) \mathbf{W}_{\text{SF}}(\mathbf{u}). \quad (2.15)$$

Porównując równania (2.10) oraz (2.15), można zauważyć, że ewolucja układu lokalnego w czasie przyjmuje tę samą postać niezależnie od unormowania parametru.

2.2 Parametryzacja Bishopa

Alternatywną metodę dla parametryzacji Serreta–Freneta zaproponował Richard Bishop w swojej pracy [8]. Parametryzacja Bishopa również pozwala na opis zmian geometrii krzywej w przestrzeni na podstawie ewolucji układu lokalnego wzdłuż tej krzywej.

Układ Bishopa jest opisany przez trzy wersory, które tworzą bazę ortonormalną. Składową tej bazy jest wektor styczny do krzywej $\mathbf{t}$, który jest częścią wspólną układów Serreta–Freneta i Bishopa. Niemniej jednak, pozostałe wersory bazowe nie posiadają tak oczywistej interpretacji geometrycznej, jak wektory normalny i binormalny definiowane dla trójścianu Freneta. Zamiast nich wyróżnia się dwa wektory normalne, $\mathbf{n}_1$ oraz $\mathbf{n}_2$. W stanie początkowym mogą one zostać wybrane dowolnie tak, aby wraz z wektorem stycznym $\mathbf{t}$ rozpięły bazę ortonormalną. W szczególności, mogą odpowiadać układowi Serreta–Freneta lub wynikać z jego rotacji wokół wektora stycznego. Pomocną procedurą do uzyskania pożądanego układu może być również ortogonalizacja Grama–Schmidta i normalizacja wektorów.

Wynika z tego, że definicja układu Bishopa w stanie początkowym posiada pewien stopień swobody. Jednakże ewolucja układu Bishopa jest unikatowa, nie zależy od warunku początkowego i w istotny sposób różni się od ewolucji układu Serreta–Freneta. Podstawą definicji parametryzacji Bishopa jest fakt, że wersory normalne generują unikatowe względnie równoległe pola wektorowe wzdłuż krzywej [14]. Normalne pole wektorowe $\mathbf{m}(s)$ wzdłuż krzywej jest *względnie równoległe*, jeśli jego pochodna wzdłuż krzywej jest styczna do krzywej [8, 67]. W szczególności, przytoczona definicja oznacza, że dla pewnej funkcji $g(s)$ zachodzi

$$\frac{d\mathbf{m}(s)}{ds} = g(s)\mathbf{t}(s). \quad (2.16)$$

2.2.1 Parametryzacja unormowana

W przypadku unormowanej parametryzacji Bishopa wektor styczny jest zdefiniowany identycznie, jak dla parametryzacji Serreta–Freneta i dany równaniem (2.4a). Wektory normalne należy dobrać tak, aby uzyskać układ lokalny rozpinający bazę ortonormalną.

W celu opisanie ewolucji układu Bishopa wzdłuż krzywej definiuje się pewne funkcje, $k_1(s)$ oraz $k_2(s)$ [8], które można określić mianem krzywizn Bishopa [70]. Para funkcji (k_1, k_2) jest geometrycznym niezmiennikiem rozważanej krzywej i określa się ją jako *rozwiniecie normalne krzywej* [8]. Odpowiada ona parze współczynników opisujących geometrię krzywej w parametryzacji Serreta–Freneta: krzywiznie i torsji. Należy je zatem

wykorzystać do opisu ewolucji układu Bishopa wzdłuż krzywej za pomocą równań

$$\frac{d\mathbf{t}(s)}{ds} = k_1(s)\mathbf{n}_1(s) + k_2(s)\mathbf{n}_2(s), \quad (2.17a)$$

$$\frac{d\mathbf{n}_1(s)}{ds} = -k_1(s)\mathbf{t}(s), \quad (2.17b)$$

$$\frac{d\mathbf{n}_2(s)}{ds} = -k_2(s)\mathbf{t}(s). \quad (2.17c)$$

Warto zauważyć, że równania (2.17b) oraz (2.17c) istotnie spełniają wymagania względnie równoległego pola wektorowego opisanego równaniem (2.16). Ponadto, na podstawie wzorów (2.17) można wyznaczyć rozwinięcie normalne krzywej [8]. Skoro wersory bazowe układu Bishopa są ortonormalne, to zachodzą zależności [70]

$$k_1(s) = \left\langle \frac{d\mathbf{t}(s)}{ds}, \mathbf{n}_1(s) \right\rangle, \quad (2.18a)$$

$$k_2(s) = \left\langle \frac{d\mathbf{t}(s)}{ds}, \mathbf{n}_2(s) \right\rangle. \quad (2.18b)$$

Niech będzie dana macierz $\mathbf{S}_B(s)$ opisująca orientację układu Bishopa w globalnym układzie odniesienia. Analogicznie jak dla układu Serreta–Freneta (por. równanie (2.8)), jej kolumny stanowią wektory bazowe układu Bishopa

$$\mathbf{S}_B(s) = [\mathbf{t}(s) \quad \mathbf{n}_1(s) \quad \mathbf{n}_2(s)]. \quad (2.19)$$

Dla tak zdefiniowanej macierzy $\mathbf{S}_B(s)$ równania (2.17) można przedstawić w zwartej postaci macierzowej

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{S}_B(s)}{ds} &= \begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{t}(s)}{ds} & \frac{d\mathbf{n}_1(s)}{ds} & \frac{d\mathbf{n}_2(s)}{ds} \end{bmatrix} = \\ &= [\mathbf{t}(s) \quad \mathbf{n}_1(s) \quad \mathbf{n}_2(s)] \begin{bmatrix} 0 & -k_1(s) & -k_2(s) \\ k_1(s) & 0 & 0 \\ k_2(s) & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{S}_B(s)\mathbf{W}_B(s). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Można zaobserwować, że ewolucja tego układu ma charakter analogiczny do ewolucji układu Serreta–Freneta wyrażonej za pomocą równania (2.9). Ze względu na ortonormalność rozważanego układu lokalnego, macierz współczynników $\mathbf{W}_B(s)$ również jest macierzą skośnie symetryczną [8]. Ewolucję macierzy $\mathbf{S}_B(s)$ wraz z upływem czasu wyraża równanie analogiczne do zależności (2.10)

$$\dot{\mathbf{S}}_B(s) = \frac{d\mathbf{S}_B(s)}{ds}\dot{s} = \dot{s}\mathbf{S}_B(s)\mathbf{W}_B(s). \quad (2.21)$$

2.2.2 Parametryzacja nieunormowana

Parametryzację Bishopa również można wyrazić względem nieunormowanego parametru. Wówczas układ lokalny na krzywej tworzą wektory: styczny zdefiniowany wzorem (2.11a), a także dwa wektory normalne dobrane zgodnie z charakterystyką metody.

W równaniach opisujących ewolucję układu bazowego konieczne jest uwzględnienie parametru skali

$$\mathbf{v} = \frac{ds}{du} = \left\| \frac{d\mathbf{r}(\mathbf{u})}{du} \right\|, \quad (2.22)$$

który wynika wprost z równania (2.2). Zgodnie ze Spostrzeżeniem 1, postaci macierzy $\mathbf{S}_B$ oraz $\mathbf{W}_B$ nie zależą od unormowania parametru. Dlatego zwarty opis macierzowy (2.20) w parametryzacji nieunormowanej przyjmuje postać

$$\frac{d\mathbf{S}_B(\mathbf{u})}{du} = \frac{d\mathbf{S}_B(s(\mathbf{u}))}{ds} \frac{ds}{du} = \mathbf{v} \mathbf{S}_B(s(\mathbf{u})) \mathbf{W}_B(s(\mathbf{u})) = \mathbf{v} \mathbf{S}_B(\mathbf{u}) \mathbf{W}_B(\mathbf{u}). \quad (2.23)$$

W sposób analogiczny można przeprowadzić analizę ewolucji układu Bishopa w czasie, która zachodzi zgodnie z równaniem

$$\dot{\mathbf{S}}_B(\mathbf{u}) = \frac{d\mathbf{S}_B(s(\mathbf{u}))}{ds} \frac{ds}{du} \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{S}}_B(\mathbf{u}) \mathbf{W}_B(\mathbf{u}), \quad (2.24)$$

a zatem sprowadza się do tej samej postaci, co w przypadku parametryzacji unormowanej, która jest dana równaniem (2.21).

Szczególną uwagę należy jednak zwrócić na definicję krzywizn Bishopa w parametryzacji nieunormowanej. Ze względu na zależności między parametrami wyrażone równaniem (2.1), definicję rozwinięcia normalnego krzywej (2.18) należy zmodyfikować do postaci

$$k_1(\mathbf{u}) = \left\langle \frac{d\mathbf{t}(\mathbf{u})}{ds}, \mathbf{n}_1(\mathbf{u}) \right\rangle = \frac{1}{\mathbf{v}} \left\langle \frac{d\mathbf{t}(\mathbf{u})}{du}, \mathbf{n}_1(\mathbf{u}) \right\rangle = \frac{1}{\mathbf{v}^2} \left\langle \frac{d^2\mathbf{r}(\mathbf{u})}{du^2}, \mathbf{n}_1(\mathbf{u}) \right\rangle, \quad (2.25a)$$

$$k_2(\mathbf{u}) = \left\langle \frac{d\mathbf{t}(\mathbf{u})}{ds}, \mathbf{n}_2(\mathbf{u}) \right\rangle = \frac{1}{\mathbf{v}} \left\langle \frac{d\mathbf{t}(\mathbf{u})}{du}, \mathbf{n}_2(\mathbf{u}) \right\rangle = \frac{1}{\mathbf{v}^2} \left\langle \frac{d^2\mathbf{r}(\mathbf{u})}{du^2}, \mathbf{n}_2(\mathbf{u}) \right\rangle. \quad (2.25b)$$

Wynika stąd, że dla definicji układu Bishopa w parametryzacji nieunormowanej parametr skali $\mathbf{v}$, dany równaniem (2.22), nie może się zerować. W przeciwnym razie równania (2.25) będą nieokreślone, a krzywiznę Bishopa będzie można wyznaczyć jedynie na podstawie bezpośredniej zależności od niezmienników geometrycznych parametryzacji Serreta–Freneta.

2.2.3 Zależności między parametryzacją Bishopa a parametryzacją Serreta–Freneta

Między geometrycznymi niezmiennikami obu parametryzacji zachodzi pewien związek. Jeżeli rozwinięcie normalne krzywej zostanie zapisane za pomocą współrzędnych biegunowych [14], to w interpretacji zespolonej zachodzi

$$\left(k_1(s), k_2(s) \right) = \kappa(s) e^{i \int \tau(s) ds}. \quad (2.26)$$

Ponadto, niech będzie zdefiniowany parametr ϕ jako [109]

$$\phi(s) = \int_{s_0}^s \tau(x) dx + \phi_0, \quad (2.27)$$

gdzie ϕ_0 oznacza rotację układu Bishopa w stanie początkowym, natomiast s_0 definiuje punkt na ścieżce, w którym został umieszczony układ lokalny w stanie początkowym. Wówczas funkcje (k_1, k_2) można potraktować jako współrzędne kartezjańskie systemu, którym odpowiadają współrzędne biegunowe (κ, ϕ) [70]. Zatem krzywizny Bishopa są opisane zależnościami

$$k_1(s) = \kappa(s) \cos \phi(s), \quad (2.28a)$$

$$k_2(s) = \kappa(s) \sin \phi(s), \quad (2.28b)$$

natomiast parametr ϕ opisuje rotację układu Bishopa wokół krzywej, czyli względem wektora stycznego $\mathbf{t}$. Korzystając z równań (2.5a) oraz (2.17a), a także uwzględniając fakt, że wersory $\mathbf{n}_1$ i $\mathbf{n}_2$ są ortonormalne, można również uzyskać zależność na krzywiznę

$$\kappa(s) = \|k_1(s)\mathbf{n}_1(s) + k_2(s)\mathbf{n}_2(s)\| = \sqrt{k_1^2(s) + k_2^2(s)}, \quad (2.29)$$

która wynika wprost z zależności (2.28).

Z przytoczonych zależności pomiędzy reprezentacjami krzywej, które wynikają z poszczególnych metod parametryzacji, wynika definicja wektorów bazowych układu Bishopa w zależności od wersorów układu Serreta-Freneta [109]

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{n} \cos \phi - \mathbf{b} \sin \phi, \quad (2.30a)$$

$$\mathbf{n}_2 = \mathbf{n} \sin \phi + \mathbf{b} \cos \phi. \quad (2.30b)$$

Warto podkreślić, że transformacja dana równaniem (2.30) jest odwracalna, o ile wszystkie jej elementy są dobrze zdefiniowane. Zatem w każdym punkcie krzywej można obliczyć układ Bishopa odpowiadający układowi Serreta-Freneta i *vice versa*.

Parametryzacja Bishopa wyróżnia się pewnymi cechami, które stanowią remedium na niepożądane własności układu Serreta-Freneta [39]. Wśród najważniejszych zalet metody Bishopa należy wyróżnić następujące kwestie:

1. Określoność układu lokalnego w punktach o zerowej krzywiznie.

Układ Serreta-Freneta jest nieokreślony w punktach o zerowej krzywiznie, np. dla całej linii prostej. Wynika to z definicji wektorów normalnych danych równaniem (2.4b) lub (2.11b), w zależności od unormowania parametryzacji. W obu przypadkach w mianownikach wyrażeń występuje krzywizna opisana odpowiednio definicjami (2.5a) lub (2.12a). Dzięki nieintuicyjnemu doborowi wektorów normalnych w metodzie Bishopa można wyznaczyć parametryzację dla krzywych, dla których krzywizna zanika [8].

2. Brak nieciągłości w ewolucji układu lokalnego.

Krzywizna zanikająca punktowo powoduje również, że skrócenie układu Serreta-Freneta nie może być zdefiniowane [109]. Prowadzi to do nieciągłej ewolucji wektora normalnego, a tym samym – całego układu Serreta-Freneta. Problem ten został zniwelowany dzięki zastosowaniu względnie równoległego przesunięcia wektorów wzdłuż krzywej w ewolucji układu Bishopa.

3. Redukcja wymaganej klasy parametryzowanej krzywej do klasy $\mathcal{C}^2$.

Parametryzacja Serreta–Freneta wymaga, aby dana krzywa była co najmniej klasy $\mathcal{C}^3$, czyli minimum trzykrotnie różniczkowalna w sposób ciągły. Wynika to wprost z równania (2.5b) lub (2.12b). W przypadku układu Bishopa wystarczający jest warunek klasy $\mathcal{C}^2$.

4. Możliwość swobodnej rotacji układu Bishopa w stanie początkowym przy jednoczesnym zachowaniu unikatowości ewolucji wzdłuż krzywej.

Na podstawie równania (2.27) można wnioskować, że układ Bishopa nie jest jednoznacznie zdeterminowany przez krzywą ze względu na stopień swobody związany z jego rotacją [109]. Zależy on od doboru stałej całkowania w tymże równaniu. Jednakże po zdefiniowaniu tej wartości, czyli określeniu układu Bishopa w stanie początkowym, układ lokalny jest jednoznacznie określony dla całej krzywej, a jego ewolucja zawsze przebiega zgodnie z równaniami (2.20) lub (2.23), w zależności od unormowania parametryzacji.

5. Ewolucja układu Bishopa wzdłuż krzywej minimalizuje rotacje układu lokalnego wokół krzywej (względem wektora stycznego) [109].

2.3 Parametryzacja *beta*

W rozdziale 2.2.3 wskazano, że parametryzacja Bishopa pozwala na zniwelowanie wielu trudności, które można napotkać przy stosowaniu parametryzacji Serreta–Freneta. Jednakże wiąże się to również z zupełnie odmiennym zachowaniem układu lokalnego stowarzyszonego z krzywą. Tymczasem w pewnych aplikacjach zastosowanie układu Serreta–Freneta może okazać się szczególnie korzystne i pożądane, np. ze względu na chęć minimalizacji rotacji układu lokalnego względem wektora normalnego, a nie stycznego.

W celu uzyskania pożądanej ewolucji układu Serreta–Freneta, przy jednoczesnym wykorzystaniu zalet parametryzacji Bishopa, w pracy [14] zaproponowano parametryzację *beta*. Pozwala ona zdefiniować układ Serreta–Freneta w danym punkcie krzywej na podstawie parametryzacji Bishopa. W tym celu wykorzystuje się zależności wiążące wektory bazowe obu układów. Parametryzacja *beta* jest zatem oparta o odwrotność transformacji danej równaniem (2.30) i wyraża się zależnością

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_1 \cos \phi + \mathbf{n}_2 \sin \phi, \quad (2.31a)$$

$$\mathbf{b} = -\mathbf{n}_1 \sin \phi + \mathbf{n}_2 \cos \phi. \quad (2.31b)$$

Takie podejście pozwala uzyskać ewolucję układu lokalnego zgodną z równaniami parametryzacji Serreta–Freneta, wyrażoną równaniem (2.7) dla parametryzacji unormowanej lub równaniem (2.13) dla parametryzacji nieunormowanej. Jednocześnie zachowane są pożądane własności układu Bishopa. Dzięki temu punkty o zerowej krzywiznie nie degenerują układu lokalnego, a jego ewolucja wzdłuż krzywej jest ciągła.

W powyższych wzorach pominięto parametr, względem którego krzywa jest opisana, gdyż zgodnie ze Spostrzeżeniem 1 nie wpływa on na wartości wektorów bazowych w globalnym układzie odniesienia. Unormowanie uzyskiwanego układu *beta* będzie wynikało wprost z unormowania układu Bishopa.

Na podstawie krzywizn Bishopa można również wyznaczyć wartości geometrycznych niezmienników Serreta–Freneta: krzywizny oraz torsji. Krzywiznę można wyznaczyć wprost

na podstawie równania (2.29), natomiast torsja wynika z równania (2.27)

$$\tau(s) = \frac{d\phi(s)}{ds}. \quad (2.32)$$

Spostrzeżenie 2. Ze względu na operację różniczkowania wzdłuż krzywej w równaniu (2.32) wymaga się, aby krzywa opisana w parametryzacji beta była klasy co najmniej $\mathcal{C}^3$. Parametryzacja beta zatem nie zachowuje wszystkich własności parametryzacji Bishopa.

Jak zauważono w pracy [14], w celu uzyskania parametru ϕ na podstawie pary geometrycznych niezmienników parametryzacji Bishopa, należy posłużyć się równaniem

$$\phi(s) = \operatorname{arctg} \frac{k_2(s)}{k_1(s)}, \quad (2.33)$$

co wynika wprost z równań (2.28). Może to prowadzić do nieciągłych zmian wartości parametru ϕ wynikających z charakteru stosowanej funkcji cyklometrycznej. W związku z tym faktem trzeba zastosować odpowiednie algorytmy, np. stosując podejście zaproponowane w pracy [14], które zapewnią ciągłość wartości skrócenia krzywej uzyskiwanej za pomocą równań (2.32) oraz (2.33). Jest to kluczowa kwestia dla uzyskania ciągłości ewolucji układu *beta*.

W przypadku parametryzacji nieunormowanej krzywizna wynika wprost z równania (2.29), zgodnie ze Spostrzeżeniem 1,

$$\kappa(u) = \|k_1(u)\mathbf{n}_1(u) + k_2(u)\mathbf{n}_2(u)\| = \sqrt{k_1^2(u) + k_2^2(u)}. \quad (2.34)$$

Spostrzeżenie 1 ma zastosowanie również przy obliczaniu parametru ϕ w parametryzacji nieunormowanej, dzięki czemu prawdziwa jest zależność

$$\phi(u) = \operatorname{arctg} \frac{k_2(u)}{k_1(u)}. \quad (2.35)$$

Przy obliczaniu torsji należy jednak uwzględnić współczynnik v ze względu na operację różniczkowania w równaniu (2.32)

$$\tau(u) = \frac{d\phi(u)}{ds} = \frac{d\phi(u)}{du} \frac{du}{ds} = \frac{1}{v} \frac{d\phi(u)}{du}. \quad (2.36)$$

2.4 Synteza opisu ewolucji układu lokalnego

Należy zauważyć, że równania opisujące ewolucję układu lokalnego wzdłuż ścieżki zachowują podobną strukturę dla wszystkich metod parametryzacji krzywoliniowych przytoczonych w tym rozdziale. W szczególności, macierze opisujące orientację układu lokalnego w globalnym układzie odniesienia $\mathbf{S}_{SF}$ oraz $\mathbf{S}_B$, dane równaniami (2.8) w parametryzacji Serreta–Freneta oraz (2.19) w parametryzacji Bishopa, zbudowane są z wersorów bazowych odpowiednich układów. Podobnie macierze $\mathbf{W}_{SF}$ oraz $\mathbf{W}_B$, choć różnią się rozmieszczeniem elementów składowych, to zachowują własność skośnej symetrii i są skonstruowane z odpowiednich geometrycznych niezmienników krzywej.

Ze względu na te własności można wnioskować o pewnej generalnej strukturze opisującej ewolucję układu lokalnego wzdłuż ścieżki. W tym celu można zdefiniować ogólne macierze charakterystyczne dla procesu ewolucji, które przyjmują szczególną postać

w zależności od zastosowanej metody parametryzacji. Niech zatem będą dane macierze: $\mathbf{S} \in \{\mathbf{S}_{\text{SF}}, \mathbf{S}_{\text{B}}\}$ oraz $\mathbf{W} \in \{\mathbf{W}_{\text{SF}}, \mathbf{W}_{\text{B}}\}$. Wówczas, na podstawie równań (2.9) oraz (2.20) można wnioskować, że dla parametru unormowanego ewolucja układu lokalnego sprowadza się do postaci

$$\frac{d\mathbf{S}(s)}{ds} = \mathbf{S}(s)\mathbf{W}(s). \quad (2.37)$$

Analogicznie, dla parametryzacji nieunormowanej prawdziwe jest równanie

$$\frac{d\mathbf{S}(u)}{du} = v\mathbf{S}(u)\mathbf{W}(u), \quad (2.38)$$

co wynika z równań (2.13) oraz (2.23).

Warto również zwrócić uwagę, że niezależnie od metody parametryzacji krzywoliniowej, a także unormowania parametru, ewolucja układu lokalnego w czasie opisana jest zawsze przez tę samą zależność

$$\dot{\mathbf{S}} = \dot{s}\mathbf{S}\mathbf{W}, \quad (2.39)$$

o czym świadczą równania (2.10), (2.15), (2.21) oraz (2.24).

Należy ponownie podkreślić, że w każdym rozważanym przypadku elementami macierzy $\mathbf{S} \in \{\mathbf{S}_{\text{SF}}, \mathbf{S}_{\text{B}}\}$ są wektory bazowe charakterystyczne dla danej metody, natomiast macierz skośnie symetryczna $\mathbf{W} \in \{\mathbf{W}_{\text{SF}}, \mathbf{W}_{\text{B}}\}$ jest skonstruowana na podstawie niezmienników geometrycznych krzywej odpowiednich dla wybranej parametryzacji. Skutkuje to odmiennym zachowaniem układu wzdłuż krzywej, a także różnymi własnościami wymienionymi w niniejszym rozdziale. Pomimo tego struktura równań zostaje zachowana. W dalszych rozważaniach zostanie uwzględniona ogólna struktura równań ewolucji układu (2.39). Szczegółowa postać tych zależności zawsze będzie zależała od wyboru metody parametryzacji krzywoliniowej, zgodnie z definicjami omówionymi w niniejszym rozdziale.

Rozdział 3

Równania robota względem ścieżki

Metody parametryzacji krzywoliniowych przedstawione w rozdziale 2 pozwalają opisać zmiany geometrii krzywej w przestrzeni. Jednocześnie definiują ewolucję układu lokalnego, który rozpina bazę ortonormalną, wzdłuż danej krzywej zgodnie z jej geometrią. Formalizm ten nadaje się zatem znakomicie do modelowania ścieżki, a także do opisanego zachowania układu robotycznego względem ścieżki.

Rozważmy przestrzeń trójwymiarową, która jest naturalnym środowiskiem operacyjnym dla robotów. Niech będzie dany punkt P zwany *punktem prowadzenia robota*. Opisuje on położenie układu lokalnego związanego z robotem w przestrzeni. W typowych aplikacjach punkt P określa położenie końcówki chwytaka manipulatora lub środek ciężkości platformy mobilnej. Współrzędne tego punktu w globalnym układzie odniesienia oznaczono za pomocą wektora

$$\mathbf{p} = (x \ y \ z)^T. \quad (3.1)$$

Kluczowym elementem opisu obiektu względem ścieżki jest określenie położenia punktu prowadzenia robota względem układu stowarzyszonego z krzywą, który wynika z przyjętej metody parametryzacji. Niech ta wielkość wektorowa będzie oznaczona symbolem $\mathbf{d}$. Dla ścieżki danej równaniem $\mathbf{r}$ zależność $\mathbf{d}$ wyraża się wzorem

$$\mathbf{d} = \mathbf{S}^T(\mathbf{p} - \mathbf{r}) = (d_1 \ d_2 \ d_3)^T, \quad (3.2)$$

gdzie $\mathbf{S}$ oznacza macierz zbudowaną z wektorów bazowych układu lokalnego na ścieżce.

Zachowanie robota względem ścieżki jest dynamiczne, a więc zmienia się w czasie. W celu opisanego tej zmienności, należy zróżniczkować po czasie wyrażenie dane równaniem (3.2)

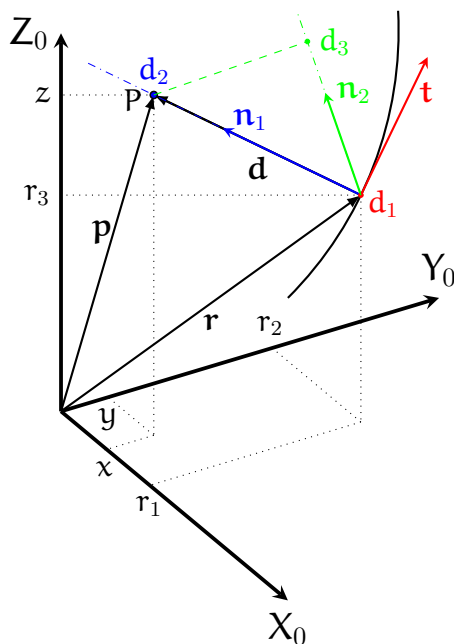
$$\dot{\mathbf{d}} = \mathbf{S}^T(\dot{\mathbf{p}} - \dot{\mathbf{r}}) + \dot{\mathbf{S}}^T(\mathbf{p} - \mathbf{r}). \quad (3.3)$$

Równanie (3.3) opisuje zatem prędkości układu sterowanego w układzie lokalnym stowarzyszonym z zadaną ścieżką. Wykorzystując równanie (3.2), a także zależność (2.39), można przekształcić równanie (3.3) do postaci

$$\dot{\mathbf{d}} = \mathbf{S}^T(\dot{\mathbf{p}} - \dot{\mathbf{r}}) + \dot{\mathbf{S}}^T \mathbf{S}^T(\mathbf{p} - \mathbf{r}) = \mathbf{S}^T(\dot{\mathbf{p}} - \dot{\mathbf{r}}) + \dot{\mathbf{S}} \mathbf{W}^T \mathbf{d} = \mathbf{S}^T(\dot{\mathbf{p}} - \dot{\mathbf{r}}) - \dot{\mathbf{S}} \mathbf{W} \mathbf{d}. \quad (3.4)$$

Przyjęte założenia dotyczące opisu robota względem ścieżki pozwalają zrealizować równania (3.2) oraz (3.3) w wersji ortogonalnej i nieortogonalnej. W niniejszym rozdziale przedstawiono szczegółowe równania wynikające z wymienionych podejść. Ponadto, realizacja opisu obiektu względem krzywej różni się w zależności od wykorzystanej metody parametryzacji krzywoliniowej. W następnych podrozdziałach podano równania wynikające zarówno z opisu w parametryzacji Serreta–Freneta, jak i parametryzacji Bishopa.

W parametryzacji ortogonalnej zakłada się, że punkt prowadzenia robota $\mathbf{P}$ jest rzutowany ortogonalnie na ścieżkę. Takie podejście implikuje fakt, że punkt $\mathbf{P}$ znajduje się zawsze w najbliższej odległości od krzywej i jest położony w płaszczyźnie normalnej do rozważanej krzywej, zdefiniowanej przez wektor styczny. Innymi słowy, robot znajduje się zawsze w najbliższej odległości od ścieżki, co jest istotnym uproszczeniem w praktycznej realizacji zadania. Schemat parametryzacji ortogonalnej względem pewnej ścieżki $\mathbf{r}$ przedstawiono na rys. 3.1. Należy zauważyć, że na rys. 3.1 został przedstawiony układ Bishopa.



Bez straty ogólności można jednak przyjąć, że w danej konfiguracji zachodzi $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}$ oraz $\mathbf{n}_2 = \mathbf{b}$, co jest prawdą dla $\phi = 0$ zgodnie z równaniami (2.30). Zatem schemat na rys. 3.1 jest prawdziwy również dla układu Serreta–Freneta.

Ze względu na przyjęte założenie o ortogonalnym rzutowaniu punktu prowadzenia robota na ścieżkę, współrzędna $\mathbf{d}_1$ jest ustalona. Obiekt musi znajdować się zawsze w płaszczyźnie normalnej, więc jego położenie w kierunku wersora stycznego jest zerowe. Jest zatem tożsame z początkiem lokalnego układu współrzędnych na krzywej, co przedstawiono na rys. 3.1. Wynika stąd, że wektory $(\mathbf{p} - \mathbf{r})$ oraz $\mathbf{t}$ są ortogonalne, $(\mathbf{p} - \mathbf{r}) \perp \mathbf{t}$, co sprowadza się do warunku na zerowy iloczyn skalarny

$$\langle \mathbf{t}, \mathbf{p} - \mathbf{r} \rangle = 0. \quad (3.5)$$

Zróżniczkowanie równania (3.5) po czasie prowadzi do zależności

$$\left\langle \frac{d\mathbf{t}}{ds} \dot{\mathbf{s}}, \mathbf{p} - \mathbf{r} \right\rangle + \langle \mathbf{t}, \dot{\mathbf{p}} - \dot{\mathbf{r}} \rangle = 0, \quad (3.6)$$

co po odpowiednim przekształceniu prowadzi do warunku na prędkość krzywoliniową ukła-

du lokalnego na ścieżce, wskazanego m. in. w pracy [81]

$$\dot{s} = -\frac{\langle \mathbf{t}, \dot{\mathbf{p}} - \dot{\mathbf{r}} \rangle}{\left\langle \frac{d\mathbf{t}}{ds}, \mathbf{p} - \mathbf{r} \right\rangle}. \quad (3.7)$$

Założenie rzutowania ortogonalnego wprowadza zatem ograniczenie na zmianę odległości krzywoliniowej w czasie. Ruch układu lokalnego wzdłuż krzywej nie może być określony dowolnie, lecz jest ściśle zdefiniowany przez warunek (3.7). Należy zauważyć, że zastosowanie parametryzacji ortogonalnej wprowadza do opisu obiektu osobliwość, która wynika z mianownika wyrażenia (3.7). Parametryzacja ortogonalna jest zatem dobrze określona wszędzie tam, gdzie zachodzi

$$\left\langle \frac{d\mathbf{t}}{ds}, \mathbf{p} - \mathbf{r} \right\rangle \neq 0. \quad (3.8)$$

Ponadto, warto zwrócić uwagę, że składowa położenia obiektu w kierunku wektora stycznego $\mathbf{d}_1$, niezależnie od metody parametryzacji krzywoliniowej, jest dana zależnością

$$\mathbf{d}_1 = \langle \mathbf{t}, \mathbf{p} - \mathbf{r} \rangle, \quad (3.9)$$

co wynika bezpośrednio z równania (3.2) oraz definicji macierzy $\mathbf{S}$ dla poszczególnych metod parametryzacji (por. równania (2.8) oraz (2.19)). Ze względu na warunek rzutowania ortogonalnego, dany równaniem (3.5), wartość ta musi być tożsamościowo równa zero, czyli $\mathbf{d}_1 \equiv 0$. Poprzez odpowiednią definicję prędkości krzywoliniowej należy zagwarantować, że wartość $\mathbf{d}_1$ będzie stała, a tym samym punkt prowadzenia robota pozostanie w płaszczyźnie normalnej. W rezultacie, w definicji stanu obiektu względem ścieżki należy uwzględnić odległość krzywoliniową s , a także położenia w pozostałych kierunkach wyznaczonych przez układ lokalny na ścieżce, $\mathbf{d}_2$ oraz $\mathbf{d}_3$. W związku z tym, dla parametryzacji ortogonalnej definiuje się następujący wektor stanu względem krzywej

$$\boldsymbol{\xi} = (s \quad \mathbf{d}_2 \quad \mathbf{d}_3)^T. \quad (3.10)$$

Spostrzeżenie 3. *Należy zauważyć, że parametryzacja ortogonalna redukuje wymiarowość problemu, gdyż współrzędna $\mathbf{d}_1$ jest ustalona dzięki przyjętemu założeniu o rzutowaniu ortogonalnym obiektu na ścieżkę. Odległość krzywoliniowa s jest związana bezpośrednio z ewolucją układu lokalnego wzdłuż krzywej.*

3.1.1 Równania robota względem ścieżki opisane w ortogonalnej parametryzacji Serreta–Freneta

Uwzględnienie równań parametryzacji Serreta–Freneta w wyrażeniu (3.2) prowadzi do zależności

$$\mathbf{d} = \mathbf{S}_{SF}^T (\mathbf{p} - \mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{t}, \mathbf{p} - \mathbf{r} \rangle \\ \langle \mathbf{n}, \mathbf{p} - \mathbf{r} \rangle \\ \langle \mathbf{b}, \mathbf{p} - \mathbf{r} \rangle \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Ponadto, wyrażenie na prędkość krzywoliniową wynikające z założenia rzutowania ortogonalnego i dane równaniem (3.7), po uwzględnieniu zależności (2.4a) sprowadza się do postaci

$$\dot{s} = -\frac{\langle \mathbf{t}, \dot{\mathbf{p}} - \dot{\mathbf{r}} \rangle}{\kappa \langle \mathbf{n}, \mathbf{p} - \mathbf{r} \rangle} = -\frac{\langle \mathbf{t}, \dot{\mathbf{p}} - \dot{\mathbf{r}} \rangle}{\kappa d_2}. \quad (3.12)$$

W równaniu (3.12) występuje osobliwość charakterystyczna dla parametryzacji Serreta–Freneta. Mianownik wyrażenia (3.12) zeruje się, gdy krzywizna ścieżki κ lub iloczyn skalarny $\langle \mathbf{n}, \mathbf{p} - \mathbf{r} \rangle$ są równe zero. W szczególności, druga zależność odnosi się do sytuacji, gdy położenie robota rzeczywistego w układzie inercyjnym $\mathbf{p}$ jest równe położeniu punktu śledzonego $\mathbf{r}$. Wynika stąd, że wektor $(\mathbf{p} - \mathbf{r})$ również nie może się zerować. Ponadto, położenie w kierunku wersora normalnego $\mathbf{n}$, czyli składowa $\mathbf{d}_2$, również nie może się zerować, niezależnie od wartości pozostałych składowych wektora $\mathbf{d}$. Parametryzacja ortogonalna pozwala zatem jedynie na asymptotyczne zbliżanie się do zadanej ścieżki [101].

Kluczowa dla opisu robota względem ścieżki jest zmiana względnego położenia w czasie. Poszczególne składowe wektora $\mathbf{d}$, zdefiniowanego równaniem (3.4), w parametryzacji Serreta–Freneta prezentują się następująco

$$\dot{\mathbf{d}}_1 = \langle \mathbf{t}, \dot{\mathbf{p}} - \dot{\mathbf{r}} \rangle + \dot{s} \kappa \langle \mathbf{n}, \mathbf{p} - \mathbf{r} \rangle, \quad (3.13a)$$

$$\dot{\mathbf{d}}_2 = \langle \mathbf{n}, \dot{\mathbf{p}} - \dot{\mathbf{r}} \rangle - \dot{s} \kappa \langle \mathbf{t}, \mathbf{p} - \mathbf{r} \rangle + \dot{s} \tau \langle \mathbf{b}, \mathbf{p} - \mathbf{r} \rangle, \quad (3.13b)$$

$$\dot{\mathbf{d}}_3 = \langle \mathbf{b}, \dot{\mathbf{p}} - \dot{\mathbf{r}} \rangle - \dot{s} \tau \langle \mathbf{n}, \mathbf{p} - \mathbf{r} \rangle. \quad (3.13c)$$

W równaniach (3.13) należy uwzględnić warunek rzutowania ortogonalnego, dany zależnością (3.12). Wówczas równania można przekształcić do postaci

$$\dot{\mathbf{d}}_1 = 0, \quad (3.14a)$$

$$\dot{\mathbf{d}}_2 = \left\langle \mathbf{n} - \frac{\tau \langle \mathbf{b}, \mathbf{p} - \mathbf{r} \rangle}{\kappa \langle \mathbf{n}, \mathbf{p} - \mathbf{r} \rangle} \mathbf{t}, \dot{\mathbf{p}} - \dot{\mathbf{r}} \right\rangle, \quad (3.14b)$$

$$\dot{\mathbf{d}}_3 = \left\langle \mathbf{b} + \frac{\tau}{\kappa} \mathbf{t}, \dot{\mathbf{p}} - \dot{\mathbf{r}} \right\rangle. \quad (3.14c)$$

Równanie (3.14a) potwierdza, że jeśli warunek (3.12) jest spełniony, to wartość położenia $\mathbf{d}_1$ nie zmienia się w czasie. Jest to zatem gwarancja zachowania warunku rzutowania ortogonalnego, jeśli był spełniony w stanie początkowym.

Należy zauważyć, że równania opisujące zmianę stanu względem ścieżki w czasie, dane wzorami (3.12), (3.14b) oraz (3.14c), przy uwzględnieniu zależności (3.11) mogą być uporządkowane w następujący sposób

$$\dot{\mathbf{s}} = \underbrace{-\frac{\mathbf{t}^T}{\kappa \mathbf{d}_2}}_{\mathbf{v}_{SF1}} \dot{\mathbf{p}} + \underbrace{\frac{\langle \mathbf{t}, \dot{\mathbf{r}} \rangle}{\kappa \mathbf{d}_2}}_{\mathbf{f}_{SF1}} = \mathbf{v}_{SF1} \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{f}_{SF1}, \quad (3.15a)$$

$$\dot{\mathbf{d}}_2 = \underbrace{\left(\mathbf{n} - \frac{\tau \mathbf{d}_3}{\kappa \mathbf{d}_2} \mathbf{t} \right)^T}_{\mathbf{v}_{SF2}} \dot{\mathbf{p}} + \underbrace{\left\langle \mathbf{n} - \frac{\tau \mathbf{d}_3}{\kappa \mathbf{d}_2} \mathbf{t}, -\dot{\mathbf{r}} \right\rangle}_{\mathbf{f}_{SF2}} = \mathbf{v}_{SF2} \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{f}_{SF2}, \quad (3.15b)$$

$$\dot{\mathbf{d}}_3 = \underbrace{\left(\mathbf{b} + \frac{\tau}{\kappa} \mathbf{t} \right)^T}_{\mathbf{v}_{SF3}} \dot{\mathbf{p}} + \underbrace{\left\langle \mathbf{b} + \frac{\tau}{\kappa} \mathbf{t}, -\dot{\mathbf{r}} \right\rangle}_{\mathbf{f}_{SF3}} = \mathbf{v}_{SF3} \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{f}_{SF3}. \quad (3.15c)$$

Biorąc pod uwagę definicję (3.10), równania (3.15) można zapisać w zwartej postaci jako

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{V}_{SF} \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{f}_{SF} = \mathbf{V}_p \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{f}_p, \quad (3.16)$$

gdzie $\mathbf{V}_{SF} = \mathbf{V}_p = [\mathbf{v}_{SF1}^T \quad \mathbf{v}_{SF2}^T \quad \mathbf{v}_{SF3}^T]^T$ oraz $\mathbf{f}_{SF} = \mathbf{f}_p = (\mathbf{f}_{SF1} \quad \mathbf{f}_{SF2} \quad \mathbf{f}_{SF3})^T$.

3.1.2 Równania robota względem ścieżki opisane w ortogonalnej parametryzacji Bishopa

Jeśli zostanie rozważona parametryzacja Bishopa, to równanie (3.2) sprowadza się do postaci

$$\mathbf{d} = \mathbf{S}_B^T(\mathbf{p} - \mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{t}, \mathbf{p} - \mathbf{r} \rangle \\ \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{p} - \mathbf{r} \rangle \\ \langle \mathbf{n}_2, \mathbf{p} - \mathbf{r} \rangle \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Z kolei uwzględnienie równania (2.17a) sprowadza warunek wynikający z rzutowania ortogonalnego, dany równaniem (3.7), do zależności

$$\dot{s} = -\frac{\langle \mathbf{t}, \dot{\mathbf{p}} - \dot{\mathbf{r}} \rangle}{k_1 \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{p} - \mathbf{r} \rangle + k_2 \langle \mathbf{n}_2, \mathbf{p} - \mathbf{r} \rangle} = \frac{\langle \mathbf{t}, \dot{\mathbf{p}} - \dot{\mathbf{r}} \rangle}{k_1 d_2 + k_2 d_3}. \quad (3.18)$$

Należy zwrócić uwagę, że postać mianownika wyrażenia (3.18) jest bardziej skomplikowana, niż w przypadku analogicznej zależności dla parametryzacji Serreta–Freneta wyrażonej równaniem (3.12). Mianownik zależy bowiem od położenia robota względem krzywej w kierunkach wyznaczonych przez oba wersory normalne, $\mathbf{d}_2$ i $\mathbf{d}_3$. Ponadto, ze względu na występujący w mianowniku składnik $(\mathbf{p} - \mathbf{r})$ nie jest możliwe dokładne osiągnięcie ścieżki przez obiekt sterowania. Ponownie zatem opis ten pozwala jedynie na asymptotyczne zbliżanie się do ścieżki. Warto również podkreślić, że mianownik wyrażenia (3.18) zeruje się, gdy $k_1 = k_2 = 0$. Ten warunek zachodzi dla ścieżek o zerowej krzywiznie, co wynika z zależności (2.28). Zatem mimo że układ Bishopa pozostaje dobrze określony dla tej klasy krzywych, to opis w parametryzacji ortogonalnej (3.18) wprowadza osobliwość i parametryzacja krzywych z zerową krzywizną nie jest wówczas możliwa. Jest to istotna redukcja zakresu stosowalności parametryzacji Bishopa.

Równanie (3.3) opisujące ewolucję w czasie położenia robota względem ścieżki w parametryzacji Bishopa można rozpisać do postaci

$$\dot{d}_1 = \langle \mathbf{t}, \dot{\mathbf{p}} - \dot{\mathbf{r}} \rangle + \dot{s}k_1 \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{p} - \mathbf{r} \rangle + \dot{s}k_2 \langle \mathbf{n}_2, \mathbf{p} - \mathbf{r} \rangle, \quad (3.19a)$$

$$\dot{d}_2 = \langle \mathbf{n}_1, \dot{\mathbf{p}} - \dot{\mathbf{r}} \rangle - \dot{s}k_1 \langle \mathbf{t}, \mathbf{p} - \mathbf{r} \rangle, \quad (3.19b)$$

$$\dot{d}_3 = \langle \mathbf{n}_2, \dot{\mathbf{p}} - \dot{\mathbf{r}} \rangle - \dot{s}k_2 \langle \mathbf{t}, \mathbf{p} - \mathbf{r} \rangle, \quad (3.19c)$$

co po uwzględnieniu zależności (3.5), (3.17) oraz (3.18) sprowadza się do postaci

$$\dot{d}_1 = 0, \quad (3.20a)$$

$$\dot{d}_2 = \left\langle \mathbf{n}_1 - \frac{k_1 d_1}{k_1 d_2 + k_2 d_3} \mathbf{t}, \dot{\mathbf{p}} - \dot{\mathbf{r}} \right\rangle = \langle \mathbf{n}_1, \dot{\mathbf{p}} - \dot{\mathbf{r}} \rangle, \quad (3.20b)$$

$$\dot{d}_3 = \left\langle \mathbf{n}_2 - \frac{k_1 d_1}{k_1 d_2 + k_2 d_3} \mathbf{t}, \dot{\mathbf{p}} - \dot{\mathbf{r}} \right\rangle = \langle \mathbf{n}_2, \dot{\mathbf{p}} - \dot{\mathbf{r}} \rangle. \quad (3.20c)$$

Należy zauważyć, że ponownie uzyskano gwarancję zachowania współrzędnej d_1 w płaszczyźnie normalnej określonej przez wektor styczny $\mathbf{t}$, o czym świadczy równanie (3.20a). Warto także podkreślić, że równania (3.20b) oraz (3.20c) znacząco się upraszczają dzięki przyjętemu założeniu o rzutowaniu ortogonalnym obiektu na ścieżkę, tj. na podstawie równania (3.5) zachodzi $\mathbf{d}_1 = \langle \mathbf{t}, \mathbf{p} - \mathbf{r} \rangle = 0$. Niemniej jednak, istotnie komplikuje się wyrażenie (3.18), które jest źródłem osobliwości w tym podejściu.

Powyższe rozważania pozwalają na zapisanie równań określających zmianę stanu względem ścieżki w czasie, czyli zależności (3.18), (3.20b) oraz (3.20c) w ujednoliconej postaci

$$\dot{\mathbf{s}} = - \underbrace{\frac{\mathbf{t}^T}{k_1 d_2 + k_2 d_3}}_{\mathbf{v}_{B_1}} \dot{\mathbf{p}} + \underbrace{\frac{\langle \mathbf{t}, \dot{\mathbf{r}} \rangle}{k_1 d_2 + k_2 d_3}}_{\mathbf{f}_{B_1}} = \mathbf{v}_{B_1} \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{f}_{B_1}, \quad (3.21a)$$

$$\dot{d}_2 = \underbrace{\mathbf{n}_1^T}_{\mathbf{v}_{B_2}} \dot{\mathbf{p}} + \underbrace{\langle \mathbf{n}_1, -\dot{\mathbf{r}} \rangle}_{\mathbf{f}_{B_2}} = \mathbf{v}_{B_2} \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{f}_{B_2}, \quad (3.21b)$$

$$\dot{d}_3 = \underbrace{\mathbf{n}_2^T}_{\mathbf{v}_{B_3}} \dot{\mathbf{p}} + \underbrace{\langle \mathbf{n}_2, -\dot{\mathbf{r}} \rangle}_{\mathbf{f}_{B_3}} = \mathbf{v}_{B_3} \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{f}_{B_3}. \quad (3.21c)$$

Równania (3.21) można zapisać w zwartej postaci jako

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{V}_B \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{f}_B = \mathbf{V}_p \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{f}_p, \quad (3.22)$$

gdzie $\mathbf{V}_B = \mathbf{V}_p = [\mathbf{v}_{B_1}^T \ \mathbf{v}_{B_2}^T \ \mathbf{v}_{B_3}^T]^T$ oraz $\mathbf{f}_B = \mathbf{f}_p = (f_{B_1} \ f_{B_2} \ f_{B_3})^T$. Warto zauważyć, że równania obiektu względem ścieżki sparametryzowanej układem Bishopa można sprowadzić do takiej samej struktury, jak równania wynikające z parametryzacji Serreta–Freneta, opisane zależnością (3.16).

3.1.3 Przesunięcie osobliwości poza ścieżkę

Z analizy osobliwości pojawiających się w parametryzacji ortogonalnej przeprowadzonej w poprzednich podrozdziałach wynika, że dla warunku (3.7) prawdą są następujące stwierdzenia:

1. Parametryzacja ortogonalna umożliwia tylko asymptotyczne zbliżanie się do ścieżki.
2. Nie jest możliwe, aby w parametryzacji ortogonalnej położenie robota względem ścieżki zerowało się w kierunkach wektorów normalnych.
3. Parametryzacja ortogonalna nie pozwala na opis ścieżek, które zawierają punkty o zerowej krzywiznie. W szczególności, dotyczy to linii prostych, które są częstym elementem składowym ruchu robotów.

Powyższe aspekty stanowią wyraźne ograniczenie zakresu stosowalności parametryzacji ortogonalnej. Jest ona jednak korzystna ze względu na praktyczną implementację oraz minimalizację wymiarowości problemu, co wynika ze Spostrzeżenia 3.

Osobliwość rzutowania ortogonalnego można jednak przesunąć poza ścieżkę, co stanowi rozwiązanie powyższych problemów. Na tę możliwość wskazano w pracy [39]. Warto zatem zauważyć, że dla unormowanego wektora stycznego $\mathbf{t}$, zdefiniowanego równaniem (2.4a), zachodzi następująca zależność

$$\langle \mathbf{t}(s), \dot{\mathbf{r}}(s) \rangle = \left\langle \mathbf{t}(s), \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} \dot{s} \right\rangle = \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s) \rangle \dot{s} = \dot{s}. \quad (3.23)$$

Ze względu na zależność (2.2) powyższe równanie jest również prawdziwe w przypadku parametryzacji nieunormowanej, gdy wektor styczny $\mathbf{t}$ jest zdefiniowany równaniem (2.11a)

$$\langle \mathbf{t}(\mathbf{u}), \dot{\mathbf{r}}(\mathbf{u}) \rangle = \left\langle \mathbf{t}(\mathbf{u}), \frac{d\mathbf{r}(\mathbf{u})}{du} \dot{\mathbf{u}} \right\rangle = \left\langle \mathbf{t}(\mathbf{u}), \frac{\frac{d\mathbf{r}(\mathbf{u})}{du}}{\left\| \frac{d\mathbf{r}(\mathbf{u})}{du} \right\|} \dot{s} \right\rangle = \langle \mathbf{t}(\mathbf{u}), \mathbf{t}(\mathbf{u}) \rangle \dot{s} = \dot{s}. \quad (3.24)$$

Uwzględnienie równania (3.23) lub (3.24) pozwala sprowadzić warunek rzutowania ortogonalnego (3.7) do postaci

$$\dot{s} = - \frac{\langle \mathbf{t}, \dot{\mathbf{p}} \rangle}{\left\langle \frac{d\mathbf{t}}{ds}, \mathbf{p} - \mathbf{r} \right\rangle - 1}. \quad (3.25)$$

Dla tak zdefiniowanego warunku wymaga się, by zachodziła zależność

$$\left\langle \frac{d\mathbf{t}}{ds}, \mathbf{p} - \mathbf{r} \right\rangle \neq 1. \quad (3.26)$$

W szczególności oznacza to, że iloczyn skalarny $\left\langle \frac{d\mathbf{t}}{ds}, \mathbf{p} - \mathbf{r} \right\rangle$ może się zerować, a więc możliwe jest osiągnięcie ścieżki.

Opis w parametryzacji ortogonalnej wciąż pozostaje lokalny ze względu na warunek (3.26). Jednakże, jeśli zapewni się, że robot znajduje się zawsze dostatecznie blisko ścieżki, a więc zachodzi

$$\left\langle \frac{d\mathbf{t}}{ds}, \mathbf{p} - \mathbf{r} \right\rangle < 1, \quad (3.27)$$

to osobliwość wynikająca z tego podejścia nigdy nie zostanie osiągnięta przez układ robotyczny. Choć ograniczenie (3.27) jest dość konserwatywne, to w znaczący sposób poszerza zakres stosowalności parametryzacji ortogonalnej.

Należy zatem przeformułować równania opisujące ewolucję stanu względem ścieżki dane zależnościami (3.15) w parametryzacji Serreta–Freneta oraz (3.21) w parametryzacji Bishopa tak, aby uwzględnić warunek rzutowania ortogonalnego (3.27) w nowej postaci.

Parametryzacja Serreta–Freneta. Nowy warunek rzutowania ortogonalnego (3.25) w parametryzacji Serreta–Freneta można uporządkować na podstawie zależności (2.6a) oraz (3.2) w następujący sposób

$$\dot{s} = - \frac{\langle \mathbf{t}, \dot{\mathbf{p}} \rangle}{\kappa \langle \mathbf{n}, \mathbf{p} - \mathbf{r} \rangle - 1} = - \frac{\mathbf{t}^T}{\kappa d_2 - 1} \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v}_{\text{SF1}} \dot{\mathbf{p}}. \quad (3.28)$$

Równanie (3.28) należy uwzględnić w definicji pochodnych po czasie wektora stanu ξ . Biorąc pod uwagę definicję położenia obiektu względem układu Serreta–Freneta, danego równaniem (3.11), równania (3.13b) oraz (3.13c) można przekształcić do następującej

postaci

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{d}}_2 &= \langle \mathbf{n}, \dot{\mathbf{p}} - \dot{\mathbf{r}} \rangle - \dot{s} \underbrace{\kappa}_{=0} \underbrace{d_1}_{=0} - \frac{\langle \mathbf{t}, \dot{\mathbf{p}} \rangle}{\kappa d_2 - 1} \tau d_3 = \left\langle \mathbf{n} - \tau \frac{\mathbf{t} d_3}{\kappa d_2 - 1}, \dot{\mathbf{p}} \right\rangle - \langle \mathbf{n}, \dot{\mathbf{r}} \rangle = \\ &= \underbrace{\left(\mathbf{n} - \tau \frac{\mathbf{t} d_3}{\kappa d_2 - 1} \right)^T}_{\mathbf{v}_{SF_2}} \dot{\mathbf{p}} - \underbrace{\langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle}_{=0} \dot{s} = \mathbf{v}_{SF_2} \dot{\mathbf{p}},\end{aligned}\quad (3.29a)$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{d}}_3 &= \langle \mathbf{b}, \dot{\mathbf{p}} - \dot{\mathbf{r}} \rangle + \frac{\langle \mathbf{t}, \dot{\mathbf{p}} \rangle}{\kappa d_2 - 1} \tau d_2 = \left\langle \mathbf{b} + \tau \frac{\mathbf{t} d_2}{\kappa d_2 - 1}, \dot{\mathbf{p}} \right\rangle - \langle \mathbf{b}, \dot{\mathbf{r}} \rangle = \\ &= \underbrace{\left(\mathbf{b} + \tau \frac{\mathbf{t} d_2}{\kappa d_2 - 1} \right)^T}_{\mathbf{v}_{SF_3}} \dot{\mathbf{p}} - \underbrace{\langle \mathbf{b}, \mathbf{t} \rangle}_{=0} \dot{s} = \mathbf{v}_{SF_3} \dot{\mathbf{p}}.\end{aligned}\quad (3.29b)$$

Zależności (3.28) oraz (3.29) można zapisać w zwartej postaci

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{SF_1} \\ \mathbf{v}_{SF_2} \\ \mathbf{v}_{SF_3} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{V}_{SF} \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{V}_p \dot{\mathbf{p}}. \quad (3.30)$$

Warto zauważyć, że w porównaniu z odpowiadającym wyrażeniem (3.16) nowe równania (3.30) są prostsze, gdyż dryf $\mathbf{f}_{SF} = \mathbf{f}_p$ jest równy zero.

Należy również zwrócić uwagę na fakt, że ograniczenie (3.27) dla parametryzacji Serreta–Freneta przyjmuje następującą formę po uwzględnieniu zależności (3.28)

$$d_2 < \frac{1}{\kappa}. \quad (3.31)$$

Warunek (3.31) sugeruje, że punkt prowadzenia robota powinien zawsze znajdować się dostatecznie blisko ścieżki w kierunku wektora normalnego. W szczególności, jeśli zostanie określona maksymalna krzywizna ścieżki w całej dziedzinie, na której jest zdefiniowana, to można łatwo znaleźć warunek gwarantujący, że punkt prowadzenia robota nigdy nie osiągnie osobliwości. Ograniczenie (3.31) koresponduje z wynikiem uzyskanym przez Samsona, który w pracy [107] sformułował warunek pozwalający uniknąć osobliwości parametryzacji w przypadku planarnym.

Parametryzacja Bishopa. Analogiczne podejście można rozważyć dla parametryzacji Bishopa. W przypadku zastosowania tej metody warunek rzutowania ortogonalnego (3.25) przyjmuje szczegółową postać

$$\dot{s} = - \frac{\langle \mathbf{t}, \dot{\mathbf{p}} \rangle}{\langle k_1 \mathbf{n}_1 + k_2 \mathbf{n}_2, \mathbf{p} - \mathbf{r} \rangle - 1} = - \frac{\mathbf{t}^T}{k_1 d_2 + k_2 d_3 - 1} \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v}_{B_1} \dot{\mathbf{p}}. \quad (3.32)$$

Ponadto, niezależnie od definicji warunku na prędkość krzywoliniową (3.32), można zauważyć, że równania (3.20b) oraz (3.20c) upraszczają się dzięki obserwacji (3.23) do postaci

$$\dot{\mathbf{d}}_2 = \langle \mathbf{n}_1, \dot{\mathbf{p}} - \dot{\mathbf{r}} \rangle = \underbrace{\mathbf{n}_1^T}_{\mathbf{v}_{B_2}} \dot{\mathbf{p}} - \underbrace{\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{t} \rangle}_{=0} \dot{s} = \mathbf{v}_{B_2} \dot{\mathbf{p}}, \quad (3.33a)$$

$$\dot{\mathbf{d}}_3 = \langle \mathbf{n}_2, \dot{\mathbf{p}} - \dot{\mathbf{r}} \rangle = \underbrace{\mathbf{n}_2^T}_{\mathbf{v}_{B_3}} \dot{\mathbf{p}} - \underbrace{\langle \mathbf{n}_2, \mathbf{t} \rangle}_{=0} \dot{s} = \mathbf{v}_{B_3} \dot{\mathbf{p}}. \quad (3.33b)$$

Ponownie, powyższe równania (3.32) oraz (3.33) można zapisać w zwartej formie

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{B_1} \\ \mathbf{v}_{B_2} \\ \mathbf{v}_{B_3} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{V}_B \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{V}_p \dot{\mathbf{p}}. \quad (3.34)$$

Uzyskana forma jest analogiczna, jak w przypadku zastosowania parametryzacji Serreta–Freneta. Różni się jednak szczegółową postacią macierzy $\mathbf{V}_p$ (por. równanie (3.30)).

Ponadto, warto ponownie przyjrzeć się interpretacji ograniczenia (3.27). Dla parametryzacji Bishopa przyjmuje ono postać

$$k_1 d_2 + k_2 d_3 < 1. \quad (3.35)$$

Ta postać jest bardziej złożona, niż odpowiadający jej warunek (3.31) dla parametryzacji Serreta–Freneta, gdyż stanowi kombinację liniową dwóch składowych wektora $\mathbf{d}$. Jednakże należy podkreślić, iż nowa postać mianownika w wyrażeniu (3.32) umożliwia nie tylko poruszanie się wzdłuż ścieżki, ale również śledzenie ścieżek o zerowej krzywiznie. Tym samym ortogonalna parametryzacja Bishopa w wersji (3.34) umożliwia pełne wykorzystanie jej zalet.

Spostrzeżenie 4. Można zauważyć, że dla osobliwości przesuniętej poza parametryzowaną krzywą macierz $\mathbf{V}_p \in \{\mathbf{V}_{SF}, \mathbf{V}_B\}$, której postać zależy od przyjętej metody parametryzacji, zbiega do odpowiedniej macierzy $\mathbf{S}^T$, gdy punkt prowadzenia robota jest sprowadzany do początku układu lokalnego na ścieżce. Wynika to z faktu, że położenia w kierunkach wektorów normalnych dążą wówczas do zera. Dotyczy to zarówno parametryzacji Serreta–Freneta, jak i parametryzacji Bishopa, danej odpowiednio równaniami (3.30) oraz (3.34). Dla obu metod prawdziwa jest zatem zależność

$$\mathbf{V}_p \xrightarrow{d_2, d_3 \rightarrow 0} \mathbf{S}^T. \quad (3.36)$$

Na podstawie zależności (3.36) można wnioskować, że macierz $\mathbf{V}_p$ dąży do macierzy rotacji przekształcającej prędkości punktu prowadzenia robota do odpowiedniego układu odniesienia stowarzyszonego z krzywą.

Spostrzeżenie 5. Wszystkie rozważane przypadki zastosowania parametryzacji ortogonalnej w niniejszej pracy dotyczą wersji z osobliwością metody przesuniętą poza ścieżkę.

3.1.4 Stan początkowy odległości krzywoliniowej

Jak zauważono w pracy [34], dla poprawnego zastosowania parametryzacji ortogonalnej niezbędne jest wyznaczenie początkowego położenia układu lokalnego na zadanej ścieżce. Konieczne jest bowiem, aby w stanie początkowym punkt prowadzenia robota znajdował się w płaszczyźnie normalnej zdefiniowanej przez wektor styczny $\mathbf{t}$. W ten sposób można zagwarantować spełnienie założenia parametryzacji ortogonalnej – punkt prowadzenia robota znajduje się zawsze w najbliższej odległości od ścieżki.

Początkową wartość odległości krzywoliniowej, a więc początkowe położenie układu lokalnego w jego ewolucji wzdłuż ścieżki, można wyznaczyć na podstawie konfiguracji początkowej robota. Niech będzie dana funkcja opisująca odległość między punktem prowadzenia robota $\mathbf{p}$ a położeniem układu lokalnego na ścieżce $\mathbf{r}$

$$D(s) = \|\mathbf{p} - \mathbf{r}(s)\| = \sqrt{(x - r_1(s))^2 + (y - r_2(s))^2 + (z - r_3(s))^2}. \quad (3.37)$$

Zważywszy na fakt, że funkcja pierwiastkowa jest ściśle monotoniczna, w dalszej analizie problemu skorzystano z kwadratu funkcji (3.37)

$$D_2(s) = D^2(s). \quad (3.38)$$

Celem znalezienia wartości parametru, który minimalizuje dystans pomiędzy punktem prowadzenia robota a układem lokalnym na ścieżce, należy zróżniczkować funkcję (3.38) względem argumentu

$$\frac{dD_2(s)}{ds} = 2(r_1(s) - x) \frac{dr_1(s)}{ds} + 2(r_2(s) - y) \frac{dr_2(s)}{ds} + 2(r_3(s) - z) \frac{dr_3(s)}{ds}. \quad (3.39)$$

Wartość, która zeruje równanie (3.39), jest poszukiwaną wartością początkową rozważanego parametru.

Warto zauważyć, że zgodnie ze Spostrzeżeniem 1, powyższe rozważania są prawdziwe również dla parametru nieunormowanego u , gdyż zachodzi $D(s) = D(s(u)) = D(u)$. Wówczas, równanie (3.39) należy realizować w następujący sposób

$$\frac{dD_2(u)}{du} = 2(r_1(u) - x) \frac{dr_1(u)}{du} + 2(r_2(u) - y) \frac{dr_2(u)}{du} + 2(r_3(u) - z) \frac{dr_3(u)}{du}. \quad (3.40)$$

3.2 Parametryzacja nieortogonalna

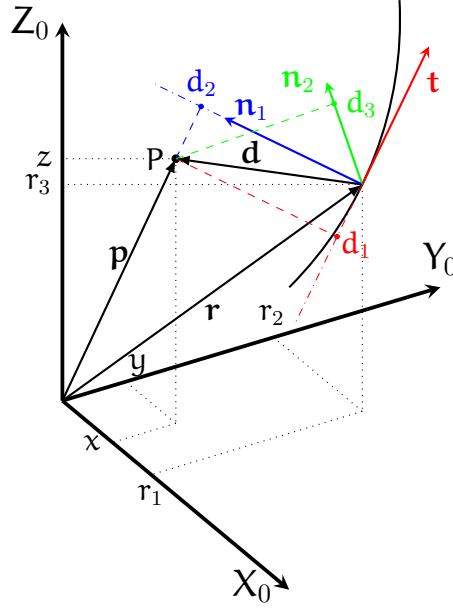
W parametryzacji nieortogonalnej nie nakłada się żadnych ograniczeń na położenie robota względem ścieżki. Oznacza to, że w każdej chwili punkt prowadzenia robota może być zlokalizowany dowolnie względem układu lokalnego na ścieżce. Konsekwencją takiego podejścia jest konieczność rozpatrywania w opisie stanu względem ścieżki wszystkich współrzędnych wektora $\mathbf{d}$, danego zależnością (3.2). Ponadto, należy stymulować ewolucję układu lokalnego wzdłuż ścieżki poprzez zadanie odpowiedniej prędkości krzywoliniowej $\dot{s}$. Wymaga to pozyskiwania dodatkowych informacji pomiarowych celem estymacji aktualnego położenia robota, co może być trudniejsze w praktycznej realizacji. Z drugiej strony, brak dodatkowych ograniczeń oznacza, że w metodzie nie występują żadne osobliwości wynikające z rzutowania obiektu na ścieżkę. Opis obiektu względem ścieżki jest zatem prawdziwy w całej dziedzinie krzywej i w tym kontekście jest opisem globalnym.

Przykładowa ilustracja parametryzacji nieortogonalnej została przedstawiona schematycznie na rys. 3.2. Na rysunku przedstawiono realizację parametryzacji nieortogonalnej dla układu Bishopa. Bez straty ogólności można przyjąć, że schemat jest prawdziwy również w parametryzacji Serreta–Freneta. Zgodnie z równaniami (2.30), dla $\phi = 0$ zachodzi bowiem $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}$ oraz $\mathbf{n}_2 = \mathbf{b}$.

Zastosowanie parametryzacji nieortogonalnej pozwala na ruch robota we wszystkich kierunkach zdefiniowanych przez układ lokalny stowarzyszony z krzywą. Dlatego też wektor $\mathbf{d}$ można traktować wprost jako stan robota względem ścieżki. Z tego względu punktem wyjścia dla rozważań w niniejszym rozdziale będzie równanie (3.4), które można rozpisać do postaci

$$\dot{\mathbf{d}} = \mathbf{S}^T \dot{\mathbf{p}} - \mathbf{S}^T \dot{\mathbf{r}} - \dot{s} \mathbf{W} \mathbf{d}. \quad (3.41)$$

Szczegółowa postać równania (3.41) zależy od przyjętej metody parametryzacji krzywoliniowej. Poniżej przedstawiono równania zarówno dla parametryzacji Serreta–Freneta, jak i parametryzacji Bishopa.

Rysunek 3.2: Parametryzacja nieortogonalna w przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

3.2.1 Równania robota względem ścieżki opisane w nieortogonalnej parametryzacji Serreta–Freneta

Równania parametryzacji Serreta–Freneta definiują ewolucję układu lokalnego wzdłuż ścieżki zgodnie z zależnością (2.9) dla parametru unormowanego lub (2.13) dla parametru nieunormowanego. Wynika stąd, że składnik $\mathbf{S}_{\text{SF}}^T \dot{\mathbf{r}}$ w równaniu (3.41) dla parametryzacji Serreta–Freneta można przedstawić jako

$$\mathbf{S}_{\text{SF}}^T \dot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{t}, \frac{d\mathbf{r}}{ds} \dot{s} \rangle \\ \langle \mathbf{n}, \frac{d\mathbf{r}}{ds} \dot{s} \rangle \\ \langle \mathbf{b}, \frac{d\mathbf{r}}{ds} \dot{s} \rangle \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

Biorąc pod uwagę definicję wektora stycznego w parametryzacji unormowanej (2.4a), a także ortogonalność wektorów bazowych układu Serreta–Freneta, zachodzi

$$\mathbf{S}_{\text{SF}}^T \dot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle \\ \langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle \\ \langle \mathbf{b}, \mathbf{t} \rangle \end{pmatrix} \dot{s} = \begin{pmatrix} \dot{s} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.43)$$

Analogiczne wartości uzyskuje się dla parametryzacji nieunormowanej, w której wektor styczny $\mathbf{t}$ dany jest równaniem (2.11a)

$$\mathbf{S}_{\text{SF}}^T \dot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{t}, \frac{d\mathbf{r}}{du} \dot{u} \rangle \\ \langle \mathbf{n}, \frac{d\mathbf{r}}{du} \dot{u} \rangle \\ \langle \mathbf{b}, \frac{d\mathbf{r}}{du} \dot{u} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle \\ \langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle \\ \langle \mathbf{b}, \mathbf{t} \rangle \end{pmatrix} \dot{u} \left\| \frac{d\mathbf{r}}{du} \right\|, \quad (3.44)$$

co po uwzględnieniu definicji (3.7) przyjmuje postać

$$\mathbf{S}_{\text{SF}}^T \dot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \dot{s} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.45)$$

Widać zatem, że składnik $\mathbf{S}_{\text{SF}}^T \dot{\mathbf{r}}$ przyjmuje tę samą formę (3.43) lub (3.45), niezależnie od unormowania parametryzacji. Ponadto, opisuje on prędkość układu lokalnego na ścieżce w kierunku wektora stycznego $\mathbf{t}$. Można go interpretować jako prędkość liniową w układzie ciała [122].

Poprzez uwzględnienie macierzy $\mathbf{W}$ w postaci dla parametryzacji Serreta–Freneta $\mathbf{W}_{\text{SF}}$, która wynika wprost z równania (2.9), zależność (3.41) uzyskuje następującą formę

$$\dot{\mathbf{d}} = \underbrace{\mathbf{S}_{\text{SF}}^T}_{\mathbf{V}_p} \dot{\mathbf{p}} + \underbrace{\dot{s} \begin{pmatrix} \kappa d_2 \\ -\kappa d_1 + \tau d_3 \\ -\tau d_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{f}_p} - \begin{pmatrix} \dot{s} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{V}_p \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{f}_p. \quad (3.46)$$

Równanie (3.46) w pełni opisuje zachowanie robota względem ścieżki w nieortogonalnej parametryzacji Serreta–Freneta.

3.2.2 Równania robota względem ścieżki opisane w nieortogonalnej parametryzacji Bishopa

Postępując analogicznie, jak w przypadku parametryzacji Serreta–Freneta, można wykorzystać ewolucję układu Bishopa opisaną równaniem (2.20) lub (2.23) do uszczegółowienia zależności (3.41). Ponownie, w pierwszej kolejności należy przeanalizować składnik $\mathbf{S}^T \dot{\mathbf{r}}$. Stosując definicję wektora stycznego w parametryzacji unormowanej (2.4a), można pokazać, iż dla parametryzacji Bishopa zachodzi zależność

$$\mathbf{S}_B^T \dot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{t}, \frac{d\mathbf{r}}{ds} \rangle \\ \langle \mathbf{n}_1, \frac{d\mathbf{r}}{ds} \rangle \\ \langle \mathbf{n}_2, \frac{d\mathbf{r}}{ds} \rangle \end{pmatrix} \dot{s} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle \\ \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{t} \rangle \\ \langle \mathbf{n}_2, \mathbf{t} \rangle \end{pmatrix} \dot{s} = \begin{pmatrix} \dot{s} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.47)$$

Z kolei, uwzględniając definicję wektora stycznego w parametryzacji nieunormowanej (2.11a) oraz zależność (3.7), można uzyskać

$$\mathbf{S}_B^T \dot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{t}, \frac{d\mathbf{r}}{du} \rangle \\ \langle \mathbf{n}_1, \frac{d\mathbf{r}}{du} \rangle \\ \langle \mathbf{n}_2, \frac{d\mathbf{r}}{du} \rangle \end{pmatrix} \dot{u} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle \\ \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{t} \rangle \\ \langle \mathbf{n}_2, \mathbf{t} \rangle \end{pmatrix} \dot{u} \left\| \frac{d\mathbf{r}}{du} \right\| = \begin{pmatrix} \dot{s} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.48)$$

Z powyższych równań wynika, że niezależnie od unormowania parametryzacji, a także metody parametryzacji, składnik $\mathbf{S}^T \dot{\mathbf{r}}$ sprowadza się do tej samej postaci i określa prędkość liniową układu w kierunku wektora stycznego $\mathbf{t}$.

Wreszcie, w równaniu (3.41) należy uwzględnić postać macierzy $\mathbf{W}$ dla parametryzacji Bishopa $\mathbf{W}_B$, która wynika z równania (2.20). Wówczas równanie opisujące czasową pochodną położenia robota względem ścieżki przyjmuje formę

$$\dot{\mathbf{d}} = \underbrace{\mathbf{S}_B^T}_{\mathbf{V}_p} \dot{\mathbf{p}} + \underbrace{\dot{s} \begin{pmatrix} k_1 d_2 + k_2 d_3 \\ -k_1 d_1 \\ -k_2 d_1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{f}_p} - \begin{pmatrix} \dot{s} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{V}_p \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{f}_p. \quad (3.49)$$

Warto zwrócić uwagę, że uzyskano równania o strukturze analogicznej, jak dla parametryzacji Serreta–Freneta. Równania (3.46) oraz (3.49) różnią się tylko definicją poszczególnych macierzy, lecz zachowują tę samą strukturę.

3.3 Opis orientacji względem ścieżki

W dotychczasowych rozważaniach przedstawiono jedynie opis położenia punktu prowadzenia robota względem ścieżki. Istotnie, w podstawowym ujęciu zadania śledzenia ścieżki jest to jedyny rozważany aspekt – robot ma odwzorowywać położenia zgodnie z zadaną krzywą geometryczną. Jednakże, w niektórych aplikacjach ważna jest również orientacja układu wykonawczego względem układu lokalnego stowarzyszonego z krzywą, np. w operacjach chwytania obiektów, gdy końcówka manipulatora musi być odpowiednio obrócona. Z tego względu, w niniejszym rozdziale opis położenia robota względem ścieżki zostanie rozszerzony o opis względnej orientacji.

Orientacja robota względem układu lokalnego na ścieżce jest wyrażona za pomocą macierzy rotacji

$$\mathbf{R}_w = \mathbf{S}^T \mathbf{R}, \quad (3.50)$$

gdzie $\mathbf{S} \in \mathbb{SO}(3)$ jest macierzą rotacji zbudowaną z wersorów układu lokalnego, a jej postać wynika z zastosowanej metody parametryzacji krzywoliniowej, natomiast $\mathbf{R} \in \mathbb{SO}(3)$ jest macierzą rotacji, która opisuje orientację układu stowarzyszonego z robotem i umieszczonego w punkcie prowadzenia robota, względem globalnego układu odniesienia. Jeśli układ globalny będzie tożsamy z układem bazy manipulatora, to jednym ze sposobów na uzyskanie macierzy rotacji $\mathbf{R}$ jest algorytm Denavita–Hartenberga [122].

W celu zbadania zmian w czasie orientacji robota względem ścieżki, należy zróżniczkować równanie (3.50) po czasie, co po uwzględnieniu zależności (2.39) prowadzi do wyrażenia

$$\dot{\mathbf{R}}_w = \mathbf{S}^T \dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{S}}^T \mathbf{R} = \mathbf{S}^T \dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{S}} \mathbf{W}^T \mathbf{S}^T \mathbf{R} = \mathbf{S}^T \dot{\mathbf{R}} - \dot{\mathbf{S}} \mathbf{W} \mathbf{R}_w. \quad (3.51)$$

Równanie (3.51) należy wykorzystać, aby znaleźć definicję prędkości kątowych układu robota względem układu na ścieżce. Mnożąc zależność (3.51) prawostronnie przez macierz $\mathbf{R}_w^T$, uzyskamy wyrażenie równoważne

$$\dot{\mathbf{R}}_w \mathbf{R}_w^T = \mathbf{S}^T \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}_w^T - \dot{\mathbf{S}} \mathbf{W} \mathbf{R}_w \mathbf{R}_w^T. \quad (3.52)$$

Z definicji (3.50) wynika, że macierz $\mathbf{R}_w$ jest macierzą rotacji ze specjalnej grupy obrotów jako iloczyn dwóch macierzy należących do tej samej grupy, $\mathbf{R}_w \in \mathbb{SO}(3)$. Prawdą jest zatem, że zachodzi $\mathbf{R}_w \mathbf{R}_w^T = \mathbf{I}$, gdzie $\mathbf{I}$ jest macierzą jednostkową. Na podstawie podanych faktów równanie (3.52) można sprowadzić do postaci

$$\dot{\mathbf{R}}_w \mathbf{R}_w^T = \mathbf{S}^T \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T \mathbf{S} - \dot{\mathbf{S}} \mathbf{W}. \quad (3.53)$$

Niech będzie dana macierz prędkości kątowej w układzie przestrzeni [122]

$$\mathbf{\Omega} = \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T, \quad (3.54)$$

która jest związana z wektorem prędkości kątowej układu stowarzyszonego z robotem w punkcie prowadzenia robota, $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3)^T$, następującą relacją

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} = [\boldsymbol{\omega}], \quad (3.55)$$

gdzie operator $[\cdot]$ transformuje wektor na macierz skośnie symetryczną. Wówczas równanie (3.53) można zapisać jako

$$[\boldsymbol{\omega}_w] = \mathbf{\Omega}_w = \mathbf{S}^T \mathbf{\Omega} \mathbf{S} - \dot{\mathbf{S}} \mathbf{W} = \mathbf{S}^T [\boldsymbol{\omega}] \mathbf{S} - \dot{\mathbf{S}} \mathbf{W} = [\mathbf{S}^T \boldsymbol{\omega}] - \dot{\mathbf{S}} [\mathbf{W}], \quad (3.56)$$

gdzie $\mathbf{w} = (w_1 \ w_2 \ w_3)^\top$ jest wektorem odpowiednikiem skośnie symetrycznej macierzy $\mathbf{W}$ zgodnie z zależnością

$$[\mathbf{w}] = \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.57)$$

Z równania (3.56) wynika zależność definiująca wprost prędkość kątową robota względem układu lokalnego stowarzyszonego z krzywą w postaci wektorowej

$$\boldsymbol{\omega}_w = \mathbf{S}^\top \boldsymbol{\omega} - \dot{\mathbf{s}}\mathbf{w}. \quad (3.58)$$

Należy zauważyć, że składnik $\mathbf{S}^\top \boldsymbol{\omega}$ wyraża prędkość kątową układu stowarzyszonego z robotem względem inercjalnego układu odniesienia w układzie lokalnym na ścieżce. Z kolei, element $\dot{\mathbf{s}}\mathbf{w}$ odpowiada prędkości kątowej układu lokalnego stowarzyszonego z krzywą. Różnica tych dwóch wielkości pozwala wyznaczyć prędkość kątową układu robota względem układu lokalnego na ścieżce $\boldsymbol{\omega}_w$.

Wektor $\mathbf{w}$ z równania (3.58) przyjmuje odpowiednią postać w zależności od przyjętej metody parametryzacji:

- $\mathbf{w}_{\text{SF}}$ dla parametryzacji Serreta–Freneta, gdzie $[\mathbf{w}_{\text{SF}}] = \mathbf{W}_{\text{SF}}$,
- $\mathbf{w}_{\text{B}}$ dla parametryzacji Bishopa, gdzie $[\mathbf{w}_{\text{B}}] = \mathbf{W}_{\text{B}}$.

W obu przypadkach elementami wektora $\mathbf{w} \in \{\mathbf{w}_{\text{SF}}, \mathbf{w}_{\text{B}}\}$ są geometryczne niezmienniki krzywej charakterystyczne dla danej metody parametryzacji krzywoliniowej. Stąd, dla parametryzacji Serreta–Freneta równanie (3.58) przyjmuje postać

$$\boldsymbol{\omega}_w = \mathbf{S}^\top \boldsymbol{\omega} - \dot{\mathbf{s}} \begin{pmatrix} \tau \\ 0 \\ \kappa \end{pmatrix}, \quad (3.59)$$

natomiast w parametryzacji Bishopa sprowadza się do zależności

$$\boldsymbol{\omega}_w = \mathbf{S}^\top \boldsymbol{\omega} - \dot{\mathbf{s}} \begin{pmatrix} 0 \\ -\kappa_2 \\ \kappa_1 \end{pmatrix}. \quad (3.60)$$

Spostrzeżenie 6. Szczegółowe postaci wektora $\mathbf{w} \in \{\mathbf{w}_{\text{SF}}, \mathbf{w}_{\text{B}}\}$ zdefiniowane w równaniach (3.59) oraz (3.60) odzwierciedlają własności ewolucji odpowiednio układów Serreta–Freneta oraz Bishopa.

Dla parametryzacji Serreta–Freneta wektor $\mathbf{w}$ przyjmuje postać $\mathbf{w}_{\text{SF}} = (\tau \ 0 \ \kappa)^\top$. Prędkość kątowa w kierunku wektora normalnego $\mathbf{n}$ jest równa zero, stąd ta metoda minimalizuje rotacje układu w kierunku wektora normalnego.

Z kolei dla parametryzacji Bishopa zachodzi $\mathbf{w}_{\text{B}} = (0 \ -\kappa_2 \ \kappa_1)^\top$. Potwierdza to, że układ Bishopa minimalizuje rotacje wokół wektora stycznego $\mathbf{t}$, gdyż prędkość kątowa w tym kierunku zeruje się.

Macierz rotacji nie jest jednak dogodną reprezentacją orientacji ze względu na następujące aspekty:

1. Macierz rotacji w przestrzeni trójwymiarowej składa się z dziewięciu elementów. Tym samym jej przetwarzanie w aplikacjach praktycznych będzie generowało dodatkowe i zbędne obciążenie zasobów.
2. Zdefiniowanie błędu orientacji względnej, tzn. różnicy między rzeczywistą orientacją robota względem ścieżki a żadaną wartością tego parametru, nie jest zadaniem trywialnym.

Wymienione powody skłaniają do analizy innych metod reprezentacji orientacji. W niniejszym rozdziale zostaną rozpatrzone kąty Eulera oraz kwaterniony. Wpływ tego zabiegu na postać odpowiednich równań opisano poniżej.

3.3.1 Kąty Eulera

Kąty Eulera stanowią minimalną reprezentację orientacji [112], na którą składają się trzy kąty zapisane wektorowo jako $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \varepsilon_3)^T$. Każdy z kątów reprezentuje rotację wokół odpowiedniej osi poruszającego się układu współrzędnych, a zatem wartości poszczególnych kątów zależą od przyjętej konwencji. W przypadku reprezentacji Z-Y-X kąty Eulera $\boldsymbol{\varepsilon}$ odpowiadają macierzy rotacji $\mathbf{R}$

$$\mathbf{R} = \mathbf{Rot}(\mathbf{Z}, \varepsilon_1) \cdot \mathbf{Rot}(\mathbf{Y}, \varepsilon_2) \cdot \mathbf{Rot}(\mathbf{X}, \varepsilon_3), \quad (3.61)$$

gdzie $\mathbf{Rot}(\mathbf{A}, \alpha)$ definiuje macierz rotacji względem osi $\mathbf{A}$ o zadany kąt α . Można zauważyć, że istnieje 12 reprezentacji kątów Eulera. W przedstawionych rozważaniach przyjęto konwencję Z-Y-X, czyli tzw. reprezentację *Roll-Pitch-Yaw* [122].

Spostrzeżenie 7. *Niezależnie od przyjętej konwencji, w odwzorowaniu kątów Eulera na macierz rotacji pojawiają się osobliwości dla pewnych konfiguracji. Stąd nie zawsze można jednoznacznie wyznaczyć kąty Eulera, które odpowiadają danej macierzy rotacji. Ma to swoje konsekwencje również przy wyznaczaniu relacji między prędkościami kątowymi a pochodnymi kątów Eulera [112].*

Ponadto, należy zauważyć, że zmiany kątów Eulera w czasie nie są równe prędkościom kątowym obiektu. Istnieje jednak transformacja, zależna od wartości kątów Eulera, która wiąże prędkościątowe w układzie przestrzeni i pochodne kątów Eulera po czasie. Dla rozważanej konwencji Z-Y-X przyjmuje ona postać

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon_1 \tan \varepsilon_2 & \sin \varepsilon_1 \tan \varepsilon_2 & 1 \\ -\sin \varepsilon_1 & \cos \varepsilon_1 & 0 \\ \cos \varepsilon_1 / \cos \varepsilon_2 & \sin \varepsilon_1 / \cos \varepsilon_2 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega} = \mathbf{H}(\boldsymbol{\varepsilon}) \boldsymbol{\omega}. \quad (3.62)$$

Można zaobserwować, że równanie (3.62) jest nieokreślone dla wartości $\varepsilon_2 = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Wynika to z osobliwości kątów Eulera w konwencji Z-Y-X i jest konsekwencją Spostrzeżenia 7.

Orientacja względna wyrażona w kątach Eulera. Kąty Eulera zostały wykorzystane do opisu orientacji robota względem ścieżki. Niewątpliwą zaletą tej reprezentacji jest fakt, że dla obliczenia orientacji względnej mnożenie macierzowe z równania (3.50) można zastąpić odejmowaniem zgodnie z zależnością

$$\boldsymbol{\varepsilon}_w = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_s, \quad (3.63)$$

gdzie $\boldsymbol{\varepsilon}$ jest wektorem kątów Eulera opisujących orientację układu związanego z robotem i odpowiadających macierzy $\mathbf{R}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_S$ oznacza kąty Eulera opisujące orientację układu lokalnego na ścieżce, natomiast $\boldsymbol{\varepsilon}_w$ to kąty Eulera definiujące orientację względną robota w odniesieniu do ścieżki.

Biorąc pod uwagę definicję (3.62), można przedstawić równanie pozwalające obliczyć pochodne czasowe kątów Eulera na podstawie względnych prędkości kątowych w układzie przestrzeni

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_w = \mathbf{H}(\boldsymbol{\varepsilon}_w) \boldsymbol{\omega}_w = \mathbf{H}_w \boldsymbol{\omega}_w. \quad (3.64)$$

Na tej podstawie można określić zmiany orientacji względnej robota w układzie stowarzyszonym z krzywą wyrażoną w kątach Eulera [36]. W tym celu należy uwzględnić zależność (3.58) w równaniu (3.64)

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_w = \mathbf{H}_w \underbrace{(\mathbf{S}^T \boldsymbol{\omega} - \dot{\mathbf{s}} \mathbf{w})}_{\boldsymbol{\omega}_w} = \underbrace{\mathbf{H}_w \mathbf{S}^T}_{\mathbf{V}_o} \boldsymbol{\omega} + \underbrace{(-\dot{\mathbf{s}} \mathbf{H}_w \mathbf{w})}_{\mathbf{f}_o} = \mathbf{V}_o \boldsymbol{\omega} + \mathbf{f}_o. \quad (3.65)$$

Uzyskana zależność na pochodne kątów Eulera (3.65) w pełni opisuje ewolucję orientacji robota względem ścieżki.

3.3.2 Kwanterniony

Kwanterniony to pewna struktura algebraiczna, którą można interpretować jako uogólnienie liczb zespolonych w przestrzeni trójwymiarowej. W szczególności, kwaterniony są dobrym narzędziem do opisu rotacji w tej przestrzeni. Nadają się zwłaszcza do problemów, w których występują osobliwości związane z innymi metodami reprezentacji orientacji [112]. Zgodnie z pracą [49], kwaterniony definiuje się jako czteroelementowy wektor $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_0 \ \epsilon_1 \ \epsilon_2 \ \epsilon_3)^T = (\epsilon_0 \ \boldsymbol{\epsilon}_q^T)^T$ wraz ze zdefiniowanymi operacjami:

1. nieprzemienne mnożeniem kwaternionów

$$\boldsymbol{\epsilon} * \boldsymbol{\psi} = \begin{pmatrix} \epsilon_0 \psi_0 - \langle \boldsymbol{\epsilon}_q, \boldsymbol{\psi}_q \rangle \\ \epsilon_0 \boldsymbol{\psi}_q + \psi_0 \boldsymbol{\epsilon}_q + \boldsymbol{\epsilon}_q \times \boldsymbol{\psi}_q \end{pmatrix},$$

2. mnożeniem skalarnym

$$\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\psi} = \epsilon_0 \psi_0 + \langle \boldsymbol{\epsilon}_q, \boldsymbol{\psi}_q \rangle,$$

3. sprzężeniem do kwaternionu

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}} = \begin{pmatrix} \epsilon_0 \\ -\boldsymbol{\epsilon}_q \end{pmatrix},$$

dla którego zachodzi

$$\boldsymbol{\epsilon} * \bar{\boldsymbol{\epsilon}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Interpretacja kwaternionów jest bliska reprezentacji rotacji przedstawionej jako oś-kąt [122]. Element ϵ_0 odnosi się do kąta rotacji, natomiast wektor $\boldsymbol{\epsilon}_q$ definiuje oś obrotu [112].

Ponadto, do opisu rotacji rozważania ograniczono do kwaternionów jednostkowych, a więc takich, które spełniają zależność

$$\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\epsilon} = \sum_{i=0}^3 \epsilon_i^2 = 1. \quad (3.66)$$

Kwaterniony jednostkowe charakteryzują się tym, że mają jedynie trzy stopnie swobody zamiast czterech ze względu na konieczność zachowania warunku (3.66) [49]. Ta własność koresponduje z reprezentacją kątów Eulera, która pokazuje, że trzy stopnie swobody są wystarczające do opisu orientacji w przestrzeni trójwymiarowej.

Pochodne kwaternionów po czasie można powiązać z prędkościami kątowymi obiektu w układzie przestrzeni poprzez zależność [112, 113]

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\epsilon_1 & -\epsilon_2 & -\epsilon_3 \\ \epsilon_0 & \epsilon_3 & -\epsilon_2 \\ -\epsilon_3 & \epsilon_0 & \epsilon_1 \\ \epsilon_2 & -\epsilon_1 & \epsilon_0 \end{bmatrix} \omega = \mathbf{H}(\epsilon) \omega. \quad (3.67)$$

Równanie to będzie potrzebne do analizy prędkościowej obrotów robota względem krzywej.

Spostrzeżenie 8. *Zauważmy, że dla macierzy $\mathbf{H}$ z równania (3.67) zachodzi*

$$\det(\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^T) = 0. \quad (3.68)$$

Oznacza to, że niemożliwym jest wyznaczenie pseudo-odwrotności w postaci

$$\mathbf{H}^\# = \mathbf{H}^T (\mathbf{H}\mathbf{H}^T)^{-1}.$$

Jednakże, macierz $\mathbf{H}$ jest rzędu 3, $\text{rank}(\mathbf{H}) = 3$, a dla kwaternionu jednostkowego ϵ każdy z jego elementów jest ściśle zdefiniowany przez trzy pozostałe [49]. Dlatego można pominąć wybrany wiersz macierzy $\mathbf{H}$, aby uzyskać odwracalną macierz kwadratową. Oznaczmy macierz $\mathbf{H}$ z usuniętym i -tym wierszem jako $\mathbf{H}^{(i)}$. Wówczas wyznacznik takiej macierzy jest równy

$$\det \mathbf{H}^{(i)} = (-1)^{i-1} \cdot \frac{1}{8} \epsilon_{i-1}. \quad (3.69)$$

Pominięty wiersz można zatem wybrać tak, aby wyznacznik macierzy $\mathbf{H}^{(i)}$ był różny od zera, a tym samym macierz była odwracalna.

Orientacja względna wyrażona w kwaternionach jednostkowych. Dla każdej macierzy rotacji istnieje odpowiadający jej kwaternion. Dlatego orientację robota względem układu lokalnego na ścieżce wyrażoną równaniem (3.50) można zapisać jako następującą relację kwaternionów

$$\epsilon_w = \bar{\epsilon}_s * \epsilon, \quad (3.70)$$

gdzie ϵ_s oraz ϵ oznaczają odpowiednio orientację układu lokalnego na ścieżce oraz orientację układu stowarzyszonego z robotem w globalnym układzie odniesienia, natomiast ϵ_w to kwaternion jednostkowy określający orientację robota względem ścieżki.

Spostrzeżenie 9. *Należy podkreślić, że orientacja układu stowarzyszonego z robotem wyrażona kwaternionem ϵ oraz orientacja układu lokalnego na ścieżce dana kwaternionem ϵ_s będą identyczne, gdy kwaternion wyrażający orientację względną obu układów będzie równy $\epsilon_w = (1 \quad \mathbf{0}^T)^T$ [113].*

Pochodne po czasie kwaternionu ϵ_w zgodnie z ogólną zależnością (3.67) można zapisać w postaci

$$\dot{\epsilon}_w = \mathbf{H}(\epsilon_w)\omega_w = \mathbf{H}_w\omega_w, \quad (3.71)$$

co po uwzględnieniu równania (3.58) przyjmuje formę [37]

$$\dot{\epsilon}_w = \mathbf{H}_w \underbrace{(\mathbf{S}^T \omega - \dot{s}w)}_{\omega_w} = \mathbf{H}_w \mathbf{S}^T \omega - \dot{s} \mathbf{H}_w w. \quad (3.72)$$

To równanie opisuje w pełni zmiany w czasie orientacji robota względem ścieżki. Jednakże, zgodnie ze Spostrzeżeniem 8, aby uzyskać możliwość odwracania macierzy $\mathbf{H}_w$ należy usunąć jeden z jej wierszy. Skutkuje to koniecznością usunięcia jednego równania z macierzowej zależności (3.72). Po usunięciu i -tej składowej kwaternionu uzyskamy zależność

$$\dot{\epsilon}_w^{(i)} = \mathbf{H}_w^{(i)} (\mathbf{S}^T \omega - \dot{s}w) = \underbrace{\mathbf{H}_w^{(i)} \mathbf{S}^T}_{\mathbf{V}_o} \omega + \underbrace{(-\dot{s} \mathbf{H}_w^{(i)} w)}_{\mathbf{f}_o} = \mathbf{V}_o \omega + \mathbf{f}_o. \quad (3.73)$$

Należy zauważyć, że usunięcie wybranej składowej kwaternionu nie powoduje utraty stopnia swobody, a przedstawiony opis w dalszym ciągu w pełni charakteryzuje orientację robota względem ścieżki, gdyż rozważane są kwaterniony jednostkowe.

3.4 Synteza opisu robota względem ścieżki

Zauważmy, że niezależnie od zastosowanej metody parametryzacji krzywoliniowej, a także przyjętych założeń dotyczących rzutowania obiektu na krzywą, przedstawione w niniejszym rozdziale równania położenia punktu prowadzenia robota względem ścieżki można sprowadzić do pewnej ogólnej postaci

$$\dot{\chi} = \mathbf{V}_p \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{f}_p, \quad (3.74)$$

gdzie χ oznacza stan robota względem ścieżki. Dla poszczególnych konfiguracji metod parametryzacji elementy w równaniu (3.74) są definiowane zgodnie z tabelą 3.1. Choć poszczególne równania różnią się definicją stanu oraz realizacją macierzy i wektorów, to zachowują tę samą strukturę.

Tabela 3.1: Definicja elementów w równaniu (3.74) dla różnych metod parametryzacji.

Metoda parametryzacji	Definicja składowych			Równanie
	χ	$\mathbf{V}_p$	$\mathbf{f}_p$	
Ortogonalna Serreta–Freneta	ξ	$\mathbf{V}_{SF}$	$\mathbf{0}_{3 \times 1}$	(3.30)
Ortogonalna Bishopa	ξ	$\mathbf{V}_B$	$\mathbf{0}_{3 \times 1}$	(3.34)
Nieortogonalna Serreta–Freneta	$\mathbf{d}$	$\mathbf{S}_{SF}^T$	$\dot{s} \mathbf{W}_{SF}^T \mathbf{d} - \mathbf{S}_{SF}^T \dot{\mathbf{r}}$	(3.46)
Nieortogonalna Bishopa	$\mathbf{d}$	$\mathbf{S}_B^T$	$\dot{s} \mathbf{W}_B^T \mathbf{d} - \mathbf{S}_B^T \dot{\mathbf{r}}$	(3.49)

Analogiczne spostrzeżenie można uczynić dla opisu orientacji robota względem krzywej. Można zaobserwować, że niezależnie od metody reprezentacji orientacji rozważanej w rozdziale 3.3, równania obiektu względem ścieżki można wyrazić w postaci

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{V}_o \boldsymbol{\omega} + \mathbf{f}_o, \quad (3.75)$$

gdzie $\mathbf{x}$ oznacza względną orientację robota, a wszystkie elementy są definiowane zgodnie z tabelą 3.2.

Tabela 3.2: Definicja elementów w równaniu (3.75) dla różnych metod parametryzacji.

Metoda parametryzacji	Reprezentacja orientacji	Definicja składowych			Równania
		$\boldsymbol{\chi}$	$\mathbf{V}_o$	$\mathbf{f}_o$	
Serreta–Freneta	Kąty Eulera	$\boldsymbol{\varepsilon}_w$	$\mathbf{H}_w \mathbf{S}_{SF}^T$	$-\dot{\mathbf{S}} \mathbf{H}_w \mathbf{w}_{SF}$	(3.65) oraz (3.59)
	Kwaterniony	$\boldsymbol{\epsilon}_w^{(i)}$	$\mathbf{H}_w^{(i)} \mathbf{S}_{SF}^T$	$-\dot{\mathbf{S}} \mathbf{H}_w^{(i)} \mathbf{w}_{SF}$	(3.73) oraz (3.59)
Bishopa	Kąty Eulera	$\boldsymbol{\varepsilon}_w$	$\mathbf{H}_w \mathbf{S}_B^T$	$-\dot{\mathbf{S}} \mathbf{H}_w \mathbf{w}_B$	(3.65) oraz (3.60)
	Kwaterniony	$\boldsymbol{\epsilon}_w^{(i)}$	$\mathbf{H}_w^{(i)} \mathbf{S}_B^T$	$-\dot{\mathbf{S}} \mathbf{H}_w^{(i)} \mathbf{w}_B$	(3.73) oraz (3.60)

Dodatkowo, można przedstawić opis robota względem ścieżki uwzględniający zarówno jego względne położenie, jak i orientację. W tym celu należy połączyć ze sobą równania (3.74) oraz (3.75), a także zdefiniować wektor stanu, który będzie odpowiadał posturze (położeniu i orientacji) robota względem krzywej.

Niech będzie dany wektor stanu $\mathbf{x}$ dla całościowego opisu robota względem ścieżki, uwzględniający położenie i orientację. Wówczas – w zależności od wyboru metody parametryzacji, a także reprezentacji orientacji – można go zdefiniować jako jedną z następujących opcji

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_w \end{pmatrix} \quad \vee \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \boldsymbol{\epsilon}_w^{(i)} \end{pmatrix} \quad \vee \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{d} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_w \end{pmatrix} \quad \vee \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{d} \\ \boldsymbol{\epsilon}_w^{(i)} \end{pmatrix}, \quad (3.76)$$

które odpowiadają kolejno: parametryzacji ortogonalnej i kątom Eulera, parametryzacji ortogonalnej i kwaternionom, parametryzacji nieortogonalnej i kątom Eulera, parametryzacji nieortogonalnej i kwaternionom. Dzięki temu równania postury robota względem ścieżki można wyrazić jako

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_p & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{V}_o \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{f}_p \\ \mathbf{f}_o \end{pmatrix} = \mathbf{V} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix} + \mathbf{f}, \quad (3.77)$$

gdzie $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$, $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^6$, a definicję poszczególnych elementów można odczytać z tabeli 3.1 oraz tabeli 3.2. Otrzymane równanie dla przypadku ogólnego można wykorzystać, aby powiązać prędkości robota względem ścieżki z jego prędkościami w przestrzeni konfiguracyjnej. Taka zależność wyraża ograniczenie prędkościowe nałożone na układ robotyczny, które gwarantuje poprawną realizację krzywej geometrycznej w przestrzeni. Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1. Załóżmy, że macierz $\mathbf{J}$ zależy od konfiguracji robota $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ i wyraża związek między prędkością robota w przestrzeni zadaniowej a jego prędkością w przestrzeni konfiguracyjnej. Wówczas prędkość robota względem układu lokalnego na ścieżce dana jest równaniem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{L}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}, \quad (3.78)$$

gdzie $\mathbf{L}(\mathbf{s}, \boldsymbol{\chi}, \mathbf{q}) = \mathbf{V}(\mathbf{s}, \boldsymbol{\chi}) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{q})$, $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{6 \times n}$. Zależność (3.78) będzie nazywana **kinematyką robota względem ścieżki**.

Dowód. Jakobian $\mathbf{J}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{6 \times n}$ opisuje zależność pomiędzy prędkościami robota w przestrzeni zadaniowej a prędkościami w przestrzeni konfiguracyjnej. Dla macierzy Jacobiego zachodzi

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}. \quad (3.79)$$

Uwzględnienie zależności (3.79) w równaniu (3.77) pozwala otrzymać

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{V} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix} + \mathbf{f} = \underbrace{\mathbf{V}\mathbf{J}}_{\mathbf{L}} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{f} = \mathbf{L}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}, \quad (3.80)$$

gdzie $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{6 \times n}$. To ostatecznie wyraża ogólną postać kinematyki robota względem ścieżki. $\square$

W tym rozdziale uzyskano równanie kinematyki robota względem ścieżki (3.78). Należy podkreślić, że ta ogólna postać jest prawdziwa dla wszystkich metod parametryzacji przedstawionych w niniejszej rozprawie. W szczególności, zależność (3.78) można odpowiednio zredukować tak, aby wyrazić ograniczenie jedynie na prędkości liniowe albo kątowe.

Spostrzeżenie 10. Jeśli rozważane jest jedynie położenie albo orientacja obiektu względem ścieżki, to należy pominąć odpowiednie wiersze z równania macierzowego (3.78) wynikającego z Twierdzenia 1:

- jeśli rozważane jest położenie względem ścieżki, to należy uwzględnić jedynie trzy pierwsze równania (3.78), zgodnie z zależnością (3.74);
- jeśli przedmiotem zainteresowania jest względna orientacja, trzeba wziąć pod uwagę trzy kolejne równania (3.78), zgodnie z definicją (3.75).

W konsekwencji, redukcji ulegną wymiary odpowiednich elementów równania, tzn. będzie zachodzić $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{3 \times n}$ oraz $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^3$.

Ponadto należy zauważyć, że w ogólności zależność (3.78) można traktować jako ograniczenie prędkościowe nałożone na robota w przestrzeni konfiguracyjnej. Jego spełnienie wymusza ruch przyjętego punktu prowadzenia robota wzdłuż danej ścieżki. Może zatem posłużyć do zdefiniowania profili prędkościowych. Jeśli robot będzie poruszał się według określonych profili prędkościowych, to odwzoruje ruch układu lokalnego stowarzyszonego z krzywą geometryczną w przestrzeni – zadaną ścieżką.

Rozdział 4

Sformułowanie problemu sterowania

W literaturze wyróżnia się trzy podstawowe zadania sterowania, które są klasyfikowane w zależności od pożądanego zachowania robota [122]. Zadanie może być definiowane poprzez punkt, który należy osiągnąć, lub krzywą, którą należy zrealizować w różnych reżimach czasowych. Podstawowe zadania robotyczne można zatem podzielić następująco:

1. Sterowanie do punktu – w przypadku tego zadania kluczowy jest punkt docelowy, który może być zdefiniowany w przestrzeni konfiguracyjnej bądź zadaniowej robota. Nie jest istotne, w jaki sposób robot osiągnie zadaną wartość. Wartość referencyjna wymusza zatem na układzie sterowania zmianę skokową.
2. Śledzenie trajektorii – w tym zadaniu kluczowe jest podążanie za krzywą, która jest parametryzowana czasem. Oznacza to, że wymaga się od obiektu sterowania, aby znajdował się w konkretnych punktach przestrzeni w ściśle określonych chwilach czasu. Tak zdefiniowana krzywa pozwala wpływać na zachowanie robota między punktem początkowym ruchu a punktem docelowym. W szczególności, umożliwia gładkie połączenie warunków brzegowych zadania czy omijanie przeszkód, które znajdują się w przestrzeni roboczej obiektu. Jednakże, ze względu na ograniczone możliwości napędów dostępnych do realizacji robotów, niezmiernie istotne jest planowanie trajektorii w taki sposób, aby narzucony reżim czasowy nie powodował przekroczenia bezpiecznych limitów.

Należy zauważyć, że zadanie śledzenia trajektorii jest uogólnieniem zadania sterowania do punktu. Punkt można bowiem interpretować jako trajektorię stałą w czasie, która nie zmienia się podczas całego manewru.

3. Śledzenie ścieżki – ten rodzaj zadania robotycznego również skupia się na realizacji pewnej krzywej. Tym razem jednak kluczowa nie jest zależność od czasu, lecz od odległości. Krzywą parametryzuje się odległością od jej punktu początkowego. Parametr może mieć zatem interpretację odległości krzywoliniowej s , która została zdefiniowana w rozdziale 2, lub dowolnego parametru nieunormowanego. Dzięki temu na układ sterowania nie nakłada się żadnych reżimów czasowych, gdyż istotny jest jedynie geometryczny kształt ruchu, a nie jego tempo. Redukuje to sytuacje, w których robot nie jest w stanie nadążyć za wartością zadaną ze względu na ograniczone możliwości napędów. Ponadto, planowanie wartości referencyjnej jest prostsze, gdyż bazuje jedynie na zależnościach geometrycznych. Trudność realizacji jest

przesunięta na układ sterowania. Zadanie śledzenia ścieżki jest również dogodne dla wszystkich aplikacji bazujących na odległości od punktu początkowego ruchu.

Należy zauważyć, że zadanie śledzenia ścieżki jest uogólnieniem zadania śledzenia trajektorii. Parametryzacja czasem jest bowiem szczególnym przypadkiem parametryzacji krzywej, która w zadaniu śledzenia ścieżki może być dowolna. Rezygnacja z uwzględnienia czasu w wartości referencyjnej niweluje problem zbyt wygórowanych reżimów czasowych nakładanych na obiekt sterowania.

Przedmiotem zainteresowania prowadzonych rozważań jest najbardziej ogólne zadanie robotyczne – śledzenie ścieżki. W niniejszym rozdziale zostały przedstawione definicje i koncepcje przydatne do wykonania tego zadania sterowania. Wyszczególniono również założenia przyjęte do realizacji zadania i projektowania algorytmów sterowania. W szczególności, omówiono konsekwencje, jakie niesie ze sobą taka definicja zadania dla układu sterowania robota.

4.1 Realizacja zadania sterowania – śledzenia ścieżki

Zgodnie z definicją podaną w pracy [53], zadanie śledzenia ścieżki polega na sterowaniu robotem w taki sposób, aby osiągnął pewną przestrzenną krzywą geometryczną i podążał wzdłuż niej. Należy jednak pamiętać, że ruch wzdłuż ścieżki realizowany przez dynamiczny układ robotyczny jest zawsze wykonywany w czasie. Dlatego należy równocześnie asymptotycznie realizować profil prędkościowy wzdłuż ścieżki, który stymuluje ruch obiektu sterowania wzdłuż zadanej krzywej geometrycznej.

Spostrzeżenie 11. *Ścieżka to obiekt czysto geometryczny, a profil prędkościowy realizowany wzdłuż niej może być dobrany dowolnie. W sposób oczywisty profil prędkościowy wyraża pewną zależność czasową, jednakże jego wybór jest drugorzędnym podproblemem w zadaniu śledzenia ścieżki [39]. Dobór profilu prędkościowego wzdłuż ścieżki charakteryzuje się pewnym stopniem swobody i nie wpływa na definicję ścieżki, która pozostaje obiektem czysto geometrycznym, a zachowanie robota zależy od jego odległości od punktu początkowego.*

W rozdziale 1.2 podkreślono, że na przestrzeni ostatnich lat powstało wiele różnorodnych metod pozwalających na realizację zadania śledzenia ścieżki. Niniejsza praca skupia się na rozwiązaniu problemu śledzenia ścieżki poprzez metody oparte na parametryzacjach krzywoliniowych. Wykorzystują one formalizm matematyczny wynikający z parametryzacji Serreta–Freneta lub Bishopa, które zostały przedstawione w rozdziale 2, do opisu robota względem ścieżki. Z parametryzacji krzywoliniowych wynika ruch układu lokalnego wzdłuż ścieżki zgodny z jej geometrią, a sterowanie robotem polega na wymuszeniu odpowiedniego zachowania obiektu względem układu stowarzyszonego z krzywą. W zależności od przyjętych założeń dotyczących względnego położenia obiektu wyróżnia się parametryzację ortogonalną oraz nieortogonalną. Zostały one zdefiniowane w rozdziale 3. To podejście nie jest wolne od osobliwości, a także nakłada minimalne wymagania na krzywą ze względu na definicję parametryzacji krzywoliniowych. Pozwala jednak zminimalizować wymiarowość problemu, a także jest intuicyjne geometrycznie. W ramach dysertacji podejście parametryczne jest pogłębiane i uogólniane celem poszerzenia jego zakresu stosowalności, maksymalizacji zysku z zalet i zniwelowania istniejących wad tej metody.

Zastosowanie metody opartej o parametryzację krzywoliniową wymaga przyjęcia pewnych założeń dotyczących realizacji zadania. Zakłada się, że zachodzą następujące warunki dotyczące zadanej ścieżki i jej parametryzacji:

- zadana ścieżka jest obiektem czysto geometrycznym i nie jest parametryzowana czasem;
- zadana ścieżka to krzywa zdefiniowana w przestrzeni $\mathbb{R}^3$;
- układ lokalny jest dobrze zdefiniowany na ścieżce, co oznacza, że:
 - zadana ścieżka spełnia minimalne wymagania dotyczące klasy ciągłości dla poszczególnych metod parametryzacji krzywoliniowej: $\mathcal{C}^3$ dla parametryzacji Serreta–Freneta oraz $\mathcal{C}^2$ dla parametryzacji Bishopa;
 - parametryzacja metodą Serreta–Freneta jest stosowana tylko dla ścieżek, które nie zawierają punktów o zerowej krzywiznie;
- ścieżka jest osiągalna przez robota, tzn. znajduje się w jego przestrzeni roboczej;
- ruch robota jest realizowany wzdłuż ścieżki, jeśli punkt prowadzenia robota w stanie początkowym znajduje się na ścieżce, lub robot osiąga zadaną ścieżkę asymptotycznie, jeśli w stanie początkowym punkt prowadzenia robota znajduje się poza ścieżką;
- profil prędkościowy wzdłuż ścieżki jest definiowany niezależnie od krzywej geometrycznej i może być modyfikowany dowolnie z uwzględnieniem uwarunkowań zadania i ograniczeń robota.

Powyższe założenia obowiązują we wszystkich rozważaniach prowadzonych w tej pracy, o ile nie zaznaczono inaczej.

4.2 Model obiektu sterowania

Zadanie śledzenia ścieżki można realizować dla zróżnicowanych układów robotycznych. Należy jednak zauważyć, że w ogólności można wskazać pewną strukturę modelu obiektu sterowania typową dla zadania śledzenia ścieżki.

Opis robota względem ścieżki, jak wynika z rozdziału 3, wymaga zdefiniowania punktu prowadzenia robota. Dla robotów mobilnych jest on często identyfikowany ze środkiem ciężkości platformy, a w przypadku manipulatorów jest to końcówka chwytaka. Opis położenia jest podstawowym rozważanym przypadkiem. Jeśli obiekt sterowania posiada dostateczną liczbę stopni swobody, to można dodatkowo rozpatrywać orientację obiektu sterowania względem ścieżki. Wówczas w punkcie prowadzenia robota jest zaczepiony lokalny układ współrzędnych, który definiuje orientację obiektu w globalnym układzie odniesienia. W konsekwencji można również wyznaczyć orientację robota względem układu na ścieżce. Orientacja względna ma kluczowe znaczenie dla operacji, w których wymagane jest odpowiednie ustawienie robota lub jego efektora, np. chwytanie przedmiotów. W przypadku parametryzacji trójwymiarowych do pełnego opisu położenia i orientacji robota wymagane jest minimum sześć stopni swobody.

Dla poprawnej realizacji zadania śledzenia ścieżki konieczne jest przyjęcie pewnych założeń dotyczących robota i jego struktury. W niniejszej pracy konieczne zakłada się, że są spełnione następujące warunki:

- kinematyka robota jest w pełni znana;
- robot pracuje poza konfiguracjami osobliwymi wynikającymi z jego struktury kinematycznej;
- przestrzeń robocza obiektu jest bezkolizyjna.

W szczególności, ostatnie założenie sprowadza się do sytuacji, w której zadana ścieżka jest zaplanowana lub modyfikowana w trakcie wykonywania manewru w taki sposób, aby nie doszło do niepożądanego kontaktu z elementami otoczenia.

Należy zauważyć, że robot jest obiektem dynamicznym. Jego stan zmienia się w czasie i działają na niego różne siły oraz momenty sił. Dlatego rozważań dotyczących śledzenia ścieżki nie można prowadzić jedynie na poziomie kinematycznym. Nie można zrealizować bezpośrednio ograniczenia prędkościowego, lecz konieczne jest uwzględnienie dynamiki obiektu. Nie wprowadza się jednak dodatkowych założeń dotyczących modelu dynamiki robota. Oznacza to, że jego parametry dynamiczne lub struktura modelu mogą być częściowo lub całkowicie nieznane. Jest to typowa sytuacja praktycznych realizacji zadań robotycznych.

Model obiektu sterowania w zadaniu śledzenia ścieżki jest zatem zdefiniowany poprzez dynamikę robota, a także jego opis (kinematykę) względem ścieżki. Ta druga zależność ma charakter ograniczenia prędkościowego w przestrzeni konfiguracyjnej robota, jak wynika z Twierdzenia 1. Dodatkowo, należy wyróżnić przypadek mobilnych robotów nieholonomicznych. Posiadają one dodatkowe ograniczenia na poziomie kinematycznym ze względu na wzbronione kierunki ruchu. Poniżej przedstawiono szczegółowy opis obiektów holonomicznych i mobilnych obiektów nieholonomicznych w zadaniu śledzenia ścieżki.

4.2.1 Obiekt holonomiczny

W przypadku obiektu holonomicznego nie występują niecałkowalne ograniczenia prędkościowe. Oznacza to, że model obiektu w zadaniu śledzenia ścieżki jest w pełni zdefiniowany:

- kinematyką robota względem ścieżki, która wynika z Twierdzenia 1 i dana jest zależnością (3.78)

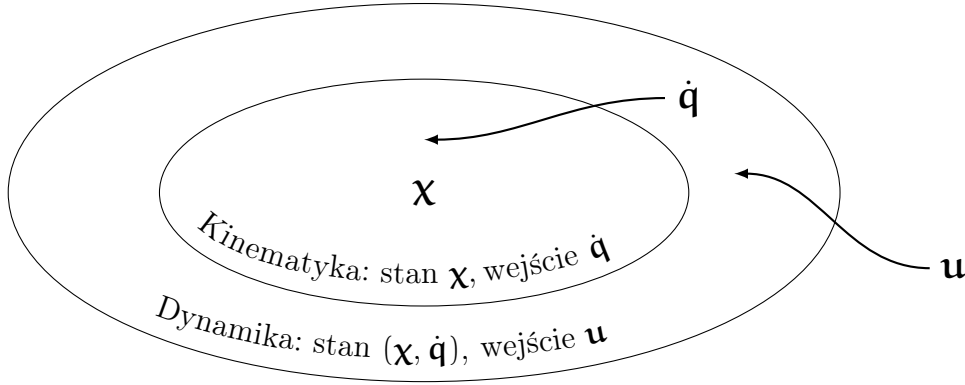
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{L}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}; \quad (4.1)$$

- dynamiką robota, która wynika z formalizmu Eulera–Lagrange’a i w ogólnej postaci dana jest równaniem [117]

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{u}, \quad (4.2)$$

gdzie $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ jest wektorem opisującym stan robota w przestrzeni konfiguracyjnej, $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ oznacza macierz bezwładności, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ opisuje macierz sił odśrodkowych i sił Coriolisa, $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^n$ jest wektorem grawitacji, natomiast $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ oznacza momenty sterujące w silnikach robota. Warto podkreślić, że w równaniu dynamiki obiektu holonomicznego (4.2) liczba sterowań jest taka sama, jak liczba zmiennych stanu.

Można zauważyć, że równania (4.1) oraz (4.2) opisujące obiekt holonomiczny w zadaniu śledzenia ścieżki są ze sobą sprzężone. Aby zagwarantować spełnienie ograniczeń wynikających z zadanej ścieżki, należy poruszać się wzdłuż pewnych profili prędkościowych w przestrzeni konfiguracyjnej. Jednakże, nie można bezpośrednio zadać tych prędkości, gdyż zależą one poprzez równanie dynamiki (4.2) od momentów sterujących zadawanych w silnikach robota. Wynika stąd, że oba równania tworzą pewną strukturę kaskadową, której schemat przedstawiono na rys. 4.1.



Rysunek 4.1: Struktura kaskadowa obiektu holonomicznego w zadaniu śledzenia ścieżki.

Najbardziej wewnętrznym stopniem kaskady jest kinematyka robota. Stan tego poziomu – stan robota względem zadanej ścieżki x – zależy wprost od prędkości robota w przestrzeni konfiguracyjnej $\dot{q}$, co wynika z równania (4.1). Aby spełnić ograniczenia wynikające z żądanej ścieżki, należy zadać odpowiednie profile prędkościowe $\dot{q}$. Jednakże, prędkości w przestrzeni konfiguracyjnej stanowią jednocześnie element stanu na poziomie dynamicznym. Oznacza to, że nie mogą one przyjmować zupełnie dowolnych wartości, lecz są uwarunkowane dynamiką robota (4.2). Sterowaniem, które można kształtować dowolnie, są momenty napędowe w silnikach robota u . Definiują one wejście dla równania dynamiki. Za jego pomocą można sterować stanem poziomu dynamicznego, który tworzą razem stan robota względem ścieżki x oraz prędkości $\dot{q}$. Wynika to z faktu, że poziom dynamiczny zawiera w sobie poziom kinematyczny modelu, gdyż wpływając na dynamikę robota pośrednio kształtujemy jego zachowania na poziomie kinematycznym. Warto podkreślić, że prędkości $\dot{q}$ stanowią jednocześnie wejście sterujące dla poziomu kinematycznego oraz trajektorie systemu na poziomie dynamicznym. Za ich pośrednictwem można kształtować stan na poziomie kinematycznym, lecz nie dowolnie, a przy uwzględnieniu równań dynamiki obiektu.

Taka kaskadowa struktura obiektu sterowania w zadaniu śledzenia ścieżki niesie konkretne konsekwencje dla układu sterowania, które zostały omówione w rozdziale 4.3.

4.2.2 Mobilny obiekt nieholonomiczny

W przypadku modelowania mobilnego obiektu nieholonomicznego (platformy mobilnej), oprócz ograniczeń wynikających z zadanej ścieżki oraz modelu dynamiki robota, należy uwzględnić dodatkowe ograniczenia prędkościowe. Oznacza to, że występują pewne kierunki wzbronione, w których robot nie może się poruszać. Model obiektu w zadaniu śledzenia ścieżki zdefiniowany jest zatem przez równania:

- kinematyki robota względem ścieżki, które wynikają z Twierdzenia 1 i są dane zależnością (3.78), czyli

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{L}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}; \quad (4.3)$$

- ograniczeń nieholonomicznych, które stanowią niecałkowalne ograniczenia pierwszego rzędu i można je wyrazić za pomocą macierzy Pfaffa [113] jako

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}, \quad (4.4)$$

gdzie $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ oznacza stan robota w przestrzeni konfiguracyjnej, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{l \times n}$ oznacza macierz Pfaffa, natomiast l jest liczbą ograniczeń nieholonomicznych;

- dynamiki robota, która wynika z zasady d'Alemberta i w ogólnej postaci jest wyrażona jako [122]

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{A}^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda}, \quad (4.5)$$

gdzie $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ oznacza macierz bezwładności, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ opisuje macierz sił odśrodkowych i sił Coriolisa, $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^n$ jest wektorem grawitacji, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ oznacza momenty sterujące w silnikach robota, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ jest macierzą wejściową opisującą, w jaki sposób sterowania wpływają na poszczególne zmienne stanu, natomiast $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^l$ jest wektorem mnożników Lagrange'a wynikającym z zasady d'Alemberta [122]. Warto zauważyć, że w przypadku obiektów nieholonomicznych liczba sterowań m jest mniejsza, niż wymiar stanu w przestrzeni konfiguracyjnej, gdyż zachodzi $m = n - l < n$.

Model dynamiki wyrażony równaniem (4.5) nie jest jednak korzystny pod względem matematycznym. Na ów fakt wpływają następujące aspekty:

1. Liczba sterowań $\mathbf{u}$ jest mniejsza, niż liczba zmiennych stanu $\mathbf{q}$, $m < n$.
2. W konsekwencji, macierz wejściowa $\mathbf{B}$ jest macierzą prostokątną, a przez to nieodwracalną. Aby znaleźć odwrotność takiej macierzy należałoby rozważyć tzw. pseudodwrotności.
3. Model wymaga uwzględnienia mnożników Lagrange'a $\boldsymbol{\lambda}$, których pomiar może być bardzo wymagający w realizacji praktycznej. W typowym modelu robota kołowego interpretuje się je jako siły tarcia statycznego pomiędzy kołami a podłożem. Pomiar takiej wielkości w każdym kroku sterowania jest wyzwaniem trudnym i uciążliwym.

Z powyższych względów korzystniej jest wyrazić model mobilnego obiektu nieholonomicznego za pomocą prędkości pomocniczych. W tym celu należy zauważyć, że ograniczenia nieholonomiczne można wyrazić w postaci bezdryfowego układu sterowania

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{G}(\mathbf{q})\boldsymbol{\eta}, \quad (4.6)$$

gdzie $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^m$ oznacza wektor prędkości pomocniczych, a $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ jest macierzą, której kolumny rozpinają jądro macierzy Pfaffa z ograniczenia (4.4), a więc tożsamościowo spełniona jest zależność $\mathbf{A} \cdot \mathbf{G} \equiv \mathbf{0}$. Uwzględniając równanie (4.6), a także jego pochodną po czasie

$$\ddot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{G}}\boldsymbol{\eta} + \mathbf{G}\dot{\boldsymbol{\eta}} \quad (4.7)$$

w modelu dynamiki (4.5), można uzyskać następującą zależność

$$\mathbf{Q}\mathbf{G}\dot{\boldsymbol{\eta}} + (\mathbf{Q}\dot{\mathbf{G}} + \mathbf{C}\mathbf{G})\boldsymbol{\eta} + \mathbf{g} = \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{A}^T\boldsymbol{\lambda}. \quad (4.8)$$

Mnożąc równanie (4.8) lewostronnie przez macierz $\mathbf{G}^T$, można otrzymać wyrażenie równoważne

$$\mathbf{G}^T\mathbf{Q}\mathbf{G}\dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{G}^T(\mathbf{Q}\dot{\mathbf{G}} + \mathbf{C}\mathbf{G})\boldsymbol{\eta} + \mathbf{G}^T\mathbf{g} = \mathbf{G}^T\mathbf{B}\mathbf{u} + \underbrace{\mathbf{G}^T\mathbf{A}^T}_{=0}\boldsymbol{\lambda}. \quad (4.9)$$

Warto podkreślić, że dzięki własności macierzy $\mathbf{G}$ zniwelowany został składnik z mnożnikami Lagrange'a $\boldsymbol{\lambda}$. Ponadto, jeśli przyjmujemy następujące oznaczenia:

- $\mathbf{Q}^* = \mathbf{G}^T\mathbf{Q}\mathbf{G}$, $\mathbf{Q}^* \in \mathbb{R}^{m \times m}$,
- $\mathbf{C}^* = \mathbf{G}^T(\mathbf{Q}\dot{\mathbf{G}} + \mathbf{C}\mathbf{G})$, $\mathbf{C}^* \in \mathbb{R}^{m \times m}$,
- $\mathbf{g}^* = \mathbf{G}^T\mathbf{g}$, $\mathbf{g}^* \in \mathbb{R}^m$,
- $\mathbf{B}^* = \mathbf{G}^T\mathbf{B}$, $\mathbf{B}^* \in \mathbb{R}^{m \times m}$,

to model dynamiki we współrzędnych pomocniczych można przedstawić w postaci

$$\mathbf{Q}^*\dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{C}^*\boldsymbol{\eta} + \mathbf{g}^* = \mathbf{B}^*\mathbf{u}. \quad (4.10)$$

Dodatkowo, można zaobserwować, że ograniczenia kinematyczne względem ścieżki (4.3) oraz ograniczenia nieholonomiczne (4.6) można scalić do jednego równania

$$\dot{\boldsymbol{\chi}} = \underbrace{\mathbf{L}\mathbf{G}}_{\mathbf{L}^*}\boldsymbol{\eta} + \mathbf{f} = \mathbf{L}^*\boldsymbol{\eta} + \mathbf{f}, \quad (4.11)$$

gdzie $\mathbf{L}^* \in \mathbb{R}^{6 \times m}$, zgodnie z Twierdzeniem 1, lub $\mathbf{L}^* \in \mathbb{R}^{3 \times m}$, gdy rozważane jest względne położenie albo względna orientacja, zgodnie ze Spostrzeżeniem 10.

Reasumując, model mobilnego obiektu nieholonomicznego w zadaniu śledzenia ścieżki opisany jest równaniami:

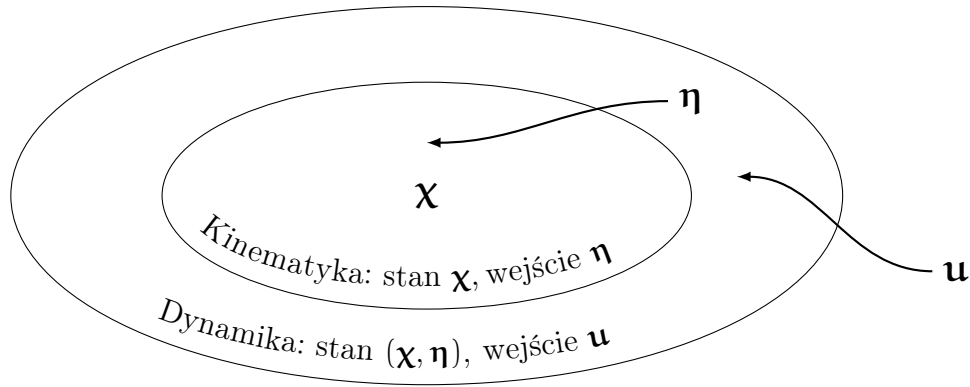
- ograniczeń kinematycznych wynikających z opisu względem ścieżki oraz nieholonomiczności obiektu

$$\dot{\boldsymbol{\chi}} = \mathbf{L}^*\boldsymbol{\eta} + \mathbf{f}, \quad (4.12)$$

- dynamiki robota wyrażonej w prędkościach pomocniczych

$$\mathbf{Q}^*\dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{C}^*\boldsymbol{\eta} + \mathbf{g}^* = \mathbf{B}^*\mathbf{u}. \quad (4.13)$$

Należy podkreślić, że równania poziomu kinematycznego (4.12), jak i poziomu dynamicznego (4.13) są ze sobą sprzężone i tworzą układ kaskadowy. Schemat obrazujący zależności między poziomami kaskady został przedstawiony na rys. 4.2. Łatwo można spostrzec, że struktura obiektu nieholonomicznego jest analogiczna, jak w przypadku obiektu holonomicznego. Ponownie kaskadę tworzą dwa poziomy – kinematyczny oraz dynamiczny, przy czym poziom kinematyczny stanowi strukturę wewnętrzną. Należy jednak podkreślić, że istotna różnica zachodzi na poziomie dynamicznym – elementem stanu są prędkości pomocnicze $\boldsymbol{\eta}$, a nie prędkości obiektu w przestrzeni konfiguracyjnej. Jednakże i w przypadku obiektu nieholonomicznego stan na poziomie dynamicznym jest jednocześnie wejściem



Rysunek 4.2: Struktura kaskadowa obiektu nieholonomicznego w zadaniu śledzenia ścieżki.

(sterowaniem) dla poziomu kinematycznego, o czym świadczy zależność (4.12). Oznacza to, że odpowiednie profile prędkościowe na poziomie dynamicznym mogą zagwarantować osiągnięcie pożądanego stanu χ na poziomie kinematycznym, co prowadzi do poprawnej realizacji zadania śledzenia ścieżki. Jako że prędkości pomocnicze należą do trajektorii systemu, gdyż współtworzą stan na poziomie dynamicznym, to nie można ich dobrać dowolnie. Wpływa na nie jednak bezpośrednio sterowanie u poprzez równanie (4.13). W ten sposób, poprzez odpowiedni dobór sterowania na poziomie dynamicznym można pośrednio kształtować zachowanie układu na poziomie kinematycznym.

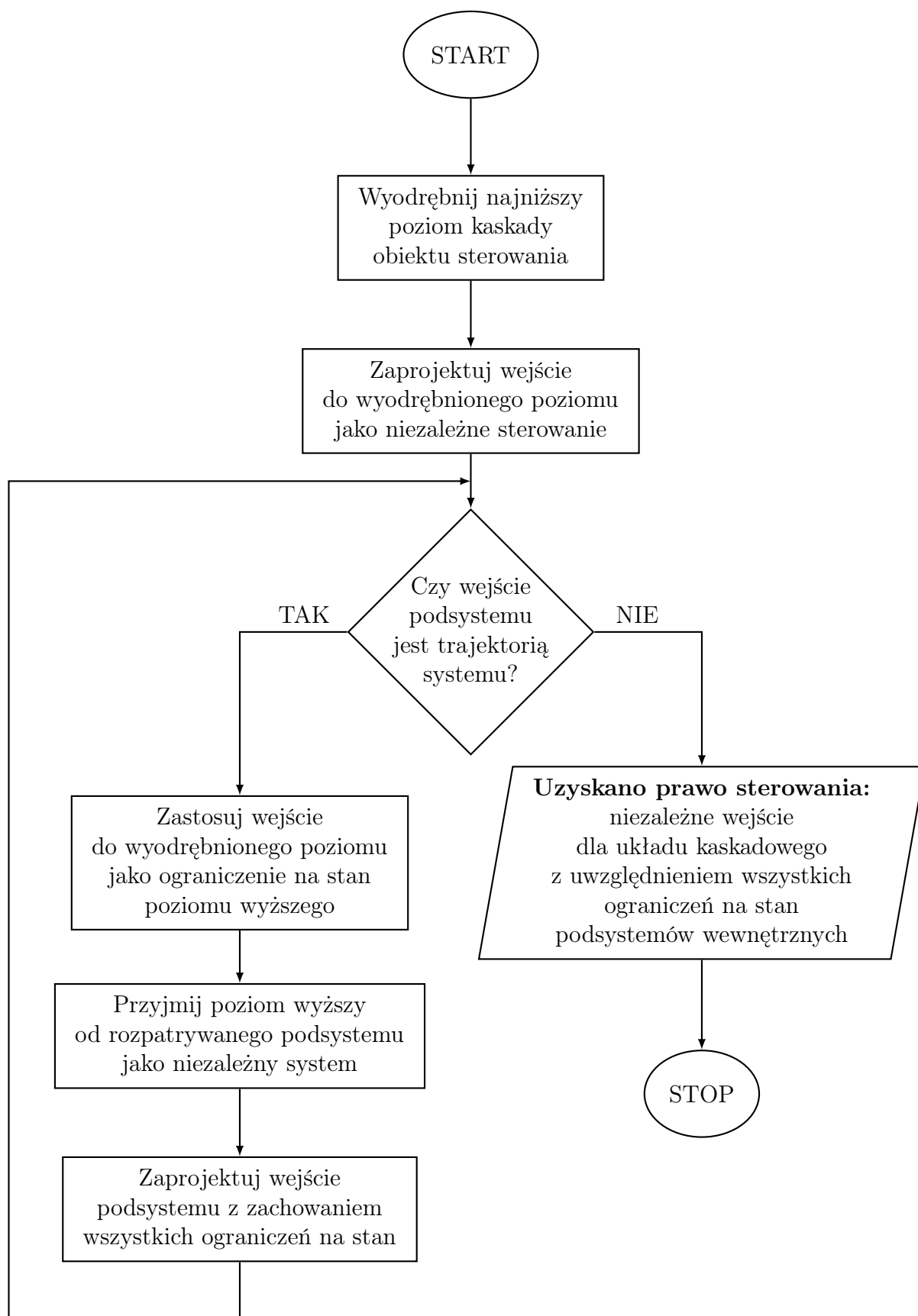
Uzyskana struktura kaskadowa obiektu nieholonomicznego w zadaniu śledzenia ścieżki niesie ze sobą analogiczne konsekwencje, jak kaskada otrzymana dla obiektu holonomicznego w rozdziale 4.2.1. Zagadnienie zostało szczegółowo omówione w rozdziale 4.3.

4.3 Architektura układu sterowania

4.3.1 Algorytm całkowania wstecznego

Zastosowanie parametryzacji krzywoliniowej do realizacji zadania śledzenia ścieżki skutkuje kaskadową strukturą modelu obiektu sterowania. Równania opisujące robota względem ścieżki są powodem powstania takiej struktury – jak w przypadku obiektów holonomicznych – lub dobrze wpisują się w istniejącą strukturę kaskadową obiektów nieholonomicznych. Ogólnym paradygmatem, który pozwala na projektowanie algorytmów sterowania z uwzględnieniem zależności pomiędzy kolejnymi poziomami kaskady, jest algorytm całkowania wstecznego (z ang. *backstepping integrator*) [66, 76].

W kaskadowym układzie sterowania wszystkie podsystemy są ze sobą sprzężone, a sygnały sterujące są zadawane bezpośrednio jedynie na najbardziej zewnętrznym podsystemie kaskady. Ideą algorytmu całkowania wstecznego jest uzyskanie równań ograniczeń na wszystkie trajektorie systemu, które stanowią wejście do niższych poziomów kaskady. Należy zagwarantować, aby postać funkcyjna wejść na wyższych poziomach była zdefiniowana przez trajektorie na poziomach niższych. Schemat metody przedstawiono na rys. 4.3.



Rysunek 4.3: Ogólny schemat algorytmu całkowania wstecznego.

W celu realizacji tego podejścia analizę systemu należy zawsze rozpocząć od najbardziej wewnętrznego poziomu struktury, traktując go jako niezależny od wszystkich pozostałych. Przyjmując takie założenie, można zaprojektować wejście do systemu tak, aby uzyskać żądane właściwości stabilności. Jednakże, w rzeczywistości nie ma bezpośredniego dostępu do zmiennej wejściowej najniższego poziomu kaskady, gdyż stanowi ona trajektorię systemu – jest to zmienna stanu poziomów nadrzędnych. Dlatego też uzyskana forma wejścia jest jedynie warunkiem na stan kolejnego poziomu kaskady.

Z ogólnej budowy systemu kaskadowego wynika, że wejście każdego podsystemu stanowi kolejne ograniczenie na trajektorie całego systemu. Dlatego procedurę projektowania wejść z uwzględnieniem tych ograniczeń powtarza się aż do osiągnięcia ostatniego poziomu kaskady. W ten sposób zdefiniowane sterowania kolejnych poziomów kaskady przenoszą się na wyższe stopnie w postaci ograniczeń. Wynika z tego, że przebiegi wejść każdego wewnętrznego podsystemu nie są dowolne, lecz muszą przebiegać według pewnej postaci funkcyjnej, która jest ściśle zdefiniowana przez wszystkie podsystemy na niższych poziomach kaskady. Projektowanie sterowania staje się coraz bardziej skomplikowane, gdyż liczba ograniczeń zwiększa się z każdym kolejnym stopniem układu. Jednak w efekcie końcowym sterowanie zewnętrzne, które można zadać bezpośrednio na dany obiekt, uwzględnia wszystkie ograniczenia poziomów wewnętrznych, gwarantując zachowanie ich stabilności.

Ta ogólna metodologia całkowania wstecznego pozwala uzyskać prawo sterowania dla całego systemu, które gwarantuje zachowanie stabilności każdego podsystemu kaskady, na podstawie analizy wewnętrznych trajektorii układu. Warto zauważyć, że podejście odwrotne, a więc ustabilizowanie jedynie zewnętrznego poziomu kaskady, nie daje żadnych gwarancji na stabilność poziomów wewnętrznych, które są ze sobą sprzężone.

4.3.2 Układ sterowania w zadaniu śledzenia ścieżki

Jak wskazano w rozdziale 4.2, w analizowanym problemie śledzenia ścieżki model obiektu sterowania można sprowadzić do układu kaskadowego o dwóch poziomach: kinematycznym i dynamicznym. Zgodnie z metodą całkowania wstecznego [66, 76] projektowanie prawa sterowania należy rozpocząć od poziomu kinematycznego, który stanowi najbardziej wewnętrzny poziom struktury kaskadowej. Zaplanowane sterowanie powinno spełniać ograniczenia wynikające z zadanej ścieżki oraz ograniczeń nieholonomicznych, jeśli istnieją. Jak zauważono powyżej, poziom kinematyczny nie jest dostępny bezpośrednio ze względu na dynamikę robota. Należy zatem zadać takie sterowanie na poziomie dynamicznym, które zagwarantuje spełnienie ograniczeń wynikających z poziomu kinematycznego. W rezultacie układ sterowania realizujący zadanie śledzenia ścieżki powinien składać się z dwóch sterowników, które pracują równolegle:

1. Sterownik kinematyczny.

Zadaniem sterownika na najniższym poziomie kaskady układu sterowania jest wygenerowanie profili prędkościowych, które pozwolą na spełnienie ograniczeń kinematycznych. Prędkości referencyjne nie mogą być jednak zadane bezpośrednio, gdyż stanowią one część trajektorii zewnętrznego systemu. Z tego względu, sterownik kinematyczny funkcjonuje w rzeczywistości jako *układ planowania ruchu*, gdyż determinuje geometrycznie zadane trajektorie w przestrzeni stanu rozważanego systemu.

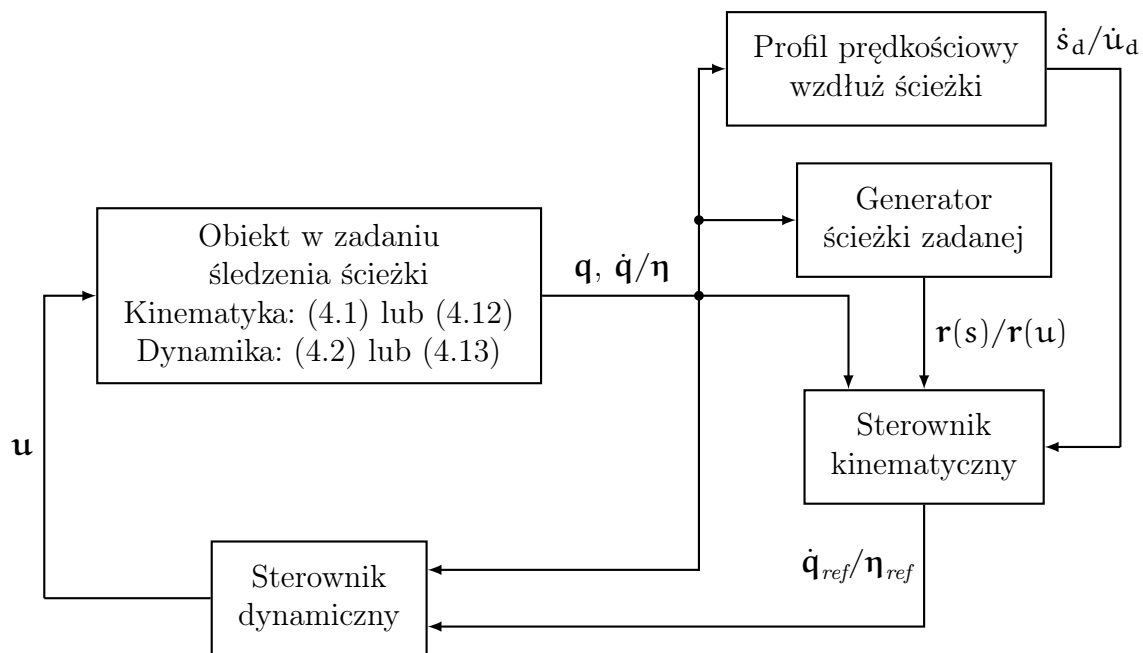
2. Sterownik dynamiczny.

Profile prędkościowe wygenerowane przez sterownik kinematyczny muszą być zrealizowane przez prawo sterowania na drugim poziomie kaskady, a więc poziomie dynamicznym. W tym celu należy zaprojektować odpowiedni sterownik dynamiczny. Jego zadaniem jest generowanie takich momentów sterujących, które pozwolą śledzić zadane trajektorie w przestrzeni stanu układu. Sterownik dynamiczny może być zatem traktowany jako *układ wykonawczy ruchu*.

Spostrzeżenie 12. Należy zauważyć, że w realizacji praktycznej często nie można bezpośrednio zadawać momentów sterujących, lecz konieczne jest odpowiednie sterowanie silnika prądowego, które pozwoli uzyskać żądane momenty. W konsekwencji, układ sterowania należałoby rozszerzyć o kolejny poziom kaskady, a sterowanie prądowe zaprojektować tak, aby spełniało przedstawione wymagania metody całkowania wstecznego [59].

W niniejszej pracy zakłada się, że możliwe jest bezpośrednie zadanie momentów sterujących robotem, czyli że roboty mają bezpośrednie napędy typu *direct drive*. Modelowanie silników i ich sterowanie nie jest przedmiotem prowadzonych rozważań.

Schemat architektury uzyskanego układu sterowania, który pozwala na realizację zadania śledzenia ścieżki, został przedstawiony na rys. 4.4.



Rysunek 4.4: Ogólny schemat układu sterowania w zadaniu śledzenia ścieżki.

Model obiektu w zadaniu śledzenia ścieżki zdefiniowany jest przez równania kinematyki i dynamiki. Są one wyrażone odpowiednio zależnościami (4.1) oraz (4.2) dla obiektu holonomicznego, a także (4.12) oraz (4.13) dla mobilnego obiektu nieholonomicznego. Zakłada się, że do realizacji zadania śledzenia ścieżki dostępne są pomiary stanu robota, a więc pozycje i prędkości w przestrzeni konfiguracyjnej. Prędkości pomocnicze dla obiektu nieholonomicznego można mierzyć bezpośrednio lub uzyskać na podstawie zależności (4.6).

Zadaniem sterownika kinematycznego jest generacja profili prędkościowych, które spełniają wszystkie ograniczenia na poziomie kinematycznym. Stanowią one stan poziomu dynamicznego. Profile prędkościowe są generowane na podstawie:

- zmierzonego stanu robota,
- równania zadanej ścieżki,
- żadanego profilu prędkościowego wzdłuż ścieżki.

Warto zauważyć, że zgodnie ze schematem na rys. 4.4 stan robota może wpływać zarówno na wartość położenia układu lokalnego na ścieżce $\mathbf{r}$, jak i na zadany profil prędkościowy wzdłuż ścieżki. Fakt ten jest wykorzystywany zwłaszcza w przypadku parametryzacji ortogonalnych, kiedy układ lokalny na ścieżce i punkt prowadzenia robota zawsze dzieli najmniejsza możliwa odległość. Wpływ na profil prędkościowy wzdłuż ścieżki, który jest zawsze dobierany arbitralnie zgodnie ze Spostrzeżeniem 11, może okazać się istotny w przypadku wprowadzonych ograniczeń na stan układu lub konieczności modyfikacji profilu prędkościowego w trakcie wykonywania manewru.

Należy również podkreślić, że dla realizacji prawa sterowania unormowanie parametryzacji ścieżki nie ma znaczenia. Wynika stąd, że przedstawiona architektura układu sterowania będzie słuszna zarówno dla parametryzacji unormowanej, jak i parametryzacji nieunormowanej. Zgodnie ze Spostrzeżeniem 1, normalizacja parametryzacji nie wpływa na położenie układu lokalnego na ścieżce. Zmianie może podlegać profil prędkościowy wzdłuż ścieżki ze względu na zależność (2.2). Jednakże, jak wspomniano wcześniej, ten parametr może być modyfikowany dowolnie w zależności od uwarunkowania zadania.

Referencyjne profile prędkościowe wygenerowane przez sterownik kinematyczny nie są zadawane bezpośrednio na obiekt sterowania. Uwzględnia się bowiem sterownik dynamiczny, który jest odpowiedzialny za zrealizowanie zaplanowanego ruchu. Jego zadaniem jest zagwarantowanie, że prędkości obiektu sterowania będą zbiegały do trajektorii zaplanowanych przez sterownik kinematyczny. Oznacza to, że różnica między trajektoriami systemu a referencyjnymi profilami prędkościowymi, rozumiana jako błąd na poziomie dynamicznym, powinna zbiegać do zera. W definicji błędu poziomu dynamicznego uwiidacznia się sprzężenie między poziomami kaskady. Błąd na poziomie dynamicznym nie może być kształtowany w sposób dowolny, lecz zgodnie z postacią funkcyjną wynikającą z prawa sterowania na poziomie kinematycznym. Sterownik dynamiczny generuje momenty sterujące $\mathbf{u}$, które można zadać bezpośrednio na obiekt z zastrzeżeniem wynikającym ze Spostrzeżenia 12. W rezultacie robot powinien realizować zadaną ścieżkę.

Przedstawiona ogólna architektura układu sterowania pozwala na poprawną realizację zadania śledzenia ścieżki. W kolejnych rozdziałach zostały zaproponowane konkretne rozwiązania dla typowych systemów robotycznych. Prawa sterowania zostały zaprojektowane w oparciu o zaprezentowaną metodologię oraz z uwzględnieniem założeń sformułowanych w tym rozdziale.

Rozdział 5

Sterowanie obiektem holonomicznym

Niniejszy rozdział skupia się na projekcie algorytmów sterowania, które pozwalają na realizację zadania śledzenia ścieżki dla obiektów holonomicznych. Podstawą projektu jest przedstawiony w rozdziale 3 model obiektu sterowania opisany względem ścieżki, oparty o formalizm parametryzacji krzywoliniowych. Architektura układu sterowania została stworzona zgodnie z założeniami i wytycznymi przedstawionymi w rozdziale 4. Prawa sterowania przedstawione w tej części mają zastosowanie do wszystkich obiektów holonomicznych. Zaproponowane rozwiązania zweryfikowano symulacyjnie oraz eksperymentalnie, a badania zostały przeprowadzone dla dwóch obiektów holonomicznych. Ich modele zamieszczono w dodatkach A.1 oraz A.2.

5.1 Sterownik kinematyczny

Zgodnie z ideą całkowania wstecznego (*backsteppingu*), projekt algorytmu sterowania dla układu o strukturze kaskadowej należy rozpocząć od najbardziej wewnętrznej poziomu kaskady. W przypadku rozważanego modelu robota względem ścieżki jest to poziom kinematyczny.

Z Twierdzenia 1 wynika, że kinematyka robota względem ścieżki ma postać układu afinicznego, który w szczególnym przypadku parametryzacji ortogonalnej i opisu położenia redukuje się do postaci układu bezdryfowego. Zgodnie z równaniem (4.1) ta postać w pełni opisuje kinematykę obiektu holonomicznego względem ścieżki. Stan robota względem ścieżki jest oznaczony jako $\mathbf{x}$. Może on oznaczać położenie, orientację lub posturę obiektu względem ścieżki – w zależności od liczby stopni swobody robota oraz rozważanego zadania. Wejście do układu stanowią prędkości w przestrzeni konfiguracyjnej $\dot{\mathbf{q}}$, a zatem mają interpretację sterowań na poziomie kinematycznym. Dla tak zdefiniowanego układu zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2. *Niech będzie dany wektor błędów śledzenia ścieżki*

$$\mathbf{e}_x = \mathbf{x} - \mathbf{x}_d, \quad (5.1)$$

gdzie $\mathbf{x}_d$ oznacza żądany stan obiektu względem ścieżki. Wówczas, dla pierwszego poziomu kaskady układu sterowania w zadaniu śledzenia ścieżki danego równaniem (4.1), sterowanie postaci

$$\dot{\mathbf{q}}_{ref} = \mathbf{L}^\# (\dot{\mathbf{x}}_d - \mathbf{K}_x \mathbf{e}_x - \mathbf{f}) \quad (5.2)$$

gwarantuje asymptotyczną zbieżność błędów śledzenia ścieżki $\mathbf{e}_x$ do zera. W równaniu (5.2) macierz $\mathbf{L}^\#$ oznacza macierz odwrotną, gdy macierz $\mathbf{L}$ jest kwadratowa, tzn. $\mathbf{L}^\# = \mathbf{L}^{-1}$, lub macierz pseudoodwrotną, gdy macierz $\mathbf{L}$ jest prostokątna, tzn. $\mathbf{L}^\# = \mathbf{L}^\top (\mathbf{L}\mathbf{L}^\top)^{-1}$, natomiast macierz $\mathbf{K}_k$ jest dodatnio określoną macierzą wzmocnień sterownika.

Dowód. Na potrzebę projektowania algorytmu sterowania należy uznać, że pierwszy stopień kaskady jest niezależny i można wprowadzić bezpośrednio sterowanie w postaci referencyjnych profili prędkościowych (5.2). Wówczas system (4.1) w zamkniętej pętli sprzężenia zwrotnego ze sterowaniem (5.2) dany jest równaniem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\# \left(\dot{\mathbf{x}}_d - \mathbf{K}_k \mathbf{e}_x - \mathbf{f} \right) + \mathbf{f}, \quad (5.3)$$

co po uporządkowaniu sprowadza się do postaci

$$\dot{\mathbf{e}}_x = -\mathbf{K}_k \mathbf{e}_x. \quad (5.4)$$

Niech będzie dana funkcja

$$V_1(\mathbf{e}_x) = \frac{1}{2} \mathbf{e}_x^\top \mathbf{e}_x. \quad (5.5)$$

Funkcja (5.5) spełnia wymogi funkcji Lapunova, gdyż jest dodatnia poza zerem i dokładnie równa zero dla $\mathbf{e}_x = \mathbf{0}$. Pochodna po czasie funkcji Lapunova V_1 jest równa

$$\dot{V}_1(\mathbf{e}_x) = \mathbf{e}_x^\top \dot{\mathbf{e}}_x. \quad (5.6)$$

Uwzględniając równanie systemu w zamkniętej pętli sprzężenia zwrotnego (5.4), wzdłuż trajektorii systemu, zależność (5.6) można równoważnie przekształcić do postaci

$$\dot{V}_1(\mathbf{e}_x) = -\mathbf{e}_x^\top \mathbf{K}_k \mathbf{e}_x. \quad (5.7)$$

Wynika stąd, że pochodna funkcji Lapunova V_1 jest równa formie kwadratowej macierzy $\mathbf{K}_k$ ze znakiem ujemnym. A zatem spełnione są następujące warunki

$$\dot{V}_1(\mathbf{e}_x) < 0, \quad \text{gdy } \mathbf{e}_x \neq \mathbf{0}, \quad (5.8a)$$

$$\dot{V}_1(\mathbf{e}_x) = 0, \quad \text{gdy } \mathbf{e}_x = \mathbf{0}. \quad (5.8b)$$

Na mocy twierdzenia LaSalle'a [13] z zależności (5.8) wynika, że system z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego jest asymptotycznie stabilny. W konsekwencji, błędy śledzenia ścieżki zbiegają asymptotycznie do zerowego punktu równowagi. $\square$

Na podstawie Twierdzenia 2 można wnioskować, że prawo sterowania (5.2) gwarantuje poprawną realizację zadania śledzenia ścieżki na poziomie kinematycznym. Jednakże, w rzeczywistości nie można zadać bezpośrednio wygenerowanych profili prędkościowych ze względu na dynamikę robota. Zgodnie z algorytmem całkowania wstecznego należy uwzględnić ten wynik na poziomie dynamiki, który stanowi kolejny poziom kaskady układu sterowania.

5.2 Sterownik dynamiczny

Zgodnie z architekturą układu sterowania opisaną w rozdziale 4, sterownik dynamiczny odpowiada za zrealizowanie profili prędkościowych $\dot{\mathbf{q}}_{ref}$ wygenerowanych przez sterownik kinematyczny. Ten drugi poziom kaskady układu sterowania można zaprojektować na wiele sposobów. Wybór sterownika dynamicznego zależy od warunków realizacji zadania, a także od stopnia znajomości modelu dynamiki obiektu holonomicznego (4.2). W niniejszym rozdziale rozważono następujące poziomy znajomości modelu dynamiki robota:

- pełna znajomość modelu;
- parametryczna nieznajomość modelu;
- strukturalna nieznajomość modelu;
- całkowita nieznajomość modelu.

Dla każdego przypadku zaproponowano prawo sterowania, które dopełnia układ sterowania i pozwala poprawnie wykonać zadanie śledzenia ścieżki. W przedstawionych dowodach stabilności algorytmów korzystano z własności modelu dynamiki, którą przedstawiono jako Spostrzeżenie 13.

Spostrzeżenie 13. *Z definicji modelu dynamiki obiektu holonomicznego (4.2) wynika, że pochodna macierzy bezwładności $\mathbf{Q}(\mathbf{q})$ wzdłuż trajektorii przegubowych zależy od macierzy sił Coriolisa i sił odśrodkowych $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ zgodnie z zależnością [122]*

$$\dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}) = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{C}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}). \quad (5.9)$$

Należy również podkreślić, że w ogólności sterownik dynamiczny jest sprzężony ze sterownikiem kinematycznym. Zgodnie ze schematem 4.1 sterowanie na niższym poziomie kaskady układu sterowania staje się elementem stanu na poziomie wyższym. Stąd profile prędkościowe $\dot{\mathbf{q}}$, które stanowiły wejście na poziomie kinematycznym, należy traktować jako składową stanu na poziomie dynamicznym. Dlatego też w drugim stopniu kaskady rozważanego systemu należy zdefiniować błędy śledzenia profili prędkościowych zgodnie z zależnością

$$\mathbf{e}_{\dot{\mathbf{q}}} = \dot{\mathbf{e}}_{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_{ref}. \quad (5.10)$$

Warto zauważyć, iż przebieg błędów śledzenia profili prędkościowych (5.10) nie jest dowolny, lecz ściśle zdefiniowany przebiegami funkcyjnymi z niższego poziomu kaskady $\dot{\mathbf{q}}_{ref}$. Widać to wyraźnie, gdy w równaniu (5.10) zostanie uwzględnione prawo sterowania z poziomu kinematycznego (5.2)

$$\mathbf{e}_{\dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{e}_{\mathbf{x}}) = \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{L}^\#(\dot{\mathbf{x}}_d - \mathbf{K}_k \mathbf{e}_{\mathbf{x}} - \mathbf{f}). \quad (5.11)$$

Zgodnie z metodologią całkowania wstecznego błąd na wyższym poziomie zależy od błędu na poziomie niższym. Sterownik dynamiczny musi zatem gwarantować nie tylko zbieżność błędów śledzenia profili prędkościowych do zera, ale również utrzymanie stabilności sygnałów wynikających ze sterownika kinematycznego. W tej części sformułowano twierdzenia, które definiują prawa sterowania na poziomie dynamicznym spełniające ten kluczowy warunek.

5.2.1 Pełna znajomość modelu dynamiki

W pierwszej kolejności rozważono przypadek, gdy model dynamiki robota jest w pełni znany. Należy podkreślić, że rozważany przypadek opiera się na wyidealizowanych założeniach, gdyż w rzeczywistości rzadko wszystkie parametry masowe i inercyjne robota są całkowicie znane. Mogą one również ulegać zmianom w czasie. Niemniej, jeśli proces sterowania jest poprzedzony identyfikacją parametrów, to zaproponowane rozwiązanie pozwoli skutecznie realizować zadanie. Warto także zauważyć, że wszelkie zmiany parametrów masowo-inercyjnych zachodzą w długim horyzoncie czasowym.

Do realizacji zadania śledzenia ścieżki przez obiekt holonomiczny, którego model dynamiki jest w pełni znany, proponuje się prawo sterowania zdefiniowane przez Twierdzenie 3.

Twierdzenie 3. *Jeśli model dynamiki obiektu holonomicznego (4.2) jest w pełni znany, tzn. znana jest struktura modelu oraz wszystkie parametry masowo-inercyjne, to prawo sterowania*

$$\mathbf{u} = \mathbf{Q}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_{ref} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_{ref} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{K}_d \mathbf{e}_{\dot{\mathbf{q}}}, \quad (5.12)$$

gdzie profile prędkościowe $\dot{\mathbf{q}}_{ref}$ wynikają z Twierdzenia 2, a $\mathbf{K}_d$ jest dodatnio określoną macierzą wzmocnień, gwarantuje asymptotyczną zbieżność do zera błędów śledzenia profili prędkościowych $\mathbf{e}_{\dot{\mathbf{q}}}$, a w konsekwencji także błędów śledzenia ścieżki $\mathbf{e}_{\mathbf{x}}$.

Dowód. Niech będzie dana funkcja, która zależy zarówno od stanu kaskady na poziomie kinematycznym, a zatem błędów śledzenia ścieżki $\mathbf{e}_{\mathbf{x}}$, jak i od błędów podążania za wygenerowanymi profilami prędkościowymi $\mathbf{e}_{\dot{\mathbf{q}}}$

$$V_2(\mathbf{e}_{\mathbf{x}}, \mathbf{e}_{\dot{\mathbf{q}}}) = \frac{1}{2} \mathbf{e}_{\mathbf{x}}^T \mathbf{e}_{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} \mathbf{e}_{\dot{\mathbf{q}}}^T \mathbf{Q}(\mathbf{q}) \mathbf{e}_{\dot{\mathbf{q}}} = V_1(\mathbf{e}_{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2} \mathbf{e}_{\dot{\mathbf{q}}}^T \mathbf{Q}(\mathbf{q}) \mathbf{e}_{\dot{\mathbf{q}}}, \quad (5.13)$$

gdzie funkcja $V_1(\mathbf{e}_{\mathbf{x}})$ jest zdefiniowana przez równanie (5.5), natomiast macierz $\mathbf{Q}(\mathbf{q})$ jest macierzą inercji obiektu holonomicznego daną w modelu (4.2). Macierz bezwładności z definicji jest macierzą dodatnio określoną [122], a zatem funkcja $V_2(\mathbf{e}_{\mathbf{x}}, \mathbf{e}_{\dot{\mathbf{q}}})$ spełnia warunki funkcji Lapunova [13], gdyż zachodzi

$$V_2(\mathbf{e}_{\mathbf{x}}, \mathbf{e}_{\dot{\mathbf{q}}}) > 0, \quad \text{gdy } (\mathbf{e}_{\mathbf{x}}^T \quad \mathbf{e}_{\dot{\mathbf{q}}}^T)^T \neq \mathbf{0}, \quad (5.14a)$$

$$V_2(\mathbf{e}_{\mathbf{x}}, \mathbf{e}_{\dot{\mathbf{q}}}) = 0, \quad \text{gdy } (\mathbf{e}_{\mathbf{x}}^T \quad \mathbf{e}_{\dot{\mathbf{q}}}^T)^T = \mathbf{0}. \quad (5.14b)$$

Z kolei pochodna funkcji (5.13) po czasie wynosi

$$\dot{V}_2(\mathbf{e}_{\mathbf{x}}, \mathbf{e}_{\dot{\mathbf{q}}}) = \dot{V}_1(\mathbf{e}_{\mathbf{x}}) + \mathbf{e}_{\dot{\mathbf{q}}}^T \mathbf{Q} \dot{\mathbf{e}}_{\dot{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2} \mathbf{e}_{\dot{\mathbf{q}}}^T \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{e}_{\dot{\mathbf{q}}}. \quad (5.15)$$

Zauważmy, że równanie systemu (4.2) ze sterowaniem (5.12) w zamkniętej pętli sprzężenia zwrotnego sprowadza się do postaci

$$\mathbf{Q} \dot{\mathbf{e}}_{\dot{\mathbf{q}}} + \mathbf{C} \mathbf{e}_{\dot{\mathbf{q}}} + \mathbf{K}_d \mathbf{e}_{\dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{0}. \quad (5.16)$$

Uwzględniając równanie (5.16), a także własność macierzy bezwładności określoną równaniem (5.9), pochodna funkcji V_2 wzdłuż trajektorii układu z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego wynosi

$$\dot{V}_2(\mathbf{e}_{\mathbf{x}}, \mathbf{e}_{\dot{\mathbf{q}}}) = \dot{V}_1(\mathbf{e}_{\mathbf{x}}) - \mathbf{e}_{\dot{\mathbf{q}}}^T \mathbf{K}_d \mathbf{e}_{\dot{\mathbf{q}}} = -\mathbf{e}_{\mathbf{x}}^T \mathbf{K}_k \mathbf{e}_{\mathbf{x}} - \mathbf{e}_{\dot{\mathbf{q}}}^T \mathbf{K}_d \mathbf{e}_{\dot{\mathbf{q}}} \leq 0. \quad (5.17)$$

Zauważmy, że pochodna funkcji Lapunova $V_2(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_{\dot{q}})$ jest sumą pochodnej funkcji Lapunova z poziomu kinematycznego (5.7) oraz formy kwadratowej dodatnio określonej macierzy $\mathbf{K}_d$ ze znakiem ujemnym. Biorąc pod uwagę własności funkcji $\dot{V}_1(\mathbf{e}_x)$, wyrażonych zależnością (5.8), można wnioskować, iż funkcja (5.17) jest mniejsza od zera poza zerowym punktem równowagi oraz równa zero w tymże punkcie.

Zatem na mocy zasady niezmienniczości LaSalle'a [13] z zależności (5.17) wynika, że błędy śledzenia profili prędkościowych $\mathbf{e}_{\dot{q}}$, a także błędy śledzenia ścieżki $\mathbf{e}_x$ asymptotycznie zbiegają do zera dla dodatnio określonej macierzy $\mathbf{K}_d$. Wynika stąd, że system (5.16) jest asymptotycznie stabilny z zerowym punktem równowagi. Na tej podstawie można wnioskować, iż prawo sterowania (5.12) gwarantuje poprawne śledzenie profili prędkościowych (wygenerowanych przez sterownik kinematyczny) w drugim stopniu kaskady układu sterowania, co w konsekwencji prowadzi do poprawnej realizacji stanu zadanego względem żądanej ścieżki. $\square$

Widać zatem wyraźnie, iż prawo sterowania zdefiniowane przez Twierdzenie 3 pozwala na skuteczną realizację zadania śledzenia ścieżki w warunkach pełnej znajomości modelu obiektu sterowania. Warto jednak zwrócić uwagę na sytuacje typowe dla wielu aplikacji robotycznych, gdy znajomość modelu dynamiki jest ograniczona.

5.2.2 Parametryczna nieznajomość modelu dynamiki

Przypadek parametrycznej nieznajomości modelu dynamiki zachodzi wówczas, gdy znana jest pełna struktura modelu (4.2), lecz nie są znane dokładne wartości wszystkich lub niektórych parametrów masowo-inercyjnych. Niech będzie dany wektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^r$, którego elementy stanowią nieznane parametry modelu w liczbie r . Wówczas model dynamiki (4.2) można wyrazić w postaci

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{a})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{a})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}, \mathbf{a}) = \mathbf{u}. \quad (5.18)$$

Na potrzeby projektowania algorytmu sterowania dla przypadku parametrycznej nieznajomości modelu przyjęto następujące założenia:

1. Nieznane parametry masowo-inercyjne są stałe w czasie, $\mathbf{a} = \text{const}$.
2. Dynamika robota zależy liniowo od nieznanymi parametrów.

Pierwsze założenie nie jest trudne do spełnienia. Nawet jeśli parametry masowo-inercyjne ulegają zmianom w czasie, to odbywa się to na znacznie dłuższym horyzoncie czasowym, niż trwa sam proces sterowania obiektem. Istotnym ograniczeniem jest tutaj fakt, że w trakcie wykonywania manewru zmianie nie może ulegać masa ładunku, który jest potencjalnie przenoszony przez robota.

Na mocy drugiego założenia można stwierdzić, że istnieje pewna macierz regresji $\mathbf{Y}(\ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times r}$, która wyraża liniową zależność dynamiki robota od nieznanymi parametrów $\mathbf{a}$. Należy podkreślić, że zależy ona zarówno od argumentów poszczególnych macierzy, jak i wartości, przez które mnożone są elementy dynamiki robota. W pewnych przypadkach wartości te nie muszą być sobie równe, stąd zostały one rozdzielone jako różne argumenty macierzy $\mathbf{Y}$.

Macierz regresji $Y(\ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})$ można uwzględnić wprost w modelu dynamiki (5.18). Wówczas tę zależność przekształca się równoważnie do postaci

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{a})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{a})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}, \mathbf{a}) &= \\ &= \mathbf{Q}_0(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}_0(\mathbf{q}) + \mathbf{Q}_a(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_a(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}_a(\mathbf{q}) = \\ &= \mathbf{Q}_0(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}_0(\mathbf{q}) + \mathbf{Y}(\ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})\mathbf{a} = \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (5.19)$$

gdzie elementy z indeksem 0 odnoszą się do części modelu, która jest w pełni znana, natomiast elementy z indeksem $\mathbf{a}$ oznaczają część modelu obciążoną nieznaną parametryczną. W szczególności, jeśli nie istnieją nieznane parametry masowo-inercyjne, a więc zachodzi $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, to model redukuje się do podstawowego przypadku danego równaniem (4.2) i można stosować prawo sterowania zdefiniowane w Twierdzeniu 3. Z kolei gdy żadne parametry masowo-inercyjne nie są znane, to elementy z indeksem 0 nie istnieją, a zatem zachodzi $\mathbf{Q}_0 \equiv \mathbf{0}$, $\mathbf{C}_0 \equiv \mathbf{0}$ oraz $\mathbf{g}_0 \equiv \mathbf{0}$. Przy projektowaniu algorytmu sterowania uwzględniono sytuację ogólną, w której istnieją wszystkie elementy modelu (5.19). Prawo sterowania zostało zdefiniowane w Twierdzeniu 4. Stanowi ono modyfikację algorytmu adaptacyjnego Slotine'a-Li, który został przedstawiony w pracy [114].

Twierdzenie 4. *Niech będzie dane prawo sterowania*

$$\mathbf{u} = \mathbf{Q}_0(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_{ref} + \mathbf{C}_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_{ref} + \mathbf{g}_0(\mathbf{q}) + \mathbf{Y}_r(\ddot{\mathbf{q}}_{ref}, \dot{\mathbf{q}}_{ref}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})\hat{\mathbf{a}}(t) - \mathbf{K}_d\mathbf{e}_{\dot{\mathbf{q}}}, \quad (5.20)$$

gdzie:

- $\dot{\mathbf{q}}_{ref}$ oznacza wektor profili prędkościowych wygenerowany przez sterownik kinematyczny zdefiniowany przez Twierdzenie 2;
- $\mathbf{K}_d$ jest dodatnio określoną macierzą wzmocnień sterownika;
- $\mathbf{Y}_r(\ddot{\mathbf{q}}_{ref}, \dot{\mathbf{q}}_{ref}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = \mathbf{Y}_r$ jest macierzą regresji opisującą liniową zależność modelu dynamiki robota od nieznanymi parametrów masowo-inercyjnych $\mathbf{a}$. Macierz ta zależy od referencyjnych profili prędkościowych $\dot{\mathbf{q}}_{ref}$;
- $\hat{\mathbf{a}}(t)$ jest oszacowaniem nieznanymi parametrów masowo-inercyjnych obliczanym zgodnie z prawem adaptacji

$$\dot{\hat{\mathbf{a}}}(t) = -\Gamma\mathbf{Y}_r^T(\ddot{\mathbf{q}}_{ref}, \dot{\mathbf{q}}_{ref}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})\mathbf{e}_{\dot{\mathbf{q}}}, \quad (5.21)$$

przy czym Γ jest dodatnio określoną macierzą współczynników estymacji.

Jeśli nieznane parametry masowo-inercyjne $\mathbf{a}$ są stałe w czasie sterowania robotem, a model dynamiki obiektu zależy liniowo od nieznanymi parametrów zgodnie z zależnością (5.19), to prawo sterowania (5.20) wraz z prawem adaptacji (5.21) gwarantują asymptotyczną zbieżność do zera błędów śledzenia profili prędkościowych $\mathbf{e}_{\dot{\mathbf{q}}}$ i błędów śledzenia ścieżki $\mathbf{e}_{\mathbf{x}}$.

Poniżej przedstawiono dowód Twierdzenia 4. Po raz pierwszy został on zaprezentowany przez autora rozprawy w artykule [78].

Dowód. Prawo sterowania (5.20) można zastosować do obiektu opisanego modelem (5.19). Wówczas, równanie systemu z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego jest opisane zależnością

$$\mathbf{Q}_0(\mathbf{q})\dot{\mathbf{e}}_{\dot{\mathbf{q}}} + \mathbf{C}_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{e}_{\dot{\mathbf{q}}} + \mathbf{Y}(\ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})\mathbf{a} - \mathbf{Y}_r(\ddot{\mathbf{q}}_{ref}, \dot{\mathbf{q}}_{ref}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{K}_d\mathbf{e}_{\dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{0}. \quad (5.22)$$

Równanie (5.22) można rozszerzyć do postaci*

$$\mathbf{Q}_0\dot{\mathbf{e}}_{\dot{\mathbf{q}}} + \mathbf{C}_0\mathbf{e}_{\dot{\mathbf{q}}} + \mathbf{Y}\mathbf{a} + \underbrace{\mathbf{Y}_r\mathbf{a} - \mathbf{Y}_r\hat{\mathbf{a}}}_{=0} - \mathbf{Y}_r\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{K}_d\mathbf{e}_{\dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{0}. \quad (5.23)$$

Można zauważyć, że zachodzi

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}\mathbf{a} - \mathbf{Y}_r\mathbf{a} &= \mathbf{Q}_a(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_a(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - (\mathbf{Q}_a(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_{ref} + \mathbf{C}_a(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_{ref}) = \\ &= \mathbf{Q}_a(\mathbf{q})\dot{\mathbf{e}}_{\dot{\mathbf{q}}} + \mathbf{C}_a(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{e}_{\dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{Q}_a\dot{\mathbf{e}}_{\dot{\mathbf{q}}} + \mathbf{C}_a\mathbf{e}_{\dot{\mathbf{q}}}, \end{aligned} \quad (5.24)$$

a ponadto niech będzie dany wektor błędu estymacji nieznanymi parametrów masowo-inercyjnych robota

$$\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{t}) = \hat{\mathbf{a}}(\mathbf{t}) - \mathbf{a}. \quad (5.25)$$

Uwzględnienie równań (5.24) oraz (5.25) pozwala uporządkować zależność (5.23) do postaci

$$\mathbf{Q}_0\dot{\mathbf{e}}_{\dot{\mathbf{q}}} + \mathbf{C}_0\mathbf{e}_{\dot{\mathbf{q}}} + \mathbf{Q}_a\dot{\mathbf{e}}_{\dot{\mathbf{q}}} + \mathbf{C}_a\mathbf{e}_{\dot{\mathbf{q}}} - \mathbf{Y}_r\tilde{\mathbf{a}} + \mathbf{K}_d\mathbf{e}_{\dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{0}. \quad (5.26)$$

W ostatnim równaniu można połączyć macierze dotyczące znanej części modelu ($\mathbf{Q}_0$, $\mathbf{C}_0$) oraz macierze zależne od parametrów $\mathbf{a}$ ($\mathbf{Q}_a$, $\mathbf{C}_a$), uzyskując zależność

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{e}}_{\dot{\mathbf{q}}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{e}_{\dot{\mathbf{q}}} - \mathbf{Y}_r(\ddot{\mathbf{q}}_{ref}, \dot{\mathbf{q}}_{ref}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})\tilde{\mathbf{a}} + \mathbf{K}_d\mathbf{e}_{\dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{0}, \quad (5.27)$$

co stanowi ostateczną postać systemu z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego.

Niech będzie dana funkcja zależna od błędów: śledzenia ścieżki $\mathbf{e}_x$, śledzenia profili prędkościowych $\mathbf{e}_{\dot{\mathbf{q}}}$, estymacji nieznanymi parametrów $\tilde{\mathbf{a}}$

$$V_3(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_{\dot{\mathbf{q}}}, \tilde{\mathbf{a}}) = V_1(\mathbf{e}_x) + \frac{1}{2}\mathbf{e}_{\dot{\mathbf{q}}}^T \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{a})\mathbf{e}_{\dot{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{a}}^T \mathbf{\Gamma}^{-1}\tilde{\mathbf{a}}, \quad (5.28)$$

gdzie funkcja $V_1(\mathbf{e}_x)$ jest zdefiniowana przez równanie (5.5), macierz $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{a})$ wynika z modelu dynamiki (5.18), natomiast macierz $\mathbf{\Gamma}$ – z prawa adaptacji (5.21). Ze względu na własności funkcji $V_1(\mathbf{e}_x)$ oraz rozważanych macierzy, funkcja (5.28) spełnia następujące warunki

$$V_3(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_{\dot{\mathbf{q}}}, \tilde{\mathbf{a}}) > 0, \quad \text{gdy } (\mathbf{e}_x^T \quad \mathbf{e}_{\dot{\mathbf{q}}}^T \quad \tilde{\mathbf{a}}^T)^T \neq \mathbf{0}, \quad (5.29a)$$

$$V_3(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_{\dot{\mathbf{q}}}, \tilde{\mathbf{a}}) = 0, \quad \text{gdy } (\mathbf{e}_x^T \quad \mathbf{e}_{\dot{\mathbf{q}}}^T \quad \tilde{\mathbf{a}}^T)^T = \mathbf{0}. \quad (5.29b)$$

Z warunków (5.29) wynika, że funkcja $V_3(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_{\dot{\mathbf{q}}}, \tilde{\mathbf{a}})$ jest funkcją Lapunova. Następnie obliczono jej pochodną po czasie

$$\dot{V}_3(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_{\dot{\mathbf{q}}}, \tilde{\mathbf{a}}) = \dot{V}_1(\mathbf{e}_x) + \mathbf{e}_{\dot{\mathbf{q}}}^T \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{a})\dot{\mathbf{e}}_{\dot{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2}\mathbf{e}_{\dot{\mathbf{q}}}^T \dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, \mathbf{a})\mathbf{e}_{\dot{\mathbf{q}}} + \tilde{\mathbf{a}}^T \mathbf{\Gamma}^{-1}\dot{\tilde{\mathbf{a}}}. \quad (5.30)$$

*Dla przejrzystości pominięto zapis argumentów poszczególnych macierzy.

Dla stałych nieznanymi parametrów $\mathbf{a} = \text{const}$ zachodzi

$$\dot{\hat{\mathbf{a}}}(\mathbf{t}) = \dot{\hat{\mathbf{a}}}(\mathbf{t}) - \dot{\mathbf{a}} = \dot{\hat{\mathbf{a}}}(\mathbf{t}). \quad (5.31)$$

Uwzględniając zależność (5.31), można do równania (5.30) wstawić bezpośrednio prawo adaptacji (5.21). Dodatkowo, biorąc pod uwagę własność macierzy bezwładności (5.9), a także równanie systemu z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego (5.27), w równaniu (5.30) można uzyskać zależność

$$\dot{V}_3(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_{\dot{q}}) = \dot{V}_1(\mathbf{e}_x) - \mathbf{e}_{\dot{q}}^T \mathbf{K}_d \mathbf{e}_{\dot{q}}. \quad (5.32)$$

Ze względu na własności funkcji $\dot{V}_1(\mathbf{e}_x)$, wyrażonych równaniem (5.8), a także dla dodatnio określonej macierzy $\mathbf{K}_d$ zachodzi następująca zależność

$$\dot{V}_3(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_{\dot{q}}) < 0, \quad \text{gdy } (\mathbf{e}_x^T \quad \mathbf{e}_{\dot{q}}^T)^T \neq \mathbf{0}, \quad (5.33a)$$

$$\dot{V}_3(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_{\dot{q}}) = 0, \quad \text{gdy } (\mathbf{e}_x^T \quad \mathbf{e}_{\dot{q}}^T)^T = \mathbf{0}. \quad (5.33b)$$

Na mocy zasady niezmienniczości LaSalle'a [13], punkt $(\mathbf{e}_x^T \quad \mathbf{e}_{\dot{q}}^T)^T = \mathbf{0}$ jest asymptotycznie stabilnym punktem równowagi dla całego systemu opisanego strukturą kaskadową. Układ z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego jest asymptotycznie stabilny, a błędy śledzenia ścieżki $\mathbf{e}_x$ oraz błędy śledzenia profili prędkościowych $\mathbf{e}_{\dot{q}}$ zbiegają do zera. Gwarantuje to poprawną realizację zadania śledzenia ścieżki pomimo nieznaności wartości parametrów masowo-inercyjnych robota. $\square$

W ten sposób uzyskano sterownik adaptacyjny, który pozwala realizować zadanie śledzenia ścieżki, gdy parametry masowo-inercyjne obiektu holonomicznego nie są znane. Należy jednak podkreślić, że przedstawione narzędzie nie pozwala wnioskować o prawdziwej wartości parametrów $\mathbf{a}$, zgodnie z poniższym Spostrzeżeniem 14.

Spostrzeżenie 14. *Oszacowanie nieznanymi parametrów masowo-inercyjnych $\hat{\mathbf{a}}$, które zostało wykorzystane w dowodzie Twierdzenia 4 i wynikające z prawa adaptacji (5.21), nie musi zbiegać do wartości prawdziwych. Wynika to z faktu, że pochodna funkcji Lapunowa $\dot{V}_3(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_{\dot{q}})$, określona równaniem (5.32), nie zależy wprost od błędu estymacji nieznanymi parametrów $\hat{\mathbf{a}}$. Stąd nie można wnioskować, że wartość błędu estymacji również zbiega do zera. Pomimo tego zaproponowane prawo sterowania pozwala poprawnie śledzić zadaną ścieżkę, o czym świadczy zbieżność pozostałych błędów do zera.*

5.2.3 Strukturalna nieznajomość modelu dynamiki

Strukturalna niepewność modelu dynamiki związana jest z nieznajomością poszczególnych elementów modelu (4.2). Może ona wynikać z nieuwzględnienia części struktury poszczególnych macierzy, błędów w procesie identyfikacji lub wystąpienia dodatkowych zewnętrznych zaburzeń podczas wykonywania ruchu. Zaburzenia zewnętrzne mogą być związane zarówno z występowaniem sił oddziałujących na robota, wpływem otoczenia na tarcie (np. temperatura lub lepkość powietrza) lub niepewności, które wprowadzają procesy pomiarowe. W szczególnym przypadku, strukturalna nieznajomość modelu może również dotyczyć sił tarcia, które zostały pominięte w modelu (4.2). Rozwiązanie zaproponowane w tej części stanowi remedium na wymienione problemy.

Jednym ze sposobów na rozwiązanie problemów z nieznaną strukturą modelu dynamiki są metody pochodzące z rodziny algorytmów ślizgowych [115, 126]. Algorytmy ślizgowe stanowią rozwiązanie odporne na działanie nieznanych, zewnętrznych zakłóceń, nie uwzględnionych w podstawowym modelu dynamiki robota. Mogą być one wykorzystane nie tylko w sytuacji strukturalnej nieznaności modelu dynamiki, ale również w przypadku nieznaności parametrycznej, opisaną w rozdziale 5.2.2.

Algorytmy ślizgowe wymagają jednak pewnej wiedzy *a priori* o modelu oraz warunkach otoczenia robota. Najczęściej żąda się, aby nieznane wartości (zakłócenia, parametry masowo-inercyjne) były ograniczone od góry, a wartość górnego limitu była możliwa do oszacowania. Często można to wykonać, choćby zgrubnie, na podstawie dokumentacji robota lub wiedzy o warunkach otoczenia. Algorytm ślizgowy był wykorzystywany w wielu odsłonach, np. w pracach [1, 5]. W niniejszej rozprawie zostanie zaproponowany jako sterownik dynamiczny w przypadku nieznaności strukturalnej i parametrycznej modelu dynamiki. Tę drugą opcję można traktować jako nieobligatoryjny warunek zasadności stosowania tego rozwiązania.

Założmy zatem, że w dynamice rzeczywistego obiektu holonomicznego występują elementy, których nie uwzględniono na etapie modelowania. Model dynamiki (4.2) można wówczas rozszerzyć do postaci

$$\mathbf{Q}_z(\mathbf{q}, \mathbf{a})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_z(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{a})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}_z(\mathbf{q}, \mathbf{a}) + \boldsymbol{\zeta}(t) = \mathbf{u}, \quad (5.34)$$

gdzie $\boldsymbol{\zeta}(t) \in \mathbb{R}^n$ oznacza wektor zaburzeń wynikających z pominiętych elementów struktury dynamiki lub sił zewnętrznych, natomiast indeks z w opisie wszystkich macierzy świadczy, że są to elementy w pełni znane strukturalnie. Należy zauważyć, że składniki znane strukturalnie mogą (choć nie muszą) zależeć od parametrów $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^r$, których wartości nie są znane. Powtarzając procedurę z rozdziału 5.2.2, której wynik przedstawiono w równaniu (5.19), można przekształcić zależność (5.34) do postaci, w której jawnie podano liniową zależność względem nieznanych parametrów $\mathbf{a}$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_z(\mathbf{q}, \mathbf{a})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_z(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{a})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}_z(\mathbf{q}, \mathbf{a}) + \boldsymbol{\zeta}(t) &= \\ &= \mathbf{Q}_0(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}_0(\mathbf{q}) + \mathbf{Q}_a(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_a(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}_a(\mathbf{q}) + \boldsymbol{\zeta}(t) = \\ &= \mathbf{Q}_0(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}_0(\mathbf{q}) + \mathbf{Y}(\ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})\mathbf{a} + \boldsymbol{\zeta}(t) = \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (5.35)$$

przy czym elementy z indeksem z oznaczają oddziaływania o znanej strukturze, lecz obarczone nieznaną parametryczną; macierze z indeksem 0 oznaczają elementy w pełni znane, zarówno strukturalnie, jak i parametrycznie; macierze z indeksem $\mathbf{a}$ oznaczają elementy zależne od nieznanych parametrów, lecz znane strukturalnie; natomiast $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n \times r}$ jest macierzą regresji opisującą liniową zależność dynamiki obiektu względem nieznanych parametrów. W Twierdzeniu 5 zaproponowano prawo sterowania, które umożliwia obiektowi holonomicznemu opisanemu równaniem (5.35) realizację zadania śledzenia ścieżki.

Twierdzenie 5. *Jeśli istnieją nieznane parametry masowo-inercyjne obiektu holonomicznego, to niech będą znane ich górne ograniczenia w postaci*

$$|\mathbf{a}_i| \leq \mathbf{a}_i^*, \quad (5.36)$$

gdzie $i = 1, 2, \dots, r$, przy czym r oznacza liczbę parametrów.

Ponadto, niech będą znane górne ograniczenia zaburzeń wynikających z nieznanymi elementami struktury dynamiki obiektu lub zakłóceń zewnętrznych w postaci

$$|\zeta_i| \leq \zeta_i^*, \quad (5.37)$$

gdzie $i = 1, 2, \dots, n$, przy czym n oznacza liczbę stopni swobody robota.

Wówczas dla obiektu holonomicznego obciążonego strukturalną lub parametryczną nieznajomością modelu dynamiki proponuje się następujące prawo sterowania

$$\mathbf{u} = \mathbf{Q}_0(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{C}_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{g}_0(\mathbf{q}) + \mathbf{Y}_\rho(\ddot{\mathbf{p}}, \dot{\mathbf{p}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{K}_d\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{K}\text{sgn}(\boldsymbol{\sigma}), \quad (5.38)$$

gdzie:

- $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^n$ oznacza zmienną ślizgową zdefiniowaną zgodnie z zależnością

$$\boldsymbol{\sigma} = \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{e}}_q + \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{e}_q, \quad (5.39)$$

przy czym $\boldsymbol{\Lambda}$ jest dodatnio określoną macierzą wzmocnień, natomiast $\mathbf{e}_q = \mathbf{q} - \mathbf{q}_{ref}$, co wynika z zależności (5.10);

- $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ definiuje pewien sygnał referencyjny dla algorytmu ślizgowego zależny od profili prędkościowych wygenerowanych przez sterownik kinematyczny zgodnie z równaniem

$$\dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{q}}_{ref} - \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{e}_q; \quad (5.40)$$

- $\mathbf{Y}_\rho(\ddot{\mathbf{p}}, \dot{\mathbf{p}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = \mathbf{Y}_\rho \in \mathbb{R}^{n \times r}$ jest macierzą regresji opisującą liniową zależność dynamiki od nieznanymi parametrów $\mathbf{a}$ i zależną od sygnału referencyjnego $\mathbf{p}$;
- $\hat{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}^r$, $\hat{\mathbf{a}} \in [\mathbf{a}_{min}, \mathbf{a}_{max}]$, jest stałym w czasie i ograniczonym oszacowaniem nieznanymi parametrów masowo-inercyjnych $\mathbf{a}$ i wynika z apriorycznej wiedzy i modelu;
- $\mathbf{K}_d$ jest dodatnio określoną macierzą wzmocnień sterownika;
- $\mathbf{K} = \text{diag}_{n \times n}\{\mathbf{k}_i\}$, $\mathbf{k}_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, jest dodatnio określoną macierzą diagonalną, której elementy kompensują nieznajomość strukturalną modelu dynamiki.

Jeśli spełnione są warunki (5.36) oraz (5.37), a także wszystkie trajektorie systemu (5.35) pozostają ograniczone, to system (5.35) w pętli sprzężenia zwrotnego ze sterowaniem (5.38) jest asymptotycznie stabilny i ma zerowy punkt równowagi. W konsekwencji, błędy śledzenia profili prędkościowych $\dot{\mathbf{e}}_q$ oraz błędy śledzenia ścieżki $\mathbf{e}_x$ zbiegają asymptotycznie do zera.

Dowód. Rozważmy układ (5.35) w pętli sprzężenia zwrotnego ze sterowaniem (5.38). Taki system opisany jest zależnością

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_0(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}_0(\mathbf{q}) + \mathbf{Y}(\ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})\mathbf{a} + \boldsymbol{\zeta}(t) = \\ = \mathbf{Q}_0(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{C}_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{g}_0(\mathbf{q}) + \mathbf{Y}_\rho(\ddot{\mathbf{p}}, \dot{\mathbf{p}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{K}_d\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{K}\text{sgn}(\boldsymbol{\sigma}), \end{aligned} \quad (5.41)$$

co można przekształcić równoważnie do postaci[†]

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_0 \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{C}_0 \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{Y} \mathbf{a} + \boldsymbol{\zeta} - \mathbf{Y}_\rho \hat{\mathbf{a}} + \mathbf{K}_d \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{K} \operatorname{sgn}(\boldsymbol{\sigma}) &= \\ &= \mathbf{Q}_0 \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{C}_0 \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{Y} \mathbf{a} + \underbrace{\mathbf{Y}_\rho \mathbf{a} - \mathbf{Y}_\rho \mathbf{a}}_{=0} + \boldsymbol{\zeta} - \mathbf{Y}_\rho \hat{\mathbf{a}} + \mathbf{K}_d \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{K} \operatorname{sgn}(\boldsymbol{\sigma}) = \\ &= \mathbf{Q}_z \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{C}_z \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\zeta} - \mathbf{Y}_\rho \tilde{\mathbf{a}} + \mathbf{K}_d \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{K} \operatorname{sgn}(\boldsymbol{\sigma}) = 0, \end{aligned} \quad (5.42)$$

gdzie $\tilde{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a} = \text{const}$ jest stałym błędem oszacowania nieznanych parametrów masowo-inercyjnych.

Oznaczmy zaburzenia związane z nieznaną strukturą macierzy inercji przez $\boldsymbol{\zeta}_Q(t)$, zaburzenia dotyczące nieznanej struktury macierzy sił odśrodkowych i sił Coriolisa jako $\boldsymbol{\zeta}_C(t)$, a także pozostałe zaburzenia wynikające z nieznanej lub pominiętej struktury dynamiki manipulatora jako $\boldsymbol{\zeta}_R(t)$. Wówczas zachodzi

$$\boldsymbol{\zeta}(t) = \boldsymbol{\zeta}_Q(t) + \boldsymbol{\zeta}_C(t) + \boldsymbol{\zeta}_R(t), \quad (5.43)$$

a także prawdziwe są następujące zależności

$$\mathbf{Q}_z(\mathbf{q}, \mathbf{a}) \ddot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\zeta}_Q(t) = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{a}) \ddot{\mathbf{q}}, \quad (5.44a)$$

$$\mathbf{C}_z(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{a}) \dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\zeta}_C(t) = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{a}) \dot{\mathbf{q}}, \quad (5.44b)$$

Zauważmy również, że zgodnie z przyjętą nomenklaturą zaburzenia wynikające z nieznanej struktury macierzy inercji oraz macierzy sił odśrodkowych i sił Coriolisa wzdłuż trajektorii zadanych przyjmują postać

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{a}) \ddot{\mathbf{p}} = \mathbf{Q}_z(\mathbf{q}, \mathbf{a}) \ddot{\mathbf{p}} + \boldsymbol{\zeta}_{Q_p}(t), \quad (5.45a)$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{a}) \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{C}_z(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{a}) \dot{\mathbf{p}} + \boldsymbol{\zeta}_{C_p}(t), \quad (5.45b)$$

Uwzględniając powyższe definicje, równanie (5.42) można przekształcić do postaci

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_z \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{C}_z \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\zeta}_Q + \boldsymbol{\zeta}_C + \boldsymbol{\zeta}_R + \underbrace{\boldsymbol{\zeta}_{Q_p} - \boldsymbol{\zeta}_{Q_p}}_{=0} + \underbrace{\boldsymbol{\zeta}_{C_p} - \boldsymbol{\zeta}_{C_p}}_{=0} - \mathbf{Y}_\rho \tilde{\mathbf{a}} + \mathbf{K}_d \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{K} \operatorname{sgn}(\boldsymbol{\sigma}) &= \\ &= \mathbf{Q} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{C} \boldsymbol{\sigma} + \underbrace{\boldsymbol{\zeta}_R + \boldsymbol{\zeta}_{Q_p} + \boldsymbol{\zeta}_{C_p}}_{=\boldsymbol{\zeta}_N} - \mathbf{Y}_\rho \tilde{\mathbf{a}} + \mathbf{K}_d \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{K} \operatorname{sgn}(\boldsymbol{\sigma}) = \\ &= \mathbf{Q} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{C} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\zeta}_N - \mathbf{Y}_\rho \tilde{\mathbf{a}} + \mathbf{K}_d \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{K} \operatorname{sgn}(\boldsymbol{\sigma}) = 0, \end{aligned} \quad (5.46)$$

gdzie $\boldsymbol{\zeta}_N = \boldsymbol{\zeta}_R + \boldsymbol{\zeta}_{Q_p} + \boldsymbol{\zeta}_{C_p}$. Na podstawie równania (5.46) można wnioskować, że zachodzi

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{a}) \dot{\boldsymbol{\sigma}} = -\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{a}) \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\zeta}_N(t) + \mathbf{Y}_\rho(\ddot{\mathbf{p}}, \dot{\mathbf{p}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) \tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{K}_d \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{K} \operatorname{sgn}(\boldsymbol{\sigma}). \quad (5.47)$$

Niech będzie dana następująca funkcja

$$\mathbf{V}_4(\mathbf{e}_x, \dot{\mathbf{e}}_q, \boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{V}_1(\mathbf{e}_x) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{a}) \boldsymbol{\sigma}, \quad (5.48)$$

gdzie funkcja $\mathbf{V}_1(\mathbf{e}_x)$ została zdefiniowana przez równanie (5.5), natomiast macierz $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{a})$ jest rzeczywistą macierzą bezwładności obiektu holonomicznego, a zatem jest macierzą symetryczną i dodatnio określoną. Ze względu na własności funkcji $\mathbf{V}_1(\mathbf{e}_x)$, a także własności macierzy inercji, funkcja (5.48) spełnia następujące warunki

[†]Argumenty poszczególnych macierzy zostały pominięte dla przejrzystości zapisu.

$$V_4(\mathbf{e}_x, \dot{\mathbf{e}}_q, \boldsymbol{\sigma}) > 0, \quad \text{gdy } (\mathbf{e}_x^T \quad \mathbf{e}_q^T \quad \boldsymbol{\sigma}^T)^T \neq \mathbf{0}, \quad (5.49a)$$

$$V_4(\mathbf{e}_x, \dot{\mathbf{e}}_q, \boldsymbol{\sigma}) = 0, \quad \text{gdy } (\mathbf{e}_x^T \quad \mathbf{e}_q^T \quad \boldsymbol{\sigma}^T)^T = \mathbf{0}. \quad (5.49b)$$

Na podstawie (5.49) można wnioskować, że funkcja (5.48) jest dobrze określoną funkcją Lapunova dla systemu (5.47). Następnie wyznaczmy pochodną funkcji (5.48) po czasie

$$\dot{V}_4(\mathbf{e}_x, \dot{\mathbf{e}}_q, \boldsymbol{\sigma}) = \dot{V}_1(\mathbf{e}_x) + \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{a}) \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, \mathbf{a}) \boldsymbol{\sigma}. \quad (5.50)$$

W równaniu (5.50) należy uwzględnić własność macierzy inercji (5.9) oraz równanie systemu z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego (5.47). Wówczas uzyskamy pochodną funkcji V_4 wzdłuż trajektorii układu jako

$$\begin{aligned} \dot{V}_4(\mathbf{e}_x, \dot{\mathbf{e}}_q, \boldsymbol{\sigma}, t) &= \dot{V}_1(\mathbf{e}_x) - \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{K}_d \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^T \left(\mathbf{K} \operatorname{sgn}(\boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\zeta}_N - \mathbf{Y}_\rho(\ddot{\mathbf{p}}, \dot{\mathbf{p}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) \tilde{\mathbf{a}} \right) = \\ &= \dot{V}_1(\mathbf{e}_x) - \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{K}_d \boldsymbol{\sigma} - \sum_{i=1}^n |\sigma_i| \left(k_i + \zeta_{N_i} \operatorname{sgn}(\sigma_i) - \sum_{j=1}^r Y_{\rho_{ij}} \tilde{a}_j \operatorname{sgn}(\sigma_i) \right). \end{aligned} \quad (5.51)$$

Należy podkreślić, że w definicji pochodnej funkcji Lapunova (5.51) zaznaczono wprost jej zależność od czasu t . Wynika to z faktu, że wartość pochodnej $\dot{V}_4$ może zależeć od czasu ze względu na potencjalnie zmienne w czasie zaburzenia systemu $\boldsymbol{\zeta}_N(t)$ i ich górne ograniczenia. Dodatkowo, możliwe jest uwzględnienie ograniczeń na trajektorie zadane, które również będą zmienne w czasie podczas sterowania.

Wartość współczynników macierzy wzmocnień $\mathbf{K}$ można dobrać dowolnie. Niech zatem poszczególne elementy macierzy $\mathbf{K}$ będą równe

$$k_i = \sum_{j=1}^r Z_{ij} \alpha_j + \zeta_{N_i}^* + \delta_i, \quad (5.52)$$

gdzie $Z_{ij} \geq |Y_{\rho_{ij}}|$ wyraża ograniczenia modelu wzdłuż trajektorii zadanych, $\alpha_j = |\hat{a}_j| + a_j^* \geq |\tilde{a}_j|$ jest oszacowaniem maksymalnego błędu estymacji nieznanymi parametrów dynamicznych, $\zeta_{N_i}^* \geq |\zeta_{N_i}|$ jest górnym ograniczeniem zaburzeń wynikających z nieznannej struktury modelu, a δ_i jest pewną liczbą dodatnią. Należy podkreślić, że istnieje górne ograniczenie ζ_N^* dla wektora zaburzeń $\boldsymbol{\zeta}_N$ wynikającego z równania (5.46). Można o tym wnioskować z faktu, że trajektorie zadane są ograniczone, a także znane są górne ograniczenia zaburzeń $\boldsymbol{\zeta}$. Bez straty ogólności można zatem zauważyć, iż dla każdego stopnia swobody zachodzi

$$|\zeta_i| = |\zeta_{Q_i} + \zeta_{C_i} + \zeta_{R_i}| \leq |\zeta_{Q_i}| + |\zeta_{C_i}| + |\zeta_{R_i}| \leq \zeta_i^*,$$

co prowadzi do wniosku, że

$$|\zeta_{R_i}| \leq \zeta_i^* - |\zeta_{Q_i}| - |\zeta_{C_i}|.$$

Skoro ograniczenia systemu wzdłuż trajektorii zadanych są znane, można w konsekwencji przyjąć, że górne ograniczenia $\zeta_{N_i}^*$ należy szacować tak, aby spełniały zależność

$$|\zeta_{N_i}| = |\zeta_{Q_{\rho_i}} + \zeta_{C_{\rho_i}} + \zeta_{R_i}| \leq |\zeta_{Q_{\rho_i}}| + |\zeta_{C_{\rho_i}}| + \zeta_i^* - |\zeta_{Q_i}| - |\zeta_{C_i}| \leq \zeta_{N_i}^*. \quad (5.53)$$

Ponadto, należy zauważyć, że dla $i = 1, \dots, n$ zachodzą zależności

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^r Z_{ij} \alpha_j - \sum_{j=1}^r Y_{\rho_{ij}} \tilde{a}_j \operatorname{sgn}(\sigma_i) &\geq 0, \\ \zeta_{N_i}^* + \zeta_{N_i} \operatorname{sgn}(\sigma_i) &\geq 0, \end{aligned}$$

a zatem prawdą jest również, że

$$k_i + \zeta_{N_i} \operatorname{sgn}(\sigma_i) - \sum_{j=0}^r Y_{\rho_{ij}} \tilde{a}_j \operatorname{sgn}(\sigma_i) \geq \delta_i. \quad (5.54)$$

Na podstawie równania (5.54) można wnioskować, że dla współczynników k_i zdefiniowanych zgodnie z równaniem (5.52) zachodzi

$$\dot{V}_4(\mathbf{e}_x, \dot{\mathbf{e}}_q, \boldsymbol{\sigma}, t) \leq \dot{V}_1(\mathbf{e}_x) - \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{K}_d \boldsymbol{\sigma} - \sum_{i=1}^n |\sigma_i| \delta_i. \quad (5.55)$$

Ze względu na własności funkcji $\dot{V}_1(\mathbf{e}_x)$ dane równaniem (5.8) oraz własności macierzy wzmocnienia $\mathbf{K}_d$ i faktu, że współczynniki δ_i są dodatnie, z równania (5.55) wynikają następujące własności

$$\dot{V}_4(\mathbf{e}_x, \dot{\mathbf{e}}_q, \boldsymbol{\sigma}, t) < 0, \quad \text{gdy } (\mathbf{e}_x^T \quad \dot{\mathbf{e}}_q^T \quad \boldsymbol{\sigma}^T)^T \neq \mathbf{0}, \quad (5.56a)$$

$$\dot{V}_4(\mathbf{e}_x, \dot{\mathbf{e}}_q, \boldsymbol{\sigma}, t) = 0, \quad \text{gdy } (\mathbf{e}_x^T \quad \dot{\mathbf{e}}_q^T \quad \boldsymbol{\sigma}^T)^T = \mathbf{0}. \quad (5.56b)$$

Na mocy twierdzenia LaSalle'a–Yoshizawy [13], które pozwala wnioskować o stabilności systemu, gdy pochodna funkcji Lapunova jest zależna od czasu, z zależności (5.56) wynika, że system (5.47) jest asymptotycznie stabilny z zerowym punktem równowagi. Wynika stąd, że zaproponowane prawo sterowania sprowadza układ do powierzchni ślizgu. Oznacza to, że zachodzi

$$\dot{\mathbf{e}}_q = -\boldsymbol{\Lambda} \mathbf{e}_q. \quad (5.57)$$

Z równania (5.57) wynika, że dla dodatnio określonej macierzy $\boldsymbol{\Lambda}$ błędy śledzenia profili prędkościowych $\dot{\mathbf{e}}_q$ zbiegają asymptotycznie do zera. Na mocy równań (5.39) oraz (5.40) zachodzi zatem $\dot{\mathbf{q}} \rightarrow \dot{\mathbf{p}} \rightarrow \dot{\mathbf{q}}_{ref}$ przy $t \rightarrow \infty$. Oznacza to, że prędkości przegubowe $\dot{\mathbf{q}}$ dążą asymptotycznie do profili prędkościowych $\dot{\mathbf{q}}_{ref}$ wygenerowanych przez sterownik kinematyczny. W konsekwencji, również błędy śledzenia ścieżki $\mathbf{e}_x$ zbiegają do zera. $\square$

Algorytm ślizgowy zaproponowany w Twierdzeniu 5 gwarantuje zatem poprawną realizację zadanej ścieżki w przypadku nieznajomości strukturalnej i parametrycznej modelu dynamiki. Otrzymany algorytm należy zatem do klasy algorytmów odpornych na zewnętrzne zakłócenia, nieznajomość struktury modelu dynamiki oraz nieznajomość wartości parametrów masowo-inercyjnych obiektu.

Należy podkreślić, że algorytm można również stosować w sytuacji, gdy wszystkie parametry masowo-inercyjne robota są znane. Wówczas wektor nieznanymi parametrów redukuje się do wektora zerowego. Podstawową zaletą przedstawionego algorytmu jest fakt, że można go stosować w warunkach strukturalnej nieznajomości modelu dynamiki obiektu.

Spostrzeżenie 15. *Należy zauważyć, że elementem odpowiedzialnym za kompensację strukturalnej nieznajomości modelu dynamiki robota w prawie sterowania (5.38) jest wyraz $\mathbf{K} \cdot \text{sgn}(\boldsymbol{\sigma})$. Składnik ten może być źródłem nieciągłych zmian wartości generowanych sterowań. Ponadto, współczynniki macierzy diagonalnej $\mathbf{K}$ są definiowane przez zależność (5.52). Z tej definicji wynika, że im większa jest niepewność dotycząca struktury modelu, tym większe nastawy należy dobrać. W rezultacie wartości generowanych sterowań mogą przekraczać fizyczne możliwości napędów lub częstotliwość zmiany wartości sterowań może być fizycznie niemożliwa do zrealizowania. Z tego względu należy dodatkowo rozważyć metody ograniczające wzmocnienia sterowników [56] lub zadbać o jak najbardziej dokładne modelowanie dynamiki robota.*

Dodatkowo, warto podkreślić, że nieciągłą zmianę funkcji signum w praktyce można przybliżać za pomocą funkcji sigmoidalnych z odpowiednim parametrem skali, np. $\text{sgn}(\boldsymbol{\sigma}) \approx \tanh(10^4 \boldsymbol{\sigma})$ lub $\text{sgn}(\boldsymbol{\sigma}) \approx \arctg(10^4 \boldsymbol{\sigma})$.

5.2.4 Brak znajomości modelu dynamiki

Gdy model dynamiki obiektu jest nieznan, można zastosować na poziomie dynamicznym algorytmy ogólnego przeznaczenia. Choć gwarantują one znacznie mniejszą dokładność śledzenia wartości zadanych – w przypadku zadania śledzenia ścieżki są to profile prędkościowe generowane na poziomie kinematycznym – to można je z powodzeniem stosować w warunkach ograniczonej wiedzy o dynamice robota. Ponadto, są istotnie prostsze w realizacji praktycznej. W niniejszej pracy rozważono dwa algorytmy, znane z literatury:

1. Algorytm Qu–Dorsey.
2. Algorytm λ -śledzenia.

Algorytm Qu–Dorsey. Pierwszym przykładem jest algorytm Qu–Dorsey, który został zaproponowany w pracy [103]. Prawo sterowania dane jest równaniem

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}_d \dot{\mathbf{e}}_q - \mathbf{K}_p \mathbf{e}_q, \quad (5.58)$$

gdzie $\mathbf{e}_q = \mathbf{q} - \mathbf{q}_{ref}$ zgodnie z równaniem (5.10), natomiast $\mathbf{K}_d$ i $\mathbf{K}_p$ są dodatnio określonymi macierzami wzmocnień. Algorytm ten daje gwarancję, że sygnały błędów są ograniczone, a dla nieskończonych wzmocnień zbiegają asymptotycznie do zerowego punktu równowagi. Dowód tych własności został przedstawiony w pracy [103].

Za pomocą tego algorytmu można realizować profile prędkościowe zadane przez sterownik kinematyczny. Oczywiście, dokładność śledzenia wygenerowanych profili prędkościowych będzie ograniczona zgodnie z własnościami algorytmu Qu–Dorsey. Dla odpowiednio dużych nastaw można uzyskać jednak satysfakcjonującą precyzję ruchu. Warto jednak podkreślić, że wzmocnienia w prawie sterowania (5.58) nie mogą być zbyt duże ze względu na fizyczne ograniczenia silników. Stąd, w praktycznej realizacji algorytmu należy znaleźć kompromis pomiędzy precyzją ruchu robota a możliwościami napędów, w które jest wyposażony obiekt sterowania.

Algorytm λ -śledzenia. Inny algorytm, z rodziny algorytmów uniwersalnych, został zaproponowany w pracy [82]. Jego struktura jest bardzo podobna do algorytmu Qu–Dorsey’a (5.58), jednakże wartości nastaw sterownika są dobierane adaptacyjnie. Prawo sterowania w tym przypadku dane jest równaniem

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}(\mathbf{t})\mathbf{E}(\mathbf{t}), \quad (5.59)$$

gdzie $\mathbf{E}(\mathbf{t}) = \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{e}}_q(\mathbf{t}) + \mathbf{K}_p \mathbf{e}_q(\mathbf{t})$ jest sygnałem odpowiednio wzmocnionych błędów, przy czym na mocy (5.10) zachodzi $\mathbf{e}_q = \mathbf{q} - \mathbf{q}_{ref}$, ponadto $\mathbf{K}_d = \text{diag}_{n \times n}\{\mathbf{K}_{d_i}\}$ oraz $\mathbf{K}_p = \text{diag}_{n \times n}\{\mathbf{K}_{p_i}\}$, $i = 1, \dots, n$, są dodatnio określonymi macierzami wzmocnień, natomiast współczynnik $\mathbf{K}$ jest wzmocnieniem adaptacyjnym zdefiniowanym jako

$$\dot{\mathbf{K}}(\mathbf{t}) = \begin{cases} (\|\mathbf{E}(\mathbf{t})\| - \lambda) \cdot \|\mathbf{E}(\mathbf{t})\|, & \|\mathbf{E}(\mathbf{t})\| > \lambda, \\ 0, & \|\mathbf{E}(\mathbf{t})\| \leq \lambda, \end{cases} \quad (5.60)$$

przy czym $\lambda > 0$ jest arbitralnie dobranym promieniem tzw. martwej strefy. Warto podkreślić, że zgodnie z definicją (5.60) pochodna wzmocnienia adaptacyjnego jest zawsze nieujemna. Oznacza to, że zaproponowane prawo sterowania pozwala jedynie na zwiększanie nastaw sterownika, jeśli błąd śledzenia pozostaje większy niż przyjęta tolerancja wyrażona parametrem λ . Jeśli norma euklidesowa sygnału błędów jest mniejsza niż wartość parametru λ , to wzmocnienia nie zwiększają się, lecz pozostają na stałym poziomie.

W pracy [82] zostały przedstawione własności algorytmu wraz z dowodami. Wśród najważniejszych zalet tego prawa sterowania należy wymienić:

- granica $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{K}(\mathbf{t})$ istnieje i jest skończona;
- sygnał $\mathbf{E}(\mathbf{t})$ zbiega eksponencjalnie do martwej strefy wyznaczonej przez promień λ ;
- błąd śledzenia pozycji przegubowych $\mathbf{e}_q$ jest ograniczony i dla i -tego przegubu zbiega eksponencjalnie do kuli o promieniu $\lambda/\mathbf{K}_{p_i}$;
- błąd śledzenia prędkości przegubowych $\dot{\mathbf{e}}_q$ jest ograniczony i dla i -tego przegubu zbiega eksponencjalnie do kuli o promieniu $2\lambda/\mathbf{K}_{d_i}$.

Z powyższych własności wynika, że błędy śledzenia pozycji i prędkości przegubowych są ograniczone. Dużą zaletą tego rozwiązania względem algorytmu Qu–Dorsey’a danego równaniem (5.58) jest fakt, że poziom ograniczenia błędów śledzenia jest definiowany jawnie za pomocą parametrów sterownika. Na podstawie elementów macierzy wzmocnień oraz promienia martwej strefy λ można określić dopuszczalną tolerancję dla dokładności śledzenia zadanych prędkości i pozycji przegubowych.

Własności algorytmu λ -śledzenia wskazują, że może być on z powodzeniem stosowany na drugim poziomie kaskady układu sterowania w zadaniu śledzenia ścieżki. To prawo sterowania pozwala bowiem realizować profile prędkościowe wygenerowane przez sterownik kinematyczny zadaną dokładnością, ustaloną przez użytkownika i dobraną do fizycznych możliwości wykorzystanych napędów. W rezultacie, zadanie śledzenia ścieżki jest realizowane poprawnie w sytuacji, gdy model dynamiki obiektu nie jest znany.

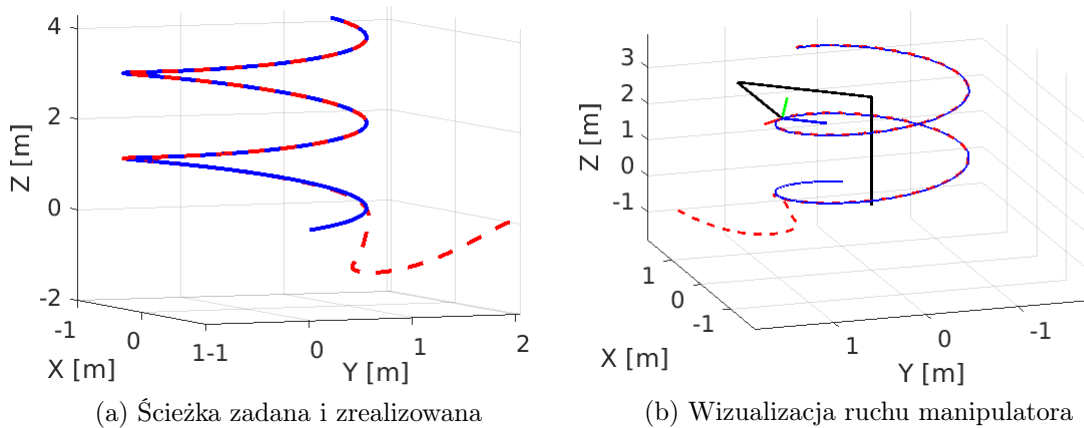
5.3 Badania symulacyjne

Przedstawione powyżej prawa sterowania zostały zweryfikowane za pomocą badań symulacyjnych w środowisku *Matlab* oraz *Simulink*. W tym celu rozważono manipulator RTR, którego model przedstawiono w dodatku A.1. Stanowi on przykład obiektu holonomicznego, dla którego można zastosować ogólne prawa sterowania zaproponowane w niniejszym rozdziale. Ze względu na ograniczoną liczbę stopni swobody rozważono sterowanie położeniem punktu prowadzenia robota względem ścieżki. Ponadto, wykorzystano różne metody parametryzacji robota względem ścieżki. Aby podkreślić niezależność proponowanych rozwiązań od zadanej krzywej, rozważono także różne postaci ścieżek zadanych. W kolejnych podrozdziałach zweryfikowano metody dla wybranych stopni znajomości modelu dynamiki manipulatora.

5.3.1 Algorytm oparty o pełną znajomość modelu dynamiki

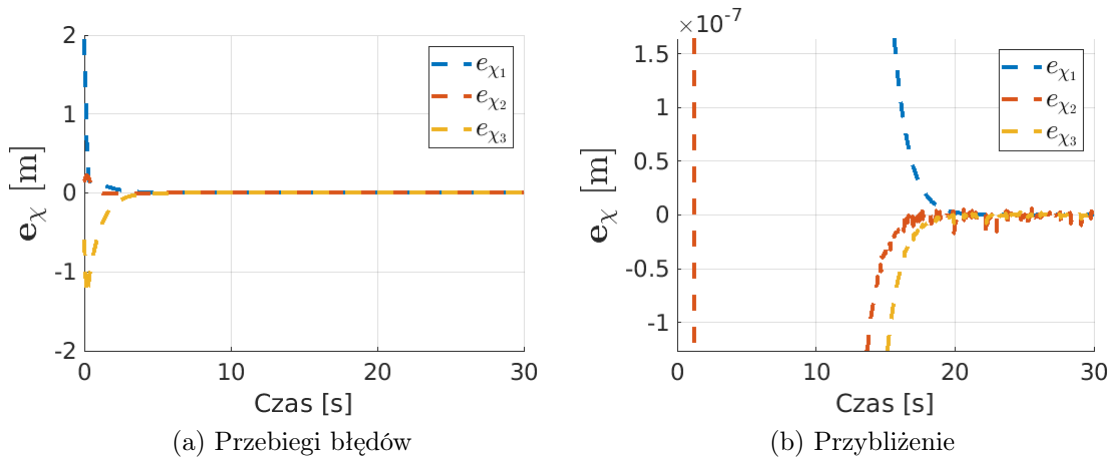
W pierwszym badaniu symulacyjnym zweryfikowano prawo sterowania zdefiniowane na podstawie Twierdzenia 2 oraz Twierdzenia 3. Uwzględniono zatem sterownik dynamiczny bazujący na pełnej znajomości modelu manipulatora. Do opisu robota względem ścieżki zastosowano nieortogonalną parametryzację Serreta–Freneta. Jako ścieżkę zadaną wybrano linię śrubową, której równania przedstawiono w dodatku B.2, z parametrami $\mathbf{a} = 1$ oraz $\mathbf{b} = 0, 3$. Profil prędkościowy wzdłuż ścieżki zdefiniowano jako $\dot{s}_d = \frac{1}{2} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$. Wybrano także konfigurację początkową manipulatora $\mathbf{q}_0 = \left(\frac{3\pi}{8} \text{ [rad]} \quad 0,7 \text{ [m]} \quad -\frac{\pi}{4} \text{ [rad]} \right)^T$ przy zerowych prędkościach początkowych. Ponadto, macierze wzmocnień w prawie sterowania wybrano jako $\mathbf{K}_k = \text{diag}_{3 \times 3}\{20\}$ na poziomie kinematycznym, a także $\mathbf{K}_d = \text{diag}_{3 \times 3}\{50\}$ na poziomie dynamicznym.

Na poniższych wykresach przedstawiono wyniki symulacji. Na rys. 5.1 porównano ścieżkę zadaną i ścieżkę zrealizowaną przez manipulator. Widać wyraźnie, że po skompensowaniu błędu wynikającego z konfiguracji początkowej, robot porusza się wzdłuż zadanej linii śrubowej. Ponadto, na rys. 5.1b pokazano wizualizację ruchu robota oraz układu Serreta–Freneta stowarzyszonego z krzywą.

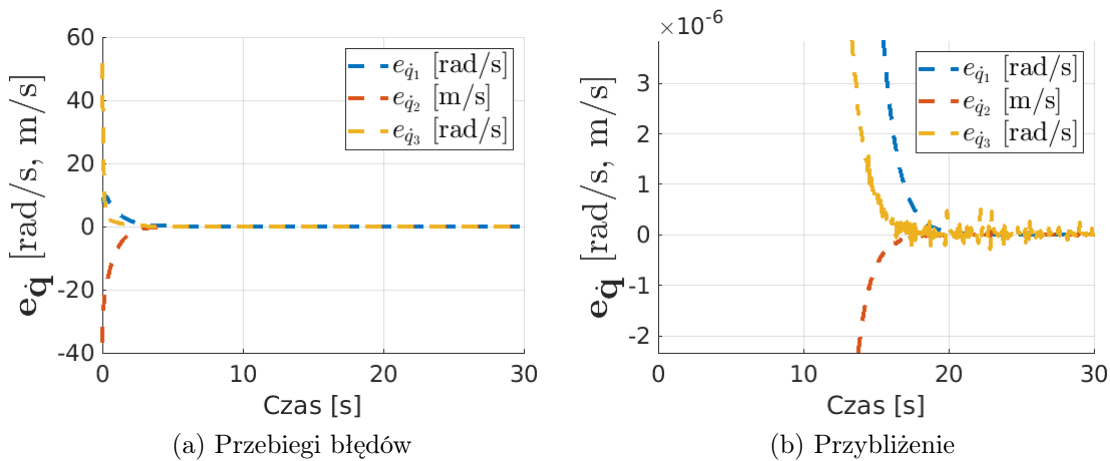


Rysunek 5.1: Porównanie ścieżki zadanej (linia niebieska) oraz ścieżki zrealizowanej przez manipulator (linia czerwona) – sterownik oparty o pełną znajomość modelu dynamiki.

Na rys. 5.2 przedstawiono przebiegi błędów śledzenia ścieżki z poziomu kinematycznego, natomiast rys. 5.3 prezentuje przebiegi błędów śledzenia profili prędkościowych z poziomu dynamicznego. W obu przypadkach można obserwować zbieżność błędów śledzenia do zera, co jest zgodne z przedstawionymi własnościami algorytmów. Warto podkreślić, że dla wybranych przykładowych nastaw sterowników błędy śledzenia osiągają bardzo niską wartość już po kilkunastu sekundach ruchu, a błąd początkowy jest szybko kompensowany przez układ sterowania.



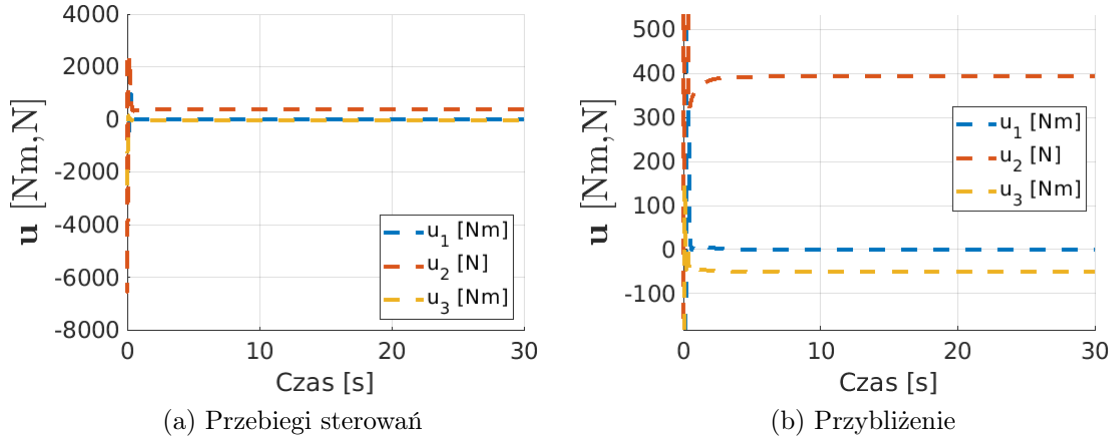
Rysunek 5.2: Błędy śledzenia ścieżki $\mathbf{e}_\chi$ – sterownik oparty o pełną znajomość modelu dynamiki.



Rysunek 5.3: Błędy śledzenia profili prędkościowych $\mathbf{e}_\mathbf{q}$ – sterownik oparty o pełną znajomość modelu dynamiki.

Z kolei, na rys. 5.4 przedstawiono przebiegi sygnałów sterujących uzyskane za pomocą zaproponowanych algorytmów. Kompensacja błędu początkowego wymagała bardzo dużych wartości momentów sił oraz sił sterujących. Uzyskane piki wartości są wąskie i bardzo wysokie. Aby je zredukować, należałoby dobrać mniejsze wartości nastaw bądź zastosować metody zaproponowane w rozdziale 8. Ze względu na fakt, że temu problemowi poświęcono osobny rozdział, w dalszych badaniach symulacyjnych nie będzie on osobno analizowany.

Można zaobserwować, że po osiągnięciu stanu ustalonego, tzn. gdy manipulator porusza się wzdłuż zadanej krzywej, wartości sterowań stabilizują się na akceptowalnym poziomie.



Rysunek 5.4: Wygenerowane sygnały sterujące $\mathbf{u}$ – sterownik oparty o pełną znajomość modelu dynamiki.

5.3.2 Algorytm adaptacyjny

W celu weryfikacji algorytmu adaptacyjnego zdefiniowanego Twierdzeniem 4 przyjęto, że nieznane są wartości trzech parametrów masowo-inercyjnych w modelu przedstawionym w dodatku A.1. W rezultacie, wektor nieznanych parametrów $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ jest równy

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_3 l_3 \\ m_3 l_3^2 \\ m_2 \end{pmatrix}. \quad (5.61)$$

W konsekwencji, macierz regresji $\mathbf{Y}_r \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ reprezentująca liniową zależność modelu dynamiki od nieznanych parametrów w prawie sterowania (5.22) przyjmuje postać

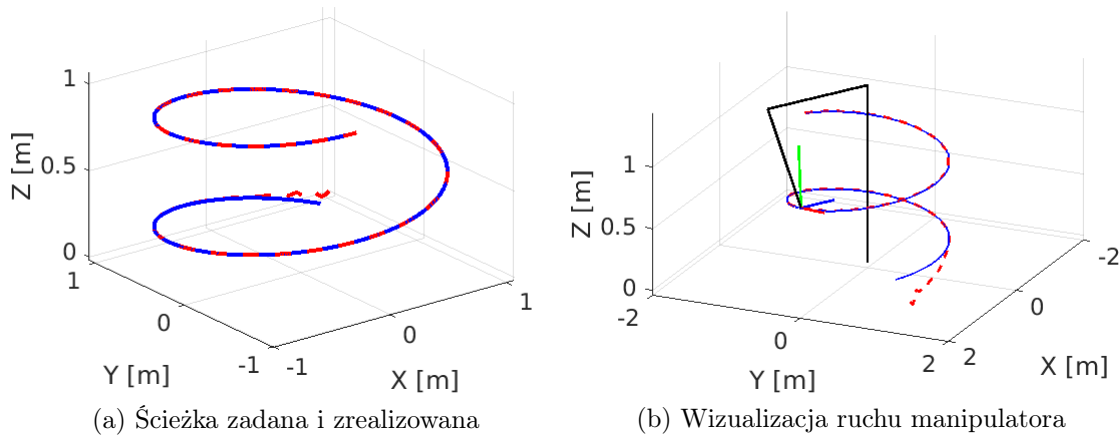
$$\mathbf{Y}_r(\ddot{\mathbf{q}}_{ref}, \dot{\mathbf{q}}_{ref}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = \begin{bmatrix} l_2 c_3 \ddot{q}_{ref1} - (\frac{1}{2} l_2 + \frac{1}{3} l_3 c_3) s_3 w_q & \frac{1}{3} c_3^2 \ddot{q}_{ref1} & \frac{1}{3} l_2^2 \ddot{q}_{ref1} \\ \frac{1}{2} c_3 \ddot{q}_{ref3} - \frac{1}{2} s_3 \dot{q}_3 \dot{q}_{ref3} & 0 & \ddot{q}_{ref2} + g \\ \frac{1}{2} c_3 (\ddot{q}_{ref2} + g) + (\frac{1}{2} l_2 + \frac{1}{3} l_3 c_3) s_3 \dot{q}_{ref1} \dot{q}_1 & \frac{1}{3} \ddot{q}_{ref3} & 0 \end{bmatrix},$$

gdzie $s_3 = \sin q_3$, $c_3 = \cos q_3$ oraz $w_q = (\dot{q}_{ref1} \dot{q}_3 + \dot{q}_{ref3} \dot{q}_1)$.

Do realizacji zadania śledzenia ścieżki w warunkach niepewności parametrycznej zastosowano prawo sterowania wynikające z Twierdzenia 2 oraz Twierdzenia 4. Do opisu robota względem ścieżki wykorzystano ortogonalną parametryzację *beta*. Ścieżkę zadaną określono ponownie jako linię śrubową, która jest zdefiniowana w dodatku B.2, lecz tym razem przyjęto parametry $\mathbf{a} = 1$ oraz $\mathbf{b} = 0, 1$. Konfigurację początkową określono jako $\mathbf{q}_0 = (\frac{\pi}{4} [\text{rad}] \quad 1 [\text{m}] \quad -\frac{\pi}{2} [\text{rad}])^T$ oraz zerowe prędkości początkowe. Prędkość krzywoliniowa jest elementem stanu robota względem ścieżki ze względu na założenia parametryzacji ortogonalnej. Stąd, profil prędkościowy zdefiniowano jako element zadanego stanu względem ścieżki, który był równy $\chi_d = (\frac{1}{5}t + s_0 \quad 0 \quad 0)^T [\text{m}]$, gdzie s_0 jest

wartością początkową odległości krzywoliniowej wynikającej z warunku (3.39). Wreszcie, wybrano przykładowe elementy macierzy wzmocnień, które spełniają warunki stabilności algorytmu sterowania: $\mathbf{K}_k = \text{diag}\{50, 1, 1\}$, $\mathbf{K}_d = \text{diag}_{3 \times 3}\{100\}$, $\mathbf{\Gamma} = \text{diag}_{3 \times 3}\{50\}$. Wartości początkowe prawa adaptacji (5.21) przyjęto jako zerowe. Na poniższych rysunkach przedstawiono wyniki symulacji.

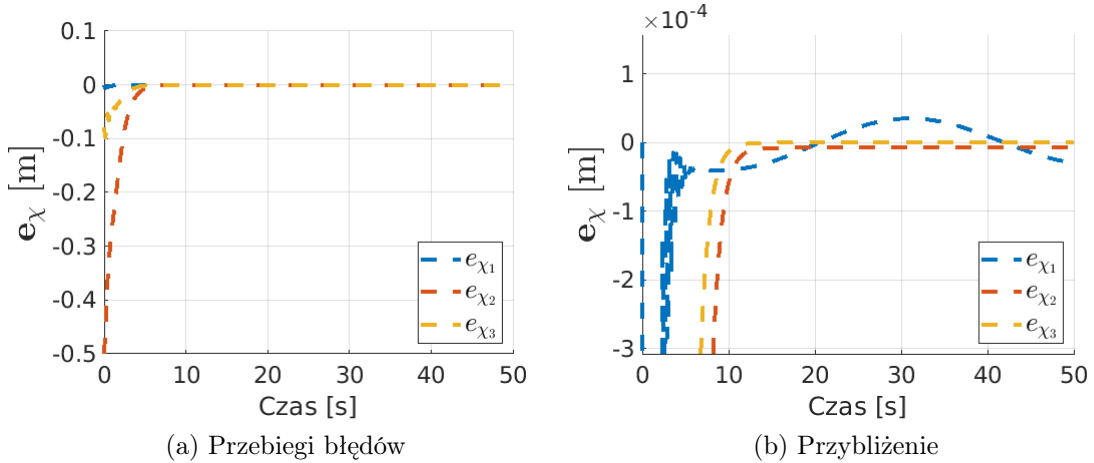
Na rys. 5.5 zestawiono ścieżkę zadaną i zrealizowaną przez manipulator. Faza dojścia do ścieżki jest krótka dzięki założeniu parametryzacji ortogonalnej – układ lokalny na ścieżce musi znajdować się w punkcie najbliższym punktowi prowadzenia robota. Ponadto, na rys. 5.5b przedstawiono wizualizację ruchu robota wraz z układem *beta*. Choć ewolucję układu lokalnego uzyskano na podstawie równań dla układu Bishopa, to jego zachowanie jest charakterystyczne dla układu Serreta–Freneta. Niebieski wektor normalny jest skierowany do środka krzywizny linii śrubowej, co jest typowe dla parametryzacji Serreta–Freneta.



Rysunek 5.5: Porównanie ścieżki zadanej (linia niebieska) oraz ścieżki zrealizowanej przez manipulator (linia czerwona) – sterownik adaptacyjny.

Na rys. 5.6 przedstawiono błędy śledzenia ścieżki. W przypadku parametryzacji ortogonalnej pierwsza składowa wektora $\mathbf{e}_x$ jest związana z realizacją profilu prędkościowego pozwalającego zachować warunek rzutowania ortogonalnego, a pozostałe składowe odnoszą się do położenia punktu prowadzenia robota względem układu na ścieżce. Początkowy błąd został poprawnie skompensowany. Z rys. 5.6b można wnioskować, że uzyskano mniejszą precyzję śledzenia w porównaniu z poprzednim badaniem symulacyjnym. Jest to jednak skutek zastosowania stałokrokowej metody całkowania numerycznego, której wybór wynikał z implementacji parametryzacji *beta*. Ten rodzaj algorytmów całkowania numerycznego nie pozwala osiągnąć takiej dokładności obliczeń, jak metoda zmiennokrokowa, którą zastosowano w poprzednim studium.

Z kolei rys. 5.7 przedstawia błędy śledzenia profili prędkościowych na poziomie dynamicznym. W tym przypadku również uzyskano satysfakcjonującą dokładność śledzenia prędkości zadanych przez sterownik kinematyczny. Należy jednak zwrócić uwagę na oscylacje, które pojawiają się w początkowej fazie manewru. Wynikają one z nieznaności wartości parametrów masowo-inercyjnych $\mathbf{a}$. Błędy estymacji tych wartości przedstawiono na wykresach na rys. 5.8. Widać wyraźnie, że również w początkowej fazie te wartości oscylują, co przekłada się na wartości błędów śledzenia oraz generowanych sterowań



Rysunek 5.6: Błędy śledzenia ścieżki e_{χ} – sterownik adaptacyjny.

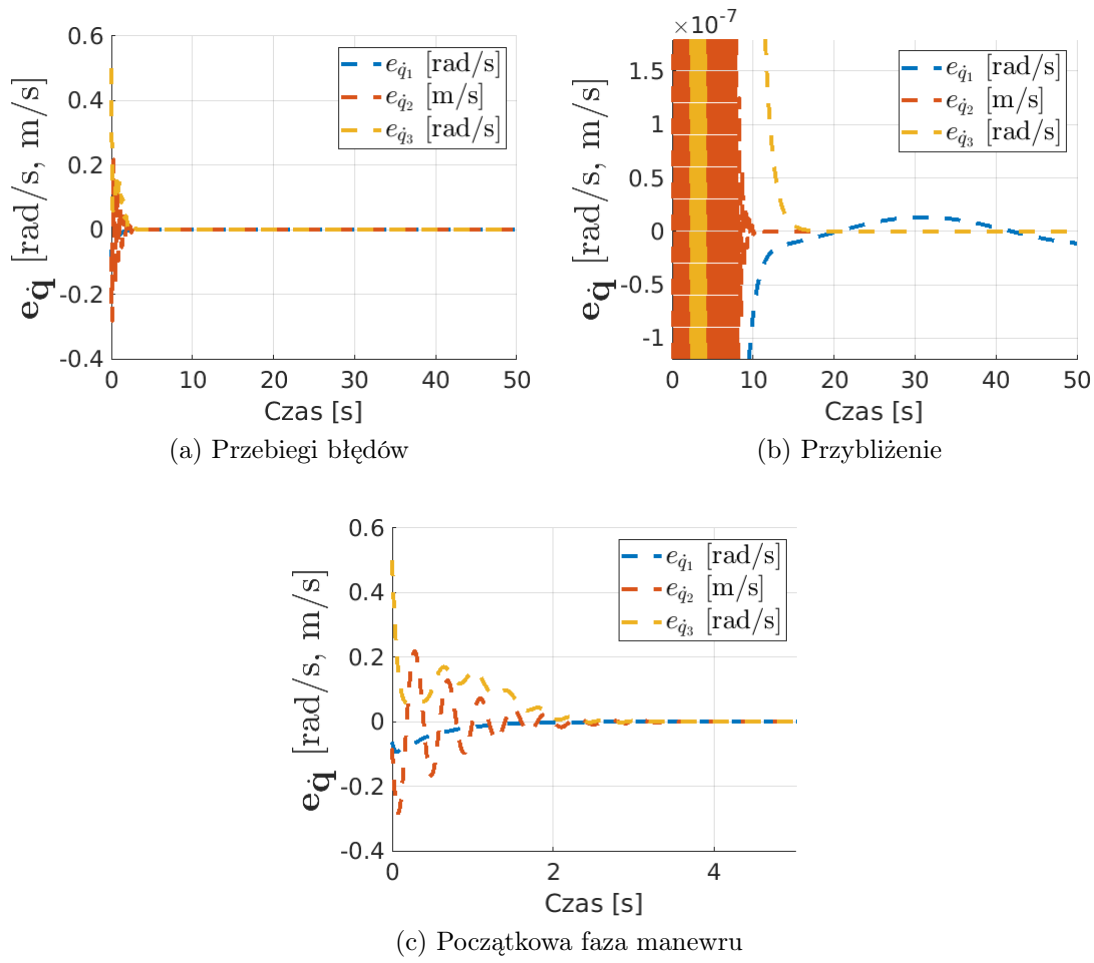
(rys. 5.9). Po pewnym czasie wartości błędów estymacji osiągną stałą wartość. Należy zwrócić uwagę, że nie zbiegają jednak do wartości zerowych, zgodnie ze Spostrzeżeniem 14. W ogólności, żaden nieznan parametr nie musi zbiegać do wartości prawdziwej. Przedstawione wyniki symulacji pokazują jednak, że mimo to układ sterowania poprawnie realizuje zadanie śledzenia ścieżki.

Wreszcie, na rys. 5.9 zaprezentowano przebiegi wygenerowanych sygnałów sterujących. Po początkowej fazie oscylacji, wynikającej z parametrycznej nieznajomości modelu dynamiki, sterowania stabilizują się na akceptowalnym poziomie. Warto zwrócić uwagę, że piki sterowań w fazie początkowej są znacznie mniejsze, niż w poprzednim studium. Oprócz innej konfiguracji początkowej manipulatora, wpływ na to ma także parametryzacja ortogonalna. Wymusza ona bowiem umieszczenie lokalnego układu odniesienia w punkcie na ścieżce, który jest najbliższym aktualnego położenia punktu prowadzenia robota. W ten sposób początkowa wartość błędów śledzenia jest minimalizowana.

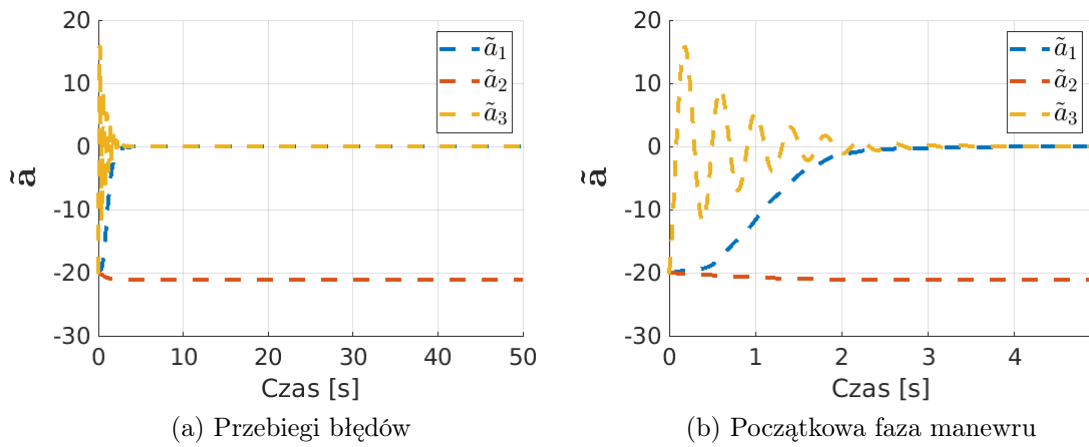
Należy podkreślić, że analogiczne studium weryfikujące algorytm adaptacyjny w zadaniu śledzenia ścieżki dla innej metody parametryzacji zostało przedstawione przez autora rozprawy w pracy [78].

5.3.3 Algorytm ślizgowy

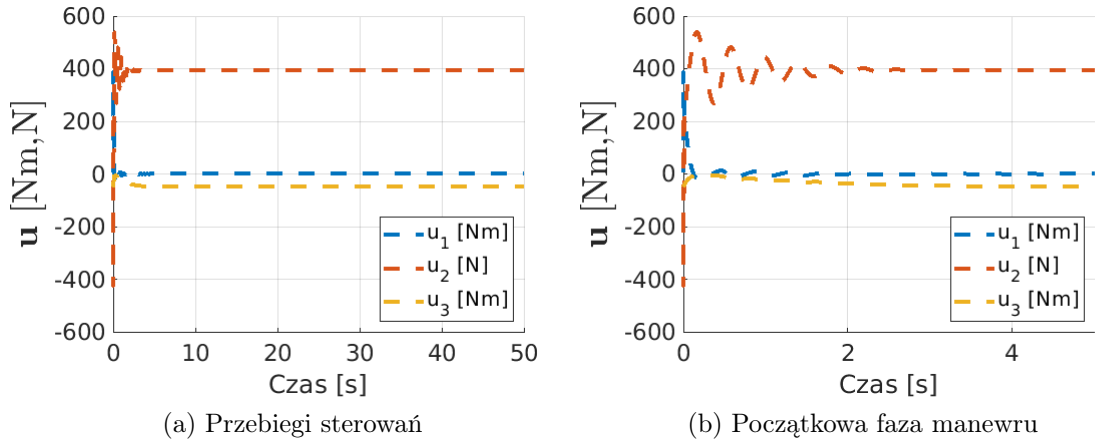
Aby zweryfikować skuteczność algorytmu ślizgowego w zadaniu śledzenia ścieżki, rozważono przypadek, w którym model dynamiki manipulatora RTR został obciążony nieznajomością strukturalną oraz parametryczną. Założono, że istnieje jeden parametr masowo-inercyjny, którego wartość nie jest znana, tj. $\mathbf{a} = \mathbf{m}_3 \mathbf{l}_3$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}$. Ponadto, wprowadzono zaburzenia struktury modelu dynamiki (4.2) poprzez pominięcie wyrazów Q_{22} oraz Q_{33} w macierzy bezwładności manipulatora RTR (A.7), a także wprowadzenie zakłóceń ζ w postaci sił tarcia.



Rysunek 5.7: Błędy śledzenia profili prędkościowych $\mathbf{e}_{\dot{\mathbf{q}}}$ – sterownik adaptacyjny.



Rysunek 5.8: Błędy estymacji parametrów $\tilde{\mathbf{a}}$ – sterownik adaptacyjny.



Rysunek 5.9: Wygenerowane sygnały sterujące $\mathbf{u}$ – sterownik adaptacyjny.

Dla tak zdefiniowanego problemu poszczególne elementy modelu (5.35) przyjmują następującą postać:

- macierz bezwładności o znanej strukturze

$$\mathbf{Q}_z(\mathbf{q}, \mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}m_2l_2^2 + m_3l_2^2 + \mathbf{a} \left(\frac{1}{3}l_3 \cos^2 q_3 + l_2 \cos q_3 \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{a} \frac{1}{2} \cos q_3 \\ 0 & \mathbf{a} \frac{1}{2} \cos q_3 & 0 \end{bmatrix};$$

- macierz sił odśrodkowych i sił Coriolisa o znanej strukturze

$$\mathbf{C}_z(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{a}) = \begin{bmatrix} -\mathbf{a}\dot{q}_3 \left(\frac{1}{2}l_2 + \frac{1}{3}l_3 \cos q_3 \right) \sin q_3 & 0 & -\mathbf{a}\dot{q}_1 \left(\frac{1}{2}l_2 + \frac{1}{3}l_3 \cos q_3 \right) \sin q_3 \\ 0 & 0 & -\mathbf{a}\dot{q}_3 \frac{1}{2} \sin q_3 \\ \mathbf{a}\dot{q}_1 \left(\frac{1}{2}l_2 + \frac{1}{3}l_3 \cos q_3 \right) \sin q_3 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

- wektor sił grawitacji o znanej strukturze

$$\mathbf{g}_z(\mathbf{q}, \mathbf{a}) = \begin{pmatrix} 0 \\ (m_2 + m_3)g \\ \mathbf{a} \frac{1}{2} g \cos q_3 \end{pmatrix}.$$

W konsekwencji, można wyznaczyć macierz regresji $\mathbf{Y}_r \in \mathbb{R}^3$, która wyraża liniową zależność modelu dynamiki od nieznanego parametru $\mathbf{a}$

$$\mathbf{Y}_r(\ddot{\mathbf{q}}_{ref}, \dot{\mathbf{q}}_{ref}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = \begin{pmatrix} (l_2 \cos q_3 + \frac{1}{3}l_3 \cos^2 q_3) \ddot{q}_{ref1} - \mathbf{w}_q \left(\frac{1}{2}l_2 + \frac{1}{3}l_3 \cos q_3 \right) \sin q_3 \\ \frac{1}{2} \cos q_3 \ddot{q}_{ref3} - \frac{1}{2}\dot{q}_3 \dot{q}_{ref3} \sin q_3 \\ \frac{1}{2} \cos q_3 (\ddot{q}_{ref2} + g) + \left(\frac{1}{2}l_2 + \frac{1}{3}l_3 \cos q_3 \right) \dot{q}_{ref1} \dot{q}_1 \sin q_3 \end{pmatrix},$$

przy czym $\mathbf{w}_q = (\dot{q}_{ref1} \dot{q}_3 + \dot{q}_{ref3} \dot{q}_1)$. W rezultacie, macierze w pełni znane (strukturalnie i parametrycznie) redukują się do postaci: $\mathbf{Q}_0(\mathbf{q}) = \text{diag}\{\frac{1}{3}m_2l_2^2 + m_3l_2^2, 0, 0\}$, $\mathbf{C}_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0}$, $\mathbf{g}_0(\mathbf{q}) = \text{diag}\{0, (m_2 + m_3)g, 0\}$.

Jako dodatkowe zaburzenia strukturalne, nieuwzględnione w podstawowym modelu dynamiki, uwzględniono siły tarcia występujące w każdym przegubie. W tym celu skorzystano z modelu Tustina [7]. Zakłada on, że tarcie występujące w przegubie jest kombinacją

tarcia kulombowskiego, tarcia wiskotycznego oraz tarcia statycznego. Zgodnie z pracą [7], tarcie w przegubie można zamodelować jako

$$F_{T_i} = F_{C_i} \operatorname{sgn}(\dot{q}_i) + F_{v_i} \dot{q}_i + (F_{s_i} - F_{C_i}) e^{-\beta_i |\dot{q}_i|} \operatorname{sgn}(\dot{q}_i), \quad (5.62)$$

gdzie współczynniki F_{C_i} , F_{v_i} , F_{s_i} oznaczają odpowiednio współczynniki tarcia kulombowskiego, wiskotycznego i statycznego. Na potrzeby symulacji przyjęto wartości współczynników zgodnie z tabelą 5.1. Ponadto założono, że tarcie w obu przegubach rotacyjnych reprezentowane jest przez identyczne parametry.

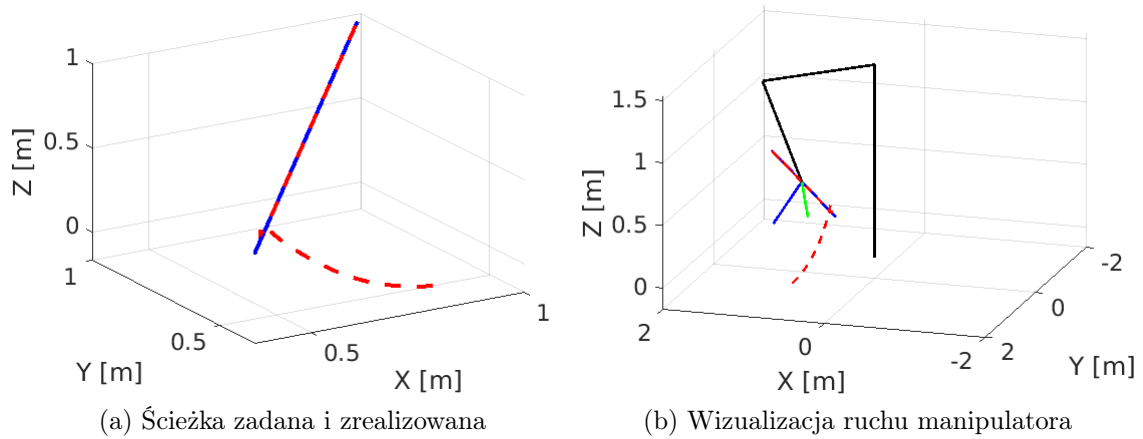
Tabela 5.1: Współczynniki tarcia w modelu Tustina przyjęte w badaniach symulacyjnych.

Współczynnik	Przegub rotacyjny	Przegub translacyjny
F_v	1 [Nms]	5 [Ns/m]
F_C	5 [Nm]	9 [N]
F_s	6 [Nm]	10,8 [N]
β	50 [s]	30 [s/m]

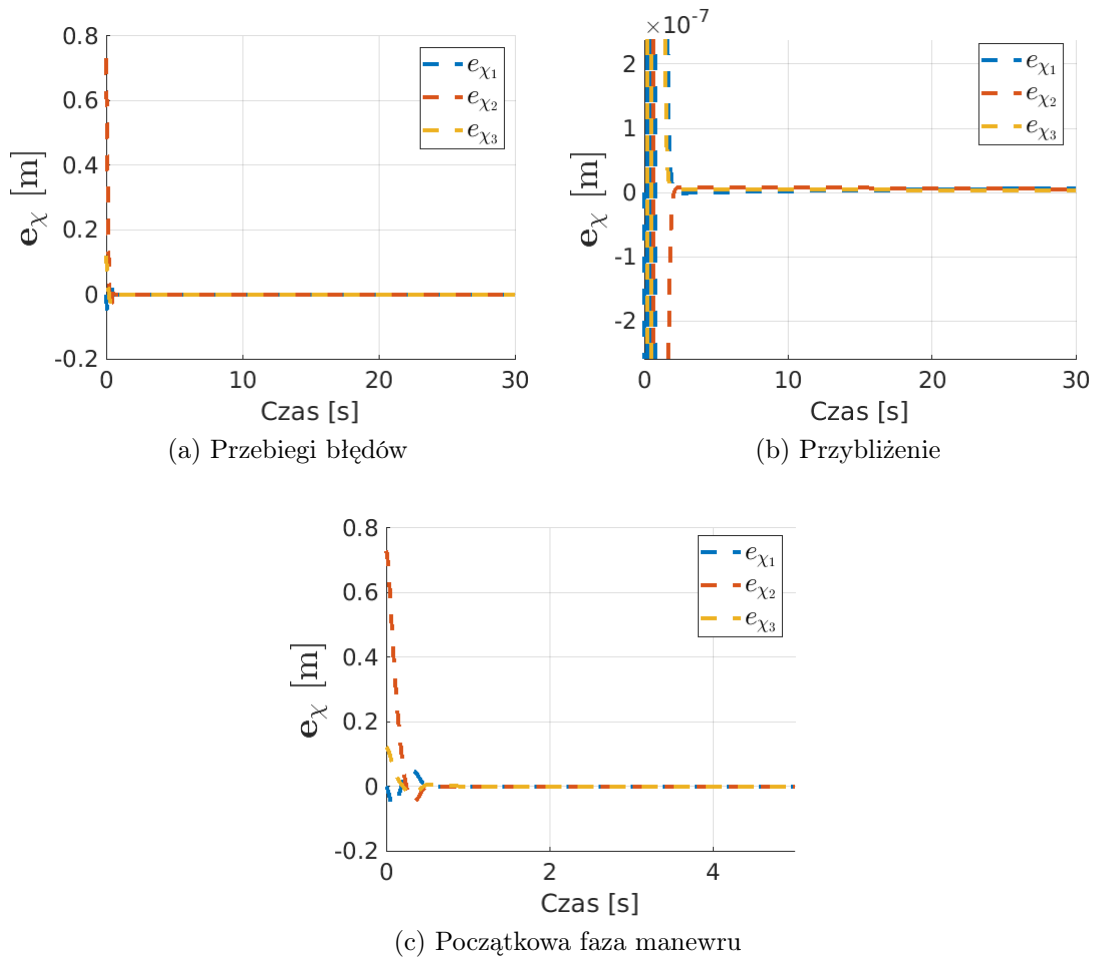
Do realizacji zadania śledzenia ścieżki w badaniach symulacyjnych wykorzystano prawo sterowania skonstruowane na podstawie Twierdzenia 2 oraz Twierdzenia 5. Do opisu manipulatora względem ścieżki wykorzystano ortogonalną parametryzację Bishopa. Ścieżkę zadaną zdefiniowano jako linię prostą, której równania przedstawiono w dodatku B.1. Za punkt początkowy ścieżki przyjęto początek globalnego układu współrzędnych, tj. $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$, natomiast wektor kierunkowy zdefiniowano dla $\mathbf{t}_r = (0, 1 \ 0, 1 \ 0, 1)^T$. Konfigurację początkową robota wybrano jako $\mathbf{q}_0 = (\frac{\pi}{6} [\text{rad}] \ 0,7 [\text{m}] \ -\frac{2\pi}{3} [\text{rad}])^T$ przy początkowych zerowych wartościach prędkości przegubowych. Zadany stan robota względem ścieżki określono jako $\mathbf{x}_d = (\frac{1}{30}\mathbf{t} + \mathbf{s}_0 \ 0 \ 0)^T$, gdzie $\mathbf{s}_0$ jest początkową wartością położenia układu Bishopa na ścieżce wynikającą z warunku parametryzacji ortogonalnej (3.39). Wreszcie, w badaniu symulacyjnym zastosowano następujące wartości nastaw sterowników: $\mathbf{K}_k = \operatorname{diag}_{3 \times 3}\{10\}$, $\mathbf{K}_d = \operatorname{diag}_{3 \times 3}\{100\}$, $\mathbf{K} = \operatorname{diag}\{290, 240, 330\}$, $\mathbf{\Lambda} = \operatorname{diag}_{3 \times 3}\{10\}$. Ponadto, przyjęto oszacowanie nieznanego parametru masowo-inercyjnego $\hat{\mathbf{a}} = 41 [\text{kg} \cdot \text{m}]$. Warto zwrócić uwagę, że przyjęta wartość istotnie różni się od wartości prawdziwej wynikającej z wartości parametrów masowo-geometrycznych manipulatora RTR, które zostały podane w dodatku A.1.

Wyniki przeprowadzonych badań symulacyjnych zaprezentowano na poniższych wykresach. Na rys. 5.10 porównano ścieżkę zadaną i zrealizowaną przez manipulator, wraz z wizualizacją manewru. Wynika stąd, że ścieżka została zrealizowana poprawnie. Należy podkreślić, że dla linii prostej zarówno krzywizna, jak i torsja zerują się. Oznacza to, że nie można zastosować układu Serreta–Freneta, gdyż byłby on nieokreślony w każdym punkcie krzywwej. Rozwiązaniem jest parametryzacja Bishopa i metoda względnie równoległego przesunięcia wektorów bazowych. Warto zwrócić uwagę, że dobór wektorów normalnych w tym przypadku jest dowolny. Układ Bishopa w stanie początkowym można obrócić wokół wektora stycznego. Niemniej, ewolucja układu zawsze odbywa się według tej samej reguły.

Na rys. 5.11 przedstawiono błędy śledzenia ścieżki. Zgodnie z przedstawioną teorią wartości zbiegają do zera, a początkowy błąd jest szybko kompensowany dzięki odpowiedniemu doborowi wzmocnień sterownika.

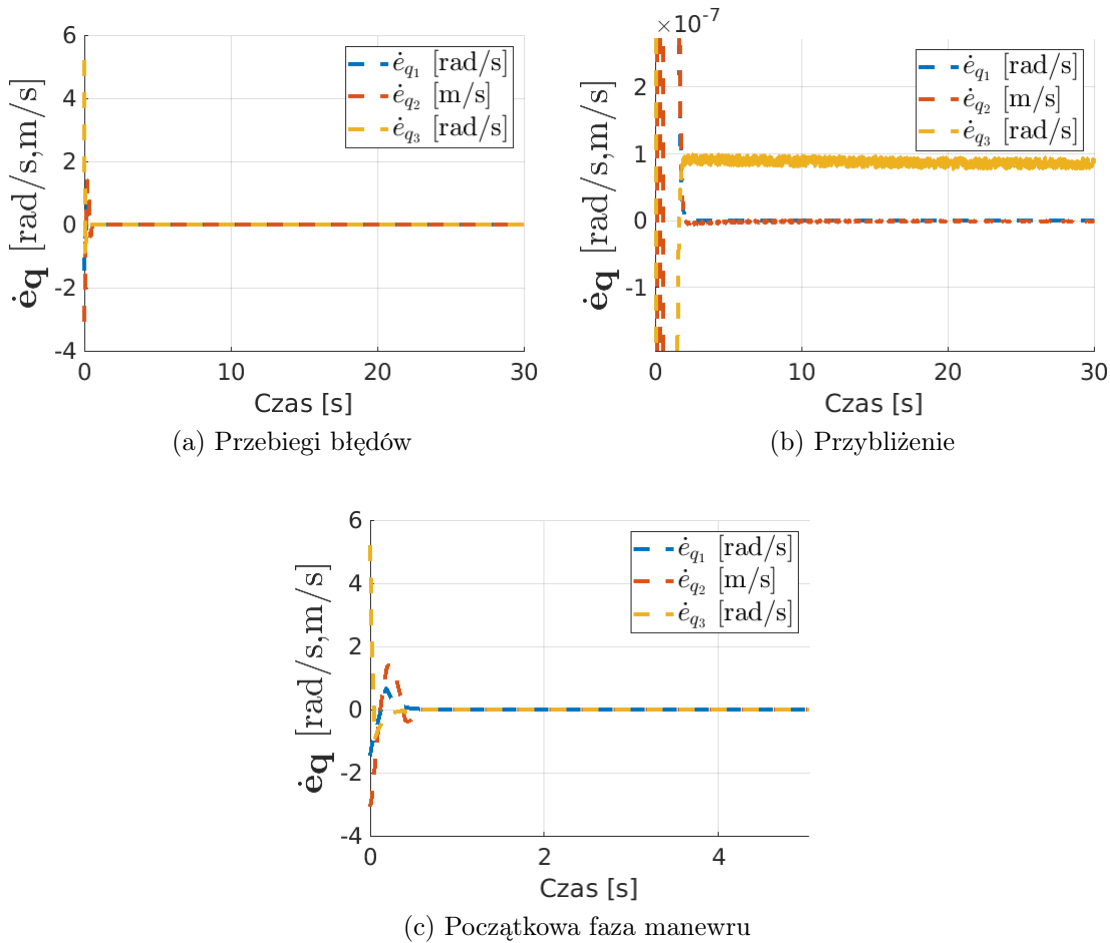


Rysunek 5.10: Porównanie ścieżki zadanej (linia niebieska) oraz ścieżki zrealizowanej przez manipulator (linia czerwona) – algorytm ślizgowy.



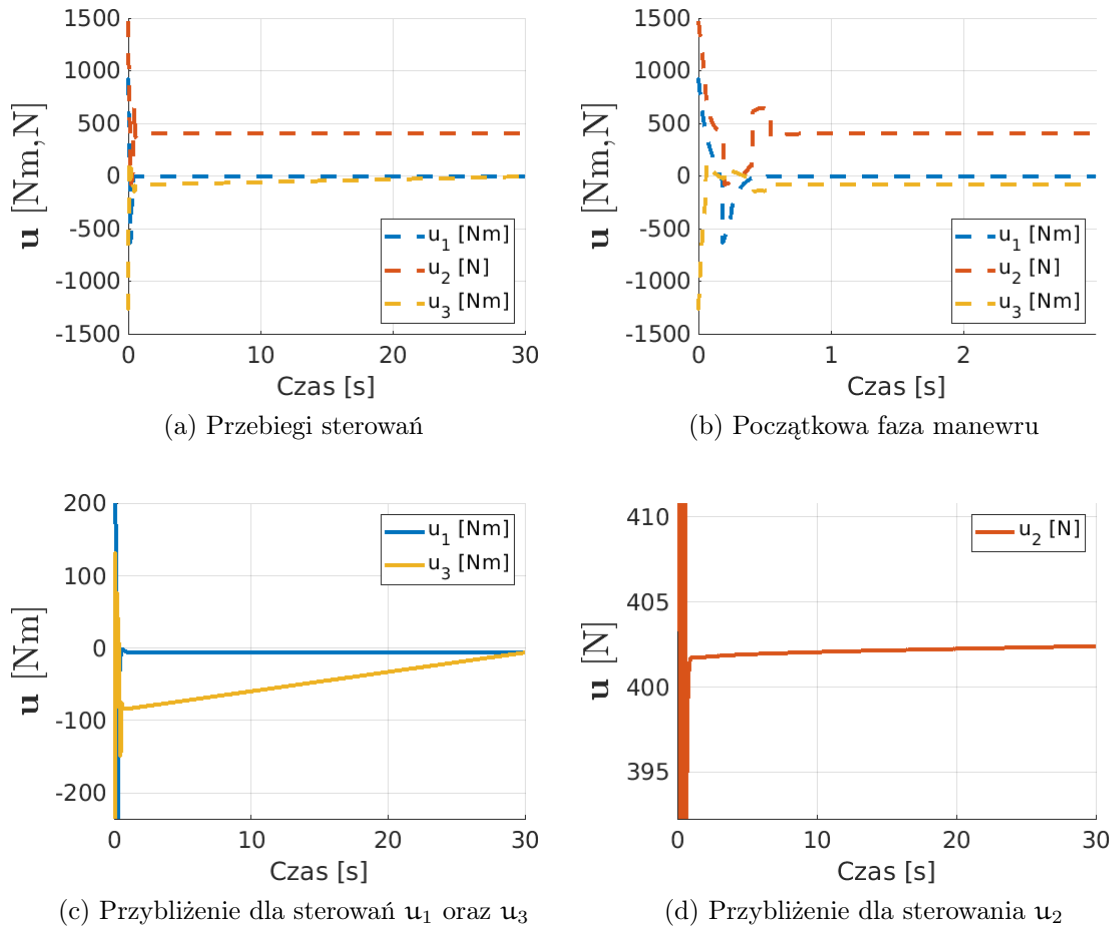
Rysunek 5.11: Błędy śledzenia ścieżki $\mathbf{e}_x$ – algorytm ślizgowy.

Z kolei na rys. 5.12 przedstawiono błędy śledzenia profili prędkościowych. Podobnie jak w pierwszym stopniu kaskady układu sterowania, również na poziomie dynamicznym błędy zbiegają do bardzo małych wartości, a początkowy błąd jest szybko niwelowany. Na poziomie dokładności obliczeń numerycznych (rys. 5.12b) można zauważyć pewne zaszumienie sygnału błędów. Wynika to z kompensacji nieznanej struktury modelu przez element $\mathbf{K} \cdot \text{sgn}(\boldsymbol{\sigma})$. Można również zauważyć, że w tym przypadku tempo zbieżności błędów śledzenia profili prędkościowych w trzecim przegubie jest najmniejsze. Zaproponowane prawo sterowania pozwala jednak osiągnąć dobrą dokładność śledzenia ścieżki w obecności zaburzeń strukturalnych i zewnętrznych. Przedstawione rozwiązanie jest zatem odporne na nieznajomość strukturalną oraz parametryczną modelu dynamiki robota.



Rysunek 5.12: Błędy śledzenia profili prędkościowych $\dot{\mathbf{e}}_q$ – algorytm ślizgowy.

Na rys. 5.13 przedstawiono wykresy sygnałów sterujących wygenerowanych przez zaproponowany algorytm. Widać wyraźnie, że kompensacja błędów w chwili początkowej wpłynęła na generację amplitud dużych co do wartości bezwzględnej. Okres przejściowy trwał stosunkowo krótko. Kiedy manipulator osiągnął ścieżkę, wartości sterowań zaczęły się stabilizować. Jednakże, ze względu na konieczność kompensacji nieznajomości strukturalnej i parametrycznej modelu, a także wpływ tarcia, wartości sygnałów sterujących rosną, zwłaszcza w przegubie drugim oraz trzecim. Na rys. 5.13c oraz 5.13d można zauważyć, że zmiana wartości ma charakter schodkowy, co związane jest z wykorzystaniem funkcji signum w prawie sterowania.



Rysunek 5.13: Wygenerowane sygnały sterujące u – algorytm ślizgowy.

5.3.4 Algorytm dla całkowicie nieznanego modelu dynamiki

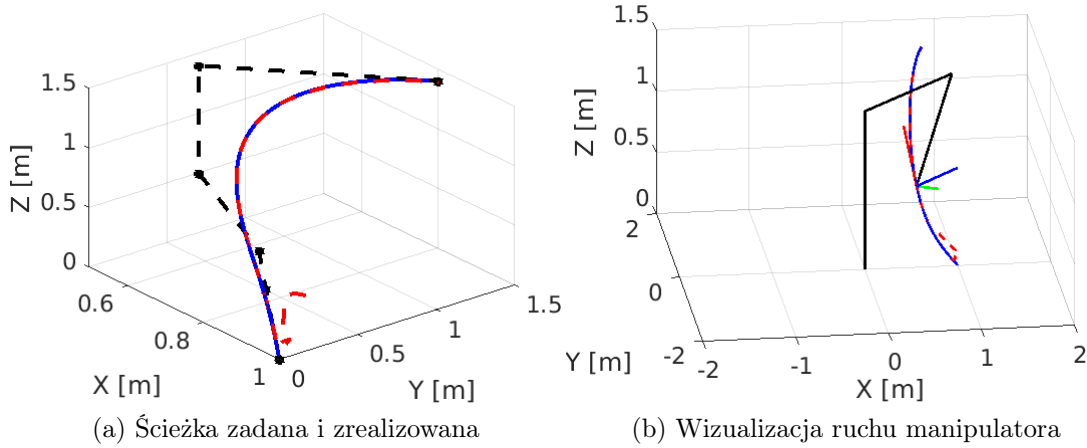
Ostatnim etapem walidacji symulacyjnej zaproponowanych rozwiązań jest weryfikacja przypadku całkowitej nieznajomości modelu dynamiki obiektu. W symulacji wykorzystano algorytm Qu–Dorseya na poziomie dynamicznym, a także sterownik kinematyczny na podstawie Twierdzenia 2. Do opisu manipulatora względem ścieżki zastosowano nieortogonalną parametryzację *beta*. Jako ścieżkę zadaną wybrano krzywą Béziera, której równania przedstawiono w dodatku B.5. Ścieżka została zdefiniowana przez zbiór punktów kontrolnych

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,4 \\ 0,11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,7 \\ 0,6 \\ 0,2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,7 \\ 0,5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,7 \\ 1,4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,8 \\ 1,5 \\ 1,4 \end{pmatrix} \right\} [\text{m}].$$

Profil prędkościowy wzdłuż ścieżki dobrano tak, aby zachować dziedzinę krzywej Béziera, tzn. $\dot{u}_d = \frac{1}{t_f} [\frac{\text{m}}{\text{s}}]$, gdzie $t_f = 80$ [s] to całkowity czas symulacji. Wybrano konfigurację początkową manipulatora $q_0 = (0,5 [\text{rad}] \quad 1 [\text{m}] \quad -2,1 [\text{rad}])^T$, a także przyjęto zerowe prędkości początkowe. Jako przykładowe wartości wzmocnień sterownika wybrano: $K_k = \text{diag}_{3 \times 3}\{20\}$, $K_d = K_p = \text{diag}_{3 \times 3}\{10^3\}$. Na poniższych wykresach zaprezentowano wyniki symulacji.

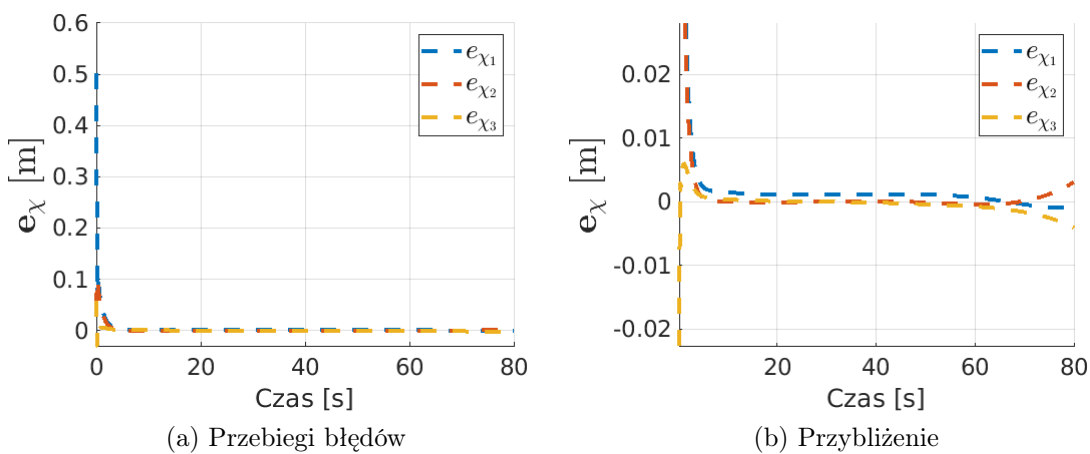
Na rys. 5.14 przedstawiono ścieżkę zadaną oraz ścieżkę zrealizowaną przez manipula-

tor. Dodatkowo, na rys. 5.14a zaznaczono punkty kontrolne wyznaczające zadaną krzywą Béziera. Z kolei, na rys. 5.14b pokazano wizualizację ruchu manipulatora wzdłuż zadanej krzywej. Przedstawione porównanie potwierdza, że robot poprawnie realizuje ruch wzdłuż zadanej ścieżki.

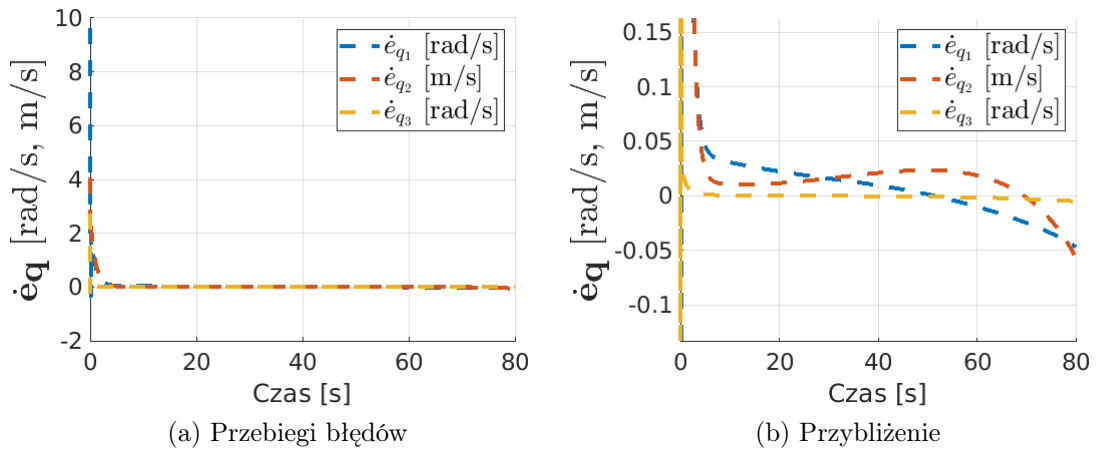


Rysunek 5.14: Porównanie ścieżki zadanej (linia niebieska) oraz ścieżki zrealizowanej przez manipulator (linia czerwona) wraz z wielokątem wyznaczonym przez punkty kontrolne krzywej Béziera (linia czarna) – sterownik Qu–Dorsey.

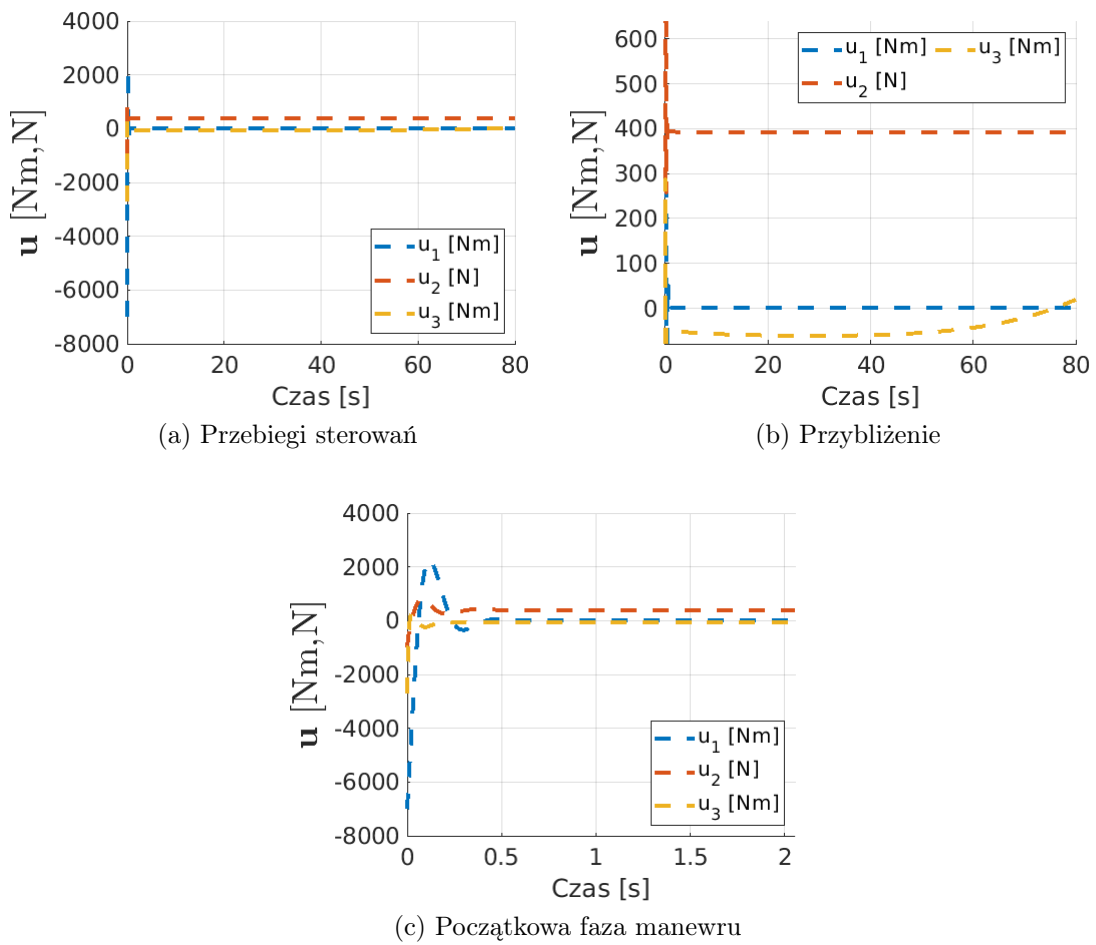
Tę tezę potwierdzają przebiegi błędów śledzenia ścieżki (rys. 5.15) oraz błędów śledzenia profili prędkościowych (rys. 5.16). Na obu poziomach kaskady układu sterowania błędy osiągają małe wartości. Należy jednak podkreślić, że w porównaniu z uprzednio przedstawionymi wynikami badań symulacyjnych, uzyskany błąd pozostaje całkiem spory. Choć algorytm PD można z powodzeniem stosować do sterowania robotami, gdy ich dynamika nie jest znana, to charakteryzują się one małą precyzją. Jest to zgodne z własnością teoretyczną algorytmu Qu-Dorsey. To prawo sterowania gwarantuje bowiem, że błąd pozostanie ograniczony. Wartość zero może być osiągnięta tylko dla nieskończonych nastaw, co jest niemożliwe do realizacji w praktyce.



Rysunek 5.15: Błędy śledzenia ścieżki e_x – sterownik Qu–Dorsey.



Rysunek 5.16: Błędy śledzenia profili prędkościowych $\dot{\mathbf{e}}_{\mathbf{q}}$ – sterownik Qu–Dorsey’a.



Rysunek 5.17: Wygenerowane sygnały sterujące $\mathbf{u}$ – sterownik Qu–Dorsey’a.

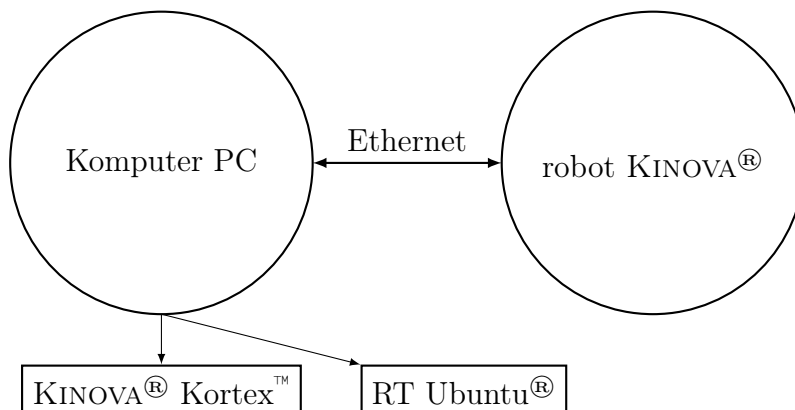
Na rys. 5.17 przedstawiono wartości wygenerowanych sterowań. Należy przede wszystkim zwrócić uwagę na generację bardzo dużych wartości w początkowej fazie ruchu. Jest to związane z kompensacją błędu początkowego. Tak wysokie piki wartości wynikają z zastosowania dużych nastaw sterownika dynamicznego. Pomimo tego, wartości błędów śledzenia pozostają znaczące, jak pokazano na rys. 5.15 oraz rys. 5.16. Algorytm Qu–Dorsey’a pozwala zatem na poprawną realizację zadania śledzenia ścieżki, lecz wiąże się z najmniejszą precyzją spośród wszystkich rozważonych metod.

5.4 Walidacja eksperymentalna

Przedstawione metody sterowania obiektem holonomicznym w zadaniu śledzenia ścieżki zostały zweryfikowane nie tylko symulacyjnie, ale również eksperymentalnie. Przeprowadzono badania na obiekcie rzeczywistym w celu zweryfikowania praktycznej stosowalności zaproponowanych rozwiązań.

Do walidacji eksperymentalnej wykorzystano manipulator KINOVA® Gen3 [64], który posiada siedem stopni swobody, a więc jest redundantny. Ogólny model manipulatora został przedstawiony w dodatku A.2. Ze względu na dostateczną liczbę stopni swobody robota, w eksperymentach rozważono nie tylko podstawowy opis położenia robota względem ścieżki, ale również rozszerzono opis o względną orientację. W niniejszym rozdziale przedstawiono zatem również badania weryfikujące możliwość sterowania posturą manipulatora względem ścieżki.

Stanowisko eksperymentalne wykorzystane do badań zostało wyposażone w manipulator KINOVA® Gen3 oraz komputer PC. Komputer został wyposażony w system operacyjny Ubuntu® 22.04, w którego jądrze została aktywowana funkcjonalność PREEMPT_RT. Celem takiego zabiegu była maksymalizacja sprawności komunikacji pomiędzy sterownikiem robota a oprogramowaniem komputerowym. Do sterowania robotem wykorzystano dedykowane oprogramowanie KINOVA® Kortex™ [64]. Schemat wykorzystanego stanowiska eksperymentalnego został przedstawiony na rys. 5.18.



Rysunek 5.18: Schemat stanowiska eksperymentalnego.

W kolejnych sekcjach tego rozdziału przedstawiono eksperymentalną walidację zaproponowanych metod śledzenia ścieżki. Najpierw sprawdzono przypadek śledzenia położenia względem ścieżki, a następnie rozważono posturę robota względem ścieżki. Uzyskane wyniki zostały porównane z wynikami symulacyjnymi dla manipulatora KINOVA® Gen3.

5.4.1 Położenie robota względem ścieżki

Najpierw zweryfikowano eksperymentalnie możliwość realizacji zadanego położenia względem ścieżki. W tym celu rozważono zarówno sterownik oparty na pełnej znajomości modelu, jak i uniwersalny algorytm λ -śledzenia. Analogiczne badania walidacyjne zostały przedstawione przez autora rozprawy w pracy [35]. Scenariusze eksperymentów zróżnicowano pod względem krzywej definiującej ścieżkę zadaną oraz zastosowanej metody parametryzacji.

Algorytm oparty o pełną znajomość modelu dynamiki. Pierwszym algorytmem zweryfikowanym na stanowisku eksperymentalnym był sterownik dynamiczny oparty o pełną znajomość modelu, który został zdefiniowany w Twierdzeniu 3, pracujący równolegle ze sterownikiem kinematycznym wynikającym z Twierdzenia 2. Do realizacji opisu robota względem ścieżki zastosowano nieortogonalną parametryzację Serreta–Freneta.

Jako ścieżkę zadaną wybrano kłotoide, której równania przedstawiono w dodatku B.4. Zdefiniowano następujące parametry krzywizny oraz torsji: $\kappa' = 0,33$, $\kappa_0 = 1,5$ oraz $\tau' = 0,014$. Wyraz wolny torsji dobrano tak, aby kłotoida spełniała warunek komutatora, tzn. $\tau_0 = \frac{\tau' \kappa_0}{\kappa'}$. Punkt początkowy kłotoidy w przestrzeni został określony jako $\mathbf{r}_0 = (0 \quad -0,5 \quad 0,4)^T$ [m], natomiast warunek początkowy dla ewolucji układu Serreta–Freneta został zdefiniowany przez wektory:

- styczny do krzywej $\mathbf{t}_0 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \quad 0 \quad 0,5\right)^T$,
- normalny do krzywej $\mathbf{n}_0 = (0 \quad 1 \quad 0)^T$,
- binormalny do krzywej $\mathbf{b}_0 = \left(-0,5 \quad 0 \quad \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^T$.

Profil prędkościowy wzdłuż krzywej określono jako $\dot{s}_d = 0,2 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$.

Początkową konfigurację manipulatora dobrano tak, aby znajdował się blisko punktu początkowego krzywej. Przyjęto następujące pozycje przegubowe

$$\mathbf{q}_0 = (130,1 \quad 48,7 \quad -43,2 \quad 85,8 \quad -60,0 \quad 79,8 \quad 23,9)^T [\text{deg}],$$

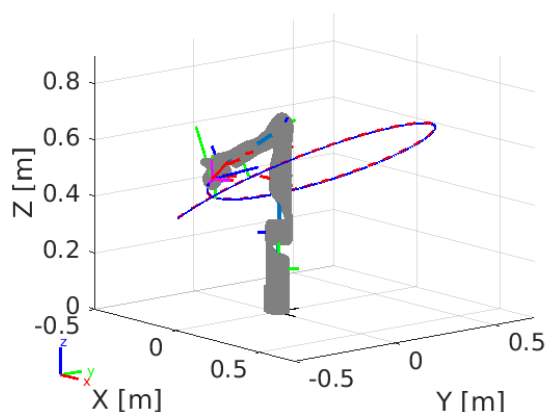
natomiast początkowe prędkości przegubowe określono jako zerowe, $\dot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{0}$. Celem zadania było dokładne odwzorowanie ścieżki, a więc przyjęto zerowy żądany stan manipulatora względem ścieżki, $\mathbf{x}_d = \mathbf{0}$. Do realizacji scenariusza przyjęto następujące nastawy sterowników: $\mathbf{K}_k = \text{diag}_{3 \times 3}\{100\}$, $\mathbf{K}_d = \text{diag}\{40, 40, 40, 40, 40, 40, 80\}$. Na poniższych wykresach zestawiono wyniki eksperymentalne oraz symulacyjne.

Na rys. 5.19 znajduje się zdjęcie ze stanowiska laboratoryjnego przedstawiające manipulator w konfiguracji końcowej, a także odpowiadającą mu wizualizację wyników symulacji. Ponadto, na nagraniu [33] przedstawiono porównanie realizacji zadania na stanowisku eksperymentalnym z wizualizacją wyników symulacji. Uzyskane wyniki świadczą o zgodności rezultatów symulacji i badania na rzeczywistym obiekcie, co potwierdzają również poniższe wykresy.

Na rys. 5.20 przedstawiono kłotoidę zrealizowaną w symulacji oraz podczas eksperymentu. W obu przypadkach zrealizowaną ścieżkę porównano z zadaną krzywą teoretyczną. W trakcie wykonywania manewru nie można dostrzec istotnych różnic w wykonanym ruchu, choć zachowanie robota w symulacji jest bardziej precyzyjne. Różnica pojawia się



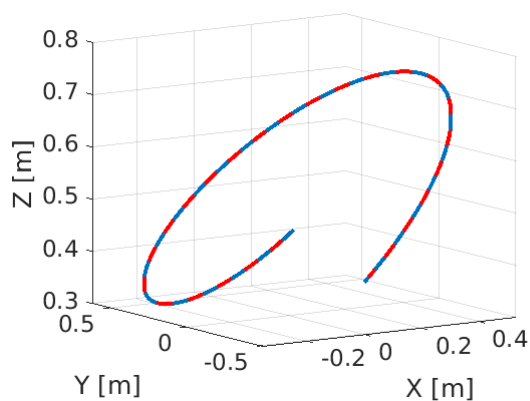
(a) Eksperyment



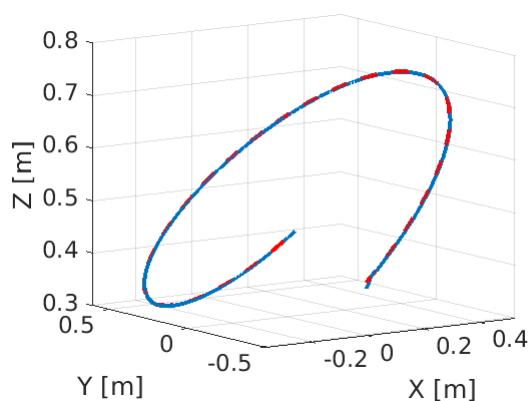
(b) Symulacja numeryczna

Rysunek 5.19: Manipulator w konfiguracji końcowej – walidacja eksperymentalna algorytmu opartego o pełną znajomość modelu.

jedynie w chwili początkowej, gdy ruch rzeczywistego robota został zaburzony. Mogło to wynikać z konstrukcji manipulatora lub opóźnień w transmisji na stanowisku eksperymentalnym.



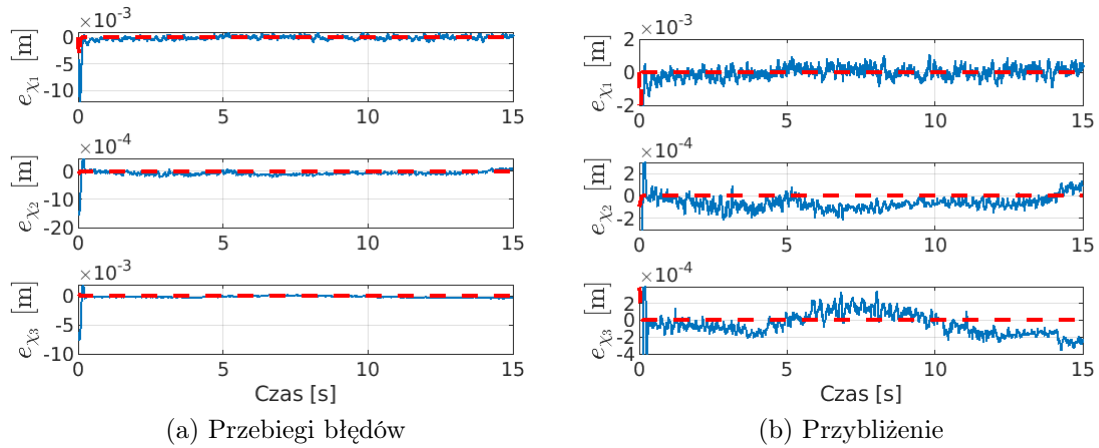
(a) Symulacja numeryczna



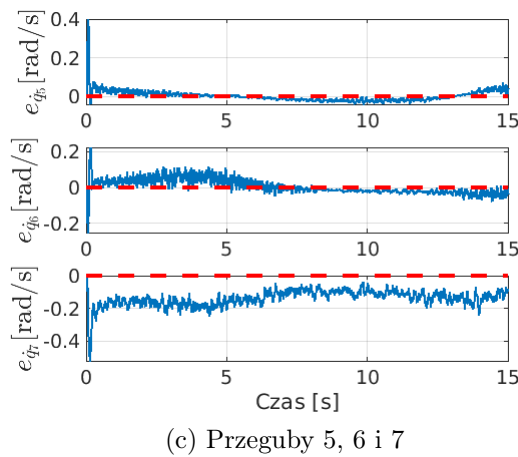
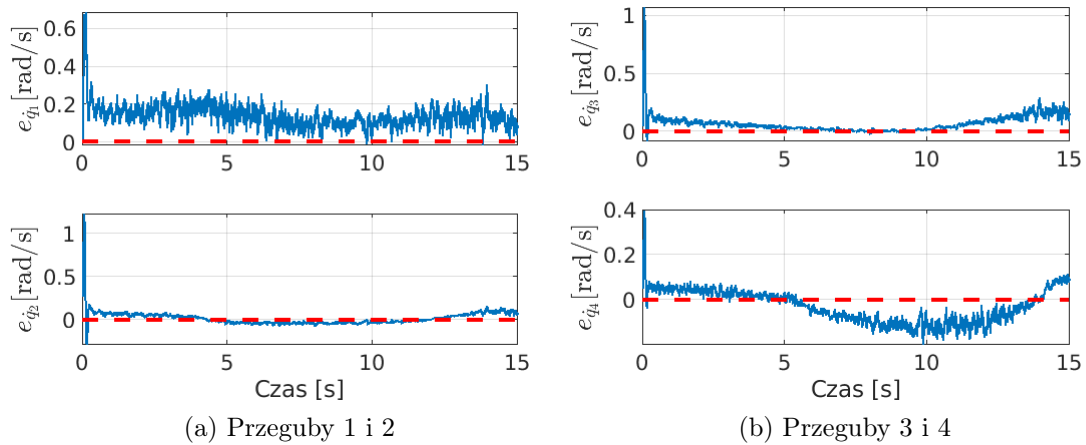
(b) Eksperyment

Rysunek 5.20: Porównanie ścieżki zrealizowanej przez manipulator (linia niebieska) oraz ścieżki zadanej (linia czerwona) – walidacja eksperymentalna algorytmu opartego o pełną znajomość modelu.

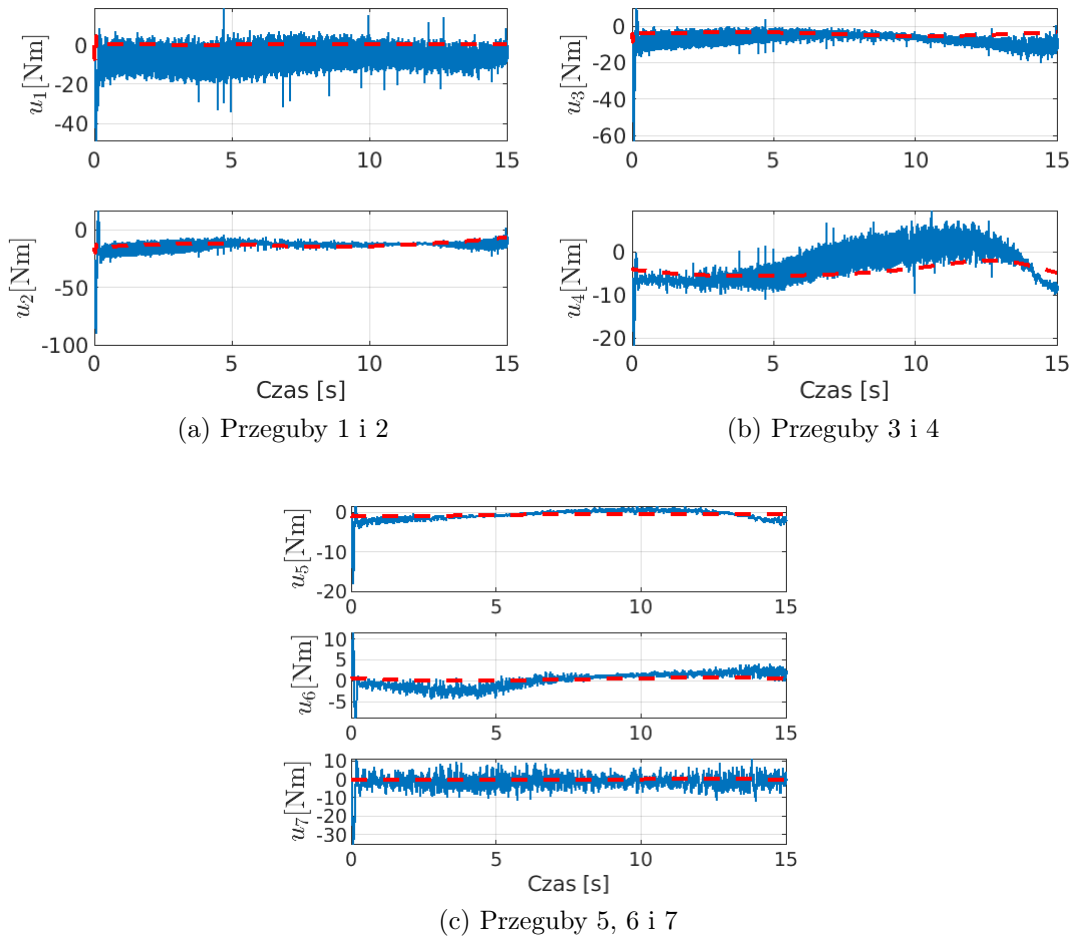
Na bardziej wnikliwą analizę realizacji zadanej krzywej pozwalają wykresy błędów śledzenia ścieżki, które przedstawiono na rys. 5.21. Można zauważyć, że zarówno w badaniu eksperymentalnym, jak i w symulacji początkowy błąd jest kompensowany, a błędy zbiegają do otoczenia zera. Wartość błędu na początku manewru w przypadku realizacji zadania na rzeczywistym obiekcie jest większa, co potwierdza poprzednią obserwację o zaburzeniu w chwili początkowej. Ponadto, wyniki eksperymentu cechują się większym zaszumieniem, co wynika z precyzji zastosowanych czujników. Rząd wielkości występujących różnic jest jednak niewielki, więc rezultaty otrzymane symulacyjnie oraz eksperymentalnie można uznać za zbieżne.



Rysunek 5.21: Błędy śledzenia ścieżki $\mathbf{e}_\chi$: eksperyment (linia niebieska) oraz symulacja (linia czerwona) – walidacja eksperymentalna algorytmu opartego o pełną znajomość modelu.



Rysunek 5.22: Błędy śledzenia profili prędkościowych $\mathbf{e}_{\dot{\mathbf{q}}}$: eksperyment (linia niebieska) oraz symulacja (linia czerwona) – walidacja eksperymentalna algorytmu opartego o pełną znajomość modelu.



Rysunek 5.23: Wygenerowane sygnały sterujące $\mathbf{u}$: eksperyment (linia niebieska) oraz symulacja (linia czerwona) – walidacja eksperymentalna algorytmu opartego o pełną znajomość modelu.

Na rys. 5.22 przedstawiono z kolei przebiegi błędów śledzenia profili prędkościowych na poziomie dynamicznym. Sterownik oparty o pełną znajomość modelu poprawnie realizuje profile prędkościowe wygenerowane przez sterownik kinematyczny, a rząd wielkości zmierzonych błędów jest niewielki. Należy jednak zauważyć, że precyzja realizacji manewru w symulacji jest znacznie większa, niż w przypadku badania eksperymentalnego. Wynika to z faktu, że rozważany sterownik dynamiczny jest wrażliwy na niedoskonałości modelowania, np. brak uwzględnienia sił tarcia. Należy podkreślić, że pomimo tego zadana ścieżka jest realizowana poprawnie, choć w celu zwiększenia precyzji ruchu należałoby rozważyć ponowne procedury identyfikacji parametrów manipulatora.

Istotną różnicę można zaobserwować w przebiegach sygnałów sterujących, które zaprezentowano na rys. 5.23. Sygnały generowane w przypadku rzeczywistym są znacznie większe (co do wartości bezwzględnej) niż w symulacji ze względu na pominięte w modelu siły tarcia czy oporów ruchu. Duża amplituda sterowań wynika z konieczności ciągłej kompensacji błędów powstałych na skutek niedokładności modelu dynamiki. Wpływ na to ma również niedoskonałość komunikacji na stanowisku laboratoryjnym. Niemniej jednak, należy podkreślić, że w żadnym przegubie nie zostały naruszone dopuszczalne ograniczenia zdefiniowane w dokumentacji technicznej manipulatora KINOVA[®] Gen3 [64].

Algorytm uniwersalny. W kolejnym badaniu eksperymentalnym do realizacji profili prędkościowych zaplanowanych przez sterownik kinematyczny zastosowano uniwersalny algorytm λ -śledzenia. Równania oraz własności algorytmu przedstawiono w rozdziale 5.2.4. Algorytm uniwersalny stanowi odpowiedź na problem nieznajomości modelu dynamiki manipulatora. W związku z tym można go stosować, aby kompensować nieuwzględnione elementy, np. tarcie czy siły oporu.

Tym razem rozważono ścieżkę zadaną jako linię śrubową z parametrami: $\mathbf{a} = 0,51$, $\mathbf{b} = 0,07$. Równania linii śrubowej przedstawiono w dodatku B.2. Warto podkreślić, że w badaniu eksperymentalnym przyjęto, że punkt początkowy śruby znajdował się na wysokości $0,25$ [m] ponad płaszczyznę X_0Y_0 układu bazy manipulatora, co widać na rys. 5.24b. Przyjęto, że zadany profil prędkościowy wzdłuż ścieżki wynosi $\dot{s}_d = 0,23$ [$\frac{m}{s}$].

Konfigurację początkową manipulatora dobrano tak, aby punkt prowadzenia robota znajdował się blisko punktu początkowego ścieżki. Stąd, w chwili początkowej pozycje przegubowe były równe

$$\mathbf{q}_0 = (6,9 \quad 49,3 \quad -14,8 \quad 126,2 \quad -2,6 \quad -85,2 \quad -85,0)^T [\text{deg}]. \quad (5.63)$$

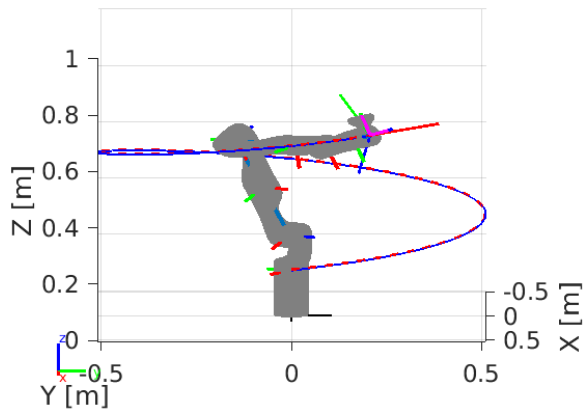
Z kolei prędkości przegubowe w chwili początkowej ponownie przyjęto jako zerowe, $\dot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{0}$. Wzorem poprzedniego eksperymentu, ponownie realizowano zadanie dokładnego odwzorowania krzywej. Stąd przyjęto zerowy stan żądany względem ścieżki, $\mathbf{x}_d = \mathbf{0}$.

Do realizacji algorytmu λ -śledzenia przyjęto wartości nastaw i parametrów: $\mathbf{K}_d = \text{diag}_{7 \times 7}\{5\}$, $\mathbf{K}_p = \text{diag}_{7 \times 7}\{25\}$, $\lambda = 0,4$ oraz $K(0) = 10$. Wykorzystano również sterownik kinematyczny na podstawie Twierdzenia 2. Przyjęto wartości nastaw $\mathbf{K}_k = \text{diag}_{3 \times 3}\{75\}$. Do opisu manipulatora względem ścieżki zastosowano nieortogonalną parametryzację Bishopa. Na poniższych rysunkach porównano wyniki badania eksperymentalnego oraz symulacji.

Na rys. 5.24 przedstawiono zdjęcie ze stanowiska laboratoryjnego w chwili końcowej eksperymentu, a także odpowiadającą mu wizualizację wyników symulacyjnych. Dodatkowo, na nagraniu [32] zaprezentowano przebieg całego eksperymentu i wizualizację symulacji numerycznej. Te wyniki oraz przebieg ścieżek zrealizowanych w obu przypadkach,



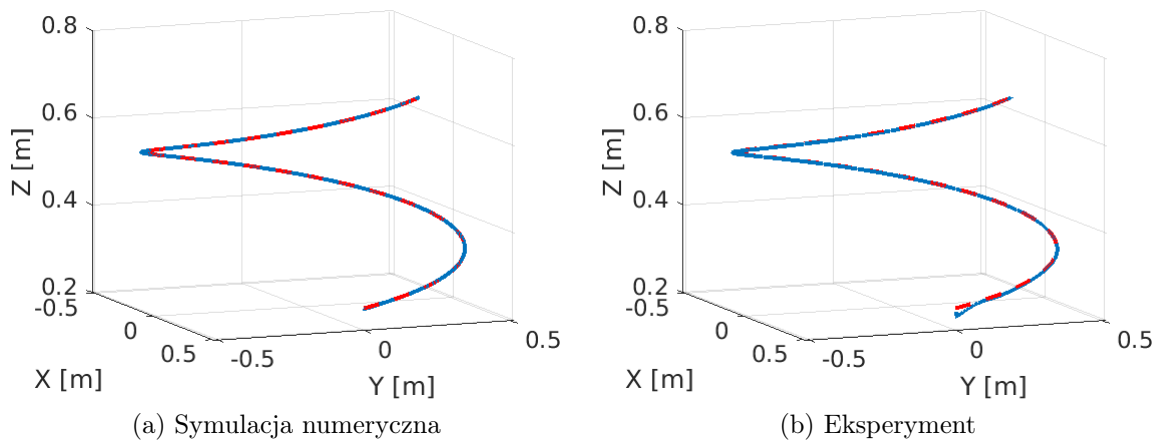
(a) Eksperyment



(b) Symulacja numeryczna

Rysunek 5.24: Manipulator w konfiguracji końcowej – walidacja eksperymentalna algorytmu uniwersalnego.

które zostały porównane z zadaną krzywą teoretyczną na rys. 5.25, świadczą o poprawności zrealizowanego manewru. Ponownie uzyskane wyniki są tożsame z dokładnością do zachowania się rzeczywistego robota w chwili początkowej, gdzie można zauważyć drobne odchylenie (rys. 5.25b). Wynika stąd, że istotnie punkt prowadzenia robota dobrze odwzorowuje położenie układu lokalnego na ścieżce.

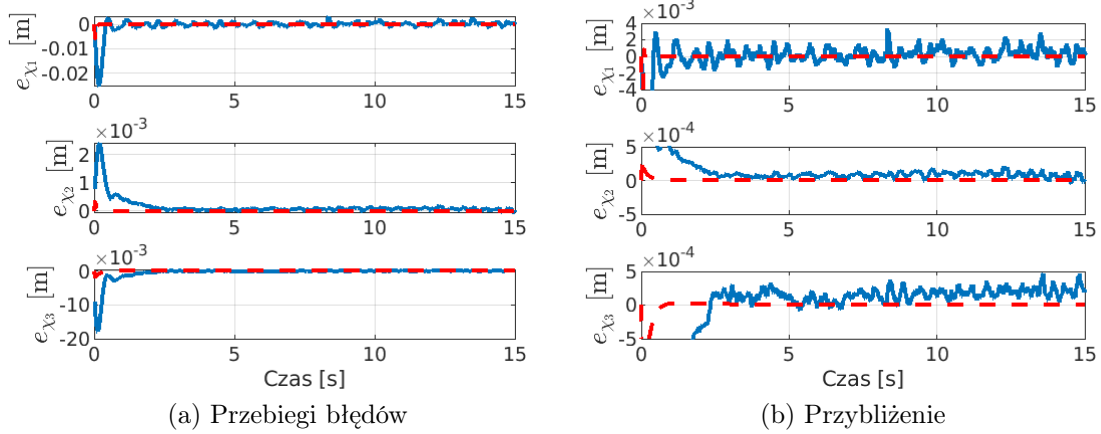


Rysunek 5.25: Porównanie ścieżki zrealizowanej przez manipulator (linia niebieska) oraz ścieżki zadanej (linia czerwona) – walidacja eksperymentalna algorytmu uniwersalnego.

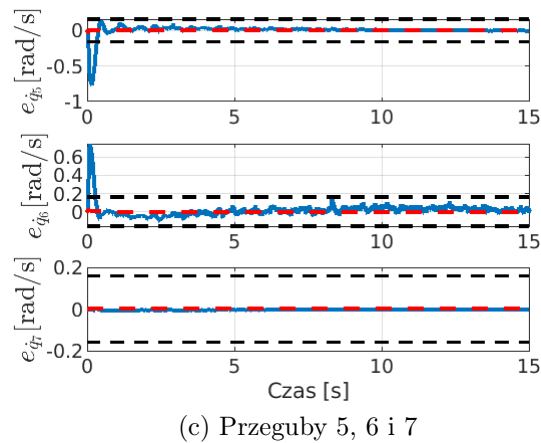
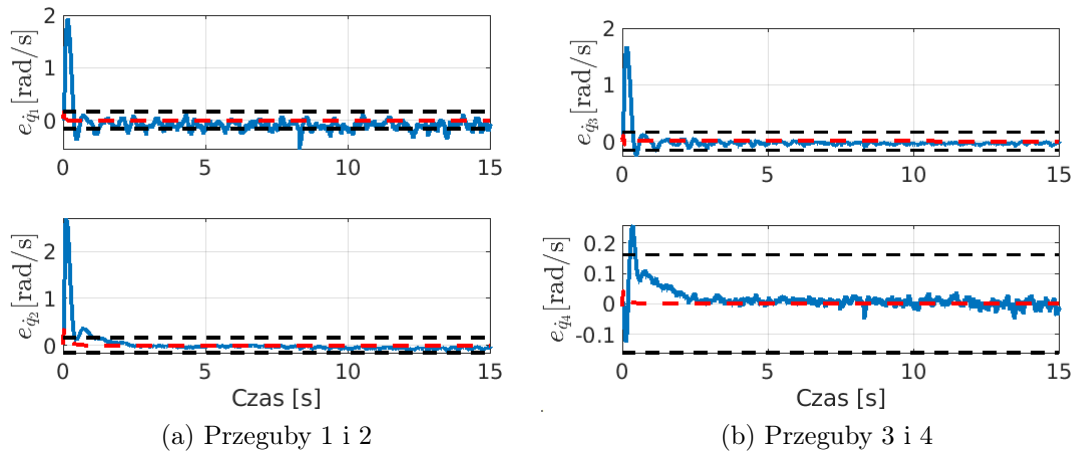
Rys. 5.26 przedstawia błędy śledzenia ścieżki. Można tutaj zaobserwować, że błąd pojawiający się na początku manewru podczas eksperymentu jest większy niż w przypadku symulacji. Może to wynikać z niedoskonałości konstrukcyjnych robota lub opóźnień w transmisji na stanowisku laboratoryjnym. Układ sterowania poprawnie kompensuje błąd, a wyniki śledzenia ścieżki są porównywalne w obu metodach badania. Można zatem uznać, że otrzymane rezultaty są zgodne, a weryfikacja eksperymentalna potwierdza wyniki numeryczne. Warto podkreślić, że rząd wielkości błędów uzyskanych w eksperymencie jest taki sam, jak dla sterownika opartego o pełny model dynamiki manipulatora wykorzystanego w poprzednim badaniu.

Na rys. 5.27 przedstawiono błędy śledzenia profili prędkościowych. Prezentowane porównanie świadczy o zgodności wyników symulacyjnych oraz eksperymentalnych, mimo że szum pomiarowy jest istotnie większy w przypadku badań na obiekcie rzeczywistym. Na wykresach zaznaczono również ograniczenia na sygnał błędu prędkościowego, które wynikają z dobranych parametrów algorytmu λ -śledzenia. Określone wartości ograniczeń błędów są bezpośrednią realizacją własności algorytmu omówionych w rozdziale 5.2.4. Dla wszystkich przegubów uzyskane wyniki są satysfakcjonujące, zwłaszcza dla przegubów małych (rys. 5.27c). Można jednak zauważyć, że piki wartości szumu pomiarowego w przegubie 1 nieznacznie przekraczają dolny limit. Wynika to z faktu największego obciążenia tego przegubu.

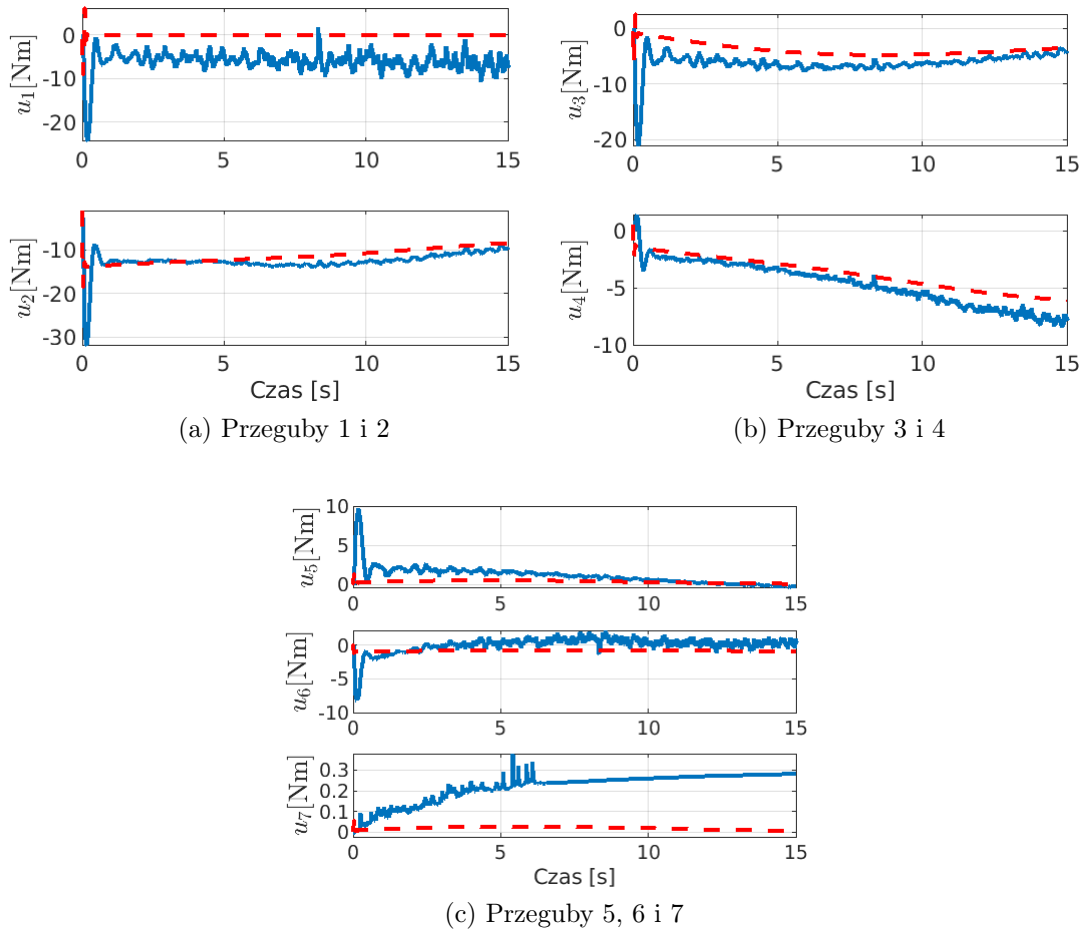
Wreszcie, na rys. 5.28 zaprezentowano sygnały sterujące. W obu przypadkach uzyskane wartości są podobnego rzędu, co świadczy o zgodności otrzymanych wyników. Należy podkreślić, że wartości wygenerowane dla rzeczywistego robota są nieznacznie większe co do wartości bezwzględnej we wszystkich przegubach. Wynika to z pominięcia pewnych elementów modelu w symulacji, np. tarcia. Obserwowane różnice są jednak niewielkie, a rezultaty potwierdzają praktyczną stosowalność zaproponowanego algorytmu.



Rysunek 5.26: Błędy śledzenia ścieżki e_{χ} : eksperyment (linia niebieska) oraz symulacja (linia czerwona) – walidacja eksperymentalna algorytmu uniwersalnego.



Rysunek 5.27: Błędy śledzenia profili prędkościowych $e_{\dot{q}}$: eksperyment (linia niebieska), symulacja (linia czerwona), ograniczenie błędu (linia czarna) – walidacja eksperymentalna algorytmu uniwersalnego.



Rysunek 5.28: Wygenerowane sygnały sterujące $\mathbf{u}$: eksperyment (linia niebieska) oraz symulacja (linia czerwona) – walidacja eksperymentalna algorytmu uniwersalnego.

5.4.2 Postura robota względem ścieżki

Do weryfikacji możliwości śledzenia orientacji końcówki chwytaka względem układu lokalnego na ścieżce rozważono scenariusz analogiczny do badania weryfikującego śledzenie położenia względem ścieżki z wykorzystaniem algorytmu uniwersalnego, który przedstawiono w poprzednim rozdziale.

Ponownie zatem układ sterowania został zbudowany ze sterownika kinematycznego danego Twierdzeniem 2 oraz algorytmu uniwersalnego λ -śledzenia na poziomie dynamicznym. W tym przypadku jednak stan robota względem ścieżki jest zdefiniowany przez jego posturę, a więc $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6$. Rozważono dwie metody reprezentacji orientacji: kąty Eulera w konwencji Z-Y-X oraz kwaterniony jednostkowe. W obu przypadkach rozważono tę samą stałą żadaną orientację układu stowarzyszonego z punktem prowadzenia robota względem układu lokalnego na ścieżce. Jest ona wyrażona przez równoważne wartości

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{w}_d} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}^T [\text{rad}], \quad (5.64a)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{w}_d} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{pmatrix}^T. \quad (5.64b)$$

W konsekwencji rozszerzenia stanu robota względem ścieżki, macierz $\mathbf{L}$ w równaniu (5.2) jest macierzą prostokątną, $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{6 \times 7}$. Korekty wymaga zatem rozmiar macierzy wzmocnienia $\mathbf{K}_k \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$. Jednakże wartości nastaw sterowników pozostały bez zmian: $\mathbf{K}_k = \text{diag}_{6 \times 6}\{75\}$, $\mathbf{K}_d = \text{diag}_{7 \times 7}\{5\}$, $\mathbf{K}_p = \text{diag}_{7 \times 7}\{25\}$, $\lambda = 0, 4$ oraz $K(0) = 10$.

Do opisu manipulatora względem ścieżki wykorzystano inną metodę parametryzacji. Tym razem do wyprowadzenia równań robota względem ścieżki wykorzystano nieortogonalną parametryzację Serreta–Freneta. W obu przypadkach zadaną ścieżkę zdefiniowano jako linię śrubową, której równania zostały podane w dodatku B.2. Parametry ścieżki i profil prędkościowy były identyczne, jak w poprzednim badaniu, tzn. $\mathbf{a} = 0, 51$, $\mathbf{b} = 0, 07$, $\dot{s}_d = 0, 23 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$. Podobnie zastosowano tę samą konfigurację początkową manipulatora, daną równaniem (5.63) przy zerowych początkowych prędkościach przegubowych.

W poniższych sekcjach przedstawiono wyniki badań symulacyjnych i eksperymentalnych śledzenia zadanej postury manipulatora względem ścieżki, gdy zastosowano różne metody reprezentacji orientacji. Należy podkreślić, że rozważany scenariusz wprost stanowi rozszerzenie przypadku zastosowania algorytmu uniwersalnego do realizacji zadanego położenia względem ścieżki, który opisano w rozdziale 5.4.1.

Orientacja reprezentowana za pomocą kątów Eulera. Zastosowanie kątów Eulera w konwencji Z-Y-X do realizacji orientacji danej równaniem (5.64a) skutkuje definicją zadanej postury robota względem ścieżki w postaci

$$\mathbf{x}_d = \left(0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{\pi}{2} \text{ [rad]} \right)^T.$$

Przyjęte założenie, że położenie i orientacja względem ścieżki są stałe podczas całego manewru, jest realizowane poprzez przyjęcie $\dot{\mathbf{x}}_d = \mathbf{0}$.

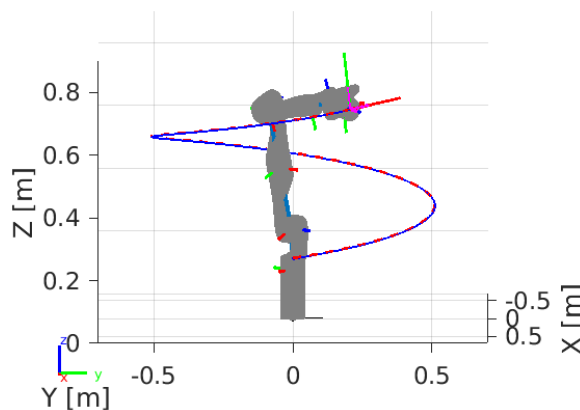
Na poniższych wykresach porównano wyniki symulacji i eksperymentu dla scenariusza, w którym rozważono realizację tak zdefiniowanej postury robota względem ścieżki. Warto podkreślić, że analogiczne eksperymenty walidacyjne zostały zaprezentowane przez autora rozprawy w pracy [36].

Rys. 5.29 to zestawienie zdjęcia ze stanowiska eksperymentalnego, gdy manipulator znajduje się w stanie końcowym, a także wizualizacja odpowiadających wyników symulacji. Ponadto, na nagraniu [31] zestawiono przebieg manewru w symulacji oraz na stanowisku laboratoryjnym. Warto zwrócić uwagę, że konfiguracja robota na rys. 5.29 jest inna, niż ta przedstawiona na rys. 5.24. Choć ścieżka jest identyczna, to dodatkowy wymóg realizacji orientacji względnej spowodował, że ruch w poszczególnych przegubach robota był odmienny. Rys. 5.29b potwierdza, że zadana orientacja układu zaczepionego w punkcie prowadzenia robota względem układu lokalnego na ścieżce została zrealizowana poprawnie.

Na rys. 5.30 porównano z kolei ścieżkę zadaną i ścieżkę zrealizowaną przez manipulator w obu odsłonach studium. Można zauważyć, że dzięki dobranej konfiguracji początkowej robota punkt prowadzenia znajduje się na ścieżce w chwili rozpoczęcia manewru. W rezultacie nie występuje faza przejściowa, gdy manipulator musi dojść do ścieżki. W obu przypadkach ścieżka została zrealizowana poprawnie, a wyniki eksperymentalne i symulacyjne są bardzo zbliżone. Jediną różnicę można zauważyć na początku manewru. W badaniu eksperymentalnym pojawiło się niewielkie odchylenie od ścieżki, które zostało jednak szybko skompensowane. Mogło ono wynikać z konstrukcji mechanicznej robota lub opóźnień w transmisji na stanowisku eksperymentalnym.

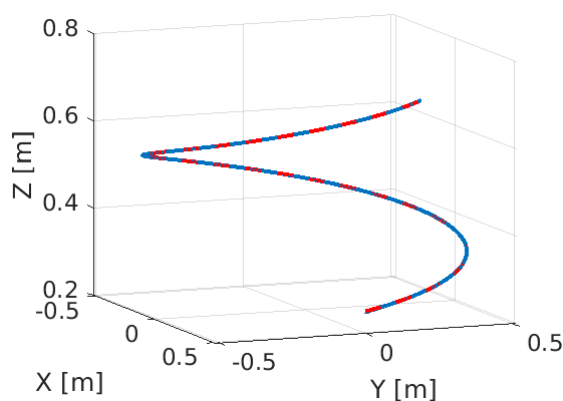


(a) Eksperyment

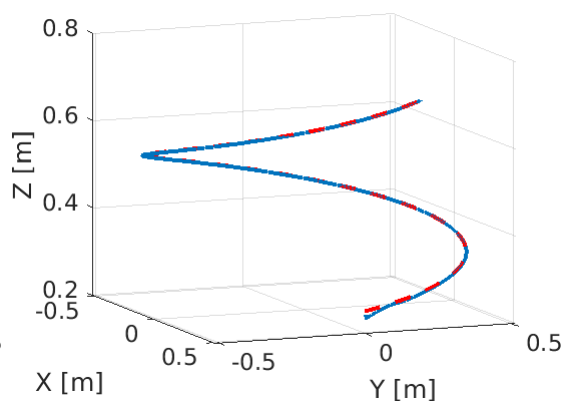


(b) Symulacja numeryczna

Rysunek 5.29: Manipulator w konfiguracji końcowej – orientacja reprezentowana przez kąty Eulera.



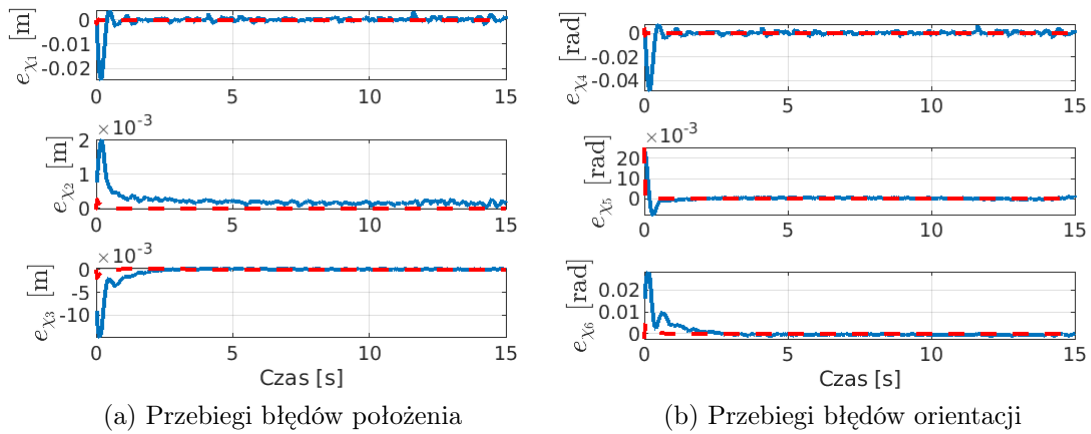
(a) Symulacja numeryczna



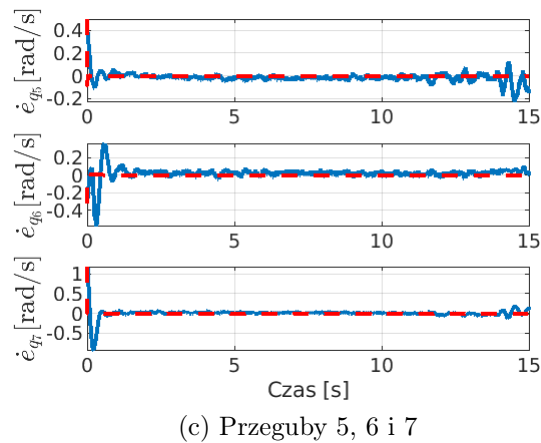
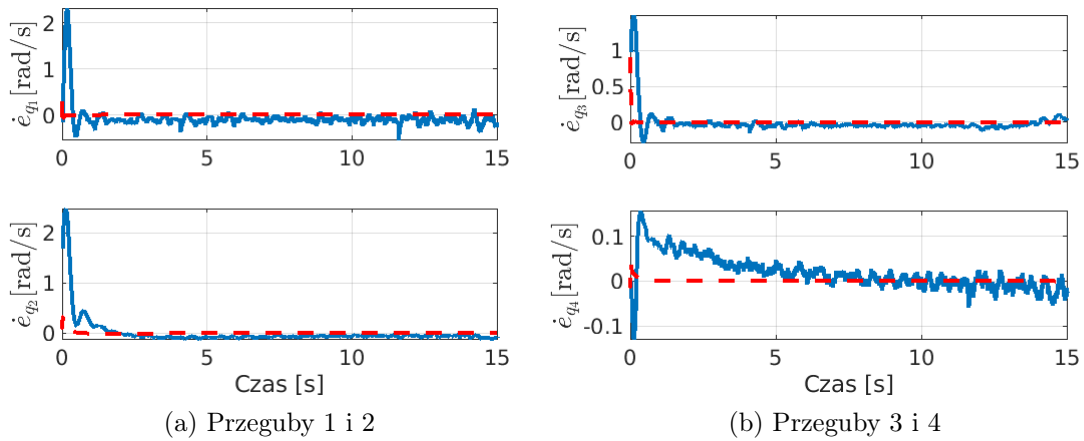
(b) Eksperyment

Rysunek 5.30: Porównanie ścieżki zrealizowanej przez manipulator (linia niebieska) oraz ścieżki zadanej (linia czerwona) – orientacja reprezentowana przez kąty Eulera.

O poprawnej realizacji zadanej ścieżki świadczą również wykresy błędów śledzenia ścieżki, które przedstawiono na rys. 5.31. Wszystkie zmierzone błędy zbiegają do zera, co potwierdza przedstawione wcześniej wyniki teoretyczne. Na szczególną uwagę zasługują błędy zaprezentowane na rys. 5.31b. Świadczą one bowiem, że zadana orientacja końcówki chwytaka względem układu Serreta–Freneta na ścieżce została zrealizowana poprawnie. Na wykresach widać również, że na początku manewru błąd w badaniu eksperymentalnym jest istotnie większy, niż w symulacji. Jest to odzwierciedlenie nieznacznej odchyłki od ścieżki zadanej, która jest widoczna na rys. 5.30b. Z kolei na rys. 5.32 pokazano przebiegi błędów śledzenia profili prędkościowych. Te wykresy również potwierdzają poprawność realizacji zadania oraz zgodność wyników. Można jednak zauważyć, że przebiegi uzyskane w ramach eksperymentu są obarczone dodatkowym szumem. Mimo mniejszej dokładności pomiaru, zadanie śledzenia ścieżki jest realizowane prawidłowo.

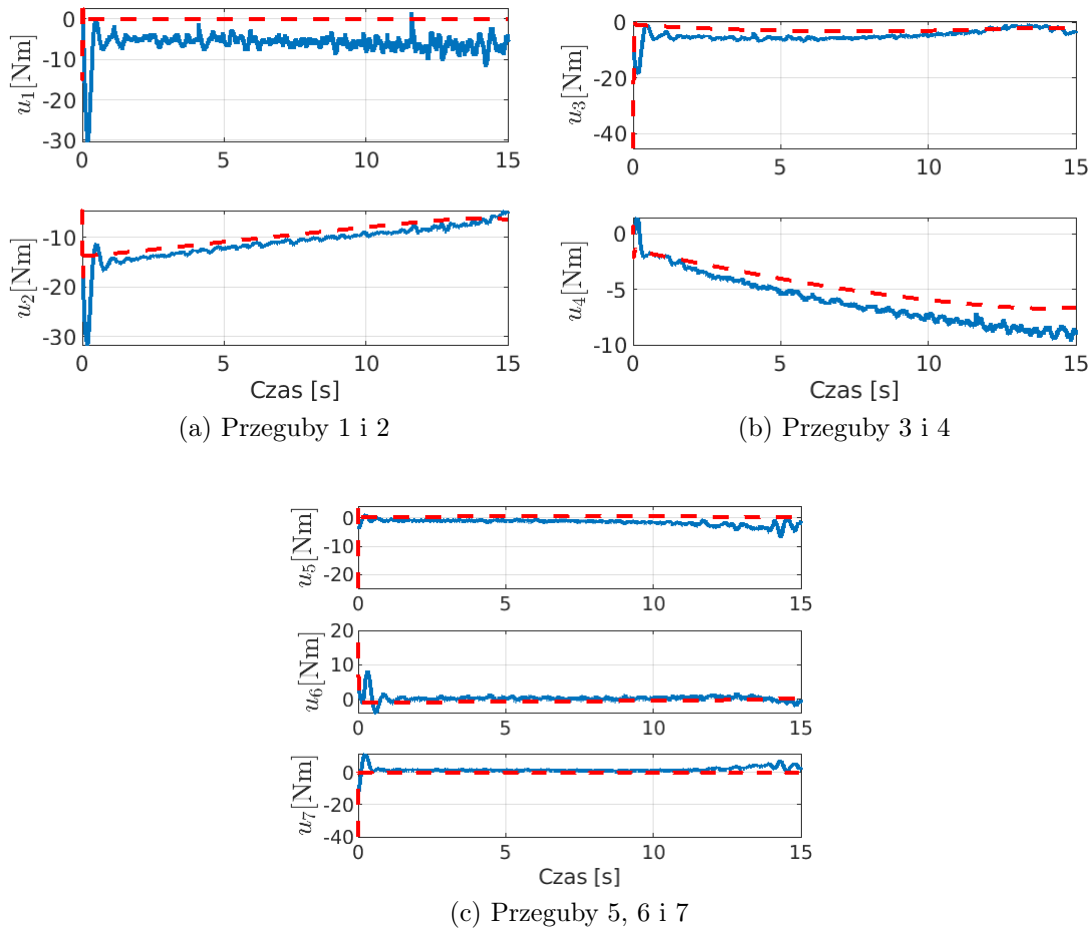


Rysunek 5.31: Błędy śledzenia ścieżki $\mathbf{e}_\chi$: eksperyment (linia niebieska) oraz symulacja (linia czerwona) – orientacja reprezentowana przez kąty Eulera.



Rysunek 5.32: Błędy śledzenia profili prędkościowych $\dot{\mathbf{e}}_q$: eksperyment (linia niebieska) oraz symulacja (linia czerwona) – orientacja reprezentowana przez kąty Eulera.

Wreszcie, na rys. 5.33 przedstawiono przebiegi wygenerowanych sygnałów sterujących. Ponownie można zauważyć pewną różnicę między wynikami symulacyjnymi a eksperymentalnymi. Jak wspomniano wcześniej, wynika ona z nieuwzględnienia w symulacji sił tarcia i innych oddziaływań, które występują na rzeczywistym obiekcie. Należy jednak podkreślić, że występujące różnice nie są znaczące, dzięki czemu możemy wnioskować o zgodności wyników symulacyjnych i eksperymentalnych. Potwierdza to praktyczną stosowalność zaproponowanego algorytmu do realizacji zadanej postury manipulatora wzdłuż ścieżki.



Rysunek 5.33: Wygenerowane sygnały sterujące $\mathbf{u}$: eksperyment (linia niebieska) oraz symulacja (linia czerwona) – orientacja reprezentowana przez kąty Eulera.

Orientacja reprezentowana za pomocą kwaternionów jednostkowych. W ramach ostatniego eksperymentu na obiekcie rzeczywistym przedstawionego w niniejszej rozprawie zweryfikowano możliwość realizacji postury chwytaka względem ścieżki, gdy orientacja względna jest wyrażona za pomocą kwaternionów jednostkowych. Zgodnie ze Spostrzeżeniem 8, w przypadku orientacji względnej reprezentowanej przez kwaterniony jednostkowe należy odrzucić jedną ze składowych, aby macierz $\mathbf{L}$ w równaniu kinematyki robota względem ścieżki (3.78) była macierzą pełnego rzędu. W przedstawionym badaniu odrzucono pierwszą składową kwaternionu jednostkowego. Stąd, postura manipulatora

względem ścieżki przyjmuje postać

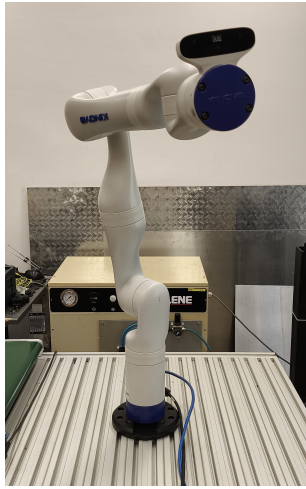
$$\mathbf{x} = \left(\mathbf{d}^T \quad \left(\boldsymbol{\epsilon}_w^{(1)} \right)^T \right)^T = (d_1 \quad d_2 \quad d_3 \quad \epsilon_{w_1} \quad \epsilon_{w_2} \quad \epsilon_{w_3})^T. \quad (5.65)$$

Zatem wartości żądanej postury manipulatora względem ścieżki pozwalające na realizację zadanej orientacji wyrażonej równaniem (5.64b) jest następująca

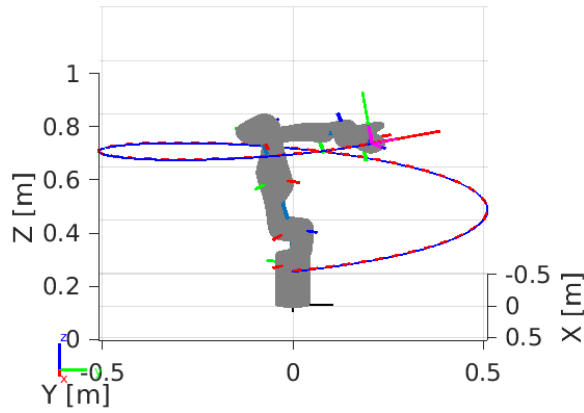
$$\mathbf{x}_d = \left(0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0 \quad 0 \right)^T.$$

Wyniki realizacji tak zdefiniowanego scenariusza przedstawiono na poniższych wykresach. Warto podkreślić, że analogiczną walidację algorytmu pozwalającego na realizację zadanej postury manipulatora względem ścieżki w oparciu o kwaterniony jednostkowe autor rozprawy opisał w pracy [37].

Na rys. 5.34 przedstawiono manipulator w konfiguracji końcowej na stanowisku laboratoryjnym oraz wizualizację wyników symulacyjnych w chwili końcowej. Można zauważyć, że prezentowany stan manipulatora jest tożsamy w obu przypadkach. O zgodności przebiegu manewru podczas eksperymentu oraz w symulacji świadczy również nagranie [30]. Warto podkreślić, że uzyskana konfiguracja jest identyczna, jak w przypadku zastosowania kątów Eulera (por. rys. 5.29). Obie metody reprezentacji orientacji pozwalają zatem na poprawną realizację zadanej postury.



(a) Eksperyment

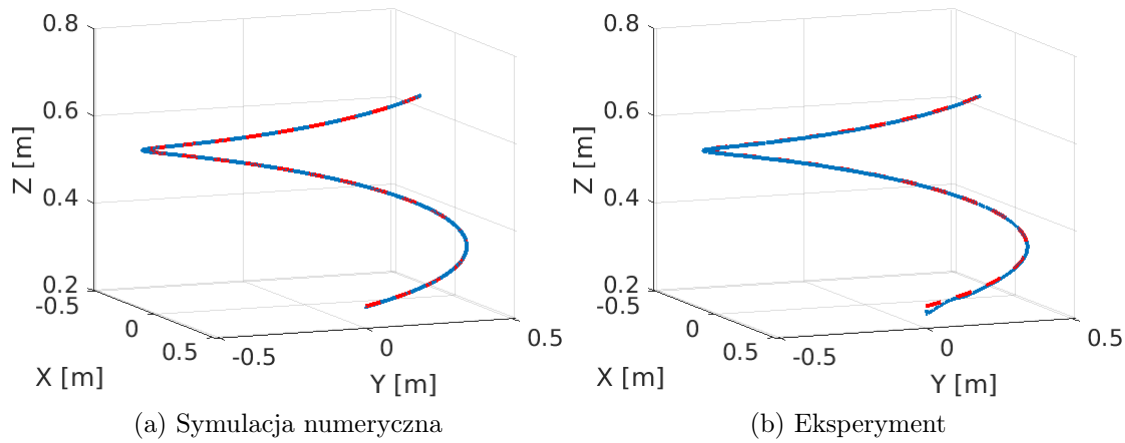


(b) Symulacja numeryczna

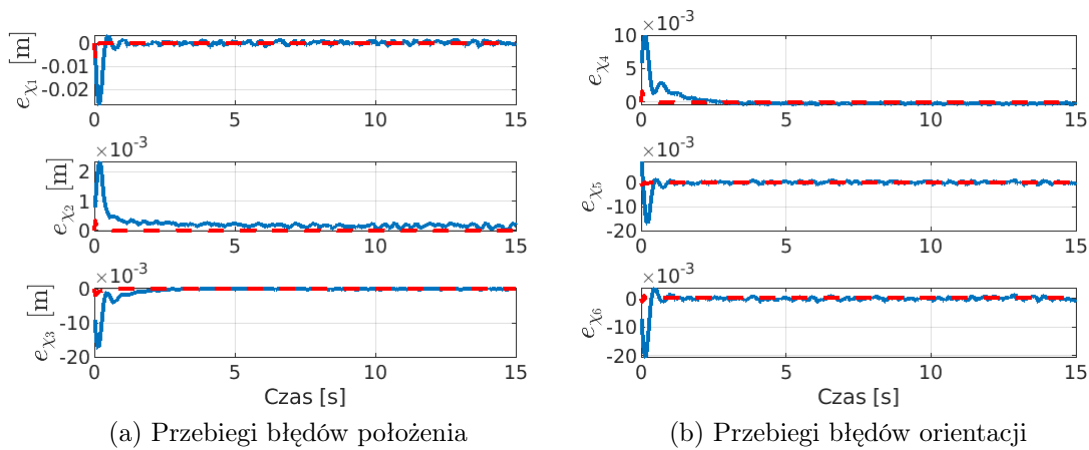
Rysunek 5.34: Manipulator w konfiguracji końcowej – orientacja reprezentowana przez kwaterniony jednostkowe.

Na rys. 5.35 zestawiono ścieżkę zadaną ze ścieżkami zrealizowanymi przez manipulator zarówno w badaniu symulacyjnym, jak i eksperymentalnym. Widać wyraźnie, że w obu przypadkach linia śrubowa została odwzorowana podobnie i poprawnie. Ponownie w wynikach eksperymentu można zaobserwować pewną odchyłkę od zadanej ścieżki na początku manewru. Błąd ten jednak został szybko skompensowany.

Rys. 5.36 prezentuje wykresy błędów śledzenia ścieżki. Uzyskane wyniki potwierdzają, że ścieżka jest realizowana poprawnie, a błędy zbiegają do zera. Stanowi to również potwierdzenie dla uzyskanych rezultatów teoretycznych. Wyniki symulacyjne są zgodne



Rysunek 5.35: Porównanie ścieżki zrealizowanej przez manipulator (linia niebieska) oraz ścieżki zadanej (linia czerwona) – orientacja reprezentowana przez kwaterniony jednostkowe.

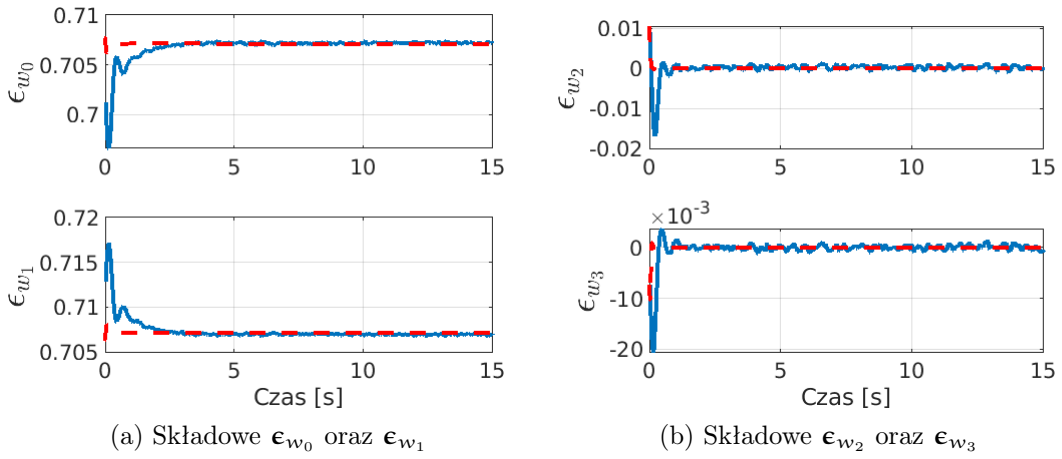


Rysunek 5.36: Błędy śledzenia ścieżki $\mathbf{e}_x$: eksperyment (linia niebieska) oraz symulacja (linia czerwona) – orientacja reprezentowana przez kwaterniony jednostkowe.

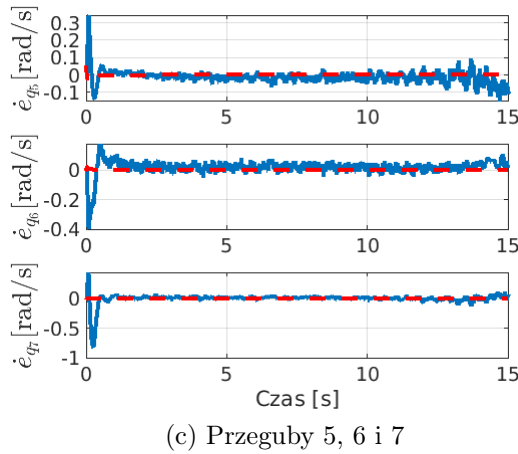
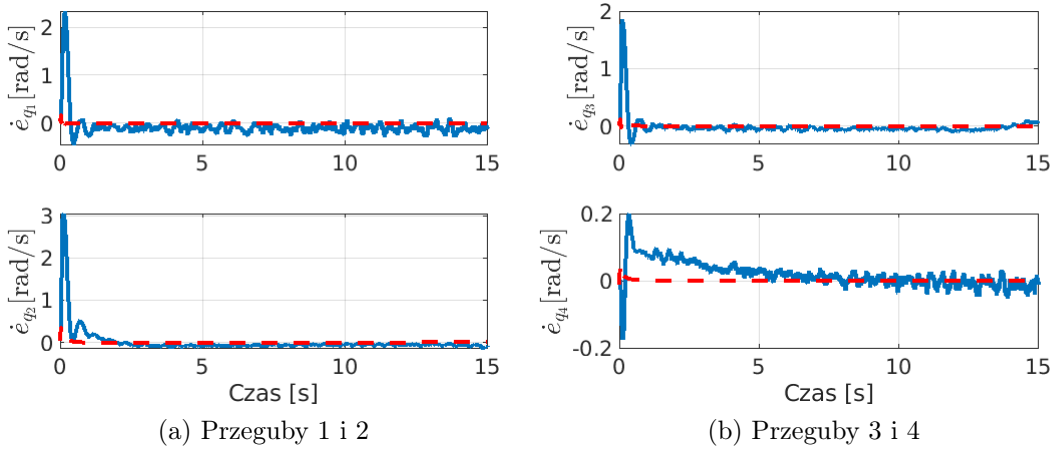
z wynikami eksperymentalnymi, co świadczy o możliwych zastosowaniach praktycznych przedstawionych algorytmów.

Z kolei na rys. 5.37 przedstawiono przebiegi poszczególnych składowych kwaternionu jednostkowego, który opisuje orientację chwytaka względem układu lokalnego na ścieżce. Istotnie, uzyskane i utrzymywane wartości są równe wartościom zadanym. Należy podkreślić, że również składowa odrzucona na etapie projektowania stanu robota względem ścieżki (ϵ_{w_0}) osiąga zadaną wartość, gdyż wynika jednoznacznie z trzech pozostałych składowych. Potwierdza to, że zaproponowane podejście w Spostrzeżeniu 8 jest słuszne.

Błędy śledzenia profili prędkościowych na poziomie dynamicznym zostały pokazane na rys. 5.38. Ponownie uzyskano zbieżność błędów do zera, a wyniki symulacyjne i eksperymentalne są zgodne. W rezultatach badań eksperymentalnych widoczny jest szum pomiarowy, który wpływa na precyzję realizacji zadania, lecz nie wpływa na jej poprawność.

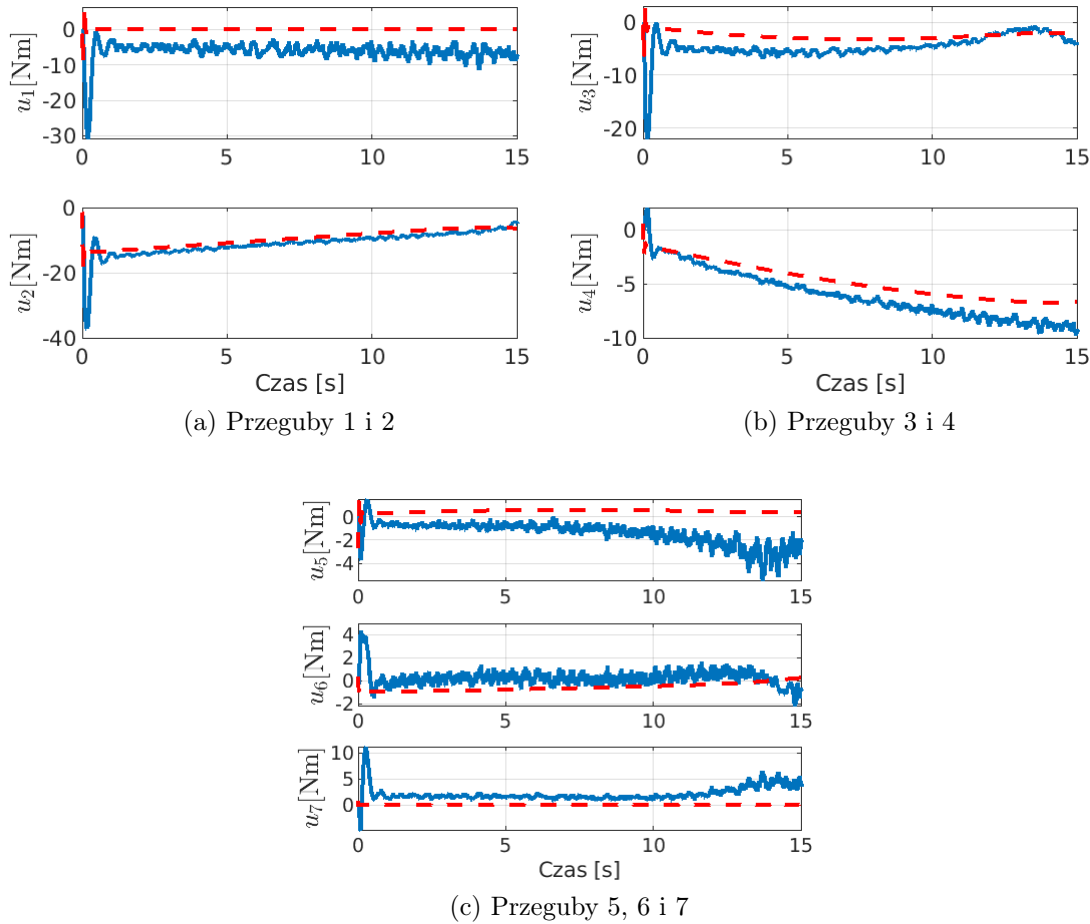


Rysunek 5.37: Orientacja chwytaka względem układu Serreta–Freneta na ścieżce ϵ_w : eksperyment (linia niebieska) oraz symulacja (linia czerwona) – orientacja reprezentowana przez kwaterniony jednostkowe.



Rysunek 5.38: Błędy śledzenia profili prędkościowych $\dot{\epsilon}_q$: eksperyment (linia niebieska) oraz symulacja (linia czerwona) – orientacja reprezentowana przez kwaterniony jednostkowe.

Wreszcie, na rys. 5.39 przedstawiono przebiegi wygenerowanych sygnałów sterujących. Różnice w przebiegach między wynikami symulacji a eksperymentu wynikają z różnego zachowania robota na samym początku manewru oraz nieuwzględnienia w symulacji pewnych czynników, np. tarcia. Występujące różnice nie są jednak znaczące, więc można wnioskować o praktycznej stosowalności przedstawionego podejścia.



Rysunek 5.39: Wygenerowane sygnały sterujące u : eksperyment (linia niebieska) oraz symulacja (linia czerwona) – orientacja reprezentowana przez kwaterniony jednostkowe.

5.5 Podsumowanie

W niniejszym rozdziale przedstawiono metody sterowania obiektem holonomicznym, które pozwalają na realizację zadania śledzenia ścieżki. Zdefiniowano sterownik na poziomie kinematycznym w Twierdzeniu 2. Podano również prawa sterowania na poziomie dynamicznym, które umożliwiają realizację profili prędkościowych wygenerowanych przez sterownik kinematyczny. Rozważono różne stopnie znajomości modelu dynamiki robota:

- pełna znajomość: sterownik zdefiniowano w Twierdzeniu 3;
- nieznaną parametryczną: sterownik adaptacyjny zdefiniowano w Twierdzeniu 4;

- nieznajomość strukturalna: sterownik oparty na algorytmie ślizgowym zdefiniowano w Twierdzeniu 5. Warto podkreślić, że jest to algorytm odporny na zakłócenia wynikające z nieznajomości struktury modelu dynamiki lub wartości parametrów masowo-inercyjnych;
- brak znajomości: jako rozwiązanie zaproponowano dwa algorytmy, Qu–Dorsey’a oraz λ -śledzenia.

Przeprowadzono badania celem zweryfikowania otrzymanych wyników teoretycznych. W kolejnych scenariuszach rozważano różne metody parametryzacji: nieortogonalną Serreta–Freneta, ortogonalną *beta*, ortogonalną Bishopa, nieortogonalną *beta*, nieortogonalną Bishopa. Pokazano, że w ogólnym przypadku można zastosować każde z zaproponowanych rozwiązań. Dobór odpowiedniego rozwiązania zależy od uwarunkowań zadania oraz właściwości parametryzacji, które omówiono szerzej w rozdziale 7.

Zaprezentowane rezultaty badań symulacyjnych świadczą o poprawności przedstawionych wyników teoretycznych i potwierdzają przedstawione własności algorytmów sterowania. Najmniejszą precyzję ruchu otrzymano dla algorytmów stosowanych przy całkowitej nieznajomości dynamiki systemu. Algorytmy adaptacyjny oraz ślizgowy pozwalały na dobrą kompensację zakłóceń wynikających z nieznajomości elementów modelu dynamiki.

Ponadto, zweryfikowano praktyczną stosowalność zaproponowanych rozwiązań poprzez walidację eksperymentalną. Zrealizowano zadanie śledzenia ścieżki na rzeczywistym manipulatorze KINOVA[®] Gen3. Otrzymane wyniki były zgodne z wynikami badań symulacyjnych. Obserwowane różnice wynikały z dokładności pomiarowej czujników, w które wyposażony jest manipulator, opóźnień w transmisji sygnałów na stanowisku eksperymentalnym, a także pominięcia niektórych aspektów (np. tarcia) w środowisku symulacyjnym. Niemniej jednak, rozbieżności nie były znaczące i przedstawione wyniki potwierdzają słuszność prezentowanych rozwiązań.

Badania przeprowadzone na manipulatorze redundantnym KINOVA[®] Gen3 pokazały również skuteczność zaproponowanych metod do realizacji zadanej postury manipulatora względem układu lokalnego na ścieżce. Satysfakcjonujące wyniki uzyskano zarówno dla orientacji reprezentowanej przez kąty Eulera, jak i kwaterniony jednostkowe. Choć opis w kątach Eulera jest prostszy i bardziej intuicyjny, to może być obciążony osobliwościami samej reprezentacji. Stąd w pewnych aplikacjach korzystniejsze może być stosowanie kwaternionów jednostkowych.

Rozdział 6

Sterowanie mobilnym obiektem nieholonomicznym

W niniejszym rozdziale rozważono metody sterowania mobilnymi obiektami nieholonomicznymi, które realizują zadanie śledzenia ścieżki. Do opisu robota nieholonomicznego względem ścieżki zostały wykorzystane modele oparte o parametryzację krzywoliniowe, które zostały przedstawione w rozdziale 3. To podejście jest analogiczne, jak w przypadku metod sterowania obiektami holonomicznymi, które szczegółowo przedstawiono w rozdziale 5. Istotną różnicą jest jednak konieczność uwzględnienia dodatkowych ograniczeń prędkościowych, które występują w układach nieholonomicznych. W rozdziale 4.2.2 wskazano, że można to zrobić poprzez sformułowanie warunku (4.11). Ze względu na fakt, że zarówno ograniczenia nieholonomiczne I rodzaju, jak i ograniczenia wynikające z opisu robota względem ścieżki mają charakter ograniczeń prędkościowych, możliwe jest powiązanie ich w ramach jednego warunku. Architektura układu sterowania, prezentowana w tej części, wynika z założeń i wytycznych przedstawionych w rozdziale 4.

Jako przedmiot szczególnego zainteresowania w tej części rozprawy wybrano nieholonomiczne manipulatory mobilne. Te nietrywialne konstrukcje są coraz powszechniej wykorzystywane w różnorodnych aplikacjach robotycznych. Są szczególnie istotne dla automatyzacji procesów transportowych czy skomplikowanych operacji podnoszenia. Charakteryzują się również istotnym poszerzeniem przestrzeni roboczej względem manipulatorów stacjonarnych [79]. Jednakże sama struktura robota jest bardziej skomplikowana, co ma swoje przełożenie na projektowanie algorytmów sterowania [77]. Manipulator mobilny to system robotyczny składający się z dwóch osobnych podsystemów: platformy mobilnej oraz manipulatora umieszczonego na platformie. Ze względu na ograniczenia ruchu, które mogą wystąpić w każdym z tych podsystemów, można wyróżnić następujące konfiguracje manipulatora mobilnego [76]:

- typ (h, h) – zarówno platforma mobilna, jak i manipulator są holonomiczne;
- typ (nh, h) – platforma mobilna jest nieholonomiczna, natomiast zamontowane na niej ramię robotyczne jest holonomiczne;
- typ (h, nh) – holonomiczna platforma mobilna z nieholonomicznym manipulatorem;
- typ (nh, nh) – oba podsystemy, tzn. platforma mobilna oraz manipulator, są nieholonomiczne. Taki układ został określony jako podwójnie nieholonomiczny manipulator mobilny [121].

W badaniach symulacyjnych rozważono przykład manipulatora mobilnego typu (nh, h) , którego model przedstawiono w dodatku A.3.

Podsystemy manipulatora mobilnego są ze sobą dynamicznie sprzężone. Często jednak tylko jeden z nich obarczony jest ograniczeniami nieholonomicznymi. W szczególności, problem ten dotyczy rozważanego typu (nh, h) . Z tego względu wprowadza się wektor rozszerzonych prędkości pomocniczych, które przyjmują postać

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}}_{nh} \\ \dot{\mathbf{q}}_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \dot{\mathbf{q}}_h \end{pmatrix}, \quad (6.1)$$

gdzie $\boldsymbol{\eta}$ oznacza prędkości pomocnicze zdefiniowane zgodnie z równaniem (4.6) i odpowiadające prędkościom podsystemu nieholonomicznego $\dot{\mathbf{q}}_{nh}$, natomiast $\dot{\mathbf{q}}_h$ oznacza uogólnione prędkości podsystemu holonomicznego w przestrzeni konfiguracyjnej. Podsystem holonomiczny nie podlega transformacjom, które zostały zdefiniowane w rozdziale 4 dla systemu nieholonomicznego. Konsekwencje ograniczeń prędkościowych przenoszą się jednak na podsystem holonomiczny poprzez sprzężenie dynamiczne obu podsystemów. Warto podkreślić, że jeśli $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^m$ oraz $\mathbf{q}_h \in \mathbb{R}^h$, to $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{m+h}$. W dalszych rozważaniach w tym rozdziale przyjęto bez straty ogólności, że $m + h = p$.

Grupowanie zmiennych wykonane w równaniu (6.1) ma swoje odzwierciedlenie w postaci wektora sterowań, na który składają się sterowania podsystemu nieholonomicznego $\mathbf{u}_{nh} \in \mathbb{R}^m$ oraz sterowania podsystemu holonomicznego $\mathbf{u}_h \in \mathbb{R}^h$. W rezultacie, dla nieholonomicznego manipulatora mobilnego zachodzi

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{nh} \\ \mathbf{u}_h \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p. \quad (6.2)$$

Ze względu na różnorodność podsystemów składających się na mobilny manipulator, wprowadza się model kinematyki oraz dynamiki takiego obiektu wyrażony w rozszerzonych prędkościach pomocniczych:

1. Kinematyka nieholonomicznego manipulatora mobilnego wynikająca z opisu robota względem ścieżki oraz ograniczeń nieholonomicznych obiektu – na podstawie równań (4.1) oraz (4.12)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{L}^* \mathbf{z} + \mathbf{f}. \quad (6.3)$$

2. Dynamika nieholonomicznego manipulatora mobilnego – na podstawie równań (4.2) oraz (4.13)

$$\mathbf{Q}^* \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{C}^* \mathbf{z} + \mathbf{g}^* = \mathbf{B}^* \mathbf{u}, \quad (6.4)$$

przy czym wymiary poszczególnych elementów modelu wynoszą: $\mathbf{Q}^* \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $\mathbf{C}^* \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $\mathbf{g}^* \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{B}^* \in \mathbb{R}^{p \times p}$. W dodatku A.3 przedstawiono przykład, jak uzyskać model manipulatora mobilnego typu (nh, h) , gdy znane są modele podsystemów składowych: platformy mobilnej oraz ramienia robotycznego.

6.1 Sterownik kinematyczny

Do projektowania algorytmu dla zdefiniowanego układu kaskadowego zastosowano metodę całkowania wstecznego, którą przedstawiono w rozdziale 4. Zgodnie z tym podejściem, projekt układu sterowania należy rozpocząć od najbardziej wewnętrznego podsystemu. W przypadku mobilnego obiektu nieholonomicznego ten poziom kaskady jest

określony przez kinematykę robota daną równaniem (6.3). Wejście do tego podsystemu stanowią rozszerzone prędkości pomocnicze $\mathbf{z}$, natomiast stan manipulatora mobilnego względem ścieżki został standardowo oznaczony jako $\mathbf{x}$. Przez stan obiektu względem ścieżki należy rozumieć położenie punktu prowadzenia robota względem ścieżki, orientację względną układu umieszczonego w punkcie prowadzenia robota względem układu lokalnego na ścieżce lub całą posturę względną robota. Konkretna definicja zależy od sformułowanego problemu sterowania. Dla takiego układu definiuje się sterownik kinematyczny zgodnie z następującym Twierdzeniem 6.

Twierdzenie 6. *Niech będzie dany wektor błędów śledzenia ścieżki*

$$\mathbf{e}_x = \mathbf{x} - \mathbf{x}_d, \quad (6.5)$$

gdzie $\mathbf{x}$ oznacza rzeczywisty stan obiektu względem ścieżki, natomiast $\mathbf{x}_d$ oznacza stan żądany. Wówczas, dla systemu (6.3) sterowanie postaci

$$\mathbf{z}_{ref} = (\mathbf{L}^*)^\# \left(\dot{\mathbf{x}}_d - \mathbf{K}_k \mathbf{e}_x - \mathbf{f} \right) \quad (6.6)$$

gwarantuje asymptotyczną zbieżność błędów śledzenia ścieżki $\mathbf{e}_x$ do zera. W równaniu (6.6) macierz $(\mathbf{L}^*)^\#$ oznacza macierz pseudoodwrotną, tzn. $(\mathbf{L}^*)^\# = (\mathbf{L}^*)^\top \left(\mathbf{L}^* (\mathbf{L}^*)^\top \right)^{-1}$, natomiast macierz $\mathbf{K}_k$ jest dodatnio określona macierzą wzmocnień sterownika.

Dowód. Rozważając jedynie poziom kinematyczny, można uznać system (6.3) za niezależny od wyższych stopni zdefiniowanego kaskadowego układu sterowania. Stąd, można przyjąć, że wejście do tego systemu przyjmuje postać referencyjnych profili prędkościowych zdefiniowanych równaniem (6.6). Wówczas układ (6.3) z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego (6.6) jest opisany równaniem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{L}^* (\mathbf{L}^*)^\# \left(\dot{\mathbf{x}}_d - \mathbf{K}_k \mathbf{e}_x - \mathbf{f} \right) + \mathbf{f}, \quad (6.7)$$

co przekształca się do postaci równoważnej

$$\dot{\mathbf{e}}_x = -\mathbf{K}_k \mathbf{e}_x. \quad (6.8)$$

Niech będzie dana funkcja

$$V_5(\mathbf{e}_x) = \frac{1}{2} \mathbf{e}_x^\top \mathbf{e}_x. \quad (6.9)$$

Funkcja (6.9) jest równa zero dla $\mathbf{e}_x = \mathbf{0}$ i dodatnia dla $\mathbf{e}_x \neq \mathbf{0}$. Można ją zatem rozważyć jako funkcję Lapunova. Pochodna funkcji V_5 po czasie wynosi

$$\dot{V}_5(\mathbf{e}_x) = \mathbf{e}_x^\top \dot{\mathbf{e}}_x. \quad (6.10)$$

Pochodna funkcji Lapunova (6.9) liczona wzdłuż trajektorii układu z zamkniętą pętlą (6.8) ma postać

$$\dot{V}_5(\mathbf{e}_x) = -\mathbf{e}_x^\top \mathbf{K}_k \mathbf{e}_x. \quad (6.11)$$

Uzyskany rezultat to forma kwadratowa dodatnio określonej macierzy ze znakiem ujemnym. Spełnia zatem warunki

$$\dot{V}_5(\mathbf{e}_x) < 0, \quad \text{gdy } \mathbf{e}_x \neq \mathbf{0}, \quad (6.12a)$$

$$\dot{V}_5(\mathbf{e}_x) = 0, \quad \text{gdy } \mathbf{e}_x = \mathbf{0}. \quad (6.12b)$$

Na podstawie twierdzenia LaSalle'a [13] można wnioskować o asymptotycznej stabilności systemu (6.8). W konsekwencji, błędy śledzenia ścieżki $\mathbf{e}_x$ zbiegają asymptotycznie do zerowego punktu równowagi. $\square$

Spostrzeżenie 16. *Struktura sterownika kinematycznego jest identyczna w przypadku sterowania obiektem holonomicznym, jak i mobilnym obiektem nieholonomicznym. Wynika to z faktu, że ograniczenia rozważane dla tych obiektów zawsze mają charakter prędkościowy. Podstawowa różnica leży w szczegółowej postaci wykorzystanych macierzy. Dla obiektów nieholonomicznych konieczne jest bowiem uwzględnienie na tym etapie ograniczeń wynikających z nieholonomiczności obiektu.*

W ten sposób otrzymano sterownik kinematyczny odpowiedzialny za generowanie profili prędkościowych, które gwarantują spełnienie dwojakich ograniczeń kinematycznych: wynikających z opisu robota względem ścieżki oraz z nieholonomiczności obiektu. W następnym rozdziale zaproponowano sterowniki dynamiczne, które pozwalają realizować zadane profile prędkościowe w drugim stopniu kaskady rozważanego układu sterowania.

6.2 Sterownik dynamiczny

Na drugim poziomie kaskadowego układu sterowania, zdefiniowanego w rozdziale 4, należy zastosować algorytm, który pozwoli na realizację profili prędkościowych wygenerowanych przez sterownik kinematyczny. Warto przypomnieć, że profile prędkościowe $\mathbf{z}_{ref}$, które były interpretowane jako wejście poziomu kinematycznego w rozdziale 6.1, na poziomie dynamicznym stanowią składową stanu systemu. Istotny jest fakt, że postać funkcyjna stanu jest ściśle określona równaniem (6.6).

Ta postać funkcyjna bezpośrednio wpływa na przebiegi błędów śledzenia na poziomie dynamicznym kaskadowego układu sterowania. Rozważanym błędem jest błąd śledzenia profili prędkościowych, który określa się zależnością

$$\mathbf{e}_z = \mathbf{z} - \mathbf{z}_{ref}. \quad (6.13)$$

Uwzględnienie w równaniu (6.13) zależności (6.6) prowadzi do postaci

$$\mathbf{e}_z(\mathbf{e}_x) = \mathbf{z} - (\mathbf{L}^*)^\# (\dot{\mathbf{x}}_d - \mathbf{K}_k \mathbf{e}_x - \mathbf{f}). \quad (6.14)$$

Widać zatem wyraźnie, że przebiegi błędów na poziomie dynamicznym nie są dowolne, lecz ściśle zdefiniowane przez wynik działania sterownika na poziomie kinematycznym. Równanie (6.14) uwidacznia również sprzężenie błędów śledzenia z obu poziomów kaskady układu sterowania: błędów śledzenia ścieżki $\mathbf{e}_x$ oraz błędów śledzenia profili prędkościowych $\mathbf{e}_z$.

Dobór narzędzia do realizacji zadania w drugim stopniu kaskadowego układu sterowania zależy również od uwarunkowań. W tym przypadku zostaną rozważone różne poziomy znajomości modelu dynamiki rozważanego robota. W niniejszym rozdziale zostaną przedstawione algorytmy:

- bazujący na pełnej znajomości modelu dynamiki;
- ślizgowy.

Algorytm bazujący na pełnej znajomości modelu dynamiki jest przykładem algorytmu dysypatywnego (opartego o bierność). Do jego zastosowania konieczna jest całkowita znajomość modelu dynamiki (6.4). Choć oczekiwanym rezultatem jest precyzyjna realizacja zadania, to algorytm nie uwzględnia wpływu zewnętrznych czynników lub elementów pominiętych w modelowaniu robota. Z tego względu do jego zastosowania może być konieczne przeprowadzenie dodatkowej procedury identyfikacji rzeczywistych parametrów obiektu sterowania [65, 91].

Pewną odpowiedzią na potencjalne trudności w praktycznym wykorzystaniu algorytmu opartego o pełną znajomość modelu dynamiki jest algorytm ślizgowy. Jest to rozwiązanie, które można zastosować w przypadku nieznajomości parametrycznej lub strukturalnej modelu dynamiki. Ta metoda należy również do rodziny algorytmów odpornych na zakłócenia zewnętrzne.

Przy analizie metod sterowania manipulatorami mobilnymi warto podkreślić również fakt, że obiekty tego typu nie zachowują własności manipulatorów stacjonarnych, która została przytoczona w Spostrzeżeniu 13. Z tego względu konieczne jest uwzględnienie w prawie sterowania tzw. macierzy korekcji $\mathbf{C}^\gamma$. Jej definicja została sformułowana w poniższym Spostrzeżeniu 17.

Spostrzeżenie 17. *W przypadku manipulatorów mobilnych macierz $(\dot{\mathbf{Q}}^* - 2\mathbf{C}^*)$ nie zachowuje własności skośnej symetrii [29], która jest typowa dla manipulatorów stacjonarnych [122]. Należy zatem wprowadzić macierz korekcji $\mathbf{C}^\gamma$, aby zachodziła zależność [76]*

$$\dot{\mathbf{Q}}^* = (\mathbf{C}^* + \mathbf{C}^\gamma) + (\mathbf{C}^* + \mathbf{C}^\gamma)^\top. \quad (6.15)$$

6.2.1 Sterowanie w oparciu o pełną znajomość modelu dynamiki

W sytuacji, gdy model dynamiki manipulatora mobilnego (6.4) jest w pełni znany, do realizacji profili prędkościowych wygenerowanych przez sterownik kinematyczny (6.6) można zastosować algorytm z rodziny algorytmów dysypatywnych. Prawo sterowania zostało sformułowane w Twierdzeniu 7. Warto zauważyć, że sterownik oparty o pełną znajomość modelu dynamiki dla nieholonomicznego manipulatora mobilnego został sformułowany przez autora rozprawy w pracy [38].

Twierdzenie 7. *Niech będzie dany nieholonomiczny manipulator mobilny, którego model dynamiki wyrażony równaniem (6.4) jest w pełni znany. Wówczas, prawo sterowania*

$$\mathbf{u} = (\mathbf{B}^*)^{-1} \left(\mathbf{Q}^*(\mathbf{q})\dot{\mathbf{z}}_{ref} + \mathbf{C}^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{z}_{ref} + \mathbf{g}^*(\mathbf{q}) - \mathbf{K}_d\mathbf{e}_z - \mathbf{C}^\gamma\mathbf{e}_z \right), \quad (6.16)$$

gdzie $\mathbf{K}_d$ jest dodatnio określoną macierzą wzmocnień, gwarantuje asymptotyczną zbieżność do zera błędów śledzenia profili prędkościowych $\mathbf{e}_z$ oraz sprzężonych z nimi błędów śledzenia ścieżki $\mathbf{e}_x$.

Dowód. Równanie systemu (6.4) z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego (6.16) przyjmuje postać

$$\mathbf{Q}^*\dot{\mathbf{e}}_z + \mathbf{C}^*\mathbf{e}_z + \mathbf{K}_d\mathbf{e}_z + \mathbf{C}^\gamma\mathbf{e}_z = 0. \quad (6.17)$$

Wynika stąd zależność

$$\mathbf{Q}^* \dot{\mathbf{e}}_z = -\mathbf{C}^* \mathbf{e}_z - \mathbf{C}^\gamma \mathbf{e}_z - \mathbf{K}_d \mathbf{e}_z. \quad (6.18)$$

Niech będzie dana funkcja, która zależy zarówno od błędów śledzenia ścieżki $\mathbf{e}_x$, jak i od błędów śledzenia profili prędkościowych $\mathbf{e}_z$

$$V_6(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z) = V_5(\mathbf{e}_x) + \frac{1}{2} \mathbf{e}_z^T \mathbf{Q}^*(\mathbf{q}) \mathbf{e}_z. \quad (6.19)$$

Zauważmy, że funkcja V_6 jest nieujemna jako suma nieujemnej funkcji V_5 , która została zdefiniowana zależnością (6.9), oraz formy kwadratowej macierzy bezwładności $\mathbf{Q}^*$. Należy podkreślić, że dla niezerowych wartości błędów $\mathbf{e}_x$ oraz $\mathbf{e}_z$ funkcja V_6 przyjmuje wartości dodatnie, natomiast w zerze jej wartość zeruje się. Oznacza to, że funkcja V_6 jest dobrym kandydatem na funkcję Lapunova dla systemu (6.17).

Pochodna funkcji (6.19) po czasie wynosi

$$\dot{V}_6(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z) = \dot{V}_5(\mathbf{e}_x) + \mathbf{e}_z^T \mathbf{Q}^* \dot{\mathbf{e}}_z + \frac{1}{2} \mathbf{e}_z^T \dot{\mathbf{Q}}^* \mathbf{e}_z. \quad (6.20)$$

Pochodna ta, liczona wzdłuż trajektorii układu (6.18) oraz (6.15), wynosi

$$\begin{aligned} \dot{V}_6(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z) &= \dot{V}_5(\mathbf{e}_x) + \mathbf{e}_z^T \underbrace{(-\mathbf{C}^* \mathbf{e}_z - \mathbf{C}^\gamma \mathbf{e}_z - \mathbf{K}_d \mathbf{e}_z)}_{(6.18)} + \mathbf{e}_z^T \underbrace{(\mathbf{C}^* + \mathbf{C}^\gamma)}_{(6.15)} \mathbf{e}_z = \\ &= \dot{V}_5(\mathbf{e}_x) - \mathbf{e}_z^T \mathbf{K}_d \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Nietrudno zauważyć, że dzięki zależności (6.12) oraz dla dodatniej określoności macierzy $\mathbf{K}_d$ funkcja $\dot{V}_6$ (6.21) spełnia następujące warunki

$$\dot{V}_6(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z) < 0, \quad \text{gdy } (\mathbf{e}_x^T \quad \mathbf{e}_z^T)^T \neq \mathbf{0}, \quad (6.22a)$$

$$\dot{V}_6(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z) = 0, \quad \text{gdy } (\mathbf{e}_x^T \quad \mathbf{e}_z^T)^T = \mathbf{0}. \quad (6.22b)$$

Na mocy zasady niezmienniczości LaSalle'a [13] z warunków (6.22) wynika, że dla dodatnio określonej macierzy $\mathbf{K}_d$ system (6.17) jest asymptotycznie stabilny z zerowym punktem równowagi. Błędy śledzenia $\mathbf{e}_x$ oraz $\mathbf{e}_z$ zbiegają zatem asymptotycznie do zera. Wynika stąd, że prawo sterowania (6.16) gwarantuje poprawne śledzenie profili prędkościowych w drugim stopniu kaskadowego układu sterowania. W konsekwencji prowadzi to do poprawnej realizacji zadania śledzenia ścieżki. $\square$

6.2.2 Sterowanie odporne

W wielu sytuacjach praktycznych pełny model dynamiki robota nie jest znany. Wynika to często z faktu zmienności parametrów masowo-inercyjnych w długim horyzoncie czasowym oraz występowania oddziaływań nieuwzględnionych w modelu. Niektóre oddziaływania pomija się na etapie modelowania ze względu na ich skomplikowany charakter lub znikomy wpływ na układ. Wymienione aspekty składają się odpowiednio na parametryczną i strukturalną nieznaną model dynamiki.

Rozwiązanie dla przedstawionych problemów stanowią algorytmy z rodziny algorytmów ślizgowych [115, 126]. W tym rozdziale proponowany jest algorytm ślizgowy odporny

na zaburzenia zewnętrzne oraz parametryczno-strukturalną nieznajomość modelu dynamiki dla nieholonomicznego manipulatora mobilnego. Załóżmy zatem, że na rozważany obiekt oddziałują pewne uogólnione siły oznaczone jako $\zeta(t) \in \mathbb{R}^p$. Siły ζ mogą wynikać zarówno z ograniczonych zewnętrznych zaburzeń, jak i z elementów nieuwzględnionych w modelu dynamiki robota (6.4), np. takich jak nieliniowy wpływ otoczenia na tarcie. Wówczas rzeczywistą dynamikę obiektu można opisać za pomocą równania

$$Q_z^*(q)\dot{z} + C_z^*(q, \dot{q})z + g_z^*(q) + \zeta(t) = B^*u, \quad (6.23)$$

gdzie indeks z w oznaczeniach kolejnych macierzy oznacza, że struktura tych elementów jest całkowicie znana. Jeśli w części modelu dynamiki, która jest znana strukturalnie, występują parametry o nieznannej wartości, to równanie (6.23) należy przekształcić do postaci

$$\begin{aligned} Q_z^*(q, a)\dot{z} + C_z^*(q, \dot{q}, a)z + g_z^*(q, a) + \zeta(t) = \\ = Q_0^*(q)\dot{z} + C_0^*(q, \dot{q})z + g_0^*(q) + \zeta(t) + \\ + Q_a^*(q, a)\dot{z} + C_a^*(q, \dot{q}, a)z + g_a^*(q, a) = B^*u, \end{aligned} \quad (6.24)$$

przy czym macierze z indeksem 0 odnoszą się do części dynamiki, która jest znana strukturalnie i parametrycznie, natomiast macierze z indeksem a oznaczają część modelu, która zależy od nieznanymi parametrów oznaczonych za pomocą wektora $a \in \mathbb{R}^r$. Reprezentację zależności od nieznanymi parametrów a należy dobrać w taki sposób, aby była ona liniowa i wyrażona poprzez macierz regresji $Y \in \mathbb{R}^{p \times r}$, zgodnie z zależnością

$$Y(\dot{z}, z, \dot{q}, q)a = Q_a^*(q, a)\dot{z} + C_a^*(q, \dot{q}, a)z + g_a^*(q, a). \quad (6.25)$$

Uwzględniając zależność (6.25) w równaniu (6.24), otrzymuje się równania dynamiki obiektu obciążonego parametryczno-strukturalną nieznajomością lub zewnętrznymi oddziaływaniami

$$Q_0^*(q)\dot{z} + C_0^*(q, \dot{q})z + g_0^*(q) + Y(\dot{z}, z, \dot{q}, q)a + \zeta(t) = B^*u. \quad (6.26)$$

Dla obiektu opisanego równaniem (6.26) formułuje się w Twierdzeniu 8 prawo sterowania, które może zostać wykorzystane do realizacji zadania śledzenia ścieżki w warunkach strukturalnej lub parametrycznej nieznajomości modelu dynamiki. Algorytm został po raz pierwszy zaproponowany przez autora rozprawy w pracy [79].

Twierdzenie 8. *Niech będzie dany model dynamiki nieholonomicznego manipulatora mobilnego obciążony nieznajomością parametryczną i strukturalną (6.26).*

Dla takiego modelu, niech wartości nieznanymi parametrów masowo-inercyjnych, które są stałe na krótkim horyzoncie czasowym, będą ograniczone od góry, a górne ograniczenie niech będzie znane

$$|a_i| \leq a_i^*, \quad (6.27)$$

gdzie $i = 1, 2, \dots, r$.

Ponadto, niech zakłócenia, które wynikają z pominiętych elementów struktury dynamiki (6.4) lub zewnętrznych oddziaływań, będą wolno zmienne i ograniczone od góry. Załóżmy, że górne ograniczenia zakłóceń $\zeta(t)$ również będą znane lub możliwe do oszacowania

$$|\zeta_i(t)| \leq \zeta_i^*, \quad (6.28)$$

gdzie $i = 1, 2, \dots, p$.

Wówczas, prawo sterowania w postaci

$$\mathbf{u} = (\mathbf{B}^*)^{-1} \left(\mathbf{Q}_0^*(\mathbf{q})\dot{\boldsymbol{\rho}} + \mathbf{C}_0^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\rho} + \mathbf{g}_0^*(\mathbf{q}) + \mathbf{Y}_\rho(\dot{\boldsymbol{\rho}}, \boldsymbol{\rho}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})\hat{\mathbf{a}} + \right. \\ \left. - \mathbf{C}_0^\gamma(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\Upsilon}_\sigma(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{K}_d\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{K}\text{sgn}(\boldsymbol{\sigma}) \right) \quad (6.29)$$

gwarantuje asymptotyczną zbieżność błędów śledzenia profili prędkościowych $\mathbf{e}_z$ oraz błędów śledzenia ścieżki $\mathbf{e}_x$ do zera.

Znaczenie poszczególnych elementów prawa sterowania (6.29) jest następujące:

- $\boldsymbol{\sigma}$ oznacza zmienną ślizgową definiowaną jako

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{e}_z + \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{e} = \mathbf{z} - \boldsymbol{\rho}, \quad (6.30)$$

przy czym $\boldsymbol{\Lambda}$ jest dodatnio określoną macierzą wzmocnień, natomiast $\mathbf{e}(t)$ oznacza sygnał błędu spełniający zależność

$$\mathbf{e}(t) = \int_0^t \mathbf{e}_z(x) dx, \quad (6.31a)$$

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \mathbf{e}_z(t); \quad (6.31b)$$

- $\boldsymbol{\rho}$ jest referencyjnym sygnałem błędów zdefiniowanym na podstawie profili prędkościowych wygenerowanych na poziomie kinematycznym zgodnie z Twierdzeniem 6 oraz definicji zmiennej ślizgowej (6.30)

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{z}_{ref} - \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{e}; \quad (6.32)$$

- macierz $\mathbf{Y}_\rho$ oznacza macierz regresji zdefiniowaną równaniem (6.25), która zależy od referencyjnych sygnałów błędów $\boldsymbol{\rho}$ oraz ich pochodnych $\dot{\boldsymbol{\rho}}$, tzn. zachodzi zależność

$$\mathbf{Y}(\dot{\boldsymbol{\rho}}, \boldsymbol{\rho}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = \mathbf{Y}_\rho(\dot{\boldsymbol{\rho}}, \boldsymbol{\rho}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}); \quad (6.33)$$

- $\mathbf{C}_0^\gamma \in \mathbb{R}^{p \times p}$ stanowi część macierzy korekcji $\mathbf{C}_z^\gamma$, wynikającej ze Spostrzeżenia 17 dla w pełni znanych macierzy $\mathbf{Q}_z^*$ oraz $\mathbf{C}_z^*$. Macierz $\mathbf{C}_0^\gamma$ jest w pełni znana strukturalnie i parametrycznie. Razem z macierzą zależną od nieznanych parametrów $\mathbf{C}_a^\gamma$ tworzą macierz korekcji o znanej strukturze $\mathbf{C}_z^\gamma$ zgodnie z zależnością

$$\mathbf{C}_z^\gamma(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{a}) = \mathbf{C}_0^\gamma(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{C}_a^\gamma(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{a}); \quad (6.34)$$

- $\boldsymbol{\Upsilon}_\sigma \in \mathbb{R}^{p \times r}$ jest macierzą regresji liniowej opisującą zależność macierzy korekcji obciążonej niepewnością parametryczną $\mathbf{C}_a^\gamma(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{a})$ od nieznanych parametrów $\mathbf{a}$. Macierz $\boldsymbol{\Upsilon}_\sigma$ spełnia zależność

$$\boldsymbol{\Upsilon}_\sigma(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})\mathbf{a} = \mathbf{C}_a^\gamma(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{a})\boldsymbol{\sigma}; \quad (6.35)$$

- $\hat{\mathbf{a}}$ jest oszacowaniem nieznanych parametrów masowo-inercyjnych. Przyjmuje ono stałe wartości na cały czas realizacji procesu regulacji. Wartości należy wybrać na podstawie zakresów wynikających z (6.27);

- $\mathbf{K}_d$ oznacza dodatnio określoną macierz wzmocnień;
- $\mathbf{K} = \text{diag}_{p \times p}\{k_i\}$, $k_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, p$ jest diagonalną macierzą wzmocnień.

Dowód. System (6.26) z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego (6.29) jest opisany równaniem

$$\mathbf{Q}_0^* \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{C}_0^* \mathbf{z} + \mathbf{g}_0^* + \mathbf{Y} \mathbf{a} + \boldsymbol{\zeta} = \mathbf{Q}_0^* \dot{\boldsymbol{\rho}} + \mathbf{C}_0^* \boldsymbol{\rho} + \mathbf{g}_0^* + \mathbf{Y}_\rho \hat{\mathbf{a}} - \mathbf{C}_0^\gamma \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\Upsilon}_\sigma \hat{\mathbf{a}} - \mathbf{K}_d \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{K} \text{sgn}(\boldsymbol{\sigma}). \quad (6.36)$$

Powyższe wyrażenie można uporządkować, korzystając z definicji zmiennej ślizgowej (6.30). W rezultacie otrzymamy równoważną zależność, czyli

$$\mathbf{Q}_0^* \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{C}_0^* \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{Y} \mathbf{a} + \boldsymbol{\zeta} = \mathbf{Y}_\rho \hat{\mathbf{a}} - \mathbf{C}_0^\gamma \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\Upsilon}_\sigma \hat{\mathbf{a}} - \mathbf{K}_d \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{K} \text{sgn}(\boldsymbol{\sigma}). \quad (6.37)$$

Zauważmy, że na podstawie definicji macierzy regresji (6.25) zachodzi

$$\mathbf{Y} \mathbf{a} - \mathbf{Y}_\rho \mathbf{a} = \mathbf{Q}_a^* \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{C}_a^* \boldsymbol{\sigma}. \quad (6.38)$$

Ponadto, zgodnie z równaniami (6.34) oraz (6.35) zachodzi

$$\mathbf{C}_0^\gamma \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\Upsilon}_\sigma \mathbf{a} = \mathbf{C}_0^\gamma \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{C}_a^\gamma \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_z^\gamma \boldsymbol{\sigma}. \quad (6.39)$$

Uwzględniając równania (6.38) oraz (6.39), odejmijmy obustronnie od równania (6.37) wyrażenia $\mathbf{Y}_\rho \mathbf{a}$ oraz $\boldsymbol{\Upsilon}_\sigma \mathbf{a}$. W ten sposób otrzymamy postać równoważną

$$\mathbf{Q}_0^* \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{C}_0^* \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{Q}_a^* \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{C}_a^* \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\zeta} = \mathbf{Y}_\rho \tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{C}_z^\gamma \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\Upsilon}_\sigma \tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{K}_d \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{K} \text{sgn}(\boldsymbol{\sigma}), \quad (6.40)$$

gdzie $\tilde{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a}$. Dodatkowo, sumując macierze w pełni znane (indeks 0) i zależne od nieznanymi parametrów (indeks a) wyrażenie (6.40) można uprościć do postaci

$$\mathbf{Q}_z^* \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{C}_z^* \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\zeta} = \mathbf{Z} \tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{C}_z^\gamma \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{K}_d \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{K} \text{sgn}(\boldsymbol{\sigma}), \quad (6.41)$$

przy czym $\mathbf{Z} = \mathbf{Y}_\rho - \boldsymbol{\Upsilon}_\sigma$.

Następnie zauważmy, że rozważane zakłócenia $\boldsymbol{\zeta}$ składają się z zaburzeń, które wynikają z:

- nieznajomości struktury macierzy inercji $\boldsymbol{\zeta}_Q$,
- nieznajomości struktury macierzy sił Coriolisa i sił odśrodkowych $\boldsymbol{\zeta}_C$,
- innych czynników $\boldsymbol{\zeta}_R$, np. zewnętrzne siły, tarcie.

Zgodnie z przyjętymi założeniami wszystkie rozważane zakłócenia są ograniczone. Możemy zatem przyjąć, że zachodzi

$$\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\zeta}_Q + \boldsymbol{\zeta}_C + \boldsymbol{\zeta}_R. \quad (6.42)$$

Uwzględniając różne składowe zakłóceń (6.42), możemy uzyskać pełne macierze opisujące dynamikę obiektu wzdłuż trajektorii systemu

$$\mathbf{Q}^* \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Q}_z^* \dot{\mathbf{z}} + \boldsymbol{\zeta}_Q, \quad (6.43a)$$

$$\mathbf{C}^* \mathbf{z} = \mathbf{C}_z^* \mathbf{z} + \boldsymbol{\zeta}_C. \quad (6.43b)$$

W podobny sposób możemy uzyskać macierze wzdłuż trajektorii referencyjnych

$$\mathbf{Q}^* \dot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{Q}_z^* \dot{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\zeta}_{\mathbf{Q}_\rho} \quad (6.44a)$$

$$\mathbf{C}^* \boldsymbol{\rho} = \mathbf{C}_z^* \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\zeta}_{\mathbf{C}_\rho}. \quad (6.44b)$$

Ponadto, oznaczmy strukturalnie nieznaną część macierzy korekcji $\mathbf{C}^\gamma$ wzdłuż trajektorii systemu i wzdłuż trajektorii referencyjnych odpowiednio jako $\boldsymbol{\zeta}_\gamma$ oraz $\boldsymbol{\zeta}_{\gamma_\rho}$. Takie elementy mogą istnieć ze względu na nieznane składowe modelu dynamiki obiektu. Należy pamiętać, że macierz $\mathbf{C}_z^\gamma$ jest zdefiniowana tylko na podstawie strukturalnie znanej części modelu (oznaczona indeksem z). Możemy zatem przyjąć następujące oznaczenia

$$\mathbf{C}^\gamma \mathbf{z} = \mathbf{C}_z^\gamma \mathbf{z} + \boldsymbol{\zeta}_\gamma, \quad (6.45a)$$

$$\mathbf{C}^\gamma \boldsymbol{\rho} = \mathbf{C}_z^\gamma \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\zeta}_{\gamma_\rho}. \quad (6.45b)$$

Macierz $\mathbf{C}^\gamma$ spełnia równanie (6.15) ze Spostrzeżenia 17 dla pełnych macierzy z równań dynamiki obiektu, tzn. $\mathbf{Q}^*$ oraz $\mathbf{C}^*$. Biorąc pod uwagę powyższe zależności, równanie (6.41) możemy zapisać w postaci

$$\mathbf{Q}^* \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{C}^* \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{Z} \tilde{\mathbf{a}} + \mathbf{C}^\gamma \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{K}_d \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{K} \operatorname{sgn}(\boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\zeta}_N = 0, \quad (6.46)$$

gdzie $\boldsymbol{\zeta}_N = \boldsymbol{\zeta}_R + \boldsymbol{\zeta}_{\mathbf{Q}_\rho} + \boldsymbol{\zeta}_{\mathbf{C}_\rho} - \boldsymbol{\zeta}_\gamma + \boldsymbol{\zeta}_{\gamma_\rho}$.

Rozważmy teraz następującą funkcję

$$V_7(\mathbf{e}_x, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{e}_z) = V_5(\mathbf{e}_x) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^\top \mathbf{Q}^* \boldsymbol{\sigma}, \quad (6.47)$$

która jest zawsze nieujemna ze względu na własności rzeczywistej macierzy bezwładności $\mathbf{Q}^*$ oraz funkcji V_5 zdefiniowanej równaniem (6.9). Funkcja V_7 zeruje się tylko dla $(\mathbf{e}_x^\top \ \boldsymbol{\sigma}^\top)^\top = \mathbf{0}$, więc jest dobrym kandydatem na funkcję Lapunova dla systemu (6.46).

Wyznamy pochodną funkcji (6.47) po czasie, która jest równa

$$\dot{V}_7 = \dot{V}_5 + \boldsymbol{\sigma}^\top \mathbf{Q}^* \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^\top \dot{\mathbf{Q}}^* \boldsymbol{\sigma}. \quad (6.48)$$

Biorąc pod uwagę równania (6.15) oraz (6.46), otrzymujemy

$$\dot{V}_7 = \dot{V}_5 + \boldsymbol{\sigma}^\top (-\mathbf{C}^* \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{Z} \tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{C}^\gamma \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{K}_d \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{K} \operatorname{sgn}(\boldsymbol{\sigma}) - \boldsymbol{\zeta}_N) + \boldsymbol{\sigma}^\top (\mathbf{C}^* + \mathbf{C}^\gamma) \boldsymbol{\sigma}, \quad (6.49)$$

co po uporządkowaniu sprowadza się do zależności

$$\dot{V}_7 = \dot{V}_5 - \boldsymbol{\sigma}^\top \mathbf{K}_d \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^\top (\mathbf{K} \operatorname{sgn}(\boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\zeta}_N - \mathbf{Z} \tilde{\mathbf{a}}). \quad (6.50)$$

Zauważmy, że ostatni składnik sumy w równaniu (6.50) jest równy

$$\boldsymbol{\sigma}^\top (\mathbf{K} \operatorname{sgn}(\boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\zeta}_N - \mathbf{Z} \tilde{\mathbf{a}}) = \sum_{i=1}^p |\sigma_i| \left(k_i + \zeta_{N_i} \operatorname{sgn}(\sigma_i) - \sum_{j=1}^r Z_{ij} \tilde{a}_j \operatorname{sgn}(\sigma_i) \right). \quad (6.51)$$

Zdefiniujmy teraz konkretną postać współczynników k_i macierzy wzmocnień $\mathbf{K}$. Niech będą one określone jako

$$k_i = \sum_{j=1}^r Z_{ij}^* \alpha_j + \zeta_{N_i}^* + \delta_i, \quad (6.52)$$

gdzie $|Z_{ij}| \leq Z_{ij}^*$ wyraża ograniczenia wzdłuż trajektorii systemu i trajektorii referencyjnych, $\alpha_j = |\hat{a}_j| + \alpha_j^* \geq |\tilde{a}_j|$ oznacza maksymalny błąd oszacowania nieznanych parametrów masowo-inercyjnych, δ_i jest liczbą dodatnią, natomiast $\zeta_{N_i}^*$ jest górnym ograniczeniem nieznanych zakłóceń zgodnie z zależnością

$$|\zeta_{N_i}| \leq |\zeta_{R_i}| + |\zeta_{Q_{\rho_i}}| + |\zeta_{C_{\rho_i}}| + |\zeta_{\gamma_{\rho_i}} - \zeta_{\gamma_i}| \leq \zeta_{N_i}^*, \quad (6.53)$$

przy czym $i = 1, 2, \dots, p$. Zaburzenia ζ_N zdefiniowane w równaniu (6.46) są ograniczone, gdyż składają się z zakłóceń ograniczonych z założenia oraz ograniczonych trajektorii referencyjnych. Zwróćmy uwagę, że dla $i = 1, 2, \dots, p$ zachodzi

$$\sum_{j=1}^r Z_{ij}^* \alpha_j - \sum_{j=1}^r Z_{ij} \tilde{a}_j \operatorname{sgn}(\sigma_i) \geq 0, \quad (6.54a)$$

$$\zeta_{N_i}^* + \zeta_{N_i} \operatorname{sgn}(\sigma_i) \geq 0. \quad (6.54b)$$

Uwzględniając definicję (6.52) oraz nierówności (6.54), możemy wnioskować, iż prawdziwa jest następująca nierówność

$$\dot{V}_7 \leq \dot{V}_5(\mathbf{e}_x) - \underbrace{\left(\sigma^T \mathbf{K}_d \sigma + \sum_{i=1}^p \delta_i |\sigma_i| \right)}_{W(\sigma)} = \dot{V}_5(\mathbf{e}_x) - W(\sigma). \quad (6.55)$$

Możemy zaobserwować, że dla $\delta_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, p$ oraz dla dodatnio określonej macierzy $\mathbf{K}_d$, element $W(\sigma)$ jest nieujemny. Stąd jasno też wynika, że zachodzi

$$W(\sigma) = 0 \iff \sigma = \mathbf{0}. \quad (6.56)$$

Biorąc dodatkowo pod uwagę własności funkcji $\dot{V}_5$ (6.12), możemy wnioskować o następujących właściwościach funkcji $\dot{V}_7$

$$\dot{V}_7(\mathbf{e}_x, \sigma) < 0, \quad \text{gdy } (\mathbf{e}_x^T \quad \sigma^T)^T \neq \mathbf{0}, \quad (6.57a)$$

$$\dot{V}_7(\mathbf{e}_x, \sigma) = 0, \quad \text{gdy } (\mathbf{e}_x^T \quad \sigma^T)^T = \mathbf{0}. \quad (6.57b)$$

Na mocy zasady niezmienniczości LaSalle'a [13] z własności (6.57) pochodnej funkcji Lapunova $\dot{V}_7$ możemy wnioskować, że trajektorie systemu (6.36) zbiegają do zera dla dodatnio określonej macierzy $\mathbf{K}_d$ oraz macierzy $\mathbf{K}$, której współczynniki są zdefiniowane przez równanie (6.52). Trajektorie systemu zostają zatem sprowadzone do powierzchni ślizgu. W konsekwencji, na podstawie równań (6.30), (6.31b) oraz (6.56) otrzymujemy następującą zależność

$$\mathbf{e}_z = \dot{\mathbf{e}} = -\Lambda \mathbf{e}. \quad (6.58)$$

Z równania (6.58) wynika, że dla dodatnio określonej macierzy Λ sygnały błędów $\mathbf{e}$ zbiegają asymptotycznie do zera. W rezultacie, zachodzi również zbieżność $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{z}_{ref}$ dla $t \rightarrow +\infty$, więc profile prędkościowe wygenerowane na poziomie kinematycznym są realizowane asymptotycznie.

Zauważmy wreszcie, że błędy śledzenia ścieżki $\mathbf{e}_x$ z pierwszego poziomu kaskady układu sterowania zostały uwzględnione w definicji funkcji Lapunova (6.47). Ponadto, są one sprzężone z błędami śledzenia profili prędkościowych $\mathbf{e}_z$ poprzez zależność (6.14). Z tych względów możemy wnioskować, że oba sygnały błędów zbiegają do zera, a zadana ścieżka jest realizowana poprawnie. $\square$

Należy podkreślić, że przedstawiony algorytm ślizgowy zachowuje ogólną własność algorytmów tej klasy, którą wyszczególniono w Spostrzeżeniu 15 dla obiektów holonomicznych. Ta uwaga odnosi się również do obiektów nieholonomicznych. Mianowicie, warto zauważyć, że im większe niepewności w modelu, tym większe powinny być współczynniki macierzy $\mathbf{K}$. Może to skutkować generowaniem sterowań, które nie będą możliwe do fizycznej realizacji. Ponadto, im dokładniej zostaną oszacowane ograniczenia (6.27) oraz (6.28), tym mniejsze wzmocnienia można stosować.

6.3 Badania symulacyjne

W poprzednich rozdziałach zdefiniowano prawa sterowania dla nieholonomicznych manipulatorów mobilnych, które pozwalają na realizację zadania śledzenia ścieżki. W tym rozdziale otrzymane wyniki teoretyczne dotyczące postaci i własności przedstawionych algorytmów zostaną zweryfikowane za pomocą badań symulacyjnych. Jako egzemplifikację manipulatora mobilnego wybrano obiekt klasy (nh, h) , którego równania przedstawiono w dodatku A.3.

6.3.1 Algorytm oparty o pełną znajomość modelu dynamiki

Najpierw zweryfikowano skuteczność działania algorytmu sterowania, który został zdefiniowany w Twierdzeniu 7. W tym celu rozważono dwa scenariusze symulacyjne, w których wykorzystano różne metody parametryzacji ścieżki i różne zadane krzywe. Rozważono następujące warianty:

1. Opis robota względem krzywej za pomocą ortogonalnej parametryzacji Serreta–Freneta oraz ścieżka zadana jako klotoida.
2. Opis robota względem krzywej za pomocą nieortogonalnej parametryzacji *beta* oraz ścieżka zadana jako krzywa Béziera.

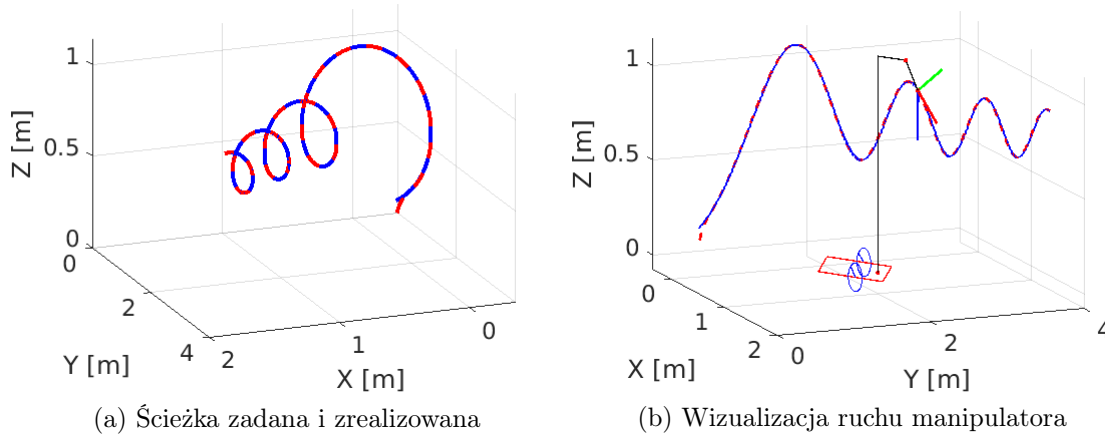
Opis obu przypadków został przedstawiony poniżej.

Ortogonalna parametryzacja Serreta–Freneta. W pierwszym badaniu symulacyjnym zastosowano ortogonalną parametryzację Serreta–Freneta do opisu robota względem ścieżki. Ścieżkę zadaną zdefiniowano jako klotoidę kanoniczną, której równania podano w dodatku B.4. Krzywą zdefiniowano poprzez parametry krzywizny i torsji: $\kappa' = 0,7$; $\tau' = 0,53$, a także punkt początkowy krzywej $\mathbf{r}_0 = (0,06 \ -0,3 \ 0,07)^T$ [m]. Ewolucję układu Serreta–Freneta zdeterminowano poprzez dobór warunku początkowego: $\mathbf{t}_0 = \left(-\frac{1}{3} \ \frac{2\sqrt{2}}{3} \ 0\right)^T$, $\mathbf{n}_0 = (0 \ 0 \ 1)^T$, $\mathbf{b}_0 = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \ \frac{1}{3} \ 0\right)^T$.

Ponadto zażądano, aby profil prędkościowy wzdłuż ścieżki wynosił $\dot{s}_d = \frac{1}{8} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$. Stąd, zadany stan robota względem ścieżki wynosi $\mathbf{x}_d = \left(\frac{1}{8}\mathbf{t} + \mathbf{s}_0 \ 0 \ 0\right)^T$, gdzie $\mathbf{s}_0$ oznacza początkową wartość odległości krzywoliniowej wynikającą z warunku rzutowania ortogonalnego (3.39). Z kolei, początkową konfigurację manipulatora mobilnego określono jako

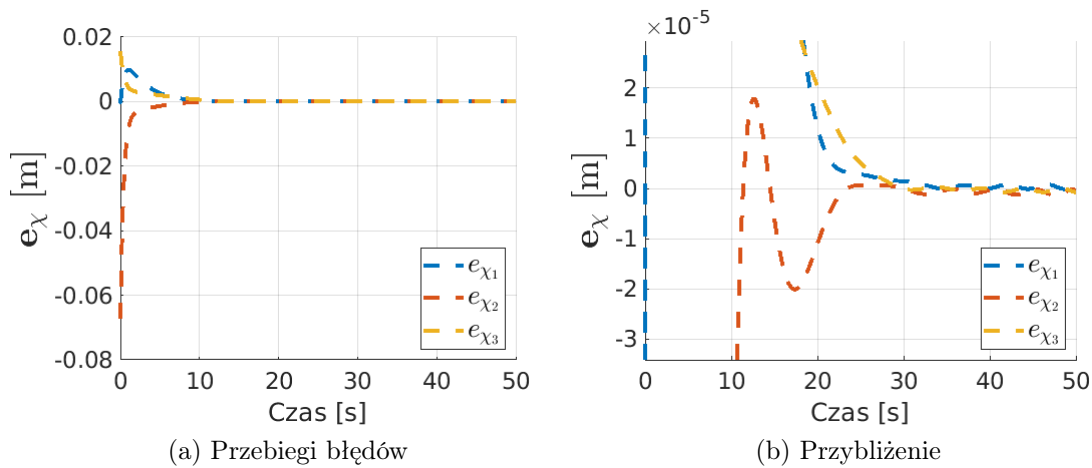
$$\mathbf{q}_0 = \left(\frac{1}{5} \text{ [m]} \ \frac{1}{10} \text{ [m]} \ \frac{3\pi}{4} \text{ [rad]} \ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{1}{4} \text{ [m]} \ -\frac{\pi}{3} \text{ [rad]}\right)^T$$

przy zerowych prędkościach początkowych, $\dot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{0}$. Do realizacji prawa sterowania zdefiniowanego przez Twierdzenie 6 oraz Twierdzenie 7 przyjęto nastawy: $\mathbf{K}_k = \text{diag}_{3 \times 3}\{100\}$, $\mathbf{K}_d = \text{diag}_{5 \times 5}\{100\}$. Wyniki badań symulacyjnych przedstawiono na poniższych wykresach.



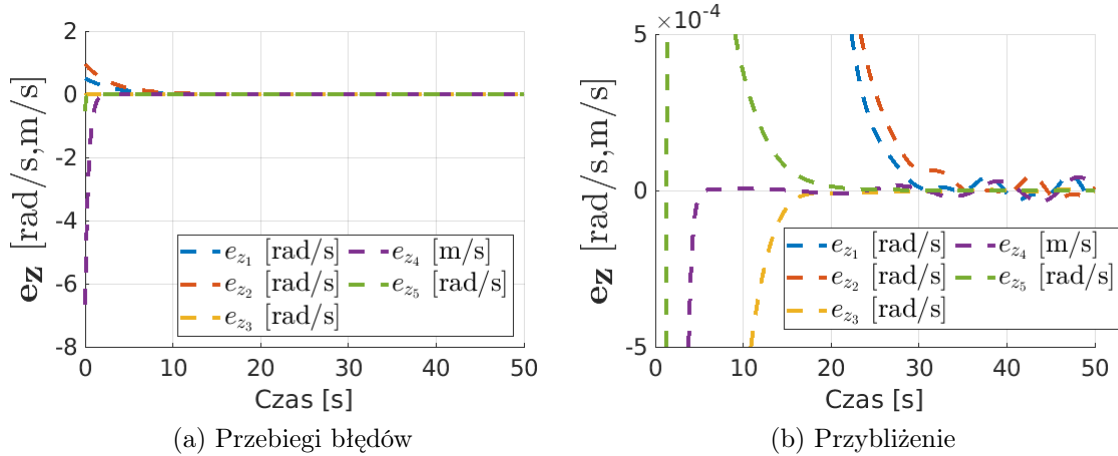
Rysunek 6.1: Porównanie ścieżki zadanej (linia niebieska) oraz ścieżki zrealizowanej przez manipulator (linia czerwona) – sterownik oparty o pełną znajomość modelu dynamiki, ortogonalna parametryzacja Serreta–Freneta.

Na rys. 6.1 zestawiono ścieżkę zadaną oraz zrealizowaną przez manipulator mobilny. Widać wyraźnie, że po skompensowaniu początkowego błędu zadana krzywa została poprawnie zrealizowana. Osobliwość wynikająca z parametryzacji ortogonalnej została przesunięta poza ścieżkę, więc ruch końcówki chwytaka wzdłuż krzywej był możliwy.



Rysunek 6.2: Błędy śledzenia ścieżki $\mathbf{e}_\chi$ – sterownik oparty o pełną znajomość modelu dynamiki, ortogonalna parametryzacja Serreta–Freneta.

O poprawnej realizacji zadania świadczą przebiegi błędów. Na rys. 6.2 przedstawiono wykresy błędów śledzenia ścieżki. Wartości błędów zbiegają do zera, potwierdzając przedstawione wyniki teoretyczne. Podobne zachowanie wykazują błędy śledzenia profilu



Rysunek 6.3: Błędy śledzenia profili prędkościowych $\mathbf{e}_z$ – sterownik oparty o pełną znajomość modelu dynamiki, ortogonalna parametryzacja Serreta–Freneta.

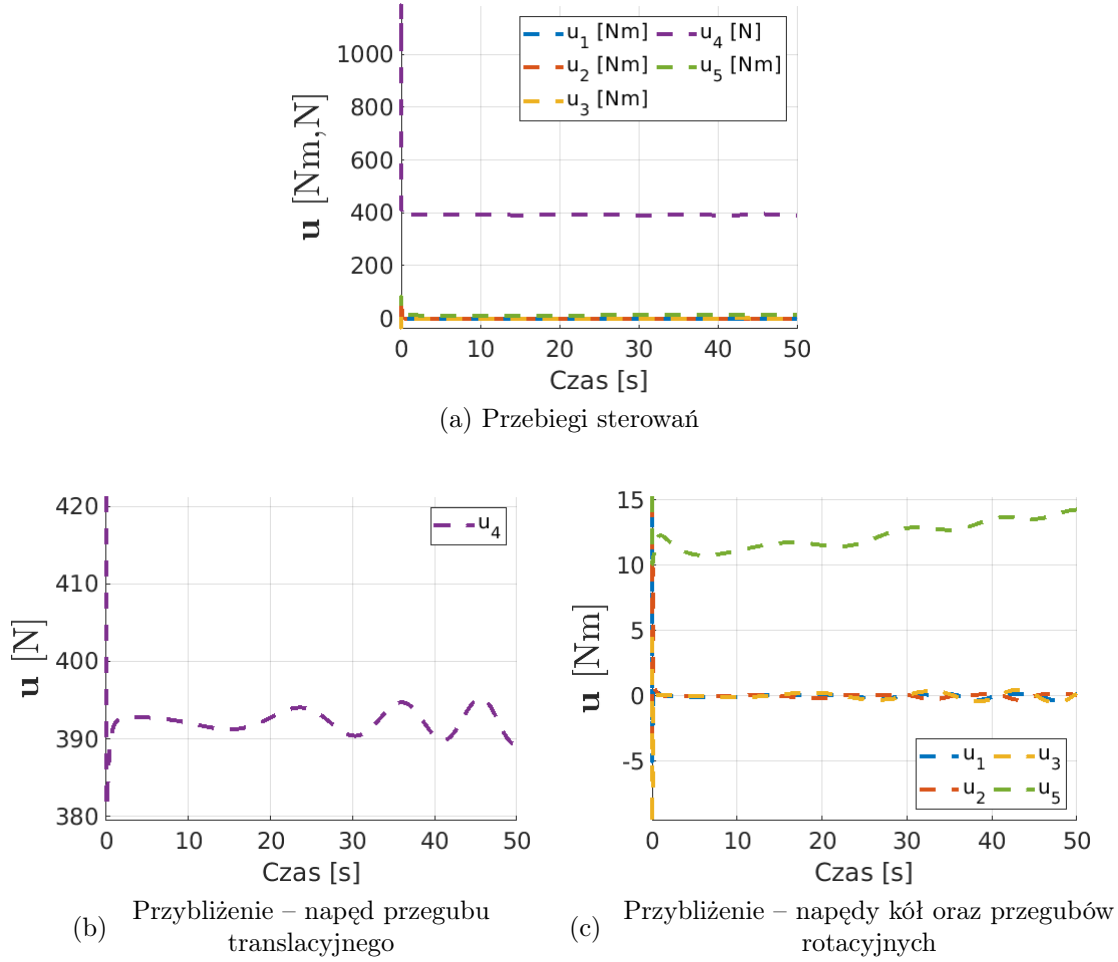
prędkościowych, które zaprezentowano na rys. 6.3. Błędy zarówno na poziomie kinematycznym, jak i dynamicznym zbiegają do bardzo małych wartości, co pozwala na dokładną realizację manewru. Można zauważyć, że ze względu na charakter krzywej i narastającą wartość krzywizny i torsji, odwzorowanie zadanej ścieżki staje się coraz trudniejsze. Stąd w przebiegach błędów pojawiają się oscylacje. Ich amplituda jest jednak niewielka, na poziomie dokładności pomiarowej. Można zatem wnioskować o satysfakcjonującej precyzji wykonania manewru.

Wreszcie, na rys. 6.4 przedstawiono przebiegi wygenerowanych sygnałów sterujących. Zniwelowanie początkowego błędu zostało zrealizowane przez bardzo wąskie i wysokie piki sterowań. Ta gwałtowna reakcja układu sterowania na początku manewru mogłaby być ograniczona poprzez zmniejszenie nastaw sterowników. Nie wpływa też na realizację zadania śledzenia ścieżki. Ruch wzdłuż krzywej był realizowany przez sterowania o dopuszczalnych wartościach. Warto zaobserwować, że ze względu na zmienność parametrów geometrycznych krzywej w przebiegach sterowań pojawiają się oscylacje. Ich amplituda oraz częstotliwość są jednak niewielkie. Pozwalają one na poprawną realizację ścieżki zadanej w formie klotoidy kanonicznej.

Nieortogonalna parametryzacja β . W tym scenariuszu rozważono nieortogonalną parametryzację β do realizacji opisu robota względem ścieżki. Ścieżka została zdefiniowana jako krzywa Béziera na podstawie zbioru punktów kontrolnych

$$\mathbf{P} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \right\} [\text{m}].$$

Ogólne równania krzywej zostały przedstawione w dodatku B.5. Profil prędkościowy wzdłuż ścieżki został dobrany tak, aby spełnić ograniczenie związane z dziedziną krzywej Béziera. Przyjęto zatem $\dot{\mathbf{u}}_d = 0,01 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$, gdyż całkowity czas symulacji wynosi 100 [s]. Celem zadania było śledzenie żądanej ścieżki przez chwytak manipulatora. Z tego względu przyjęto zerowy żądany stan robota względem ścieżki, tj. $\mathbf{x}_d = \mathbf{0}$. Jako początkową



Rysunek 6.4: Wygenerowane sygnały sterujące u – sterownik oparty o pełną znajomość modelu dynamiki, ortogonalna parametryzacja Serreta–Freneta.

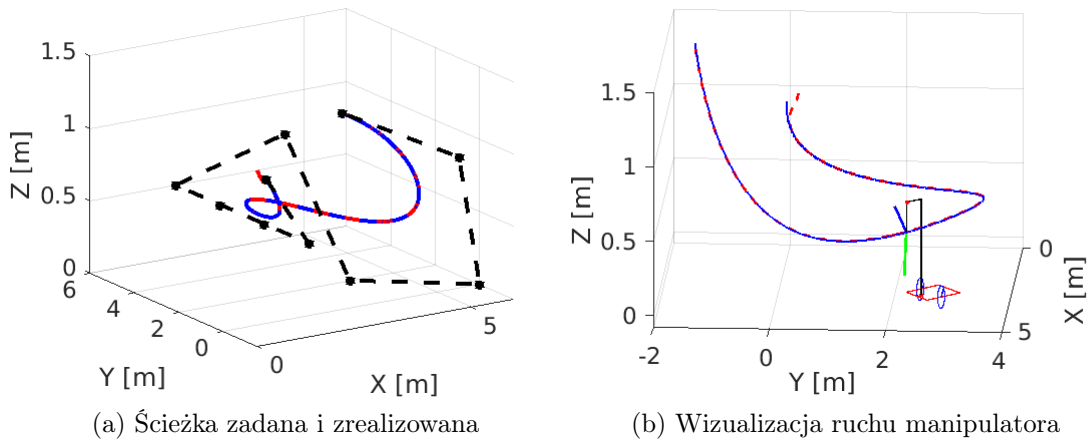
konfigurację manipulatora mobilnego przyjęto wektor

$$\mathbf{q}_0 = \left(\frac{1}{2} \text{ [m]} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{\pi}{4} \text{ [rad]} \quad 1,25 \text{ [m]} \quad -\frac{\pi}{2} \text{ [rad]} \right)^T,$$

natomiast prędkości początkowe ustalono jako zerowe. Do realizacji prawa sterowania zdefiniowanego przez Twierdzenie 6 oraz Twierdzenie 7 przyjęto nastawy: $\mathbf{K}_k = \text{diag}_{3 \times 3}\{100\}$, $\mathbf{K}_d = \text{diag}_{5 \times 5}\{250\}$. Uzyskane wyniki symulacyjne przedstawiono na poniższych wykresach.

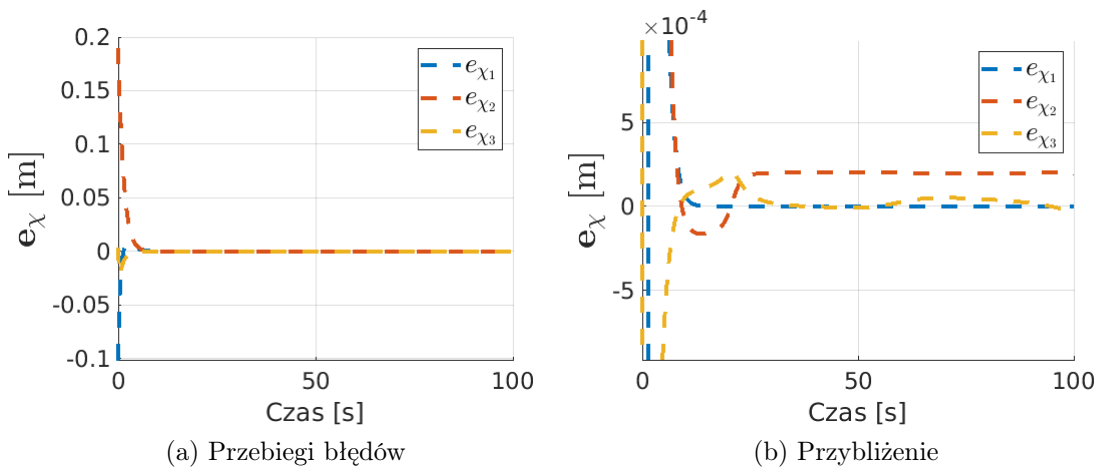
Rys. 6.5 przedstawia porównanie ścieżki zadanej i zrealizowanej przez nieholonomiczny manipulator mobilny. Można zauważyć, że błąd wynikający ze stanu początkowego robota został szybko skompensowany, a ścieżka zadana przez krzywą Béziera została poprawnie zrealizowana.

Te obserwacje potwierdzają błędy śledzenia ścieżki oraz błędy śledzenia profili prędkościowych, które zostały przedstawione odpowiednio na rys. 6.6 oraz rys. 6.7. Przedstawione przebiegi potwierdzają teoretyczne własności algorytmu, a błędy śledzenia zbiegają do niewielkich wartości. Na przybliżonych wykresach można zauważyć, że w skończonym czasie symulacji błędy są wciąż niezerowe dla dobranych nastaw, jednakże ich rząd wielkości koresponduje z przyjętą dokładnością obliczeń numerycznych. Jest to również wynik



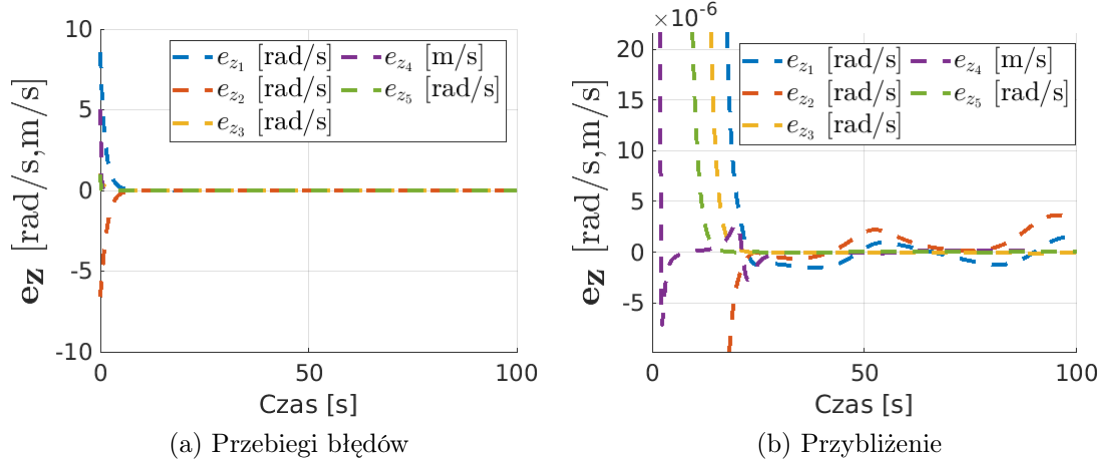
Rysunek 6.5: Porównanie ścieżki zadanej (linia niebieska) oraz ścieżki zrealizowanej przez manipulator (linia czerwona) wraz z wielokątem wyznaczonym przez punkty kontrolne (linia czarna) – sterownik oparty o pełną znajomość modelu dynamiki, nieortogonalna parametryzacja β .

dokładny, biorąc pod uwagę możliwości urządzeń pomiarowych. Wynika stąd, że ścieżka jest realizowana poprawnie.



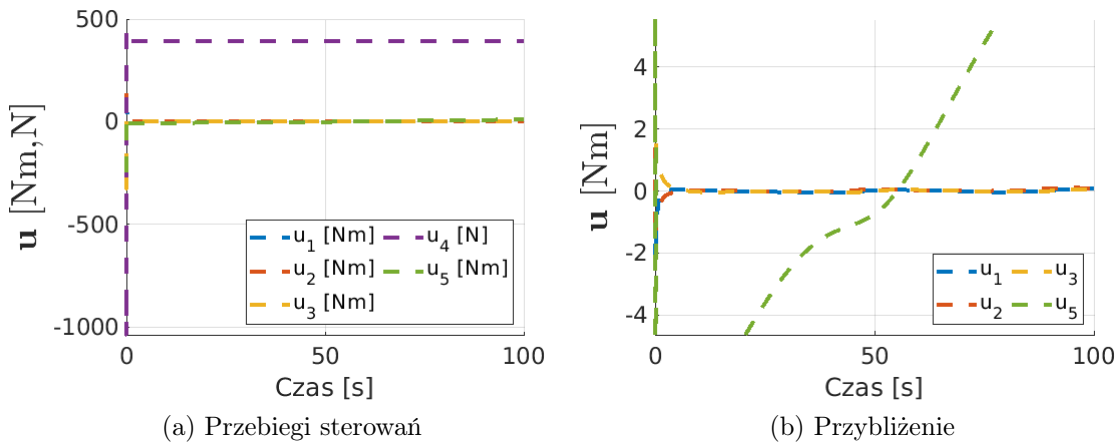
Rysunek 6.6: Błędy śledzenia ścieżki $\mathbf{e}_x$ – sterownik oparty o pełną znajomość modelu dynamiki, nieortogonalna parametryzacja β .

Na rys. 6.8 wykreślono przebiegi sygnałów sterujących wygenerowanych przez zastosowane prawo sterowania. Początkowy pik wartości wynika z niezerowego błędu początkowego. Ze względu na stosunkowo wysokie wartości nastaw układ sterowania kompensuje błąd dość gwałtownie, co przekłada się na wysokie wartości sterowań. Po osiągnięciu stanu ustalonego, gdy punkt prowadzenia robota znalazł się na ścieżce, wartości sterowań stabilizują się na poziomie, który powinien zostać zrealizowany na rzeczywistym obiekcie. Na rys. 6.8b przybliżono przebiegi sterowań z pominięciem sterowania w przegubie translacyjnym, które ustaliło się na poziomie $u_4 = 393$ [N]. Warto zwrócić uwagę, że generowane momenty są niewielkie, a znaczący wzrost można zaobserwować tylko w przegubie



Rysunek 6.7: Błędy śledzenia profili prędkościowych $\mathbf{e}_z$ – sterownik oparty o pełną znajomość modelu dynamiki, nieortogonalna parametryzacja β .

rotacyjnym bliższym chwytakowi. Wynika to z kształtu realizowanej krzywej, przyjętego profilu prędkościowego wzdłuż ścieżki, a także kompensacji oddziaływań grawitacyjnych.



Rysunek 6.8: Wygenerowane sygnały sterujące $\mathbf{u}$ – sterownik oparty o pełną znajomość modelu dynamiki, nieortogonalna parametryzacja β .

6.3.2 Algorytm ślizgowy

W celu weryfikacji algorytmu ślizgowego na poziomie dynamicznym, zdefiniowanego w Twierdzeniu 8, rozważono następujący scenariusz symulacji. Jako ścieżkę zadaną wybrano krzywą B-sklejaną trzeciego stopnia, której równania zostały podane w dodatku B.6. Ścieżka została zdefiniowana przez zbiór punktów kontrolnych

$$\mathbf{P} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \right\} [\text{m}],$$

a dziedzina krzywej została zdefiniowana jako $\mathbf{u} \in [0; 10]$ przy profilu prędkościowym wzdłuż ścieżki $\dot{\mathbf{u}}_d = \frac{1}{4} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$. Warto zauważyć, że ścieżka jest opisana w parametryzacji nieunormowanej. Ponadto, do jej wyznaczenia wykorzystano ten sam zbiór punktów kontrolnych, jak dla krzywej Béziera w rozdziale 6.3.1.

Do realizacji sterownika kinematycznego, na podstawie Twierdzenia 6, zastosowano nieortogonalną parametryzację Bishopa. Rozważono jedynie położenie punktu prowadzenia robota względem ścieżki. Przyjęto żądany stan robota względem ścieżki równy zero, $\mathbf{x}_d = \mathbf{0}$, co oznacza, że robot powinien prowadzić chwytek wzdłuż zadanej krzywej.

Wprowadzono także warunki parametrycznej i strukturalnej nieznajomości modelu dynamiki. W realizacji sterownika przyjęto, że całkowicie nieznany jest wektor sił grawitacji (A.38). W prawie sterowania (6.29) przyjęto zatem $\mathbf{g}_z^* = \mathbf{0}$. Ponadto, w macierzy bezwładności (A.36) pominięto wyrazy $\mathbf{q}_{44}^*$ oraz $\mathbf{q}_{55}^*$. Wynika stąd, że nieznana część struktury macierzy bezwładności wynosi $\mathbf{Q}^* - \mathbf{Q}_z^* = \text{diag}\{0, 0, 0, \mathbf{q}_{44}^*, \mathbf{q}_{55}^*\}$.

Ponadto, zasymulowano niepewność parametryczną modelu. W tym celu przyjęto, że wartości dwóch parametrów są nieznane. Wektor nieznanymi parametrów określono jako $\mathbf{a} = \left(\frac{\mathbf{I}_p}{L^2} \quad \mathbf{m}_3 \mathbf{l}_3 \right)^T \in \mathbb{R}^2$. W konsekwencji macierz regresji $\mathbf{Y}(\dot{\mathbf{z}}, \mathbf{z}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{5 \times 2}$ przyjmuje postać

$$\mathbf{Y}(\dot{\mathbf{z}}, \mathbf{z}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 - \dot{z}_2 & y_{12} \\ -\dot{z}_1 + \dot{z}_2 & y_{22} \\ 0 & y_{32} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

przy czym

$$\begin{aligned} y_{12} &= -\frac{1}{L^2} \left(Lc_1 z_1 \dot{q}_1 + ls_1 z_1 \dot{q}_1 + L(Lc_1 + ls_1) z_3 (\dot{\phi} + \dot{q}_1) - z_2 (2Lc_1 \dot{\phi} + (Lc_1 + ls_1) \dot{q}_1) + \right. \\ &\quad \left. - 2lc_1 \dot{z}_1 + 2Ls_1 \dot{z}_1 + 2lc_1 \dot{z}_2 - lLc_1 \dot{z}_3 + L^2 s_1 \dot{z}_3 \right), \\ y_{22} &= -\frac{1}{L^2} \left(-Lc_1 z_2 \dot{q}_1 + ls_1 z_2 \dot{q}_1 + L(Lc_1 - ls_1) z_3 (\dot{\phi} + \dot{q}_1) + z_1 (2Lc_1 \dot{\phi} + (Lc_1 - ls_1) \dot{q}_1) + \right. \\ &\quad \left. + 2lc_1 \dot{z}_1 - 2lc_1 \dot{z}_2 - 2Ls_1 \dot{z}_2 + lLc_1 \dot{z}_3 + L^2 s_1 \dot{z}_3 \right), \\ y_{32} &= -\frac{1}{L} \left(-ls_1 z_1 \dot{\phi} + ls_1 z_2 \dot{\phi} - lc_1 \dot{z}_1 + Ls_1 \dot{z}_1 + lc_1 \dot{z}_2 + Ls_1 \dot{z}_2 \right), \end{aligned}$$

gdzie $s_1 = \sin q_1$ oraz $c_1 = \cos q_1$. Nieznany parametr występuje również w macierzy korekcji (A.40). W związku z tym konieczne jest zdefiniowanie macierzy regresji liniowej wyrażającej zależność macierzy korekcji od nieznanymi parametrów, $\mathbf{\Upsilon}_\sigma(\sigma, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{5 \times 2}$. Jest ona równa

$$\mathbf{\Upsilon}_\sigma(\sigma, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \sigma_3 \dot{\phi} \cos q_1 \\ 0 & \frac{1}{2} \sigma_3 \dot{\phi} \cos q_1 \\ 0 & \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) \dot{\phi} \cos q_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

W symulacji przyjęto konfigurację początkową mobilnego manipulatora wynoszącą

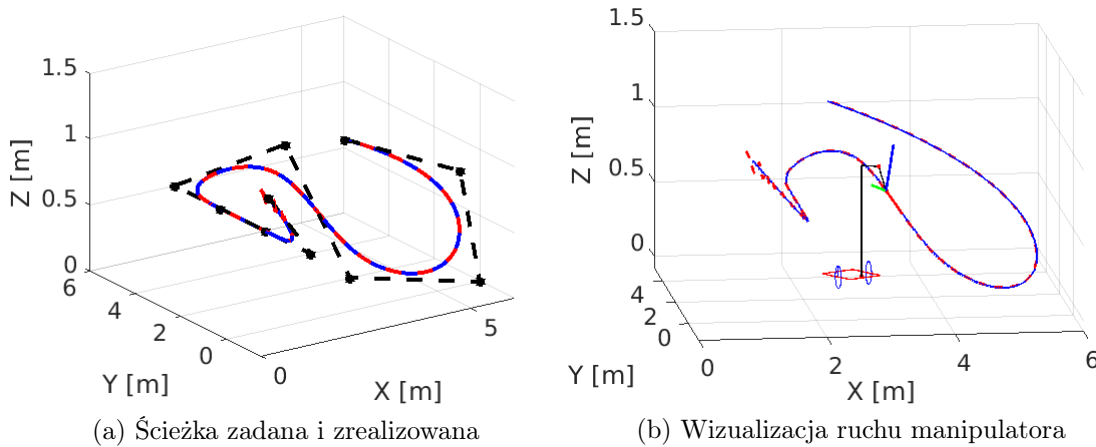
$$\mathbf{q}_0 = \left(\frac{1}{2} \text{ [m]} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{\pi}{4} \text{ [rad]} \quad 1,25 \text{ [m]} \quad -\frac{\pi}{2} \text{ [rad]} \right)^T$$

przy zerowych prędkościach początkowych. Dodatkowo, dobrano następujące wzmocnienia sterowników:

- na poziomie kinematycznym: $\mathbf{K}_k = \text{diag}_{3 \times 3}\{100\}$;
- na poziomie dynamicznym:
 - $\mathbf{K}_d = \text{diag}\{200, 200, 250, 300, 300\}$;
 - $\mathbf{K} = \text{diag}\{40, 40, 20, 100, 10\}$;
 - $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{10, 10, 5, 5, 20\}$.

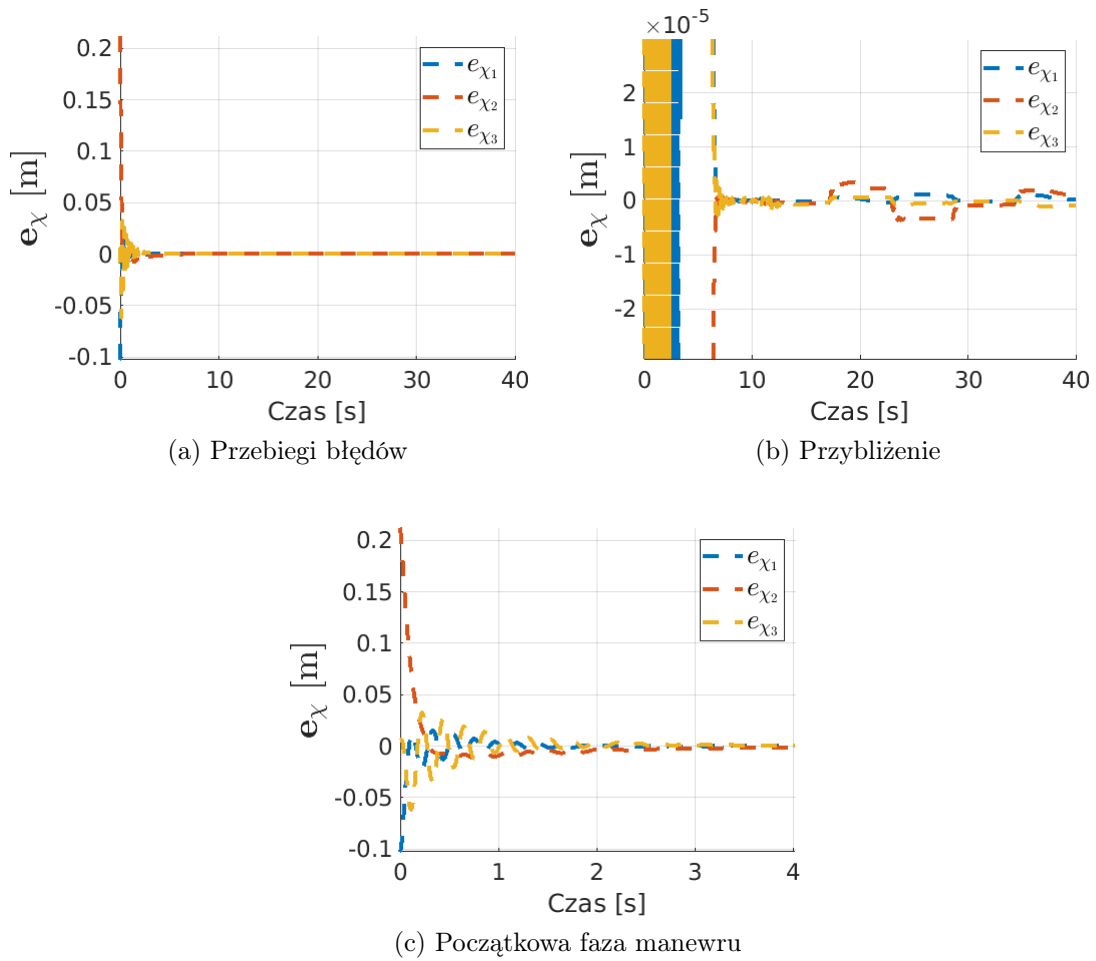
Przyjęto również oszacowanie nieznanych parametrów $\hat{\mathbf{a}} = (60 \text{ [kg]} \quad 10 \text{ [kg} \cdot \text{m]})^T$. Uzyskane rezultaty przedstawiono na poniższych wykresach.

Na rys. 6.9 porównano ścieżkę zadaną i zrealizowaną przez manipulator. Widać wyraźnie, że poza oscylacjami na początku manewru, gdy robot znajdował się w fazie przejściowej, chwytak podąża za układem Bishopa wzdłuż ścieżki i dobrze odwzorowuje kształt krzywej. Ponadto, krzywa B-sklejana znacznie lepiej niż krzywa Béziera odwzorowuje wielokąt wyznaczony przez ten sam zbiór punktów kontrolnych (por. z rys. 6.5). Warto zauważyć, że fragment zadanej krzywej B-sklejanej ma zerową krzywiznę pomiędzy punktami $(2 \ 2 \ \frac{1}{2})^T$ oraz $(2 \ 4 \ \frac{1}{2})^T$, więc zastosowanie parametryzacji Bishopa jest konieczne.



Rysunek 6.9: Porównanie ścieżki zadanej (linia niebieska) oraz ścieżki zrealizowanej przez manipulator (linia czerwona) wraz z wielokątem wyznaczonym przez punkty kontrolne (linia czarna) – algorytm ślizgowy.

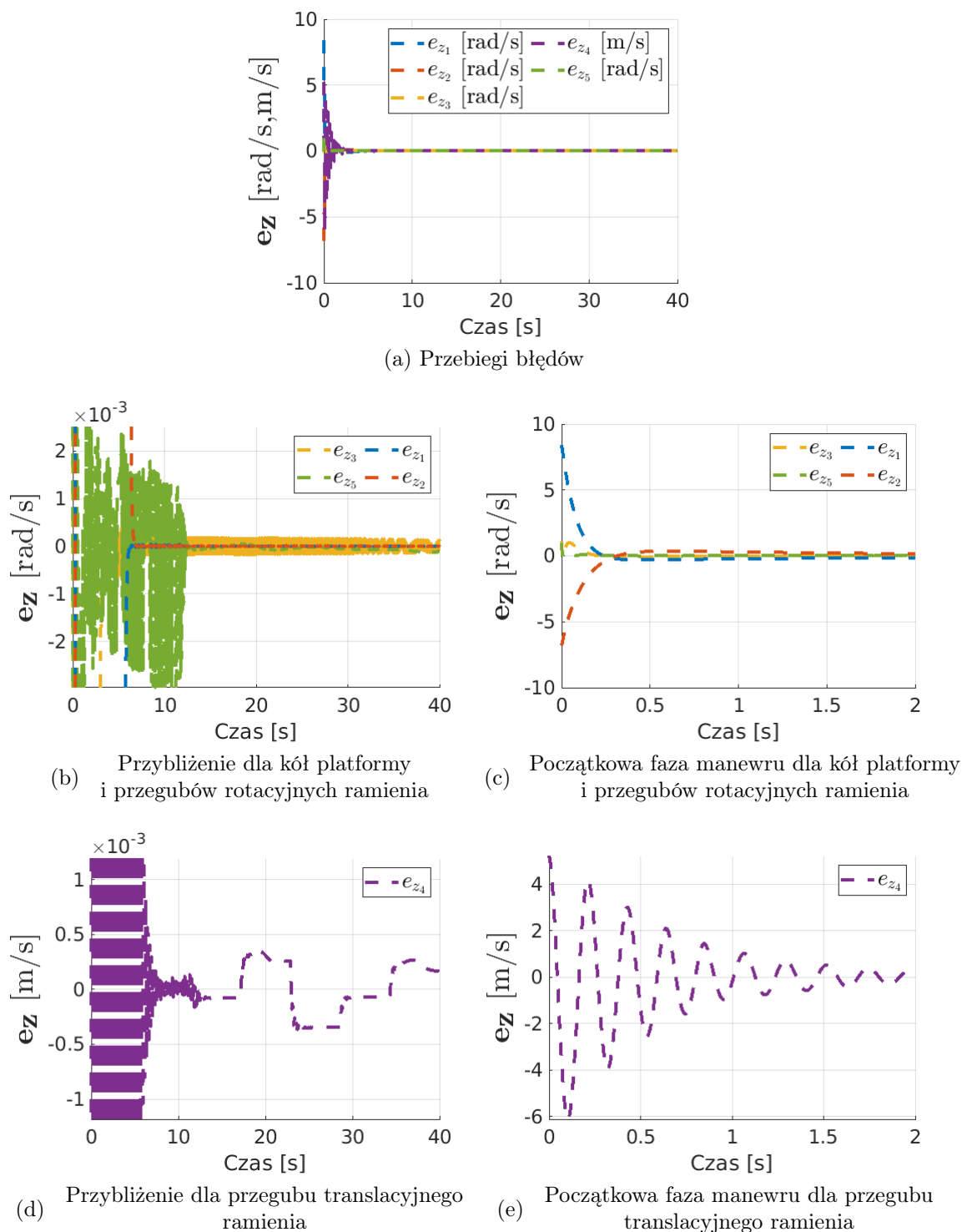
Rys. 6.10 przedstawia przebiegi błędów śledzenia ścieżki. Błąd początkowy jest szybko kompensowany, choć w początkowej fazie występują wspomniane wcześniej oscylacje. Można je zaobserwować zwłaszcza na rys. 6.10c. Po pewnym czasie błędy jednak stabilizują się na małych wartościach na poziomie dokładności obliczeń i możliwości dokładnych urządzeń pomiarowych (rys. 6.10b). Uzyskane wyniki są zatem satysfakcjonujące i potwierdzają teoretyczne własności algorytmu ślizgowego, który pozwala na poprawną realizację zadania śledzenia ścieżki.



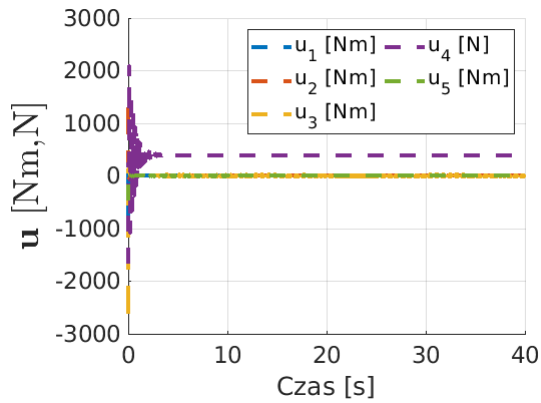
Rysunek 6.10: Błędy śledzenia ścieżki e_x – algorytm ślizgowy.

Na rys. 6.11 przedstawiono przebiegi błędów śledzenia profili prędkościowych. Na tych wykresach uwidaczniają się zjawiska typowe dla algorytmu ślizgowego. Błędy zbiegają do bardzo małych wartości, lecz w ich przebiegach widoczne są wysokoczęstotliwościowe oscylacje. Wynikają one z kompensacji strukturalnej i parametrycznej nieznanego modelu dynamiki robota przez algorytm ślizgowy. Należy jednak zwrócić uwagę, że początkowy błąd został poprawnie skompensowany, a podczas ruchu wzdłuż ścieżki błędy były ograniczone, choć niezerowe ze względu na nieuwzględnienie wszystkich elementów dynamiki robota w prawie sterowania. Taka realizacja profili prędkościowych pozwoliła jednak na poprawną realizację zadania śledzenia ścieżki.

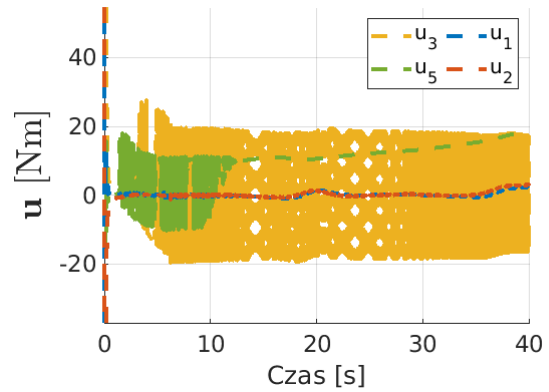
Z kolei, na rys. 6.12 zaprezentowano przebiegi sygnałów sterujących uzyskane dzięki zastosowanemu algorytmowi. Warto zwrócić uwagę, że na początku manewru występują wysokie piki wartości, wynikające głównie z błędu początkowego. Później wartości sterowań stabilizują się na poziomie możliwym do fizycznej realizacji. W przebiegach sygnałów sterujących ujawnia się jednak wpływ algorytmu ślizgowego. Dochodzi do oscylacji wartości o niedużej amplitudzie, lecz wysokiej częstotliwości. Tak intensywna zmiana wartości mogłaby źle wpływać na mechanikę układów napędzających, stąd konieczne może być ich ograniczenie. Można to wykonać poprzez powtórzenie procedury identyfikacji i poprawienie dokładności modelu dynamiki robota.



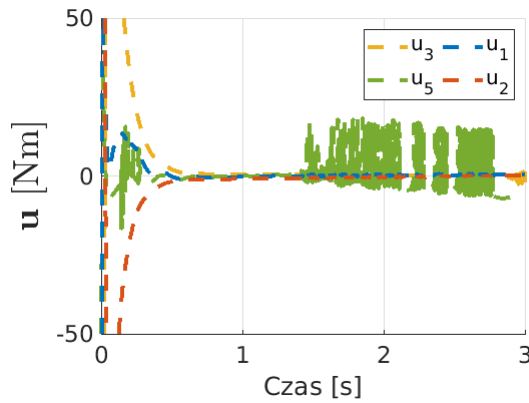
Rysunek 6.11: Błędy śledzenia profili prędkościowych $\mathbf{e}_z$ – algorytm ślizgowy.



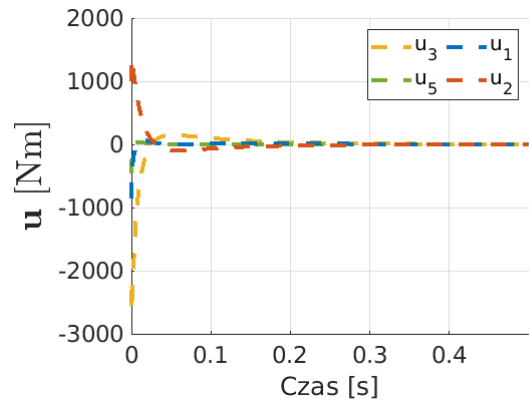
(a) Przebiegi sterowań



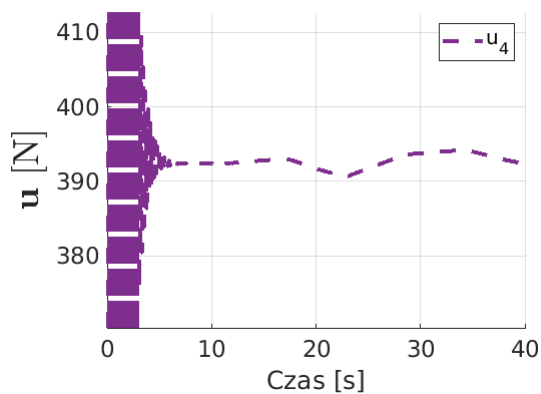
(b) Przybliżenie dla napędów kół platformy i przegubów rotacyjnych ramienia



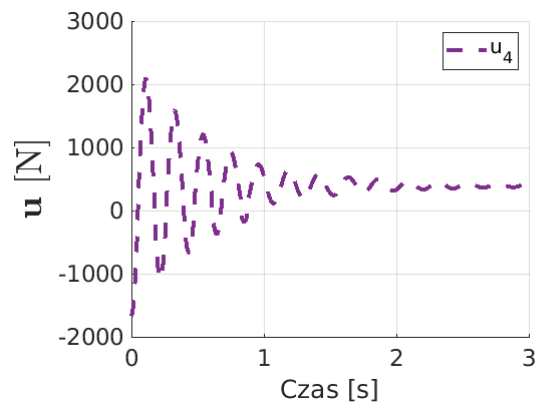
(c) Początkowa faza manewru dla napędów kół platformy i przegubów rotacyjnych ramienia



(d) Piki wartości w napędach kół platformy i przegubów rotacyjnych ramienia



(e) Przybliżenie dla napędu przegubu translacyjnego ramienia



(f) Początkowa faza manewru dla napędu przegubu translacyjnego ramienia

Rysunek 6.12: Wygenerowane sygnały sterujące $\mathbf{u}$ – algorytm ślizgowy.

6.4 Podsumowanie

W niniejszym rozdziale przedstawiono algorytmy śledzenia ścieżki dla nieholonomicznych manipulatorów mobilnych. Zaproponowane prawa sterowania uwzględniają nie tylko własności nieholonomicznych robotów mobilnych, ale także specyfikę bardzo ważnych konstrukcji, jakimi są manipulatory mobilne.

W Twierdzeniu 6 zdefiniowano sterownik kinematyczny, który gwarantuje spełnienie ograniczeń prędkościowych dwojakiej natury: wynikających z ograniczeń nieholonomicznych obiektu, jak i opisu robota względem ścieżki. Z kolei Twierdzenie 7 oraz Twierdzenie 8 określają sterowniki dynamiczne dla manipulatora mobilnego. Pierwszy z nich jest algorytmem bazującym na pełnej znajomości modelu dynamiki robota. Drugie prawo sterowania to algorytm odporny na nieznaną parametryczną i strukturalną model dynamiki. Przedstawiona analiza stabilności algorytmów dowodzi asymptotycznej zbieżności błędów śledzenia do zera w obu stopniach kaskadowego układu sterowania.

Zaprezentowane wyniki badań symulacyjnych potwierdzają rezultaty teoretyczne. Należy podkreślić, że badania przeprowadzono dla różnych metod parametryzacji robota względem ścieżki: ortogonalnej Serreta–Freneta, nieortogonalnej *beta*, nieortogonalnej Bishopa. Ponadto, rozważono ścieżki o dużej użyteczności praktycznej:

- klotoida, która jest uogólnieniem podstawowych elementów ruchu takich, jak prosta czy okrąg;
- krzywe Béziera oraz B-sklejane, które można zdefiniować za pomocą zbioru punktów kontrolnych.

Zaprezentowane wyniki analiz numerycznych potwierdzają teoretyczne własności proponowanych algorytmów sterowania. Na tej podstawie można wnioskować, że zdefiniowane prawa sterowania pozwalają na realizację zadania śledzenia ścieżki z satysfakcjonującą precyzją.

Rozdział 7

Porównanie metod parametryzacji

W rozdziałach 5 oraz 6 zaprezentowano algorytmy sterowania służące realizacji zadania śledzenia ścieżki przez odpowiednio obiekty holonomiczne oraz mobilne obiekty nieholonomiczne. W scenariuszach symulacyjnych oraz eksperymentalnych, które rozważono w celu walidacji zaproponowanej teorii, wykorzystano różne metody parametryzacji krzywoliniowych: Serreta–Freneta, Bishopa, *beta*. Ich szczegółowe definicje podano w rozdziale 2. Ponadto, zadania realizowano w oparciu o parametryzację ortogonalną oraz nieortogonalną. Zgodnie z równaniami podanymi w rozdziale 3 wybór rodzaju metody wpływa bezpośrednio na definicję kinematyki obiektu robotycznego względem ścieżki.

Uzyskane wyniki świadczą, że każda metoda parametryzacji pozwala na poprawną realizację zadania śledzenia ścieżki. W przedstawionych badaniach wykorzystano bowiem wszystkie omówione parametryzacje. Jednakże, w tym miejscu należy pochylić się nad pytaniem o kryteria doboru odpowiedniego rozwiązania. Każda parametryzacja charakteryzuje się bowiem pewnymi własnościami, które mogą być kluczowe przy realizacji danego scenariusza. W niniejszym rozdziale zostaną przeanalizowane najważniejsze cechy metod, do których zaliczają się:

- minimalne wymagania na klasę krzywej;
- ewolucja układu lokalnego wzdłuż ścieżki (w tym: problem zachowania ciągłości ewolucji);
- odporność na punkty o zerowej krzywiznie;
- rotacja układu lokalnego względem ścieżki;
- występowanie osobliwości;
- swoboda inicjalizacji układu lokalnego na krzywej.

Celem prezentowanego zestawienia jest synteza własności metod opisu robota względem ścieżki, które zaproponowano w tej pracy. Analizie zostanie również poddana możliwość łączenia różnych metod parametryzacji w celu maksymalizacji korzyści płynących z poszczególnych reprezentacji. Dzięki temu wybór metody odpowiadającej wymaganiom bądź warunkom konkretnego zadania będzie łatwiejszy i bardziej przejrzysty.

Do analizy własności parametryzacji wykorzystano następujące krzywe:

- $\mathcal{K}1$ Linia śrubowa – równania ogólne krzywej zostały podane w dodatku B.2. W badaniach zastosowano parametry przyjęte w scenariuszu w rozdziale 5.4.1, tzn. $\mathbf{a} = 0,51$, $\mathbf{b} = 0,07$.
- $\mathcal{K}2$ Okrąg – realizowany jako linia śrubowa $\mathcal{K}1$ na płaszczyźnie, tzn. dla parametrów $\mathbf{a} = 0,51$, $\mathbf{b} = 0$.
- $\mathcal{K}3$ Klotoida – ogólne równania krzywej przedstawiono w dodatku B.4. Przyjęto następujące parametry krzywej: $\kappa' = 0,33$, $\kappa_0 = -1,5$, $\tau' = 0,014$ oraz $\tau_0 = \frac{\tau' \kappa_0}{\kappa'}$. Punkt początkowy klotoidy w przestrzeni określono jako $\mathbf{r}_0 = (0 \ -0,5 \ 0,4)^T$ [m], natomiast warunek początkowy dla ewolucji układu Serreta–Freneta został zdefiniowany jako: $\mathbf{t}_0 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ 0 \ 0,5\right)^T$, $\mathbf{n}_0 = (0 \ 1 \ 0)^T$, $\mathbf{b}_0 = (-0,5 \ 0 \ \frac{\sqrt{3}}{2})^T$.
- $\mathcal{K}4$ Krzywa Béziera – równania ogólne krzywej zostały podane w dodatku B.5. Do ich realizacji wykorzystano zbiór punktów kontrolnych

$$\mathbf{P} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \right\} \text{ [m]}.$$

Taka sama krzywa została wykorzystana w badaniach symulacyjnych w rozdziale 6.3.1.

- $\mathcal{K}5$ Krzywa B-sklejana – ogólne równania przedstawiono w dodatku B.6. Krzywa została zdefiniowana na podstawie punktów kontrolnych

$$\mathbf{P} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \right\} \text{ [m]}.$$

Ponadto przyjęto, że punkty węzłowe są jednokrotne i równomiernie rozłożone. Stopień wielomianów bazowych dobierano w poszczególnych badaniach. Taka sama krzywa została wykorzystana w badaniach symulacyjnych w rozdziale 6.3.2.

- $\mathcal{K}6$ Krzywa B-sklejana – ogólne równania w dodatku B.6. Krzywa zdefiniowana na podstawie punktów kontrolnych

$$\mathbf{P} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 2,5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ [m]}$$

przy równomiernie rozłożonych jednokrotnych punktach węzłowych. Jako stopień wielomianów bazowych przyjęto $p = 4$, aby zagwarantować odpowiednią klasę ciągłości w punktach sklejenia.

- $\mathcal{K}7$ Krzywa B-sklejana wzorowana na krzywej $\mathcal{K}5$, której punkty kontrolne zdefiniowano jako

$$\mathbf{P} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ [m]}.$$

K8 Krzywa B-sklejana wzorowana na krzywej K6, lecz zdefiniowana na płaszczyźnie na podstawie punktów kontrolnych

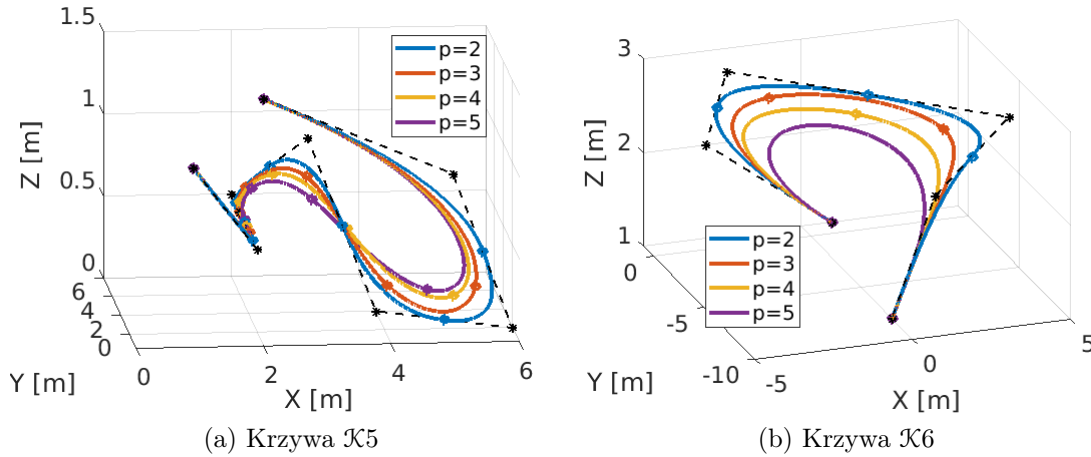
$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ [m]}$$

przy równomiernie rozłożonych punktach węzłowych. Stopień wielomianów bazowych dobierano osobno w poszczególnych badaniach.

7.1 Minimalne wymagania na klasę krzywej

Zgodnie z definicją parametryzacji Serreta–Freneta, minimalna klasa parametryzowanej krzywej to $\mathcal{C}^3$. Wynika to bezpośrednio z równania na torsję krzywej (2.5b) lub (2.12b). Jako że parametr opisujący odchylenie krzywej od płaszczyzny jest wykorzystywany w opisie ewolucji układu *beta*, również ta metoda parametryzacji wymaga klasy $\mathcal{C}^3$. Z kolei, parametryzacja Bishopa redukuje te wymagania do klasy $\mathcal{C}^2$, dzięki czemu możliwe staje się wykorzystanie szerszego zakresu krzywych w zadaniu śledzenia ścieżki.

Warto zauważyć, że klasa różniczkowalności może wpływać na dokładność realizacji zadania. Rozważmy krzywe B-sklejane K5 oraz K6. Dzięki modyfikacji stopnia wielomianów bazowych krzywej można uzyskać różną klasę ciągłości w punktach sklejenia. Na rys. 7.1 przedstawiono realizacje tej samej krzywej dla wielomianów bazowych różnego stopnia p . Należy podkreślić, że im niższy stopień wielomianów bazowych, tym lepiej

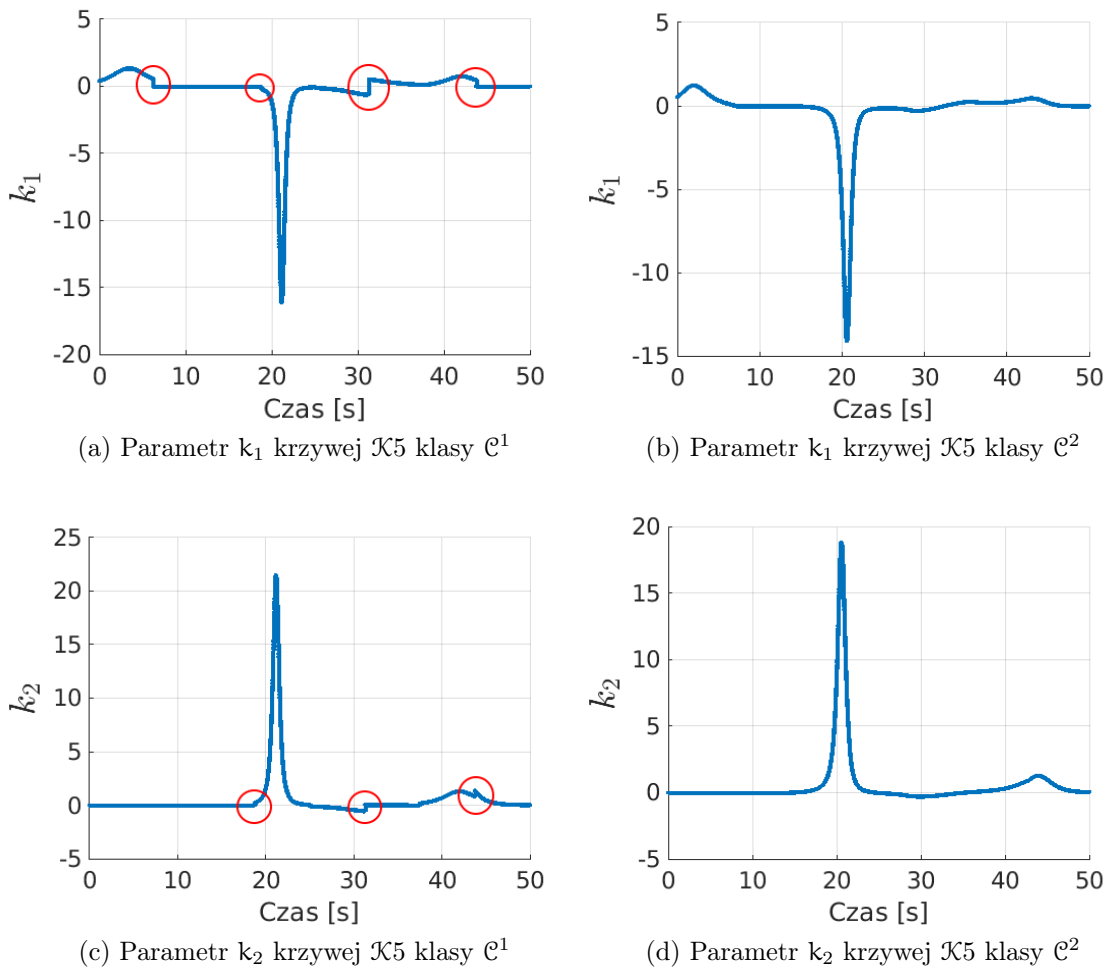


Rysunek 7.1: Krzywe B-sklejane zrealizowane za pomocą wielomianów bazowych różnego stopnia p .

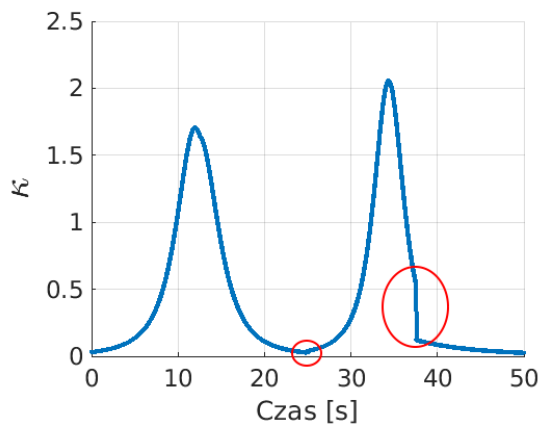
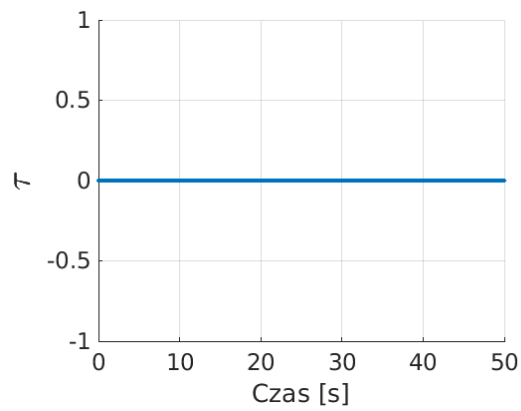
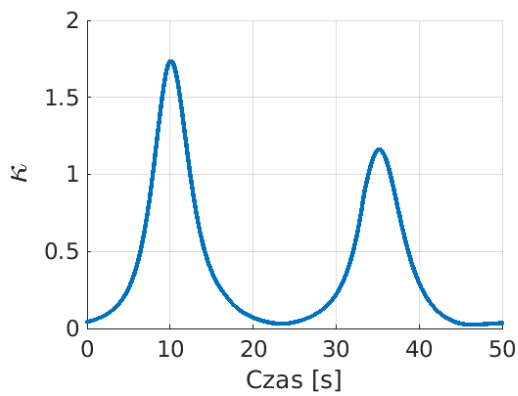
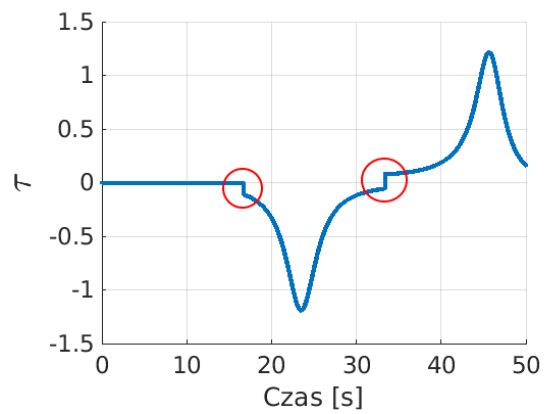
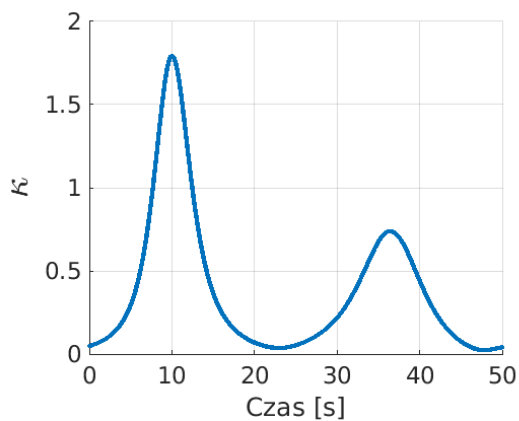
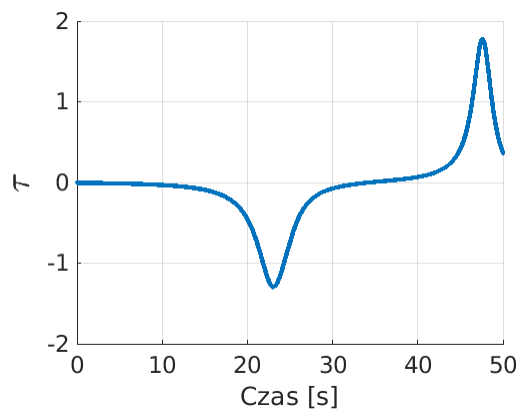
odwzorowany jest wielokąt wyznaczony przez punkty kontrolne. Niemniej jednak, klasa różniczkowalności krzywej w punktach sklejenia jest wyznaczana jako $\mathcal{C}^{p-k}$, gdzie p oznacza stopień wielomianów bazowych, a k – wielokrotność punktów węzłowych. Oznacza to, że w przypadku parametryzacji Serreta–Freneta należy zastosować co najmniej $p = 4$, a w przypadku parametryzacji Bishopa co najmniej $p = 3$. Wynika stąd, że krzywa B-sklejana opisana parametryzacją Bishopa pozwala na dokładniejsze odwzorowanie zadanego zbioru punktów kontrolnych.

Warto zastanowić się, jak bardzo krytyczne jest rozważane wymaganie na minimalną klasę różniczkowalności krzywej. Wszakże w przytoczonych krzywych B-sklejanych klasa różniczkowalności redukuje się jedynie w punktach węzłowych. Poza tymi punktami krzywa jest gładka. Okazuje się jednak, że redukcja klasy w punktach sklejenia jest kluczowa dla ewolucji układów lokalnych. Skutkuje ona bowiem nieciągłą zmianą wartości reprezentujących geometrię krzywej (rozwiniecie normalne krzywej (k_1, k_2) dla parametryzacji Bishopa, a także krzywizna κ i torsja τ dla parametryzacji Serreta–Freneta). Na poniższych wykresach przeanalizowano wpływ klasy krzywej na ewolucję parametrów geometrycznych.

Na rys. 7.2 porównano przebiegi krzywizn Bishopa dla krzywej $\mathcal{K}5$, która została zrealizowana przy pomocy wielomianów bazowych stopnia $p = 2$ (w konsekwencji krzywa była klasy $\mathcal{C}^1$) oraz stopnia $p = 3$ (klasa $\mathcal{C}^2$). Na wykresie zaznaczono widoczne nieciągłości w ewolucji parametrów dla krzywej klasy $\mathcal{C}^1$, która nie spełnia minimalnych wymogów parametryzacji Bishopa.



Rysunek 7.2: Wpływ klasy krzywej na ewolucję parametrów geometrycznych w parametryzacji Bishopa.

(a) Krzywizna κ krzywej $\mathcal{K}6$ klasy $\mathcal{C}^1$ (b) Torsja τ krzywej $\mathcal{K}6$ klasy $\mathcal{C}^1$ (c) Krzywizna κ krzywej $\mathcal{K}6$ klasy $\mathcal{C}^2$ (d) Torsja τ krzywej $\mathcal{K}6$ klasy $\mathcal{C}^2$ (e) Krzywizna κ krzywej $\mathcal{K}6$ klasy $\mathcal{C}^3$ (f) Torsja τ krzywej $\mathcal{K}6$ klasy $\mathcal{C}^3$

Rysunek 7.3: Wpływ klasy krzywej na ewolucję parametrów geometrycznych w parametryzacji Serreta–Freneta.

Podobną analizę wykonano dla parametryzacji Serreta–Freneta. Tym razem wykorzystano krzywą $\mathcal{K}6$ i rozważono następujące stopnie wielomianów bazowych: $p = 2$ (klasa krzywej $\mathcal{C}^1$), $p = 3$ (klasa $\mathcal{C}^2$), $p = 4$ (klasa $\mathcal{C}^3$). Na rys. 7.3 przedstawiono przebiegi krzywizny i torsji dla każdego przypadku, zaznaczając punkty, w których ciągłość nie jest zachowana.

Z uzyskanych przebiegów jasno wynika, że dla krzywej klasy $\mathcal{C}^1$ pojawiają się nieciągłości w przebiegu krzywizny, natomiast torsja jest zdegenerowana. Zmiana klasy krzywej na $\mathcal{C}^2$ pozwala rozwiązać problemy z krzywizną (przebieg jest ciągły), natomiast nieciągłości są wciąż obecne w przebiegu torsji. Warto podkreślić, że dla problemu na płaszczyźnie, gdzie torsja jest tożsamościowo równa 0, klasa $\mathcal{C}^2$ będzie wystarczająca dla parametryzacji Serreta–Freneta. Wreszcie, krzywa klasy $\mathcal{C}^3$ charakteryzuje się ciągłymi przebiegami parametrów geometrycznych. Wynika stąd, że jest to minimalna klasa krzywej opisanej parametryzacją Serreta–Freneta w przestrzeni trójwymiarowej.

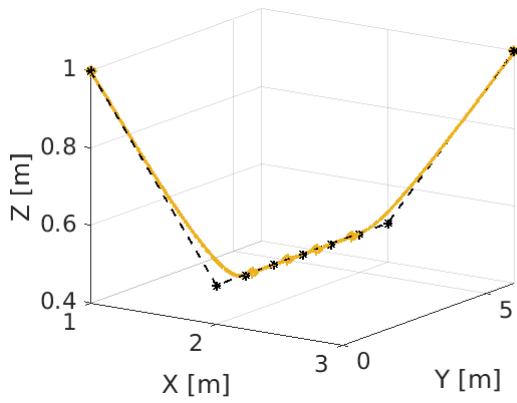
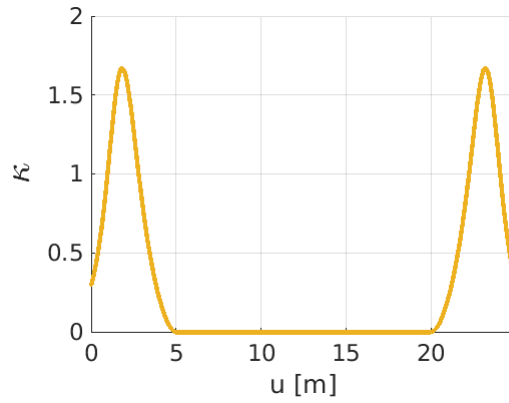
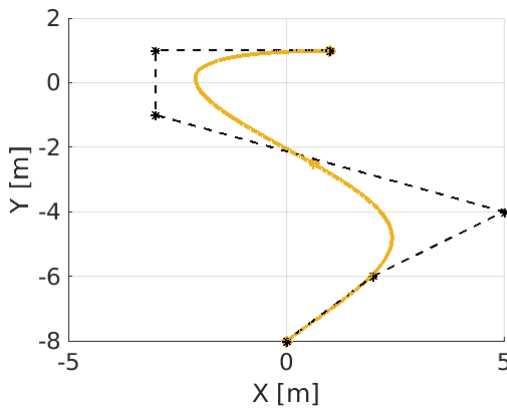
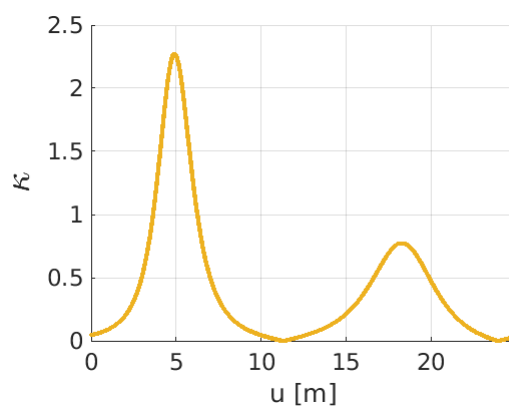
Przedstawione przebiegi parametrów geometrycznych wskazują, że problem klasy krzywych może redukować się do punktów, np. punktów sklejenia w definicji krzywej B - sklejaney. Niemniej jednak, parametry geometryczne krzywej definiują ewolucję układu lokalnego. W konsekwencji wpływają również na kinematykę robota względem ścieżki, a ta przekłada się bezpośrednio na sygnały sterujące generowane na poziomie kinematycznym. Oznacza to, że nieciągłości wynikające z parametryzacji krzywoliniowej przekładają się na sterowania. Może to prowadzić do gwałtownych reakcji układu sterowania, których skutkiem może być nawet trwałe uszkodzenie systemu. Podkreśla to konieczność zagwarantowania minimalnej klasy różniczkowości śledzonej krzywej przez wybraną metodę parametryzacji.

7.2 Ścieżki o zerowej krzywiznie

Podstawową wadą układu Serreta–Freneta jest fakt, że w definicji wersora normalnego występuje osobliwość. Można to stwierdzić na podstawie równań (2.4b) oraz (2.11b). W obu przypadkach mianownik zeruje się, gdy zeruje się krzywizna. Wówczas układ Serreta–Freneta pozostaje nieokreślony. Problem ten ma szersze znaczenie, gdyż takie punkty nieokreśloności wpływają również na nieciągłą ewolucję układu lokalnego na ścieżce. Rozwiązaniem tego problemu jest parametryzacja Bishopa, która cechuje się odpornością na punkty o zerowej krzywiznie.

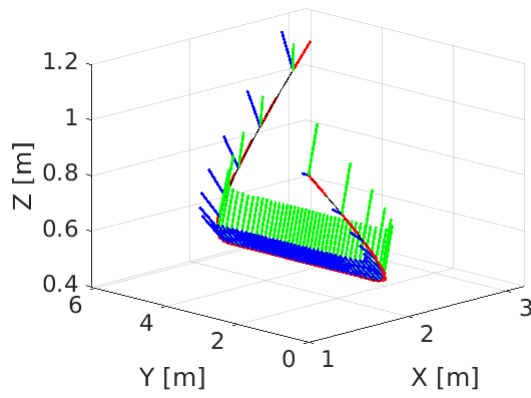
Warto podkreślić, że krzywe o zerowej krzywiznie są często podstawowymi elementami ruchu robotów. Do takiej klasy krzywych należą choćby linie proste, które ze względu na swoją prostotę mogą być bardzo powszechnie wykorzystywane. Ponadto, nietrudno używać na podstawie zbioru punktów krzywe sklejaney, które zawierają odcinki proste lub punkty o zerowej krzywiznie. W celu analizy rozważanego problemu wykorzystano krzywe $\mathcal{K}7$ oraz $\mathcal{K}8$, które przedstawiono na rys. 7.4. Obie krzywe realizowano dla wielomianów bazowych stopnia $p = 4$, aby zagwarantować minimalną klasę ciągłości dla parametryzacji Serreta–Freneta oraz *beta*. Łatwo można zauważyć, że krzywa $\mathcal{K}7$ zawiera odcinek prosty zdefiniowany na fragmencie dziedziny $u \in [5; 20]$. Z kolei, krzywa $\mathcal{K}8$ zawiera jedynie dwa punkty, w których krzywizna zeruje się. W obu przypadkach konieczne jest zastosowanie parametryzacji Bishopa zamiast parametryzacji Serreta–Freneta, o czym świadczą poniższe wykresy.

Na rys. 7.5 zestawiono ewolucję układu Bishopa oraz układu Serreta–Freneta wzdłuż

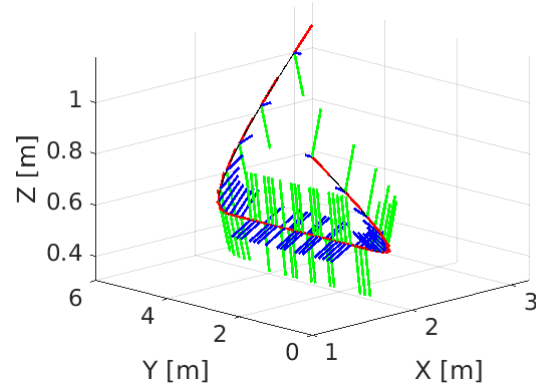
(a) Przebieg krzywej $\mathcal{K}7$ (b) Krzywizna krzywej $\mathcal{K}7$ (c) Przebieg krzywej $\mathcal{K}8$ (d) Krzywizna krzywej $\mathcal{K}8$ Rysunek 7.4: Przebiegi krzywych $\mathcal{K}7$ oraz $\mathcal{K}8$ wraz z wartością krzywizny.

krzywej $\mathcal{K}7$. W porównaniu pominięto wykres ewolucji wektora stycznego do krzywej $\mathbf{t}$, który w obu przypadkach jest identyczny. Warto zwrócić uwagę na zachowanie układów wzdłuż odcinka prostego, które przedstawiono na rys. 7.5a oraz 7.5b. Dzięki zastosowaniu względnie równoległego przesunięcia wektorów, układ Bishopa prezentuje regularne zachowanie (rys. 7.5a). Z kolei, układ Serreta–Freneta jest obciążony nieciągłymi zmianami orientacji (rys. 7.5b). Widać to wyraźnie w przebiegach składowych: wektora normalnego $\mathbf{n}$ oraz binormalnego $\mathbf{b}$. Dla fragmentu z zerową krzywizną wartości zmieniają się skokowo, a częstotliwość zmian jest bardzo duża.

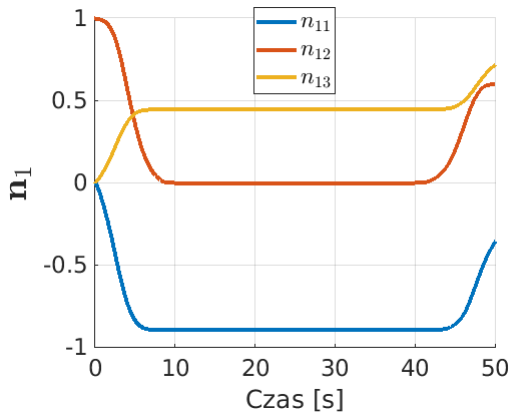
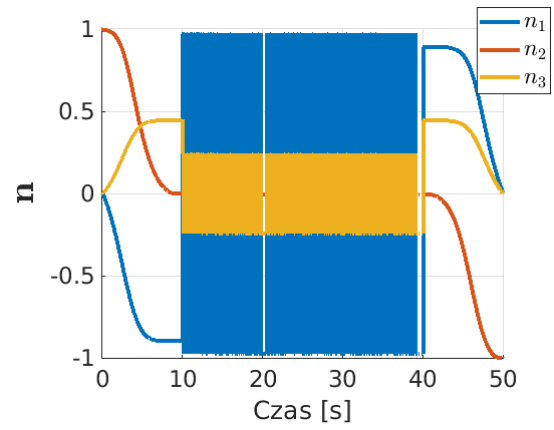
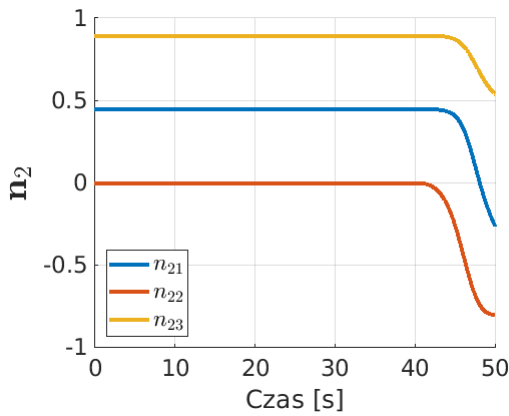
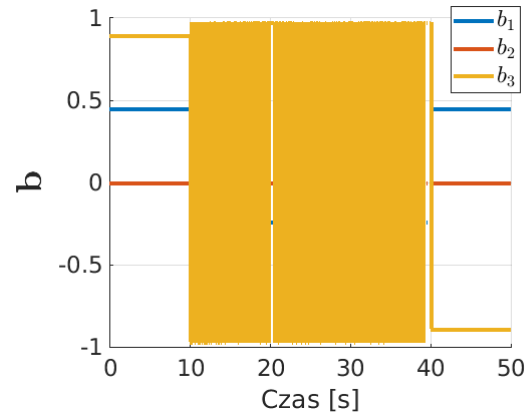
Podobną analizę wykonano dla ewolucji układów Serreta–Freneta oraz Bishopa wzdłuż krzywej $\mathcal{K}8$. Wyniki przedstawiono na rys. 7.6. Tym razem częstotliwość nieciągłych zmian w ewolucji układu Serreta–Freneta jest znacznie mniejsza, gdyż na rozważanej krzywej znajdują się jedynie dwa punkty o zerowej krzywiznie. Niemniej jednak, to właśnie w tych punktach następuje charakterystyczny przeskok układu Serreta–Freneta. W kontraście do tego wyniku stoi ewolucja składowych układu Bishopa, które zachowują ciągłość.



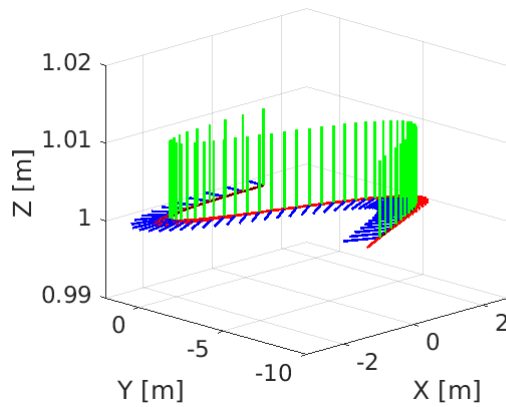
(a) Ewolucja układu Bishopa



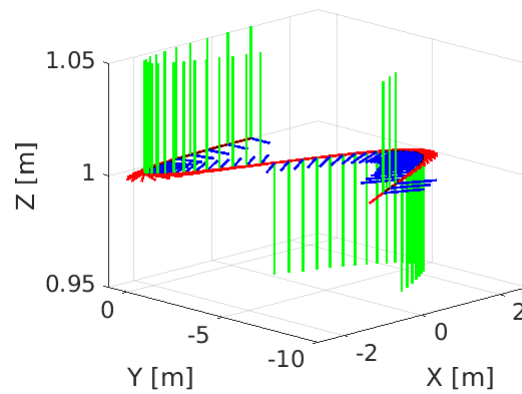
(b) Ewolucja układu Serreta-Freneta

(c) Wektor normalny $\mathbf{n}_1$ (p. Bishopa)(d) Wektor normalny $\mathbf{n}$ (p. Serreta-Freneta)(e) Wektor normalny $\mathbf{n}_2$ (p. Bishopa)(f) Wektor binormalny $\mathbf{b}$ (p. Serreta-Freneta)

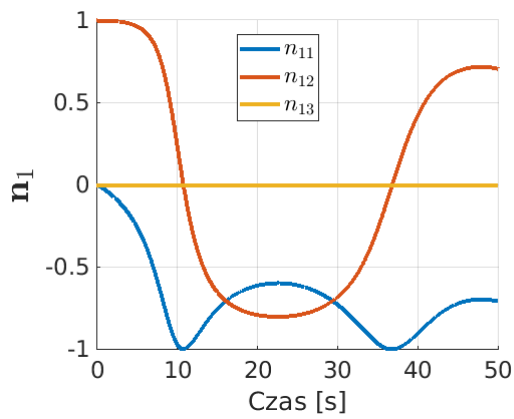
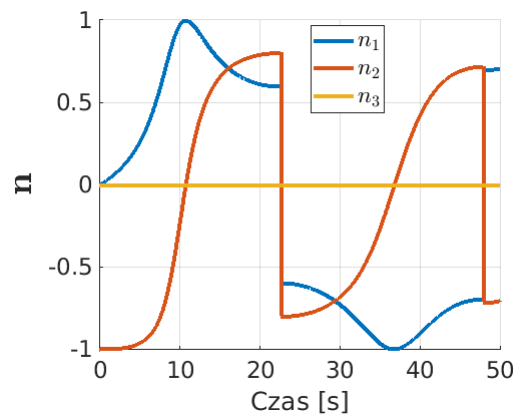
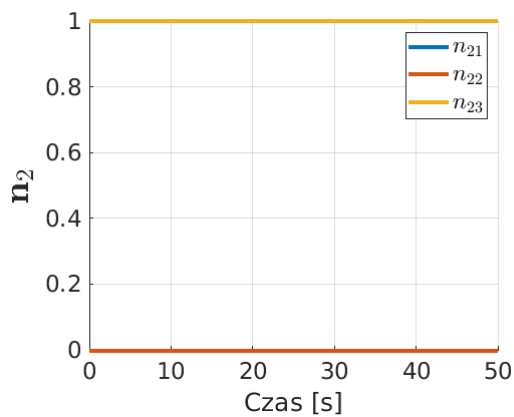
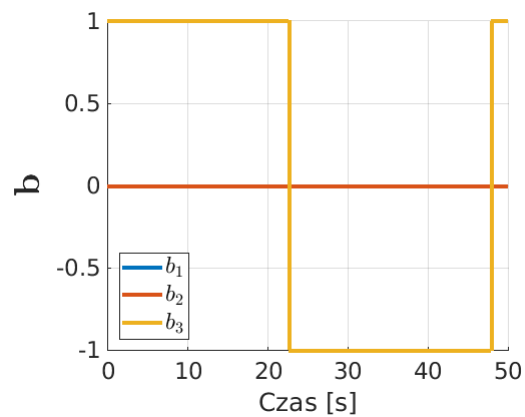
Rysunek 7.5: Porównanie ewolucji układów Bishopa oraz Serreta-Freneta wzdłuż krzywej $\mathcal{K}7$.



(a) Ewolucja układu Bishopa



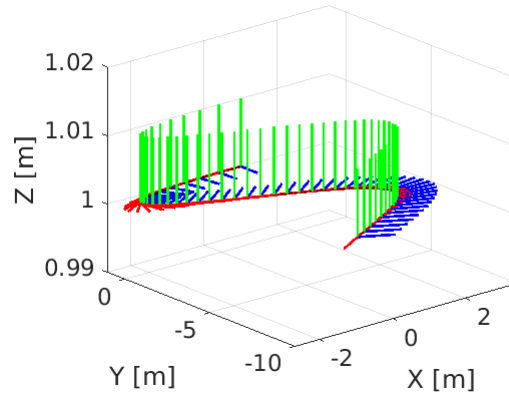
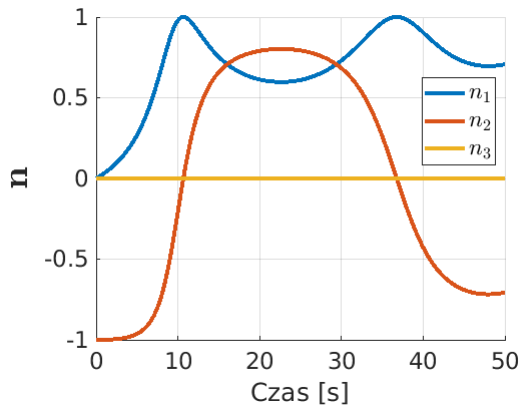
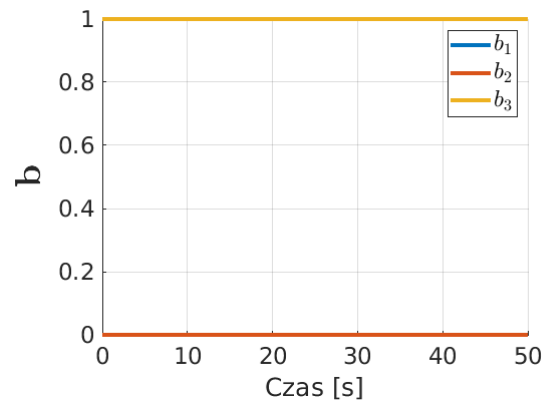
(b) Ewolucja układu Serreta-Freneta

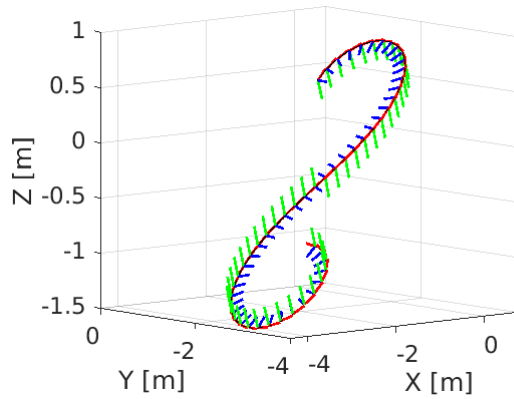
(c) Wektor normalny $\mathbf{n}_1$ (p. Bishopa)(d) Wektor normalny $\mathbf{n}$ (p. Serreta-Freneta)(e) Wektor normalny $\mathbf{n}_2$ (p. Bishopa)(f) Wektor binormalny $\mathbf{b}$ (p. Serreta-Freneta)

Rysunek 7.6: Porównanie ewolucji układów Bishopa oraz Serreta-Freneta wzdłuż krzywej $\mathcal{K}_8$.

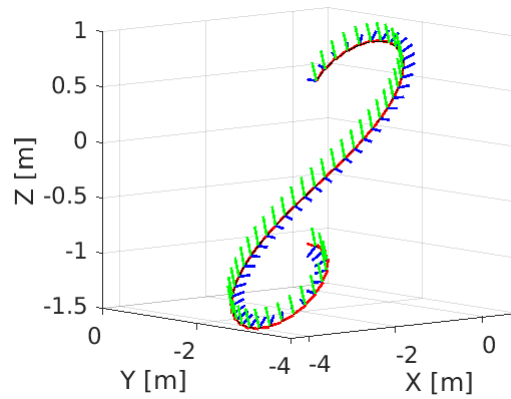
Jak wspomniano w poprzednim rozdziale, wszelkie nieciągłe zmiany w ewolucji układu lokalnego wpływają niekorzystnie na generowane wartości sygnałów sterujących. Sterowania generowane na poziomie kinematycznym zależą bowiem bezpośrednio od kinematyki robota względem ścieżki. Te równania z kolei oparte są o opis parametryczny ścieżki. Z tego względu nieciągłe zmiany w ewolucji układu Serreta–Freneta będą skutkować gwałtownymi i niebezpiecznymi zmianami wartości zadawanych na silniki robota. Dlatego też rekomenduje się stosowanie parametryzacji Bishopa, która jest odporna na punkty o zerowej krzywiznie.

W niektórych aplikacjach charakter ewolucji układu Serreta–Freneta może okazać się szczególnie korzystny. Wówczas można zastosować parametryzację *beta*, która zachowuje te pożądane własności, a jednocześnie pozostaje odporna na punkty o zerowej krzywiznie, gdyż jest oparta o parametryzację Bishopa. Na rys. 7.7 przedstawiono ewolucję układu *beta* wzdłuż krzywej $\mathcal{K}8$. Widać wyraźnie, że składowe układu *beta* zachowują pożądaną ciągłość. Ponadto, układ *beta* ewoluuje wzdłuż krzywej zgodnie z układem Serreta–Freneta (zgodność ewolucji zachodzi do punktu o zerowej krzywiznie, gdzie ewolucja układu Serreta–Freneta została zdegenerowana), lecz odmiennie niż układ Bishopa (ze względu na obrót układu Bishopa w stanie początkowym – tę własność omówiono szerzej w rozdziale 7.5).

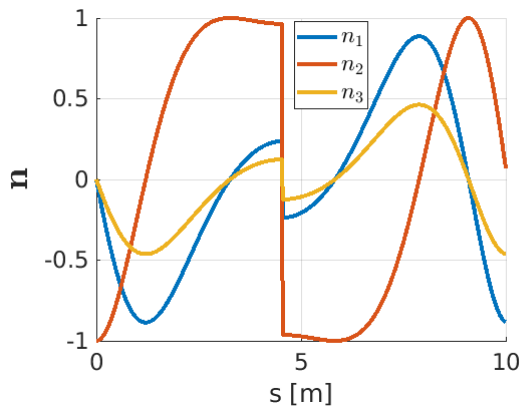
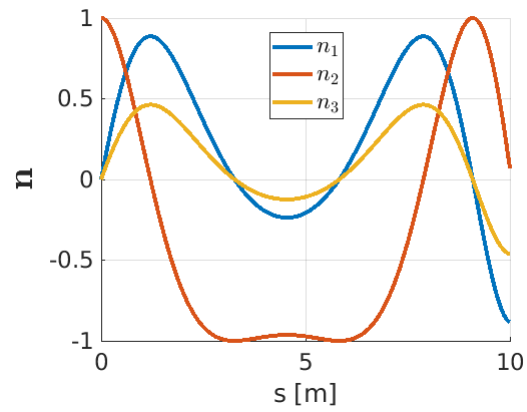
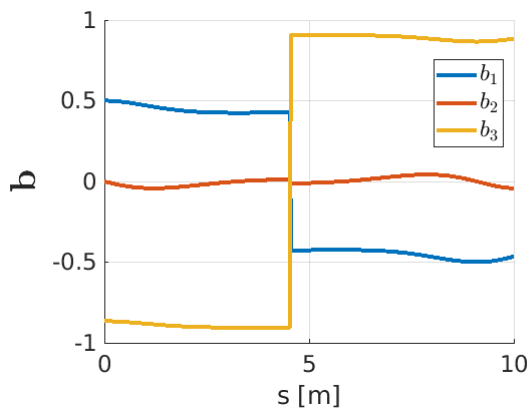
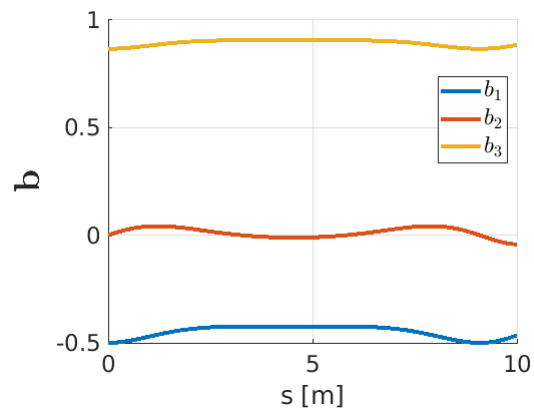
(a) Ewolucja układu *beta*(b) Wektor normalny $\mathbf{n}$ (c) Wektor binormalny $\mathbf{b}$ Rysunek 7.7: Ewolucja układu *beta* wzdłuż krzywej $\mathcal{K}8$.



(a) Ewolucja układu (definicja (2.4))



(b) Ewolucja układu (równania (B.8))

(c) Wektor normalny $\mathbf{n}$ (definicja (2.4b))(d) Wektor normalny $\mathbf{n}$ (równanie (B.8b))(e) Wektor binormalny $\mathbf{b}$ (definicja (2.4c))(f) Wektor binormalny $\mathbf{b}$ (równanie (B.8c))

Rysunek 7.8: Porównanie ewolucji układu Serreta–Freneta wzdłuż krzywej $\mathcal{K}3$ na podstawie definicji (2.4) oraz równań (B.8).

Alternatywnym sposobem na uniknięcie konieczności dzielenia przez zerową krzywiznę w definicji wersorów normalnych układu Serreta–Freneta jest rozwiązanie równań różniczkowych, które opisują ewolucję układu – (2.7) lub (2.13). Uzyskane w ten sposób równania algebraiczne mogą być wolne od osobliwości i można je zastosować zamiast definicji (2.4) lub (2.11). Przykładem zastosowania takiego rozwiązania jest krzywa $\mathcal{K}3$. Na rys. 7.8 przedstawiono ewolucję układu Serreta–Freneta wzdłuż klotoidy uogólnionej. Wyniki uzyskano na dwa sposoby. Najpierw skorzystano z ogólnej definicji wersorów układu Serreta–Freneta w parametryzacji unormowanej (2.4). Następnie wykorzystano równania podane w dodatku B.4, które stanowią rozwiązanie dla danego układu równań różniczkowych (2.7).

Na wykresach widać wyraźnie, że charakterystyczny przeskok dla układu Serreta–Freneta występuje tylko w pierwszym przypadku, który jest oparty o definicję (2.4). Nieciągłość w ewolucji układu występuje w punkcie przegięcia klotoidy, w którym zeruje się jednocześnie krzywizna oraz torsja (dla rozważanej krzywej $\mathcal{K}3$ jest to punkt $\bar{s} \approx 4,55$). Problem ten nie występuje w ewolucji wersorów układu uzyskanej na podstawie równań algebraicznych (B.8). Rozwiązanie układu równań różniczkowych pozwala uniknąć dzielenia przez krzywiznę.

Warto jednak podkreślić, że uzyskanie jawnego rozwiązania układu równań różniczkowych (2.7) lub (2.13) nie zawsze jest proste lub możliwe. Zgodnie z pracą [43], przedstawione równania dla klotoidy uogólnionej są prawdziwe tylko wtedy, gdy krzywa spełnia warunek komutatora. W przeciwnym razie trzeba skorzystać z definicji układu Serreta–Freneta (2.11), która jest obarczona osobliwością.

7.3 Osobliwości parametryzacji

W opisie parametrycznym robota względem ścieżki pojawiają się punkty osobliwe, w których nie można uzyskać równań kinematyki robota względem ścieżki. Część z tych punktów osobliwych wynika z definicji metody parametryzacji krzywoliniowej. Przykładem tego rodzaju osobliwości są punkty o zerowej krzywiznie dla parametryzacji Serreta–Freneta. Problem ten omówiono w rozdziale 7.2.

Jednakże, w proponowanym podejściu do opisu robota względem ścieżki występują również osobliwości w parametryzacji ortogonalnej, niezależnie od doboru parametryzacji krzywoliniowej. Na problem ten wskazano w rozdziale 3.1.3. Tamże wskazano również algebraiczne definicje osobliwości w parametryzacji ortogonalnej zarówno dla metody Serreta–Freneta, jak i Bishopa.

W niniejszym rozdziale punkty osobliwe parametryzacji ortogonalnej zostaną poddane bardziej szczegółowej analizie. Badania zostały przeprowadzone dla trzech konkretnych krzywych: linii śrubowej $\mathcal{K}1$, krzywej Béziera $\mathcal{K}4$ oraz krzywej B-sklejanej $\mathcal{K}6$. Dla punktów na krzywej w rozważanej dziedzinie zostały wyznaczone punkty osobliwe zgodnie z następującą metodą.

Położenie robota względem ścieżki zostało określone równaniem (3.2). Wynika stąd, że położenie punktu prowadzenia robota w układzie globalnym można wyznaczyć na podstawie zależności

$$\mathbf{p} = \mathbf{S}\mathbf{d} + \mathbf{r}. \quad (7.1)$$

Należy się zastanowić zatem, jakie położenia względem układu lokalnego na ścieżce $\mathbf{d}$ definiują punkty osobliwe w parametryzacji ortogonalnej. Zauważmy, że parametryzacja

ortogonalna nakłada wymaganie, aby punkt prowadzenia robota znajdował się w płaszczyźnie wyznaczonej przez wektor styczny $\mathbf{t}$, stąd konieczne jest $\mathbf{d}_1 = 0$. Pozostałe współrzędne wektora $\mathbf{d}$ należy wyznaczyć w zależności od przyjętej metody parametryzacji krzywoliniowej.

Na podstawie równania (3.28) można stwierdzić, że punkty osobliwe w ortogonalnej parametryzacji Serreta–Freneta występują, gdy

$$\mathbf{d}_2 = \frac{1}{\kappa}. \quad (7.2)$$

Stąd, punkty osobliwe ortogonalnej parametryzacji Serreta–Freneta będą znajdowały się w położeniach

$$\mathbf{d} = \left(0 \quad \frac{1}{\kappa} \quad \mathbf{d}_3\right)^T, \quad (7.3)$$

gdzie współrzędna $\mathbf{d}_3$ jest dowolna.

Analogicznie, osobliwość w ortogonalnej parametryzacji Bishopa występuje, gdy spełniony jest warunek

$$k_1 \mathbf{d}_2 + k_2 \mathbf{d}_3 = 1, \quad (7.4)$$

co wynika z zależności (3.32). Ponownie, współrzędną $\mathbf{d}_3$ można potraktować jako parametr. Wówczas punkty osobliwe w parametryzacji Bishopa będą zdefiniowane dla położzeń różnych

$$\mathbf{d} = \left(0 \quad \frac{1-k_2 \mathbf{d}_3}{k_1} \quad \mathbf{d}_3\right)^T. \quad (7.5)$$

W sytuacji, gdy $k_1 = 0$, to zgodnie z równaniami (2.28) zachodzi $k_2 = \kappa$. Wówczas, z warunku (7.4) wynika, że punkty osobliwe znajdują się w położeniach

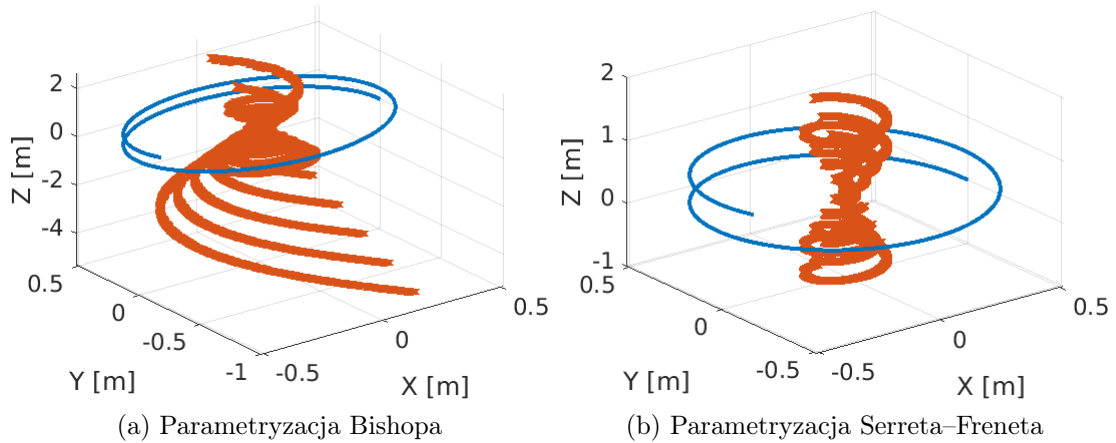
$$\mathbf{d} = \left(0 \quad \mathbf{d}_2 \quad \frac{1}{\kappa_2}\right)^T = \left(0 \quad \mathbf{d}_2 \quad \frac{1}{\kappa}\right)^T. \quad (7.6)$$

Ta sytuacja to symetryczne odbicie przypadku dla parametryzacji Serreta–Freneta (7.3), a wartość położenia $\mathbf{d}_2$ należy wtedy traktować jako swobodny parametr. Warto zauważyć, że w szczególnym przypadku, gdy $\kappa = k_1 = k_2 = 0$, tzn. dla prostej, osobliwości parametryzacji ortogonalnej nie występują.

Do celów badań, a także na potrzeby wizualizacji położenia punktów osobliwych przyjęto następujące wartości współrzędnej $\mathbf{d}_3$, którą potraktowano jako parametr: $\mathbf{d}_3 \in \{0; \pm 0, 25; \pm 0, 5; \pm 0, 75; \pm 1\}$ [m]. W ten sposób uzyskano przegląd punktów osobliwych, gdy obiekt w kierunku współrzędnej $\mathbf{d}_3$ znajduje się blisko lub daleko od rozważanej ścieżki. Wizualizacje przygotowano dwutorowo. Najpierw przedstawiono zbiór wszystkich punktów potencjalnie osobliwych w danej dziedzinie krzywej. Pozwala to na wyobrażenie tendencji występowania i kierunków rozchodzenia się takich punktów w przestrzeni globalnej. Należy jednak pamiętać, że każdemu punktowi na ścieżce odpowiadają inne położenia punktu prowadzenia robota, które skutkują osobliwościami zgodnie z zależnościami (7.2) oraz (7.4). Dlatego też w kolejnym kroku przedstawiono uzyskane punkty osobliwe względem konkretnych punktów na ścieżce. Wyniki analizy przedstawiono na poniższych wykresach.

W pierwszej kolejności analizie poddano linię śrubową $\mathcal{K}1$. Na rys. 7.9 przedstawiono zbiór wszystkich punktów, w których potencjalnie występuje osobliwość parametryzacji ortogonalnej, jeśli znajdzie się w nich punkt prowadzenia robota. Warto zauważyć, że zarówno dla parametryzacji Bishopa, jak i dla parametryzacji Serreta–Freneta punkty

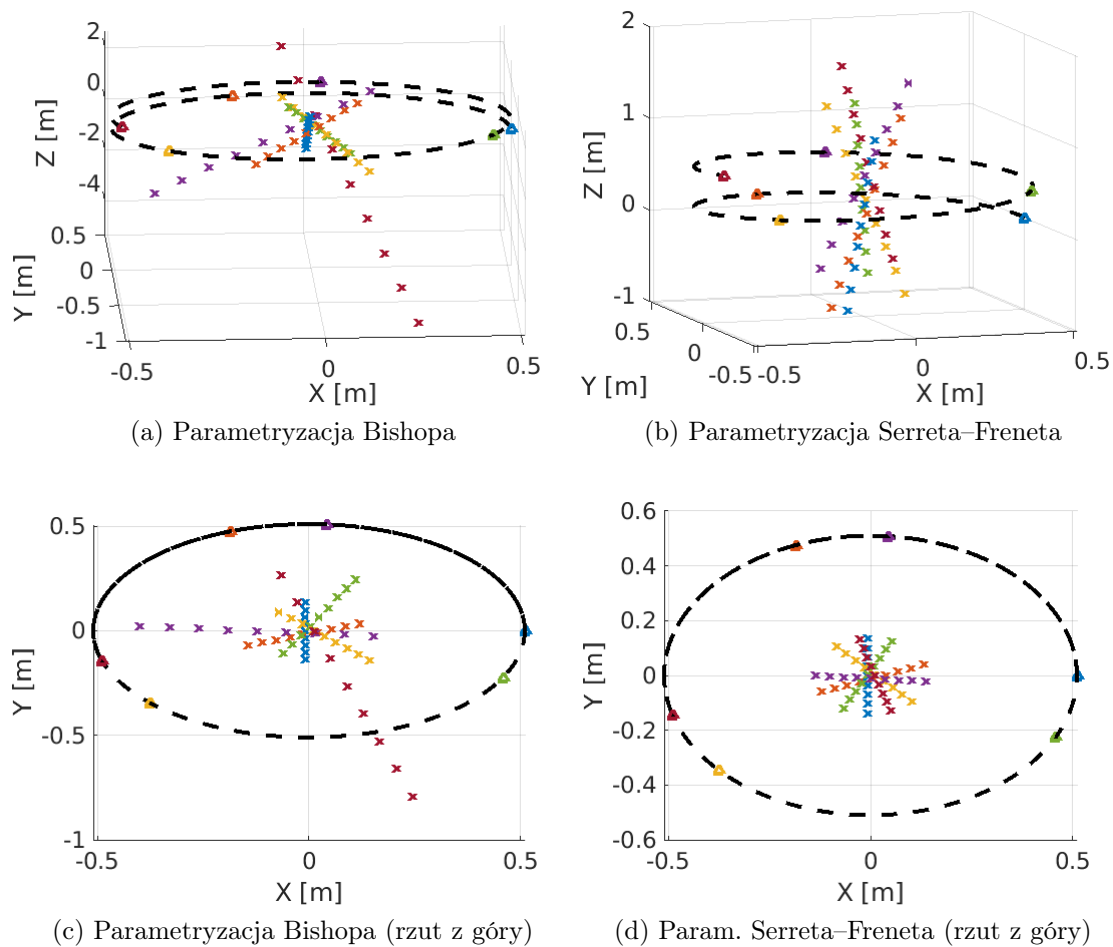
układają się w formę spirali. Owa spirala jest dość wąska w najbliższym otoczeniu krzywej, natomiast rozszerza się dla większych co do wartości bezwzględnej parametrów d_3 (obiekt oddala się od ścieżki). Można zaobserwować, że punkty związane z parametryzacją Bishopa zataczają znacznie większe łuki, zwłaszcza poniżej rozważanej linii śrubowej.



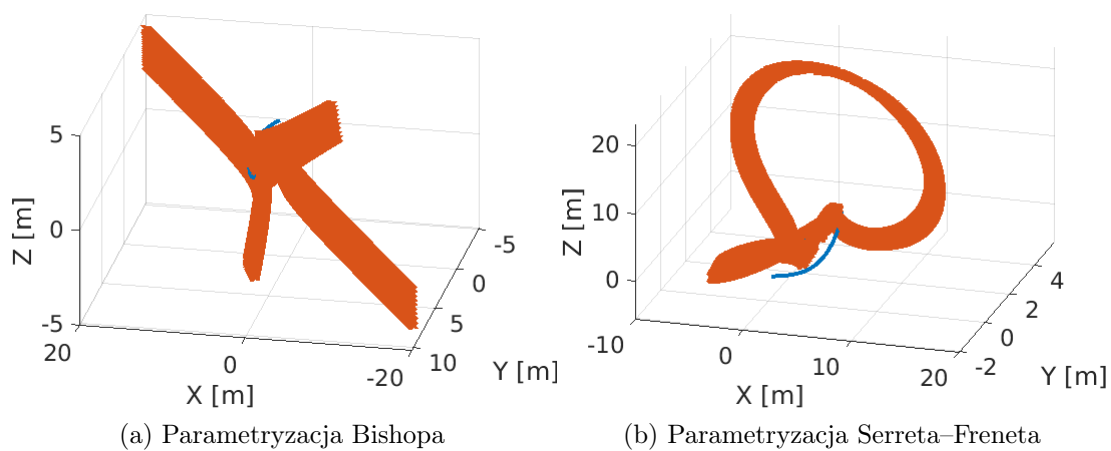
Rysunek 7.9: Zbiór punktów potencjalnie osobliwych wzdłuż całej linii śrubowej $\mathcal{K}1$.

Obserwację tę potwierdza analiza punktów osobliwych stowarzyszonych z konkretnymi punktami na krzywej, którą przedstawiono na rys. 7.10. Na rozważanej krzywej wybrano 6 punktów, z których każdy zaznaczono odmiennym kolorem. W przestrzeni zaznaczono również punkty, w których znajduje się osobliwość parametryzacji ortogonalnej. Punkty osobliwe zaznaczono kolorem odpowiadającym punktowi na ścieżce. Jako że rozważano tylko kilka wartości parametru d_3 na wykresie można obserwować jedynie wybrane punkty. Jednakże ich interpolacja lub ekstrapolacja pozwala wyobrazić sobie tendencję występowania punktów osobliwych w parametryzacji ortogonalnej. Nietrudno zauważyć, że w przypadku linii śrubowej punkty osobliwe układają się w kształt prostych. Dla parametryzacji Serreta–Freneta proste mają bardzo strome nachylenie i są skoncentrowane wokół osi środkowej krzywej. W przypadku parametryzacji Bishopa proste mają mniejsze nachylenie, a ich rzuty na płaszczyznę XY przecinają rzut linii śrubowej. Należy jednak podkreślić, że punkty osobliwe są oddalone od odpowiadających im punktów na krzywej. Ponadto, są skoncentrowane wokół osi środkowej i zawsze wewnątrz krzywizny. W konsekwencji, można łatwo określić, jakie zachowania robota mogą prowadzić do wejścia w konfiguracje osobliwe.

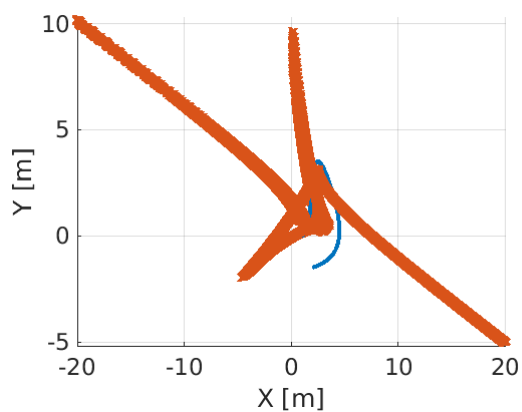
Analizę powtórzono dla krzywej Béziera $\mathcal{K}4$. Na rys. 7.11 przedstawiono zbiór punktów potencjalnie osobliwych. Wynika stąd, że punkty potencjalnie osobliwe często przecinają tego typu krzywą. Ponadto, ponownie uwidacznia się fakt, że zbiór punktów potencjalnie osobliwych w parametryzacji Bishopa jest bardziej rozległy niż w przypadku parametryzacji Serreta–Freneta.



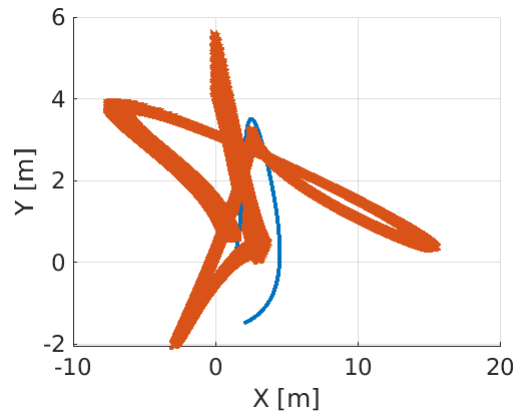
Rysunek 7.10: Punkty osobliwe odpowiadające wybranym punktom na linii śrubowej $\mathcal{K}1$.



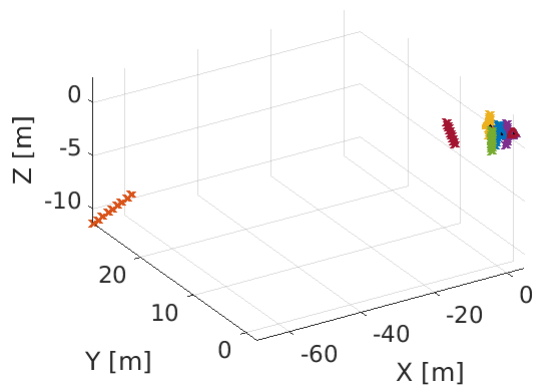
Rysunek 7.11: Zbiór punktów potencjalnie osobliwych wzdłuż całej krzywej Béziera $\mathcal{K}4$.



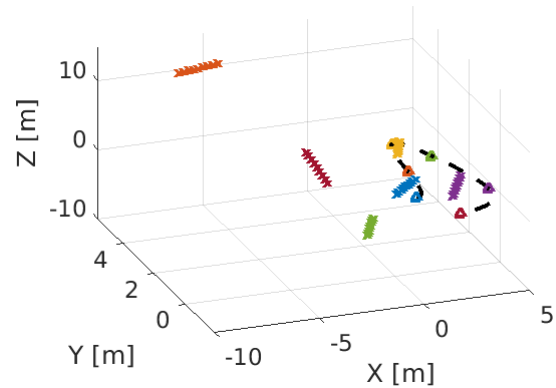
(c) Parametryzacja Bishopa (rzut z góry)



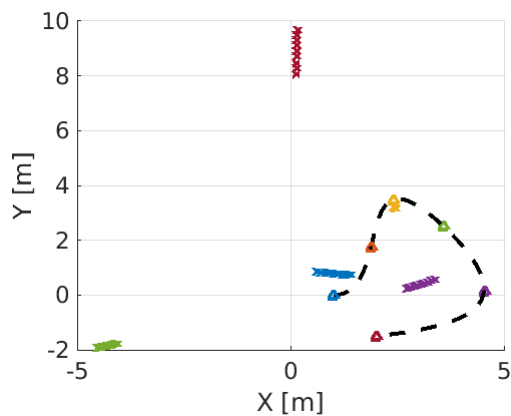
(d) Param. Serreta–Freneta (rzut z góry)

Rysunek 7.11: Zbiór punktów potencjalnie osobliwych wzdłuż całej krzywej Béziera $\mathcal{K}_4$.

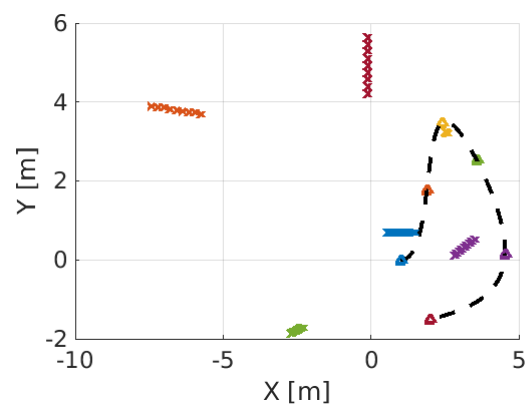
(a) Parametryzacja Bishopa



(b) Parametryzacja Serreta–Freneta



(c) Parametryzacja Bishopa (rzut z góry)

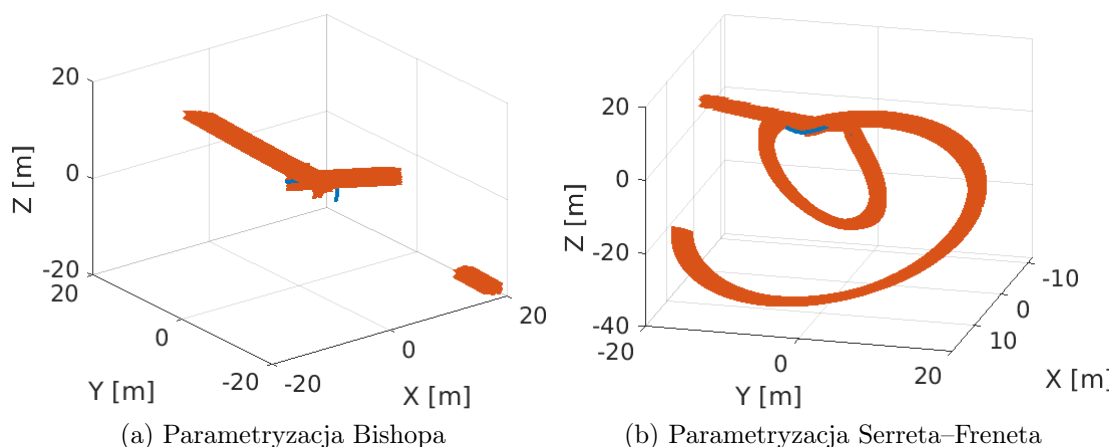


(d) Param. Serreta–Freneta (rzut z góry)

Rysunek 7.12: Punkty osobliwe odpowiadające wybranym punktom na krzywej Béziera $\mathcal{K}_4$.

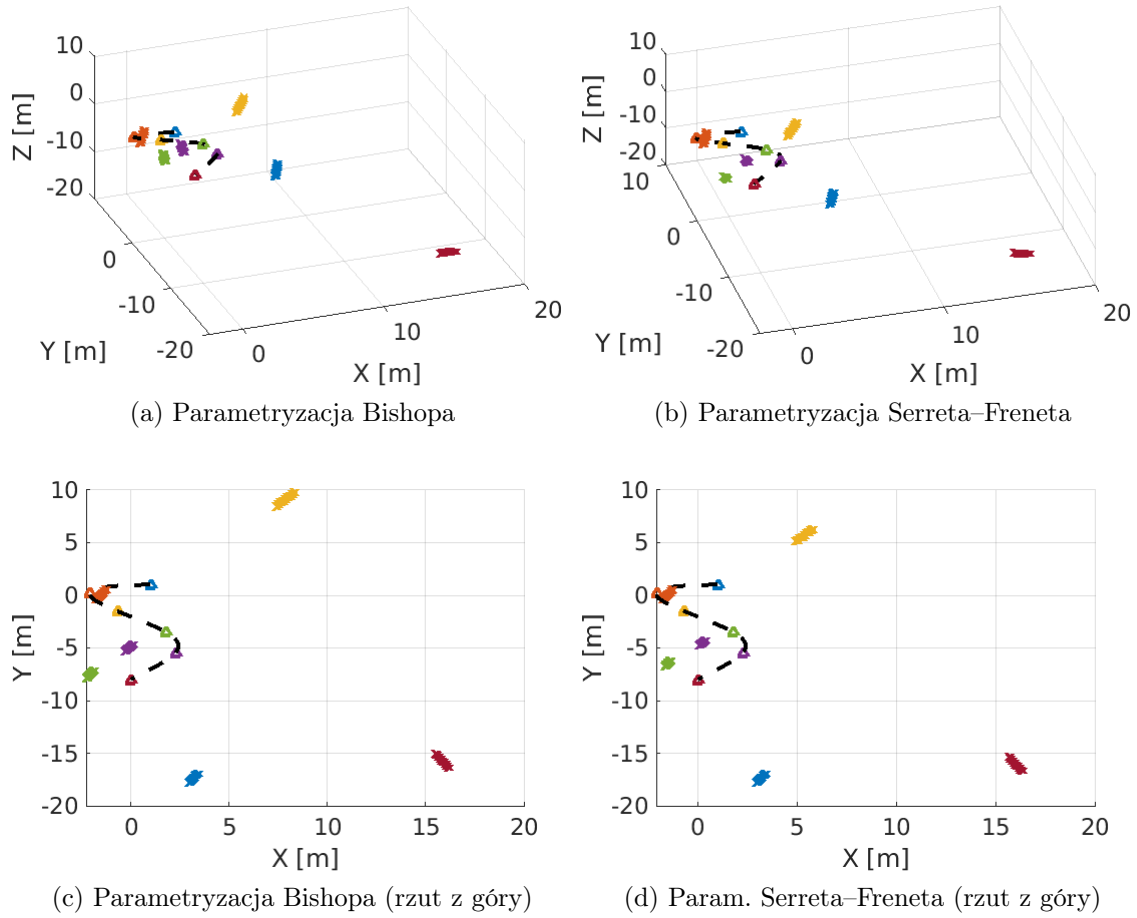
Na rys. 7.12 przedstawiono z kolei wybrane punkty na krzywej i odpowiadające im punkty osobliwe. Widać wyraźnie, że dla fragmentów krzywej, gdy krzywizna jest mała (kształt zmierza do linii prostej), punkty osobliwe znajdują się daleko od krzywej, np. punkty czerwone. Jednakże, gdy krzywizna jest duża, tzn. występuje dość spora zmiana kierunku krzywej, punkty osobliwe znajdują się bardzo blisko rozważanej krzywej Béziera, np. punkty żółte. Jest to niebezpieczne, gdyż przy realizacji zadania śledzenia ścieżki może zająć ryzyko osiągnięcia punktów osobliwych ze względu na pojawiające się niedokładności pomiarowe lub zaburzenia zewnętrzne. Istotną obserwacją jest jednak fakt, że punkty osobliwe znajdują się zawsze po wewnętrznej stronie krzywej, w kierunku środka krzywizny.

Podobne wnioski można wyciągnąć, analizując przykład krzywej B-sklejanej $\mathcal{K}_6$. Na rys. 7.13 przedstawiono zbiór punktów potencjalnie osobliwych, który ponownie jest bardziej rozległy dla parametryzacji Bishopa. Punkty osobliwe odpowiadające konkretnym punktom na krzywej przedstawiono na rys. 7.14. W tym przypadku również można zaobserwować, że im większa krzywizna, tym bliżej ścieżki znajdują się punkty osobliwe.



Rysunek 7.13: Zbiór punktów potencjalnie osobliwych wzdłuż całej krzywej B - sklejanej $\mathcal{K}_6$.

Spostrzeżenie 18. *Pewnym remedium na osobliwości parametryzacji ortogonalnej jest parametryzacja nieortogonalna. Chociaż ta metoda wymaga śledzenia położenia w większej liczbie kierunków, przez co wzrasta wymiarowość zadania, to nie wprowadza ona dodatkowych ograniczeń na położenie robota względem ścieżki. Chociaż parametryzacja nieortogonalna nie niweluje osobliwości wynikających z definicji parametryzacji krzywoliniowych bądź struktury kinematycznej robota, to w kontekście metody opisu robota względem ścieżki można ją uznać za metodę globalną. Oznacza to, że w każdym punkcie przestrzeni można określić położenie punktu prowadzenia robota względem ścieżki, o ile układ lokalny na ścieżce jest dobrze określony.*



Rysunek 7.14: Punkty osobliwe odpowiadające wybranym punktom na krzywej B-sklejanej $\mathcal{K}_6$.

7.4 Rotacje układu lokalnego względem krzywej

Układ Bishopa jest często określany mianem układu minimalizującego rotacje [53, 109]. W niniejszym rozdziale zweryfikowano ten fakt i porównano ze sobą ewolucję układów używanych różnymi metodami parametryzacji krzywoliniowych wzdłuż wybranych krzywych. Zbadano również prędkości kątowe układów lokalnych.

Zgodnie z pracą [122], prędkość kątową w układzie ciała można wyznaczyć na podstawie zależności

$$\mathbf{\Omega}_b = \mathbf{S}^\top \dot{\mathbf{S}}. \quad (7.7)$$

Uwzględniając zależność (2.39), powyższe równanie można przekształcić do postaci

$$\mathbf{\Omega}_b = \dot{\mathbf{S}} \mathbf{S}^\top \mathbf{S} \mathbf{W} = \dot{\mathbf{S}} \mathbf{W}, \quad (7.8)$$

przy czym skorzystano z faktu, że macierz $\mathbf{S}$ jest macierzą ortogonalną, $\mathbf{S} \in \mathbb{SO}(3)$, i zachodzi $\mathbf{S}^\top \mathbf{S} = \mathbf{I}_{3 \times 3}$.

Macierz $\mathbf{\Omega}_b$ jest macierzą skośnie symetryczną. Na jej podstawie można wyekstraho-

wać wektor prędkości kątowych

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\mathbf{s}}\mathbf{w} = \dot{\mathbf{s}} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}, \quad (7.9)$$

gdzie

$$\mathbf{W} = [\mathbf{w}] = \begin{bmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Stąd można uzyskać wektor prędkości kątowej dla układu Serreta–Freneta

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{SF}} = \dot{\mathbf{s}} \begin{pmatrix} \tau \\ 0 \\ \kappa \end{pmatrix}, \quad (7.10)$$

który jest identyczny dla układu *beta*, a także wektor prędkości kątowej dla układu Bishopa

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{B}} = \dot{\mathbf{s}} \begin{pmatrix} 0 \\ -\kappa_2 \\ \kappa_1 \end{pmatrix}. \quad (7.11)$$

Warto podkreślić, że uzyskane zależności są zgodne z wynikami przedstawionymi w rozdziale 3.3 oraz w Spostrzeżeniu 6. Istotnie, na podstawie wzoru (7.10) można wnioskować, że ewolucja układu Serreta–Freneta minimalizuje jego rotację w kierunku wektora normalnego. W przypadku ewolucji układu Bishopa, zgodnie z równaniem (7.11), zachodzi minimalizacja rotacji w kierunku wektora stycznego, a zatem można interpretować to zjawisko jako minimalizację rotacji wokół krzywej.

Analizie poddano zmianę rotacji układów Bishopa, *beta* oraz Serreta–Freneta wzdłuż krzywych: $\mathcal{K}1$, $\mathcal{K}4$, $\mathcal{K}8$. We wszystkich przypadkach zbadano przyrost rotacji układu lokalnego. W tym celu porównano wartości następującego kryterium sumarycznego przyrostu rotacji

$$J(\boldsymbol{\omega}) = \int_{t_0}^{t_k} \|\boldsymbol{\omega}\| dt, \quad (7.12)$$

gdzie t_0 oznacza początkowy czas ewolucji, a t_k – czas końcowy. Otrzymane wartości kryterium (7.12) dla $t_0 = 0$ oraz $t_k = 10$ [s] przedstawiono w tabeli 7.1.

Tabela 7.1: Porównanie wartości kryterium przyrostu rotacji (7.12) dla różnych metod parametryzacji.

Krzywa	Układ Bishopa	Układ <i>beta</i>	Układ Serreta–Freneta
$\mathcal{K}1$	9,63	9,71	9,71
$\mathcal{K}4$	5,87	8,78	8,78
$\mathcal{K}8$	4,26	8,48	8,48

Z wartości zebranych w tabeli 7.1 istotnie wynika, że układ Bishopa pozwala minimalizować rotację wzdłuż wszystkich ścieżek. Dla każdego przypadku układ Bishopa charakteryzuje się bowiem najmniejszą wartością kryterium (7.12). Układy *beta* oraz Serreta–Freneta zachowują tożsamą ewolucję, co objawia się również identycznym obrotem układu

lokalnego wzdłuż każdej krzywej. Należy podkreślić, że wydłużenie czasu ewolucji układu wzdłuż ścieżki zwiększyłoby uzyskane wartości kryterium, ale nie zmieniłoby relacji między wynikami dla poszczególnych metod parametryzacji.

Ewolucję poszczególnych układów przedstawiono na poniższych wykresach: na rys. 7.15 wzdłuż linii śrubowej $\mathcal{K}1$, na rys. 7.16 wzdłuż krzywej Béziera $\mathcal{K}4$, wreszcie na rys. 7.17 wzdłuż krzywej B-sklejanej $\mathcal{K}8$. Wizualizacje odpowiadają przypadkom, w których analizowano zmianę rotacji układów lokalnych. Należy podkreślić, że ewolucja każdego układu lokalnego zaczynała się od takich samych warunków początkowych.

Na szczególną uwagę zasługuje przypadek linii śrubowej $\mathcal{K}1$. Układ Serreta–Freneta wykazuje bardziej regularne zachowanie, co wynika z faktu minimalizacji rotacji w kierunku wektora normalnego. Dzięki temu wektor normalny jest zawsze skierowany do środka krzywizny. Mimo że to układ Bishopa minimalizuje rotacje w ogólności (zgodnie z wynikami w tabeli 7.1), to zachowanie układu Serreta–Freneta może być korzystniejsze do odwzorowania i wyznaczenia orientacji względnej robota.

Korzyści płynące z zastosowania parametryzacji Bishopa uwidaczniają się w ewolucji wzdłuż krzywej Béziera $\mathcal{K}4$ oraz B-sklejanej $\mathcal{K}8$. Widać wyraźnie, że dla tych przypadków wersory normalne utrzymują swój pierwotny kierunek, a układ Bishopa nie wykonuje dodatkowych obrotów wokół krzywej. Ta własność może być szczególnie korzystna przy opisywaniu względnej orientacji końcówki chwytaka manipulatora.

7.5 Rotacje układu Bishopa

Cechą charakterystyczną parametryzacji Bishopa jest fakt, że w stanie początkowym można dowolnie rotować układ lokalny [109]. Oznacza to, że konfiguracja początkowa układu Bishopa nie jest jednoznacznie określona. Pomimo tego, ewolucja układu zachowuje swoje unikatowe cechy, gdyż zawsze bazuje na procedurze względnie równoległego przesunięcia wektorów. Tę cechę można wykorzystać, aby dostosować początkową orientację układu lokalnego na ścieżce do potrzeb zadania. Omawiana właściwość może okazać się szczególnie przydatna w realizacji postury robota względem ścieżki.

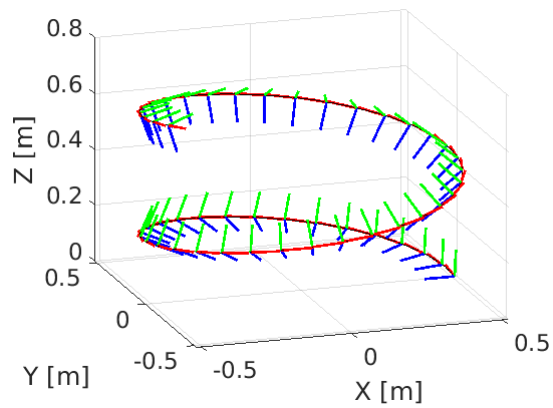
W przeciwieństwie do układu Bishopa, układ Serreta–Freneta, a w konsekwencji również układ *beta*, ma ściśle określoną postać w chwili początkowej. Rozważmy relację między układami Bishopa i Serreta–Freneta w stanie początkowym. Na podstawie zależności (2.30) oraz (2.27) zachodzi

$$\mathbf{n}_{10} = \mathbf{n}_0 \cos \phi_0 - \mathbf{b}_0 \sin \phi_0, \quad (7.13a)$$

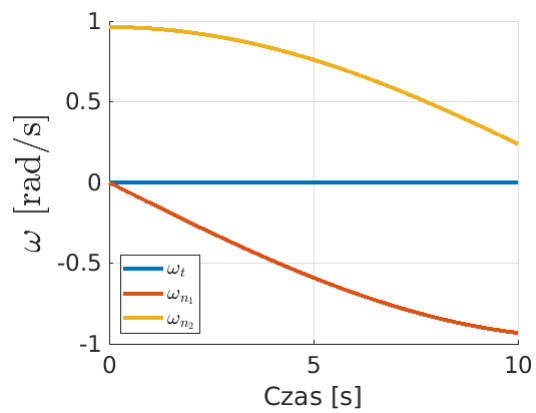
$$\mathbf{n}_{20} = \mathbf{n}_0 \sin \phi_0 + \mathbf{b}_0 \cos \phi_0. \quad (7.13b)$$

Nietrudno zauważyć, że rotację układu Bishopa na początku ewolucji można dostosować za pomocą parametru ϕ_0 . Jeśli zostanie przyjęte, że $\phi_0 = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, to układ Bishopa będzie tożsamy z układem Serreta–Freneta (w stanie początkowym). Dla każdej innej wartości układ Bishopa będzie obrocony.

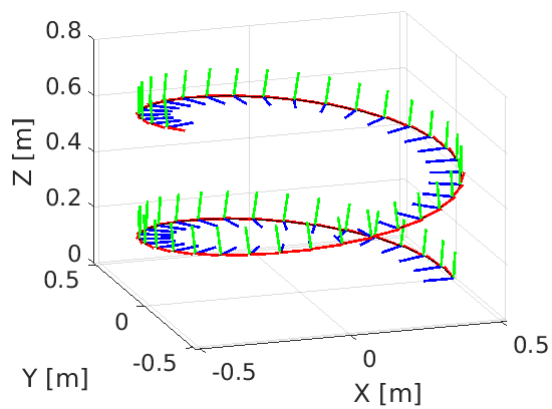
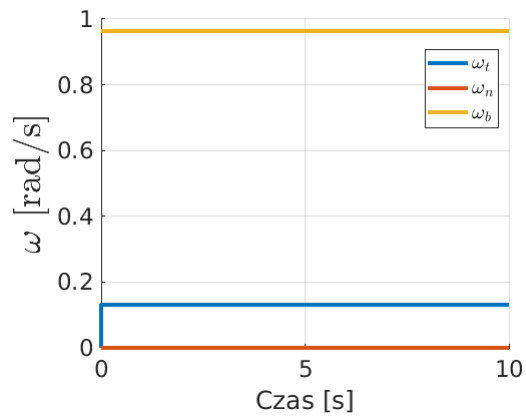
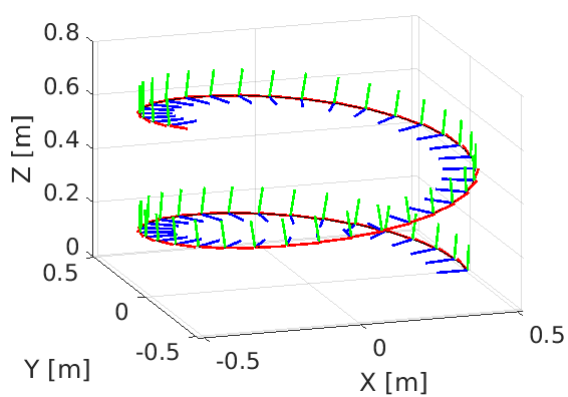
W niniejszym rozdziale przedstawiono ewolucję układu Bishopa wzdłuż krzywej Béziera $\mathcal{K}4$. Rozważono trzy różne konfiguracje początkowe, $\phi_0 \in \{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\}$ [rad]. Każdy przypadek zestawiono z ewolucją układu *beta*, który został zdefiniowany na podstawie układu Bishopa. Należy podkreślić, że ewolucja układu *beta* wzdłuż danej krzywej jest zawsze identyczna z ewolucją układu Serreta–Freneta.



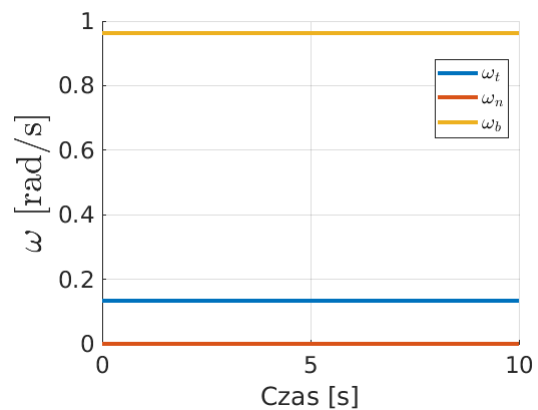
(a) Ewolucja układu Bishopa



(b) Prędkości kątowe układu Bishopa

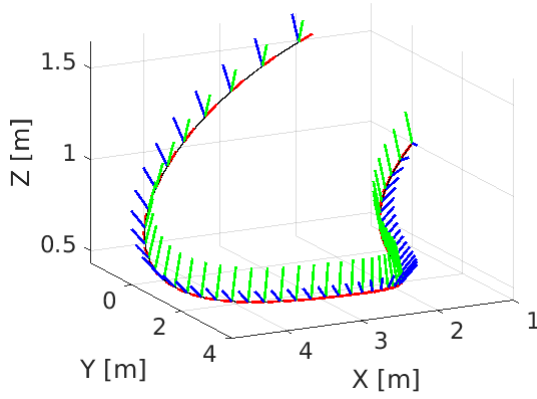
(c) Ewolucja układu *beta*(d) Prędkości kątowe układu *beta*

(e) Ewolucja układu Serreta-Freneta

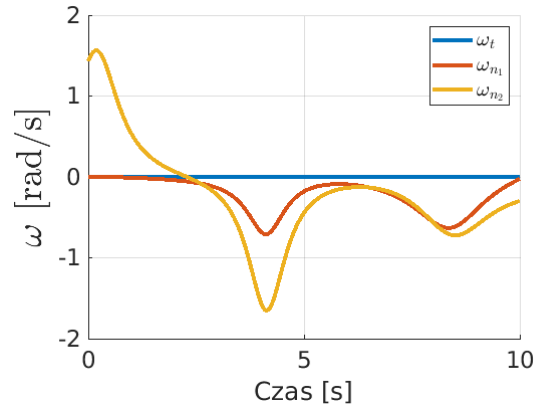


(f) Prędkości kątowe układu Serreta-Freneta

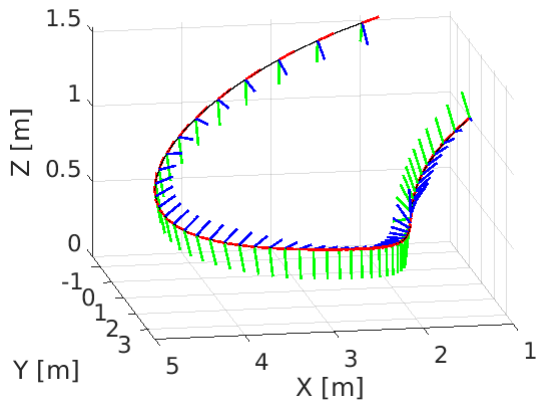
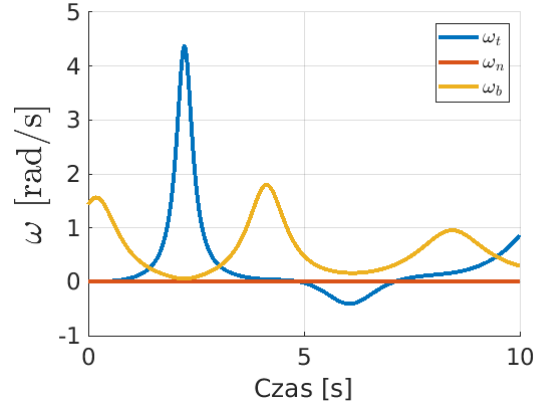
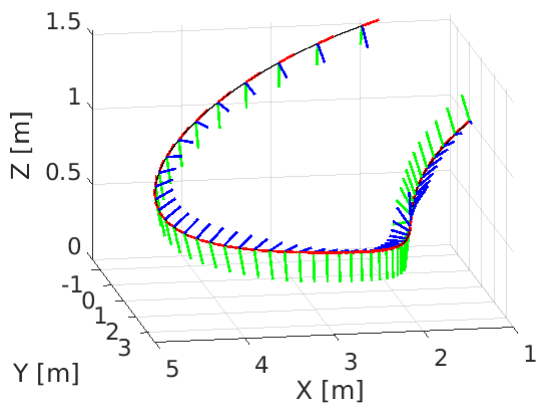
Rysunek 7.15: Porównanie rotacji układów lokalnych wzdłuż krzywej $\mathcal{K}1$.



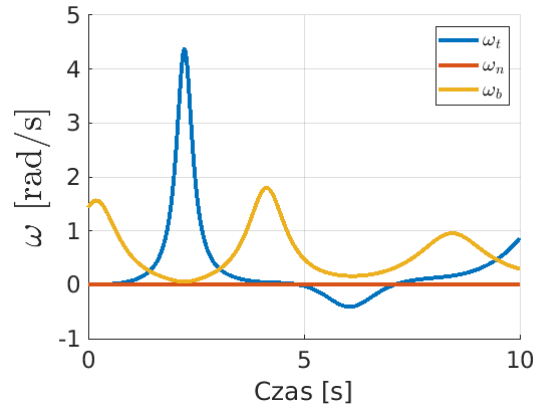
(a) Ewolucja układu Bishopa



(b) Prędkości kątowe układu Bishopa

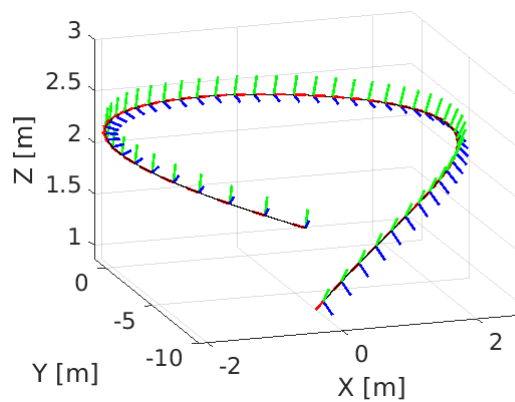
(c) Ewolucja układu *beta*(d) Prędkości kątowe układu *beta*

(e) Ewolucja układu Serreta-Freneta

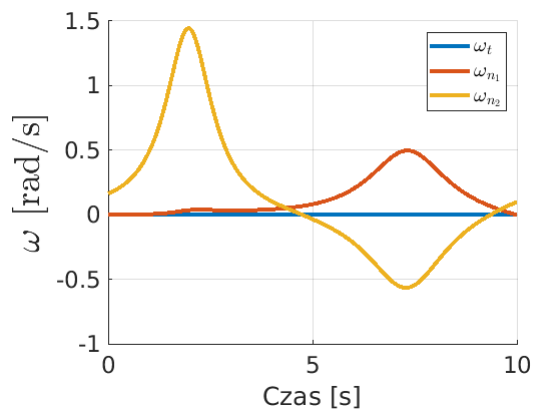


(f) Prędkości kątowe układu Serreta-Freneta

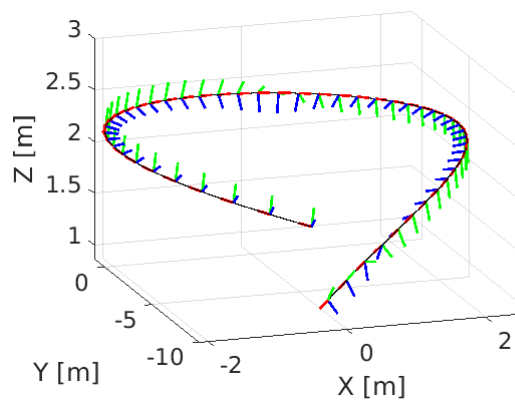
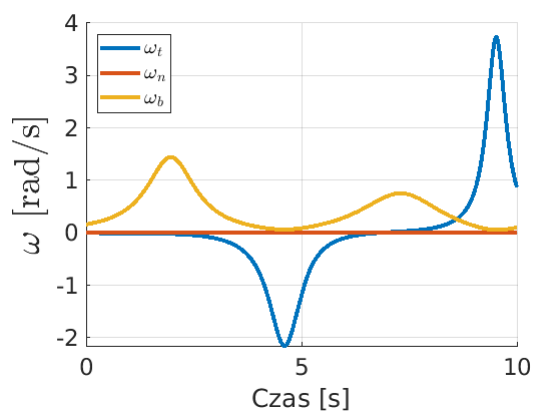
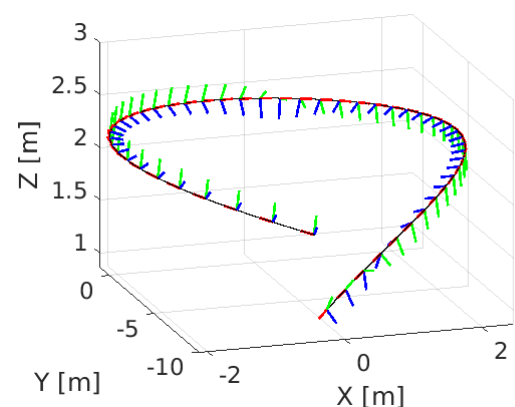
Rysunek 7.16: Porównanie rotacji układów lokalnych wzdłuż krzywej $\mathcal{K}4$.



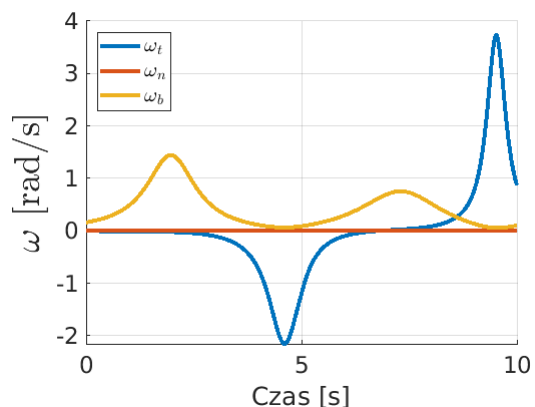
(a) Ewolucja układu Bishopa



(b) Prędkości kątowe układu Bishopa

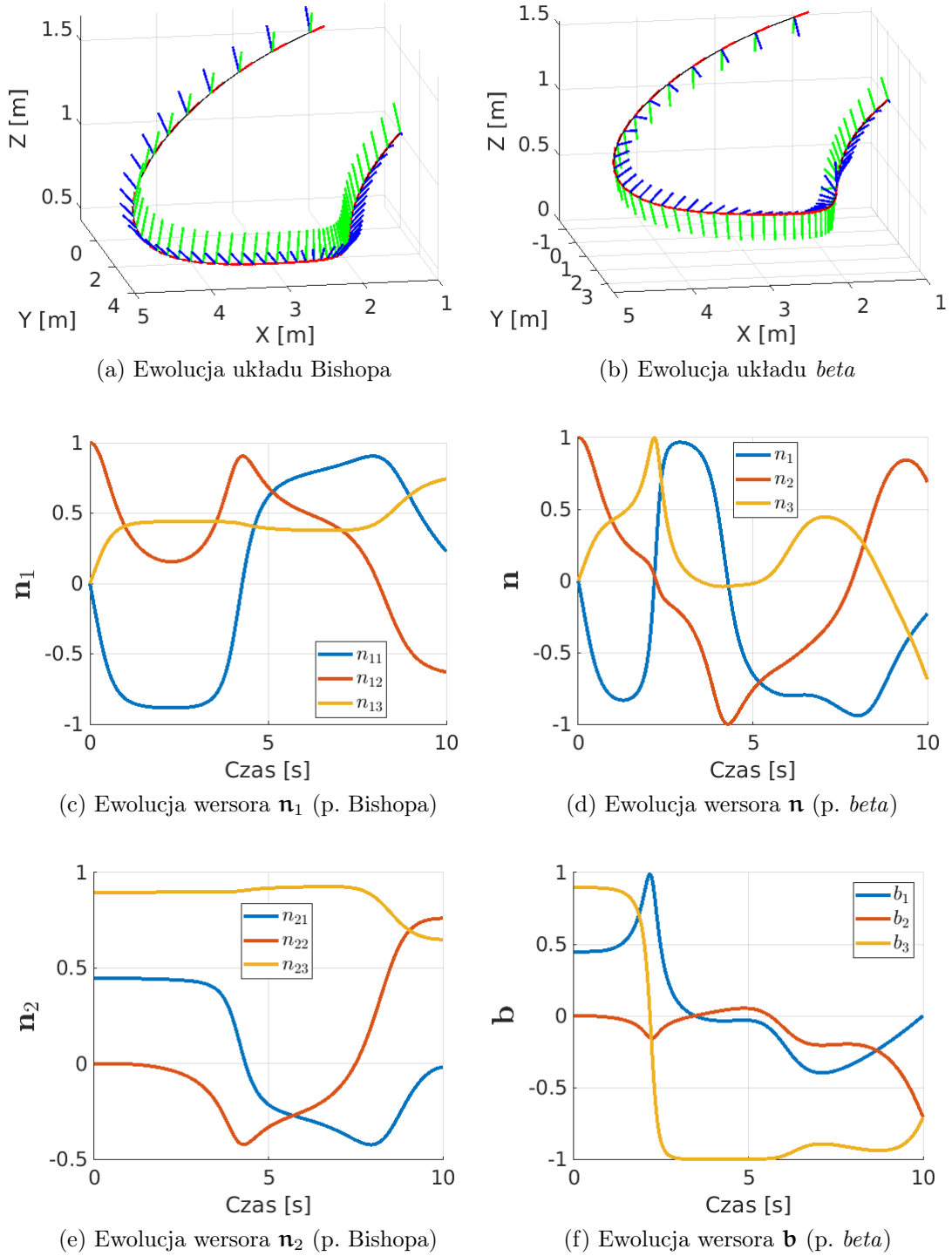
(c) Ewolucja układu *beta*(d) Prędkości kątowe układu *beta*

(e) Ewolucja układu Serreta-Freneta

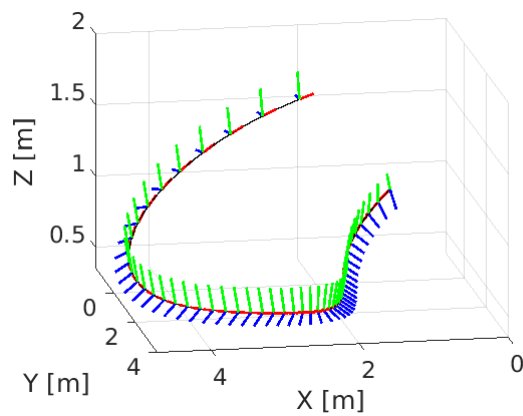


(f) Prędkości kątowe układu Serreta-Freneta

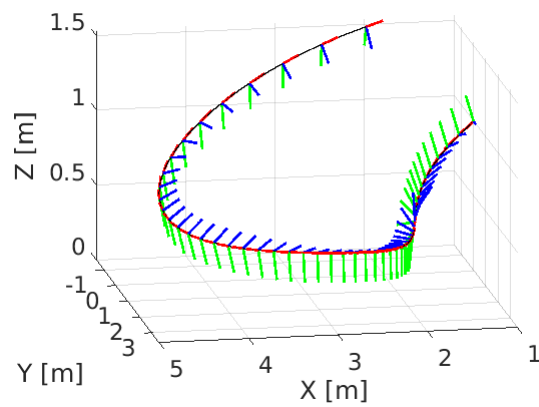
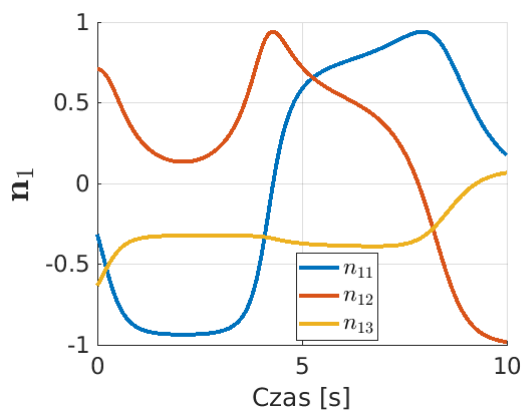
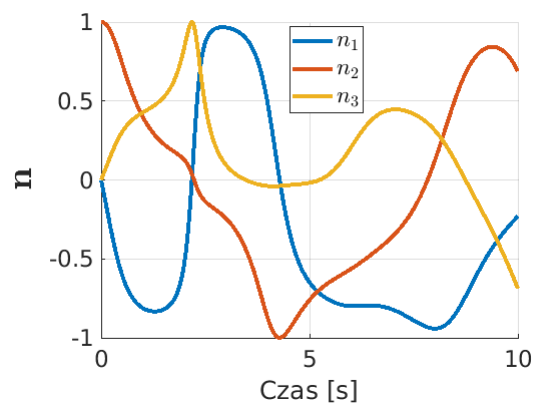
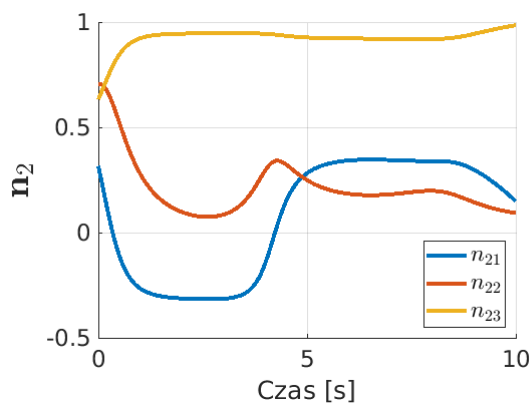
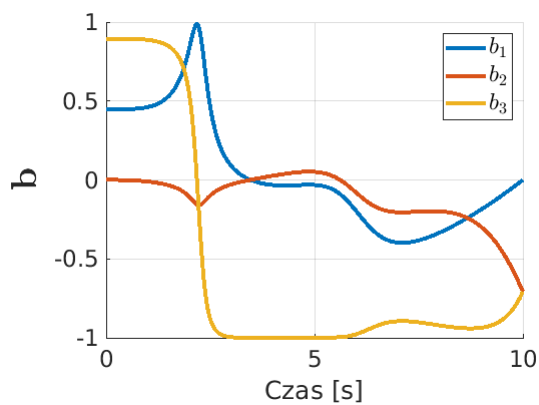
Rysunek 7.17: Porównanie rotacji układów lokalnych wzdłuż krzywej $\mathcal{K}8$.



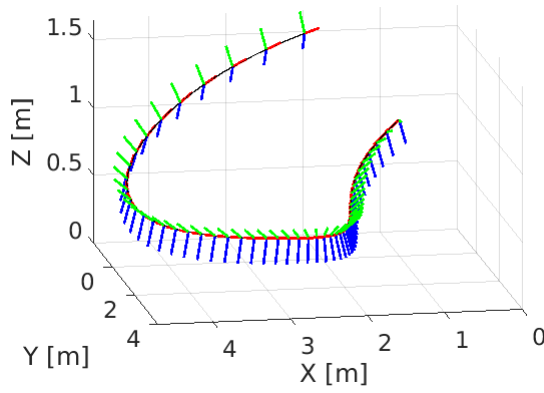
Rysunek 7.18: Porównanie ewolucji układów dla warunku początkowego układu Bishopa $\phi_0 = 0$ [rad].



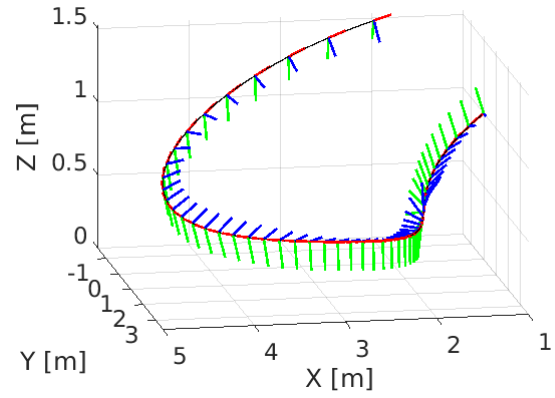
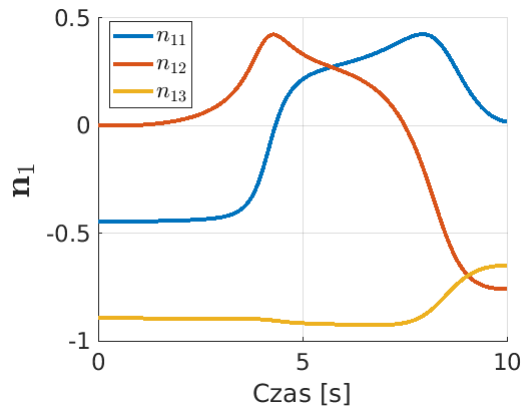
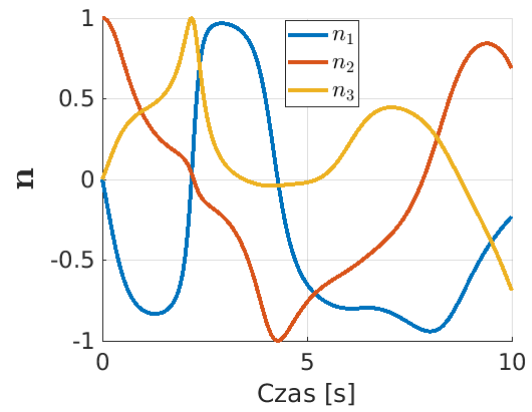
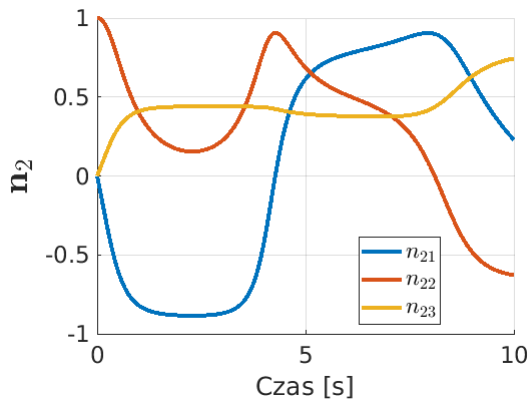
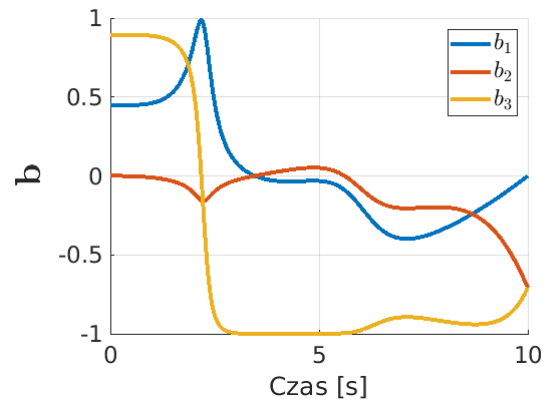
(a) Ewolucja układu Bishopa

(b) Ewolucja układu *beta*(c) Ewolucja wektora $\mathbf{n}_1$ (p. Bishopa)(d) Ewolucja wektora $\mathbf{n}$ (p. *beta*)(e) Ewolucja wektora $\mathbf{n}_2$ (p. Bishopa)(f) Ewolucja wektora $\mathbf{b}$ (p. *beta*)

Rysunek 7.19: Porównanie ewolucji układów dla warunku początkowego układu Bishopa $\phi_0 = \frac{\pi}{4}$ [rad].



(a) Ewolucja układu Bishopa

(b) Ewolucja układu *beta*(c) Ewolucja wektora $\mathbf{n}_1$ (p. Bishopa)(d) Ewolucja wektora $\mathbf{n}$ (p. *beta*)(e) Ewolucja wektora $\mathbf{n}_2$ (p. Bishopa)(f) Ewolucja wektora $\mathbf{b}$ (p. *beta*)

Rysunek 7.20: Porównanie ewolucji układów dla warunku początkowego układu Bishopa $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$ [rad].

Na rys. 7.18 przedstawiono przypadek, gdy stan obu układów w chwili początkowej jest taki sam. Widać to wyraźnie w chwili początkowej ewolucji poszczególnych wersorów. Pomimo identycznego stanu początkowego, ewolucja każdego układu jest inna, zgodnie z definicją parametryzacji krzywoliniowych.

Na rys. 7.19 oraz 7.20 przedstawiono sytuacje, gdy układ Bishopa został obrócony w stanie początkowym. Można zauważyć, że niezależnie od tego faktu ewolucja oraz inicjalizacja układu *beta* jest taka sama, jak dla $\phi_0 = 0$. Z kolei ewolucja układu Bishopa zachowuje swoje własności. Ten rodzaj parametryzacji minimalizuje rotacje układu lokalnego wokół krzywej. Dzięki temu zachowuje pierwotne kierunki wersorów normalnych.

7.6 Zmiana metody parametryzacji w trakcie manewru

Jako ostatni aspekt zweryfikowano możliwość ciągłego przechodzenia między parametryzacjami krzywoliniowymi. Sprawdzono, pod jakimi warunkami można zmienić parametryzację Serreta–Freneta na parametryzację Bishopa i na odwrót, tak aby zachować ciągłość ewolucji układu lokalnego na ścieżce, a przede wszystkim zagwarantować ciągłość sygnałów sterujących generowanych na poziomie kinematycznym.

Na początku przypomnijmy równania określające położenie oraz ewolucję obiektu robotycznego względem ścieżki. Zgodnie z ogólnymi zależnościami dla parametryzacji nieortogonalnej przedstawionymi w rozdziale 3, położenie punktu prowadzenia robota względem ścieżki dane jest równaniem

$$\mathbf{d} = \mathbf{S}^T(\mathbf{p} - \mathbf{r}), \quad (7.14)$$

natomiast ewolucja względem ścieżki, która definiuje kinematykę robota względem ścieżki, określona jest zależnością

$$\dot{\mathbf{d}} = \mathbf{S}^T \dot{\mathbf{p}} - \begin{pmatrix} \dot{s} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \dot{s} \mathbf{W} \mathbf{d} = \mathbf{S}^T \dot{\mathbf{p}} - \begin{pmatrix} \dot{s} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \dot{s} \mathbf{W} \mathbf{S}^T(\mathbf{p} - \mathbf{r}). \quad (7.15)$$

W powyższych równaniach szczegółowa postać macierzy $\mathbf{S}$ oraz $\mathbf{W}$ zależy od metody parametryzacji krzywoliniowej, natomiast wielkość $\mathbf{p}$ określa położenie punktu prowadzenia robota w układzie globalnym i wynika wprost z aktualnej konfiguracji robota.

Należy zatem zauważyć, że dla zachowania ciągłości ewolucji wzdłuż ścieżki w punkcie zmiany metody parametryzacji należy zadbać, aby równanie (7.15) przyjmowało tę samą wartość zarówno w parametryzacji Serreta–Freneta, jak i Bishopa. W związku z tym powinna zachodzić relacja

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}^T \\ \mathbf{n}^T \\ \mathbf{b}^T \end{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} - \dot{s} \begin{bmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t}^T \\ \mathbf{n}^T \\ \mathbf{b}^T \end{bmatrix} (\mathbf{p} - \mathbf{r}) = \begin{bmatrix} \mathbf{t}^T \\ \mathbf{n}_1^T \\ \mathbf{n}_2^T \end{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} - \dot{s} \begin{bmatrix} 0 & -k_1 & -k_2 \\ k_1 & 0 & 0 \\ k_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t}^T \\ \mathbf{n}_1^T \\ \mathbf{n}_2^T \end{bmatrix} (\mathbf{p} - \mathbf{r}). \quad (7.16)$$

Z równania (7.16) wynika, że dla zachowania ciągłości ewolucji warunkiem koniecznym, choć niewystarczającym, jest zagwarantowanie, że wersory poszczególnych układów będą sobie równe w chwili zmiany metody parametryzacji, tzn. powinno zachodzić $\mathbf{n} = \mathbf{n}_1$ oraz $\mathbf{b} = \mathbf{n}_2$. Na tej podstawie można wnioskować, że z relacji między wektorami bazowymi

układów Serreta–Freneta oraz Bishopa (2.30)

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{n} \cos \phi - \mathbf{b} \sin \phi, \quad (7.17a)$$

$$\mathbf{n}_2 = \mathbf{n} \sin \phi + \mathbf{b} \cos \phi \quad (7.17b)$$

wynika, iż pożądana równość zachodzi dla $\phi = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, a w szczególności dla $\phi = 0$. Tak dobrana wartość parametru ϕ wpływa z kolei na wartości rozwinięcia normalnego krzywej w parametryzacji Bishopa, również w relacji do krzywizny κ . Zgodnie z równaniem (2.28) parametry k_1 oraz k_2 przyjmują wartości

$$k_1 = \kappa \cos \phi = \kappa, \quad (7.18a)$$

$$k_2 = \kappa \sin \phi = 0. \quad (7.18b)$$

Z wartości (7.18) wynika, że dla spełnienia równości (7.16) niezbędny jest jeden z następujących warunków:

1. $\mathbf{p} = \mathbf{r}$, który oznacza, że punkt prowadzenia robota znajduje się na ścieżce;
2. $\tau = 0$, co oznacza, że warunek ciągłości ewolucji zostanie spełniony tylko dla krzywych na płaszczyźnie.

Razem z warunkiem koniecznym, tj. $\mathbf{n} = \mathbf{n}_1$ oraz $\mathbf{b} = \mathbf{n}_2$, jeden z powyższych warunków jest wystarczający do spełnienia równości (7.16).

Warto podkreślić, że przejście z parametryzacji Serreta–Freneta na parametryzację Bishopa jest możliwe bez dodatkowych ograniczeń. Wynika to z faktu, że układ Bishopa można dowolnie zainicjalizować, co szczegółowo omówiono w rozdziale 7.5. Przejście z układu Bishopa na układ Serreta–Freneta wymaga, aby w punkcie zmiany s zachodził warunek $\phi(s) = 0$, co wynika z warunku koniecznego (7.17). Oznacza to, że początkowa rotacja układu Bishopa musi zostać dobrana tak, aby warunek początkowy wynikający z równania (2.27) wynosił

$$\phi_0 = - \int_0^s \tau(x) dx. \quad (7.19)$$

Wynika stąd, że przejście z parametryzacji Bishopa na parametryzację Serreta–Freneta musi być zaplanowane przed rozpoczęciem manewru.

Spostrzeżenie 19. W niniejszym rozdziale prowadzono rozważania dotyczące zachowania ciągłości w ewolucji układów lokalnych wyrażonych w różnych parametryzacjach krzywo liniowych. W analizie celowo pominięto wektor styczny $\mathbf{t}$, gdyż zarówno układ Serreta–Freneta, jak i Bishopa współdzielą definicję tego wektora.

Ponadto, warto zauważyć, że ewolucja wektora stycznego jest identyczna w obu parametryzacjach. Ewolucja wektora $\mathbf{t}$ w parametryzacji Bishopa dana jest zależnością (2.17a). Uwzględniając definicje (2.28) oraz (2.30), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{t}}{ds} &= k_1 \mathbf{n}_1 + k_2 \mathbf{n}_2 = \\ &= \kappa \cos \phi (\mathbf{n} \cos \phi - \mathbf{b} \sin \phi) + \kappa \sin \phi (\mathbf{n} \sin \phi + \mathbf{b} \cos \phi) = \\ &= \kappa \mathbf{n}, \end{aligned}$$

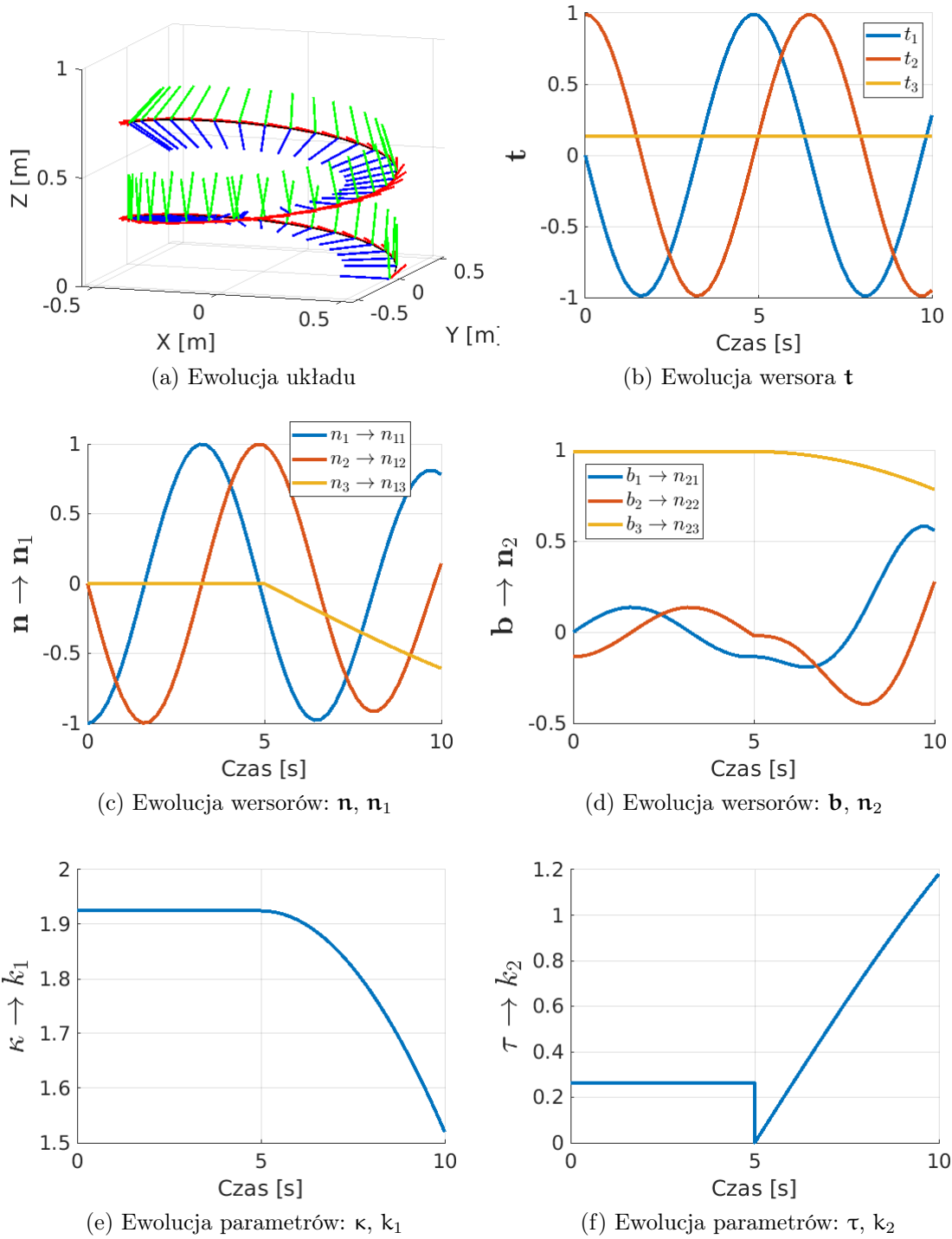
co jest zgodne z równaniem ewolucji wektora stycznego $\mathbf{t}$ w parametryzacji Serreta–Freneta (2.6a).

Rozważania przedstawione w niniejszym rozdziale zostały zweryfikowane symulacyjnie. Najpierw zbadano zachowanie ciągłości ewolucji samego układu lokalnego. Następnie zastosowano to podejście w realizacji zadania śledzenia ścieżki przez manipulator holonomiczny, którego równania przedstawiono w dodatku A.1. Do realizacji zadania wykorzystano sterownik kinematyczny (5.2) bazujący na parametryzacji nieortogonalnej, a także sterownik dynamiczny oparty o pełną znajomość modelu (5.12). Wyniki badań przedstawiono na poniższych wykresach.

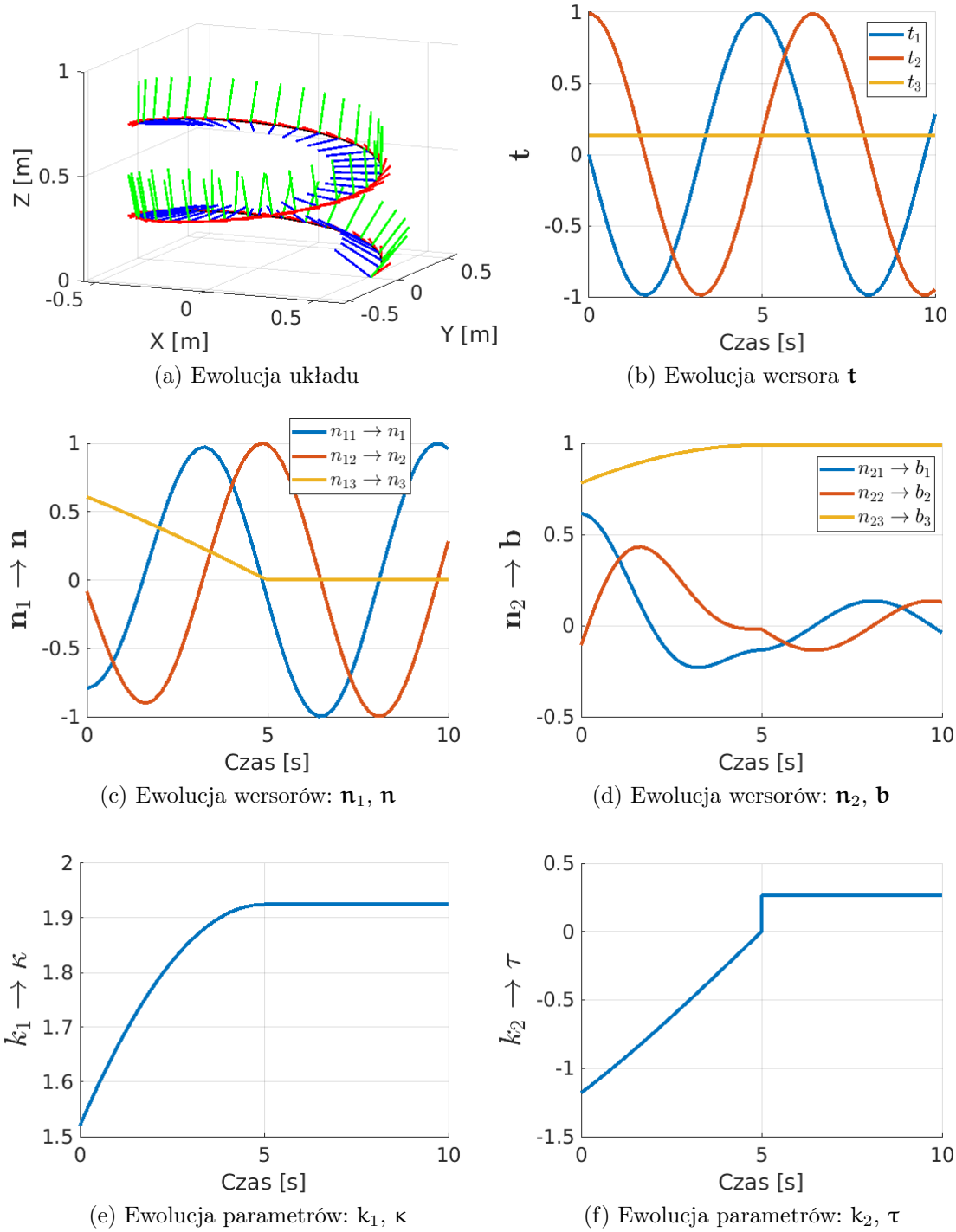
Na rys. 7.21 przedstawiono przebiegi ewolucji układu lokalnego wzdłuż linii śrubowej $\mathcal{K}1$. W połowie czasu symulacji (5 [s]) zmieniono układ Serreta–Freneta na układ Bishopa. Na rys. 7.21a można zauważyć, jak niebieski wektor normalny zaczyna się odchyłać od pierwotnego kierunku do środka krzywizny linii śrubowej. W celu zachowania ciągłości ewolucji układów przyjęto warunek $\phi(s) = 0$ w punkcie zmiany metody parametryzacji. Widać wyraźnie, że dzięki temu ewolucja poszczególnych składowych wektorów bazowych jest ciągła. Niemniej jednak, w ewolucji parametrów geometrycznych występuje nieciągły skok wartości. Nie ma on wpływu na ewolucję samego układu lokalnego, ale jest znaczący dla postaci sterownika kinematycznego (5.2). Wskazuje to, że zachowanie ciągłości będzie możliwe tylko dla krzywych płaskich, gdy $\tau = 0$.

Na rys. 7.22 przedstawiono analogiczną analizę. Tym razem jednak zmieniono układ Bishopa na układ Serreta–Freneta. Na rys. 7.22a można ponownie zauważyć efekt zmiany układu. Początkowo odchylony niebieski wektor normalny od pewnego momentu został skierowany do środka krzywizny linii śrubowej i zachowuje ten kierunek. Wszystkie składowe wektorów bazowych zachowują ciągłość dzięki odpowiedniemu doborowi warunku początkowego układu Bishopa zgodnie z równaniem (7.19). Było to możliwe, gdyż moment zmiany metody parametryzacji krzywoliniowej został zaplanowany przed rozpoczęciem ewolucji układu wzdłuż krzywej. Przebieg na rys. 7.22f ponownie potwierdza, że przy zachowaniu ciągłości ewolucji układu parametry geometryczne krzywej zmieniają się nieciągłe.

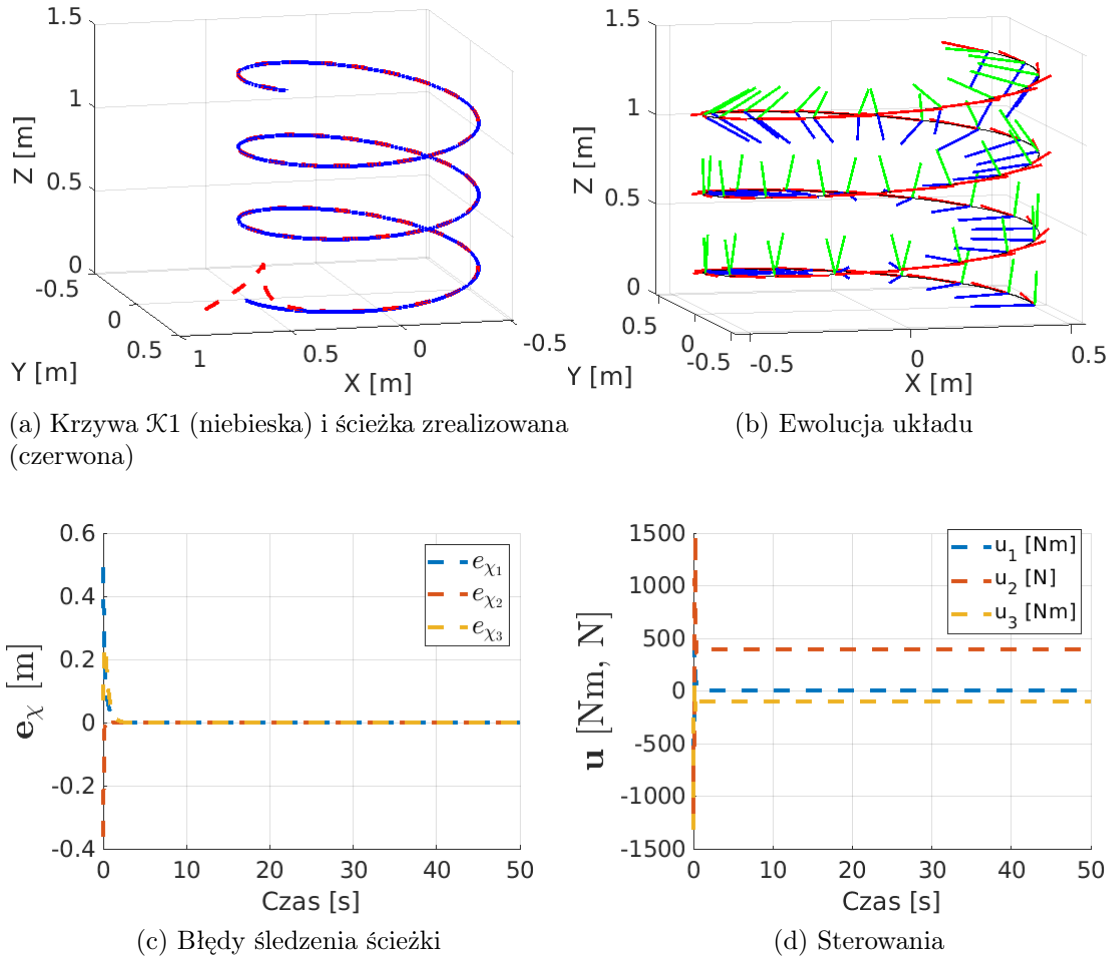
Zastosowano również proponowane podejście podczas realizacji zadania śledzenia ścieżki. Wyniki dla realizacji krzywej $\mathcal{K}1$ przedstawiono na rys. 7.23. Z przedstawionych wykresów wynika, że zadana ścieżka została zrealizowana poprawnie, gdyż błędy śledzenia ścieżki $\mathbf{e}_x$ zbiegają do zera. Chociaż zadana krzywa jest przestrzenna ($\tau \neq 0$), to brak ciągłości parametrów geometrycznych w chwili zmiany parametryzacji krzywoliniowej nie skutkuje pojawieniem się wysokich i wąskich pików w sygnałach sterujących. Jest to możliwe dzięki temu, że punkt prowadzenia robota znajduje się na krzywej, a więc zachodzi $\mathbf{p} = \mathbf{r}$. Zmiana dla krzywej przestrzennej nie byłaby możliwa, gdyby zadane położenie punktu prowadzenia robota względem układu lokalnego na ścieżce było niezerowe, tzn. zachodziłoby $\mathbf{p} \neq \mathbf{r}$. Wówczas nieciągłości w przebiegach parametrów geometrycznych skutkowałyby bardzo wysokimi wartościami sterowań, które mogłyby spowodować uszkodzenie układów mechanicznych.



Rysunek 7.21: Zmiana parametryzacji Serreta–Freneta na Bishopa w trakcie ewolucji wzdłuż krzywej $\mathcal{K}1$.

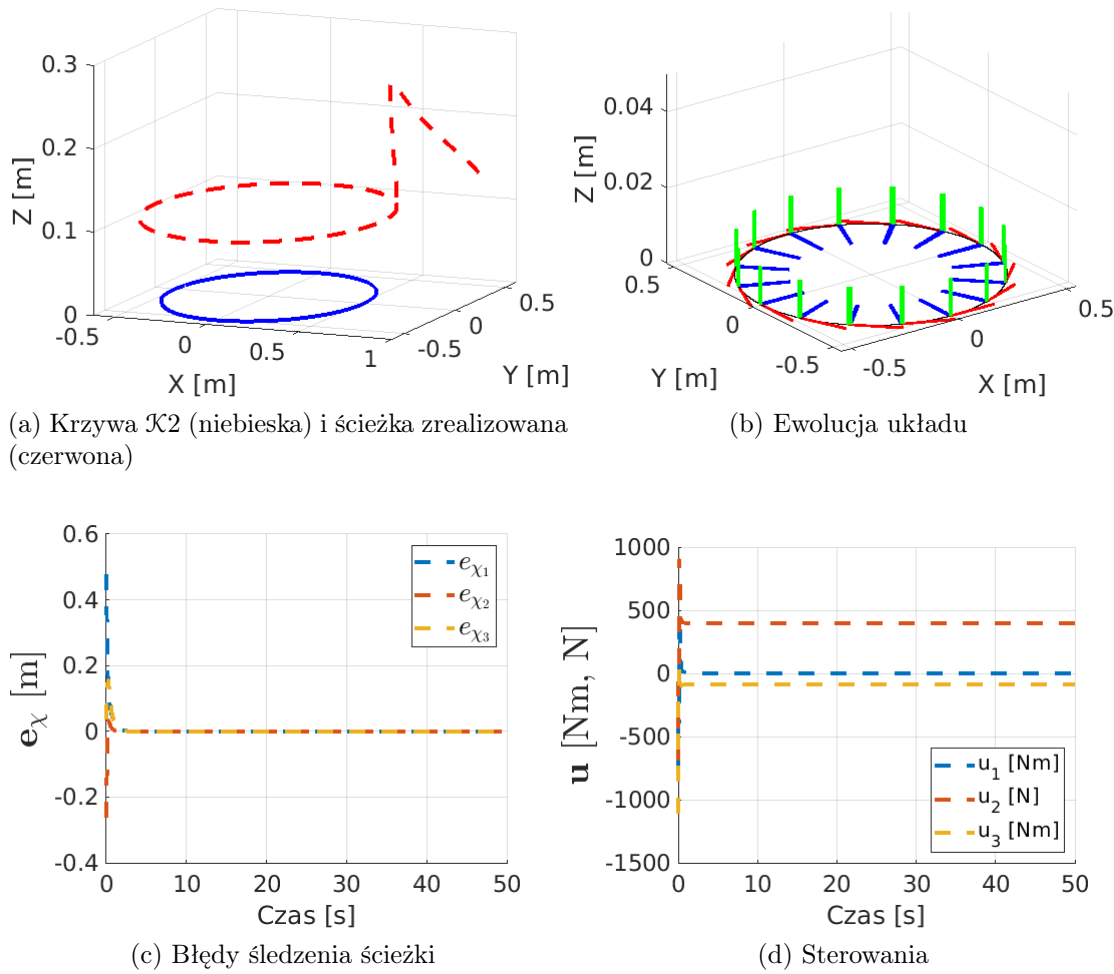


Rysunek 7.22: Zmiana parametryzacji Bishopa na Serreta–Freneta w trakcie ewolucji wzdłuż krzywej $\mathcal{K}1$.



Rysunek 7.23: Zmiana parametryzacji Serreta–Freneta na Bishopa w trakcie realizacji zadania śledzenia ścieżki $\mathcal{K}1$.

Jeśli punkt prowadzenia robota znajduje się poza zadaną ścieżką, to zmianę metody parametryzacji można realizować tylko dla krzywych płaskich, dla których zachodzi $\tau = 0$. Przykład takiego rozwiązania przedstawiono na rys. 7.24, gdzie zaprezentowano wyniki śledzenia ścieżki zdefiniowanej na podstawie krzywej $\mathcal{K}2$. Aby zagwarantować, że w chwili zmiany metody parametryzacji punkt prowadzenia robota będzie poza krzywą, zdefiniowano niezerowe położenie zadane robota względem układu lokalnego na ścieżce, $\mathbf{x}_d \neq \mathbf{0}$. W rezultacie ścieżka realizowana przez manipulator nie pokrywa się z krzywą $\mathcal{K}2$. Niemniej jednak, zadanie jest realizowane poprawnie, o czym świadczą błędy śledzenia ścieżki $\mathbf{e}_\chi$ zbiegające do zera. W sygnałach sterujących nie występują piki wartości w chwili zmiany metody parametryzacji. Jest to zapewnione dzięki zachowaniu ciągłości ewolucji odpowiadających sobie wektorów bazowych oraz parametrów geometrycznych. Zgodnie z przedstawionymi warunkami, jest to możliwe tylko w takich punktach krzywej, w których zachodzi $\tau = k_2 = 0$.



Rysunek 7.24: Zmiana parametryzacji Serreta–Freneta na Bishopa w trakcie realizacji zadania śledzenia ścieżki $\mathcal{K}2$.

7.7 Podsumowanie

W niniejszym rozdziale przedstawiono analizę najważniejszych własności podstawowych metod parametryzacji krzywoliniowych. Cechy charakterystyczne weryfikowano pod względem możliwości zastosowania poszczególnych metod w zadaniu śledzenia ścieżki oraz płynących z tego konsekwencji.

Poniżej podsumowano rozważania, grupując poruszane aspekty. Wnioski płynące z analizy każdego aspektu zapisano w formie listy punktów. Dzięki temu można zweryfikować przydatność lub możliwość zastosowania danej metody parametryzacji w konkretnych warunkach aplikacji. W szczególności, można zwrócić uwagę na potencjalne trudności wynikające z wyboru metody, a także na możliwe rozwiązania tych problemów.

1. Minimalne wymagania na klasę krzywej (rozdział 7.1):

- W przestrzeni trójwymiarowej parametryzacja Bishopa nakłada mniejsze wymagania na klasę różniczkowości krzywej ($\mathcal{C}^2$) w porównaniu z parametryzacją Serreta–Freneta oraz *beta* ($\mathcal{C}^3$).

- Redukcja wymaganej klasy krzywej może wpływać na zwiększenie dokładności odwzorowania punktów kontrolnych przez zadaną ścieżkę.
- Nieciągłości wynikające z przebiegu parametrów geometrycznych krzywej mogą skutkować nieciągłymi i gwałtownymi zmianami sygnałów sterujących.
- W przypadku krzywych sklejanych redukcja klasy krzywej występuje w punktach sklejenia. W przypadku punktowej redukcji klasy krzywej można realizować każdy gładki fragment zadanej krzywej osobno. Wówczas punkty sklejenia nie będą istotne. Jednakże podejście polegające na zakończeniu zadania i rozpoczęcie nowego w każdym punkcie sklejenia może być nieefektywne, a w niektórych aplikacjach wręcz niemożliwe do zrealizowania.

2. Ścieżki o zerowej krzywiznie (rozdział 7.2):

- Ścieżki zawierające punkty o zerowej krzywiznie są często wykorzystywane w realizacji zadania śledzenia. Należą do nich linie proste. Punkty o zerowej krzywiznie można także łatwo uzyskać, konstruując krzywe sklejaną na podstawie punktów kontrolnych wynikających z algorytmów planowania ścieżki.
- Punkty o zerowej krzywiznie powodują nieciągłą ewolucję układu Serreta–Freneta wzdłuż krzywej.
- Układy Bishopa oraz *beta* są odporne na punkty o zerowej krzywiznie. Parametryzacja *beta* zachowuje charakter ewolucji typowy dla parametryzacji Serreta–Freneta.
- Problem nieciągłości układu Serreta–Freneta można rozwiązać, rezygnując z zastosowania bezpośredniej definicji układu: (2.4) w parametryzacji unormowanej lub (2.11) w parametryzacji nieunormowanej. Można to zrobić, rozwiązując równania różniczkowe, odpowiednio (2.9) lub (2.13), i wykorzystując uzyskane przebiegi funkcyjne. Możliwość rozwiązania równań różniczkowych może być jednak ograniczona tylko do pewnej klasy krzywych, np. kłotoid spełniających warunek komutatora [43].

3. Osobliwości parametryzacji (rozdział 7.3):

- Parametryzacja Serreta–Freneta posiada osobliwość w punktach o zerowej krzywiznie.
- Warunek parametryzacji ortogonalnej wprowadza osobliwość do równań robota względem ścieżki niezależnie od przyjętej metody parametryzacji krzywoliniowej.
- Punkty potencjalnie osobliwe w ortogonalnej parametryzacji Serreta–Freneta są bardziej zwarte (znajdują się bliżej krzywej), niż w parametryzacji Bishopa. Przez to analiza osobliwości jest łatwiejsza dla układu Serreta–Freneta.
- Punkty potencjalnie osobliwe są powiązane z krzywizną ścieżki. W pracy [107], Samson sformułował warunek dla przypadku planarnego pozwalający na uniknięcie osobliwości parametryzacji. Założył on, że promień okręgu stycznego do krzywej w dwóch lub większej liczbie punktów i niezawierający żadnych punktów krzywej w środku okręgu jest ograniczony od dołu przez dodatnią liczbę r_{min} . Środki tak zdefiniowanych okręgów wyznaczają diagram Voronoia

stowarzyszony z daną krzywą. Wynika z tego, że krzywizna spełnia nierówność $\kappa(s) \leq 1/r_{min}$, co wprost odnosi się do rozpatrywanych warunków (3.31) oraz (7.2). Wynik ten koresponduje również z obserwacjami poczynionymi dla przypadku przestrzennego:

- Wraz ze wzrostem krzywizny punkty osobliwe w parametryzacji ortogonalnej znajdują się coraz bliżej krzywej (zmniejsza się promień okręgu w płaszczyźnie normalnej).
- Punkty osobliwe w parametryzacji ortogonalnej są położone po wewnętrznej stronie krzywej i rozkładają się do środka krzywizny.
- Parametryzacja nieortogonalna jest globalną metodą opisu robota względem ścieżki, gdyż nie wprowadza dodatkowych ograniczeń lub osobliwości do opisu robota względem ścieżki. Jednakże, zwiększa wymiarowość zadania i wymaga określenia położenia punktu prowadzenia robota we wszystkich kierunkach układu lokalnego na ścieżce, co w pewnych aplikacjach może być trudne lub nieosiągalne.

4. Rotacja układu lokalnego wzdłuż krzywej (rozdział 7.4):

- Układ Bishopa minimalizuje rotacje wzdłuż krzywej.
- Wzdłuż pewnych krzywych (np. linii śrubowej) ewolucja układu Serreta–Freneta może wykazywać korzystniejsze cechy. Wiąże się to z własnością tego układu, który minimalizuje rotacje w kierunku wektora normalnego.
- Ewolucja układów Serreta–Freneta oraz *beta* wzdłuż tej samej krzywej jest identyczna.
- Dobór konkretnej metody parametryzacji należy poprzedzić analizą właściwości ewolucji układu wzdłuż zadanej krzywej.

5. Inicjalizacja układu Bishopa (rozdział 7.5):

- Układ Bishopa można dowolnie rotować w stanie początkowym.
- Niezależnie od początkowej orientacji układ Bishopa zachowuje swoje własności: odporność na punkty o zerowej krzywiznie, minimalizacja rotacji wokół krzywej, ewolucja oparta o względnie równoległe przesunięcie wektorów.
- Niezależnie od początkowej orientacji układu Bishopa, układ *beta* uzyskany na jego podstawie cechuje się zawsze taką samą orientacją w stanie początkowym oraz identycznym przebiegiem ewolucji.
- Stopień swobody umożliwiający dowolne zorientowanie układu Bishopa w chwili początkowej może być szczególnie przydatny w zadaniu śledzenia postury obiektu robotycznego względem zadanej ścieżki.

6. Zmiana metody parametryzacji krzywoliniowej w trakcie manewru (rozdział 7.6):

- Zmiana metody parametryzacji w trakcie realizacji zadania śledzenia ścieżki może być przydatna do unikania punktów osobliwych charakterystycznych dla danej metody, np. punkty o zerowej krzywiznie dla parametryzacji Serreta–Freneta.

- Aby uniknąć gwałtownych reakcji układu sterowania, konieczne jest zachowanie ciągłości ewolucji układu lokalnego na ścieżce.
- Przejście z układu Serreta–Freneta na układ Bishopa i *vice versa* jest ciągłe, jeśli w punkcie zmiany parametryzacji zachodzi $\phi(s) = 0$ dla parametryzacji Bishopa. Dzięki temu, że układ Bishopa można zainicjalizować dowolnie, to przejście z układu Serreta–Freneta na układ Bishopa można wykonać dowolnie. Zmiana w przeciwną stronę wymaga zaplanowania momentu przejścia przed rozpoczęciem zadania.
- Aby zachować ciągłość sygnałów sterujących w trakcie realizacji zadania śledzenia ścieżki, wymaga się dodatkowo, aby w chwili zmiany metody parametryzacji punkt prowadzenia robota znajdował się na zadanej krzywej ($\mathbf{p} = \mathbf{r}$) lub torsja krzywej w tym punkcie była zerowa ($\tau = 0$).

Rozdział 8

Ograniczenia na sterowanie

Wartości momentów i sił sterujących generowanych przez algorytmy sterowania robotów nie mogą być dowolne, gdyż podlegają fizycznym ograniczeniom. Przede wszystkim możliwości napędów stosowanych w układach robotycznych są ograniczone, więc nie można zadać dowolnie dużych sygnałów sterujących. Ponadto, w projektowaniu układu sterowania warto zadbać o zabezpieczenia na wypadek gwałtownej zmiany warunków, w jakich pracuje robot. Nagłe zmiany otoczenia mogą prowadzić do wygenerowania sterowań niemożliwych do zrealizowania na rzeczywistym obiekcie lub – w sytuacji krytycznej – prowadzących do uszkodzenia układów mechanicznych. Dlatego też w niniejszym rozdziale przedstawiono rozwiązania, które mają za zadanie pomóc w ograniczaniu sygnałów generowanych przez sterowniki robotów. Wstępna propozycja tych metod została omówiona przez autora rozprawy w pracy [40].

Zadanie śledzenia ścieżki jest zadaniem robotycznym o charakterystyce szczególnie sprzyjającej uwzględnianiu ograniczeń. Częstym powodem przekraczania dopuszczalnych sterowań jest bowiem nakładanie na robota wysokich reżimów czasowych, co jest domeną zadania śledzenia trajektorii. W śledzeniu trajektorii można bowiem wymagać, aby układ realizował zadanie w zbyt krótkim czasie, co prowadzi do generowania sygnałów sterujących spoza dopuszczalnych limitów.

Inaczej ma się rzecz w zadaniu śledzenia ścieżki. Należy przypomnieć, że ścieżka jest obiektem czysto geometrycznym, a więc sama definicja zadania jest wolna od jakichkolwiek reżimów czasowych. Naturalnie, robot pozostaje układem dynamicznym i realizuje swoje zadanie w czasie, jednak sposób realizacji tego zadania można kontrolować poprzez odpowiedni dobór parametrów sterownika, a także profilu prędkościowego wzdłuż ścieżki. Ten ostatni aspekt wpływa na ewolucję układu lokalnego na ścieżce, więc bezpośrednio oddziałuje również na dynamikę ruchu robota. Jak podkreślono w Spostrzeżeniu 11, profil prędkościowy wzdłuż ścieżki można dobrać dowolnie w definicji zadania, a zatem można go wykorzystać również do ograniczania sterowań generowanych przez zaproponowane algorytmy.

W tym rozdziale rozważono różne metody, które mogą posłużyć do ograniczania sygnałów generowanych przez sterownik:

1. ograniczenie profilu prędkościowego wzdłuż ścieżki (OPP);
2. skalowanie trajektorii robota (STR);
3. planowanie trajektorii zadanej względem układu lokalnego na ścieżce (PTZ).

W przedstawionych rozważaniach przyjęto, że sterowania $\mathbf{u}$ są ograniczone zarówno od góry, jak i od dołu zgodnie z zależnością

$$\mathbf{u}_{min} \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{u}_{max}, \quad (8.1)$$

przy czym ograniczenia w każdym wymiarze są definiowane niezależnie, tzn. dla $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ zachodzi $\mathbf{u}_{min} = (\mathbf{u}_1^{min} \dots \mathbf{u}_m^{min})^T$ oraz $\mathbf{u}_{max} = (\mathbf{u}_1^{max} \dots \mathbf{u}_m^{max})^T$.

Przedstawiona w ramach badań symulacyjnych egzemplifikacja zaproponowanych rozwiązań została przeprowadzona dla manipulatora holonomicznego RTR, którego model przedstawiono w dodatku A.1. Wykorzystano sterownik kinematyczny wynikający z Twierdzenia 2, który bazuje na nieortogonalnej parametryzacji Bishopa, a także algorytm oparty o pełną znajomość modelu dynamiki obiektu zdefiniowany w Twierdzeniu 3. W ogólności, zaprezentowane metody mogą być jednak zastosowane do opisu opartego o dowolną metodę parametryzacji krzywoliniowej, a także do sterowania dowolnym obiektem robotycznym.

Aby podkreślić wpływ oraz skuteczność poszczególnych metod, wyniki każdego badania symulacyjnego porównano z *przypadkiem referencyjnym*. Przez przypadek referencyjny należy rozumieć realizację dokładnie takiego samego zadania (wszystkie parametry scenariusza symulacyjnego są identyczne), lecz bez zastosowania danej metody ograniczającej momenty sterujące.

8.1 Ograniczenie profilu prędkościowego wzdłuż ścieżki (OPP)

8.1.1 Opis metody

Profil prędkościowy wzdłuż ścieżki jest jednym z elementów potrzebnych do realizacji zadania śledzenia ścieżki. Jest on konieczny do stymulowania ewolucji układu lokalnego wynikającego z parametryzacji krzywej, choć nie wpływa na geometryczną definicję ścieżki. W oczywisty sposób ruch tego układu lokalnego przekłada się na zachowanie obiektu sterowania. Im szybciej układ stowarzyszony z krzywą porusza się wzdłuż ścieżki, tym szybsze ruchy robota wymusza układ sterowania. Zasadnym jest zatem wykorzystanie tego aspektu do ograniczenia sygnałów sterujących.

Spostrzeżenie 20. *W przypadku parametryzacji nieortogonalnych profil prędkościowy wzdłuż ścieżki stanowi stopień swobody. Można go zatem dobrać zupełnie dowolnie. Z kolei w przypadku parametryzacji ortogonalnych odległość krzywoliniowa stanowi składową wektora stanu robota względem ścieżki, a prędkość krzywoliniowa jest określona ograniczeniem (3.25). Z tego względu w niniejszym rozdziale przedstawiono metodę ograniczania profilu prędkościowego wzdłuż ścieżki tylko dla parametryzacji nieortogonalnej.*

Aby zastosować proponowaną metodę, prawo sterowania na poziomie kinematycznym wynikające z Twierdzenia 2

$$\dot{\mathbf{q}}_{ref} = \mathbf{L}^\#(\mathbf{s}, \boldsymbol{\chi}, \mathbf{q}) \left(\dot{\mathbf{x}}_d - \mathbf{K}_k \mathbf{e}_\chi(\boldsymbol{\chi}) - \mathbf{f}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\chi}) \right) \quad (8.2)$$

należy uporządkować do formy liniowej zależności od prędkości krzywoliniowej zgodnie z następującą zależnością

$$\dot{\mathbf{q}}_{ref} = \mathbf{a}_1(\mathbf{s}, \boldsymbol{\chi}, \mathbf{q}) \dot{\mathbf{s}} + \mathbf{a}_2(\mathbf{s}, \boldsymbol{\chi}, \mathbf{q}) = \mathbf{a}_1(\mathbf{s}) \dot{\mathbf{s}} + \mathbf{a}_2(\mathbf{s}). \quad (8.3)$$

W rozważanym podejściu istotna jest zależność od odległości krzywoliniowej i jej pochodnych, stąd pozostałe argumenty mogą zostać pominięte dla klarowności zapisu. Bazując na równaniu (8.3), analogicznie można rozpisać wartość przyspieszeń referencyjnych, które zależą od prędkości i przyspieszeń krzywoliniowych

$$\ddot{\mathbf{q}}_{ref} = \mathbf{b}_1(s)\ddot{s} + \mathbf{b}_2(s)\dot{s}^2 + \mathbf{b}_3(s)\dot{s} + \mathbf{b}_4(s). \quad (8.4)$$

Zależności (8.3) oraz (8.4) można uwzględnić w prawie sterowania na poziomie dynamicznym, które zostało określone równaniem (5.12). Wówczas sterowania dane algorytmem opartym o pełną znajomość modelu można uporządkować do postaci

$$\mathbf{u} = \mathbf{x}_1(s)\ddot{s} + \mathbf{x}_2(\dot{s}, s), \quad (8.5)$$

gdzie

$$\mathbf{x}_1(s) = \mathbf{Q}(\mathbf{q})\mathbf{b}_1(s),$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2(\dot{s}, s) = \mathbf{Q}(\mathbf{q})\left(\mathbf{b}_2(s)\dot{s}^2 + \mathbf{b}_3(s)\dot{s} + \mathbf{b}_4(s)\right) + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\left(\mathbf{a}_1(s)\dot{s} + \mathbf{a}_2(s)\right) + \\ + \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{K}_d\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_d\left(\mathbf{a}_1(s)\dot{s} + \mathbf{a}_2(s)\right). \end{aligned}$$

Sterowania w formie (8.5) należy uwzględnić w układzie nierówności (8.1)

$$\mathbf{u}_{min} \leq \mathbf{x}_1(s)\ddot{s} + \mathbf{x}_2(\dot{s}, s) \leq \mathbf{u}_{max}. \quad (8.6)$$

Korzystając z prostej postaci liniowej można określić dopuszczalny przedział wartości przyspieszenia krzywoliniowego tak, aby zbyt szybki ruch układu lokalnego na ścieżce nie wymuszał niedopuszczalnych wartości sterowań. Z analizy układu (8.6) wynikają warunki, które zostały zaproponowane w pracy [23]

$$\ddot{s}_{max} = \min_{i \in \{1, 2, \dots, m\}} \mathbf{b}_i^+(\dot{s}, s), \quad (8.7a)$$

$$\ddot{s}_{min} = \max_{i \in \{1, 2, \dots, m\}} \mathbf{b}_i^-(\dot{s}, s), \quad (8.7b)$$

gdzie warunki brzegowe $\mathbf{b}_i^+$ oraz $\mathbf{b}_i^-$ dla każdego wymiaru wektora sterowań $\mathbf{u}$ są definiowane zgodnie z regułami

$$\mathbf{b}_i^+(\dot{s}, s) = \begin{cases} \left(\mathbf{u}_i^{max} - \mathbf{x}_{2i}(\dot{s}, s)\right)/\mathbf{x}_{1i}(s) & \text{dla } \mathbf{x}_{1i}(s) > 0, \\ \infty & \text{dla } \mathbf{x}_{1i}(s) = 0, \\ \left(\mathbf{u}_i^{min} - \mathbf{x}_{2i}(\dot{s}, s)\right)/\mathbf{x}_{1i}(s) & \text{dla } \mathbf{x}_{1i}(s) < 0, \end{cases} \quad (8.8a)$$

$$\mathbf{b}_i^-(\dot{s}, s) = \begin{cases} \left(\mathbf{u}_i^{min} - \mathbf{x}_{2i}(\dot{s}, s)\right)/\mathbf{x}_{1i}(s) & \text{dla } \mathbf{x}_{1i}(s) > 0, \\ -\infty & \text{dla } \mathbf{x}_{1i}(s) = 0, \\ \left(\mathbf{u}_i^{max} - \mathbf{x}_{2i}(\dot{s}, s)\right)/\mathbf{x}_{1i}(s) & \text{dla } \mathbf{x}_{1i}(s) < 0. \end{cases} \quad (8.8b)$$

Aby zachować ograniczenia na sterowania w każdej chwili wykonywania manewru, przyspieszenie krzywoliniowe musi spełniać warunek

$$\ddot{s}_{min} \leq \ddot{s} \leq \ddot{s}_{max}. \quad (8.9)$$

Dopóki przyspieszenie krzywoliniowe, wynikające z zadanego profilu prędkościowego wzdłuż ścieżki, zachowuje wyznaczone limity (8.9), dopóty ograniczenia na sterowania pozostają spełnione. W przeciwnym razie wartość przyspieszenia krzywoliniowego należy utrzymać na wartości granicznej wyznaczonego przedziału.

Przedstawiona metoda szacowania ograniczeń na przyspieszenie krzywoliniowe jest prosta. Jednakże, jest również obciążona niepożądanymi właściwościami:

1. Metoda nie rozpatruje przypadku, w którym relacja między dolnym a górnym ograniczeniem na przyspieszenie krzywoliniowe, $\ddot{s}_{min} \leq \ddot{s}_{max}$, nie jest zachowana. Oznacza to, że dla przypadku $\ddot{s}_{min} > \ddot{s}_{max}$ metoda nie może być zastosowana. Taka sytuacja może wystąpić w stanie przejściowym, gdy robot znajduje się poza ścieżką, a błędy śledzenia na obu poziomach sterownika są wysokie.
2. Wartości graniczne (8.7) zależą od odległości krzywoliniowej oraz prędkości krzywoliniowej. Ponadto, zgodnie z równaniem (8.5), ograniczenia na przyspieszenie krzywoliniowe $\ddot{s}$ zależą nie tylko od samej prędkości krzywoliniowej, ale także od kwadratu tej wielkości. W konsekwencji oznacza to, że dla ograniczonej, lecz dodatniej, wartości przyspieszenia krzywoliniowego $\ddot{s}$, wartość prędkości krzywoliniowej, a zatem również wartości ograniczeń (8.7) będą narastać. To również może prowadzić do zdegenerowania narzuconych limitów, tzn. do sytuacji, gdy $\ddot{s}_{min} > \ddot{s}_{max}$.

Pierwsza własność jest nieunikniona, gdyż nie wszystkie elementy w definicji sterowania (8.5) są zależne od przyspieszenia krzywoliniowego $\ddot{s}$, a zatem mogą być źródłem degeneracji ograniczeń. Ponadto, konflikt może wynikać z faktu strojenia tylko jednego parametru, podczas gdy sygnałów sterujących jest zazwyczaj więcej, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, $m > 1$. Ze względu na konstrukcję układu robotycznego lub doboru napędów może dojść do sytuacji, w której największe z ograniczeń dolnych, wynikające ze sterowania dla silnika w jednym przegubie, będzie większe od najmniejszego ograniczenia górnego w innym przegubie. Wówczas zaproponowana metoda nie będzie skuteczna.

Drugi z wymienionych problemów sprowadza się do faktu, że wartość ograniczeń zależy od wartości ograniczanej poprzez relację całkowania. Istnieje zatem ryzyko, że nawet dla spełnionych ograniczeń, czyli w sytuacji, która nie wymaga żadnej reakcji ze strony układu sterowania, będą narastały wartości prędkości krzywoliniowej. To z kolei może w pewnym momencie spowodować zdegenerowanie relacji ograniczeń (8.9). Ponadto, im szybciej porusza się układ lokalny stowarzyszony ze ścieżką, tym większe prędkości referencyjne generuje sterownik kinematyczny. W konsekwencji wymusza również większe prędkości w przestrzeni konfiguracyjnej robota. To również wpływa na wzrost (często co do wartości bezwzględnej) wartości ograniczeń, które zgodnie z równaniami (8.5) oraz (8.7) poprzez wyraz $\mathbf{x}_2$ zależą również od macierzy sił odśrodkowych i sił Coriolisa $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, a także samych prędkości obiektu $\dot{\mathbf{q}}$. Sposobem na rozwiązanie tego problemu jest dodatkowe uwzględnienie ograniczeń na prędkości konfiguracyjne robota na poziomie sterownika kinematycznego. Wówczas zostanie zagwarantowane, że referencyjne profile prędkościowe generowane na poziomie kinematycznym pozostaną również ograniczone. Niech będą zatem dane ograniczenia na prędkości robota w przestrzeni konfiguracyjnej w postaci

$$\dot{\mathbf{q}}_{min} \leq \dot{\mathbf{q}}_{ref} \leq \dot{\mathbf{q}}_{max}. \quad (8.10)$$

Wówczas można je powiązać z ograniczeniem profilu prędkościowego wzdłuż ścieżki poprzez równanie (8.3)

$$\dot{\mathbf{q}}_{min} \leq \mathbf{a}_1(s)\dot{s} + \mathbf{a}_2(s) \leq \dot{\mathbf{q}}_{max}. \quad (8.11)$$

Ponownie zachodzi zatem sytuacja, w której wartość $\dot{\mathbf{q}}_{ref}$ jest ograniczona układem nierówności liniowych. Przyjmijmy, że $\dot{\mathbf{q}}_{ref} \in \mathbb{R}^n$. Wtedy przez analogię można stworzyć definicję warunków brzegowych

$$\dot{s}_{max} = \min_{i \in \{1,2,\dots,n\}} \mathbf{a}_i^+(s), \quad (8.12a)$$

$$\dot{s}_{min} = \max_{i \in \{1,2,\dots,n\}} \mathbf{a}_i^-(s), \quad (8.12b)$$

gdzie warunki brzegowe $\mathbf{a}_i^+$ oraz $\mathbf{a}_i^-$ dla każdego wymiaru wektora prędkości referencyjnych $\dot{\mathbf{q}}_{ref}$ są definiowane zgodnie z regułami

$$\mathbf{a}_i^+(s) = \begin{cases} (\dot{q}_i^{max} - \mathbf{a}_{2_i}(s))/\mathbf{a}_{1_i}(s) & \text{dla } \mathbf{a}_{1_i}(s) > 0, \\ \infty & \text{dla } \mathbf{a}_{1_i}(s) = 0, \\ (\dot{q}_i^{min} - \mathbf{a}_{2_i}(s))/\mathbf{a}_{1_i}(s) & \text{dla } \mathbf{a}_{1_i}(s) < 0, \end{cases} \quad (8.13a)$$

$$\mathbf{a}_i^-(s) = \begin{cases} (\dot{q}_i^{min} - \mathbf{a}_{2_i}(s))/\mathbf{a}_{1_i}(s) & \text{dla } \mathbf{a}_{1_i}(s) > 0, \\ -\infty & \text{dla } \mathbf{a}_{1_i}(s) = 0, \\ (\dot{q}_i^{max} - \mathbf{a}_{2_i}(s))/\mathbf{a}_{1_i}(s) & \text{dla } \mathbf{a}_{1_i}(s) < 0. \end{cases} \quad (8.13b)$$

W rezultacie można uzyskać ograniczenia na prędkość krzywoliniową wynikającą z zadanego profilu prędkościowego wzdłuż ścieżki będące skutkiem ograniczeń prędkościowych robota

$$\dot{s}_{min} \leq \dot{s} \leq \dot{s}_{max}. \quad (8.14)$$

Ograniczenie (8.14) należy zastosować do profilu prędkościowego będącego całką ograniczonego przez zależności (8.9) przyspieszenia krzywoliniowego. Nałożone ograniczenia prędkościowe chronią układ przed niepożądanym wzrostem wartości prędkości. Z drugiej strony, jeśli prędkość krzywoliniowa również zostanie ograniczona do wyznaczonego przedziału (8.14), to w definicji sygnałów sterujących (8.5) należy uwzględnić przyspieszenie krzywoliniowe będące pochodną nowo uzyskanej prędkości krzywoliniowej. Może to prowadzić do nieciągłych zmian wartości sterowań. Spodziewanym efektem jest jednak zmniejszanie ich amplitudy co do wartości bezwzględnej, a także zachowanie odpowiedniej relacji w warunku (8.9).

8.1.2 Badania symulacyjne

W badaniach symulacyjnych rozważono manipulator RTR, którego model przedstawiono w dodatku A.1. W związku z ograniczoną liczbą stopni swobody manipulatora rozważono jedynie położenie chwytaka względem ścieżki. Dla tego obiektu poszczególne elementy równań (8.3) oraz (8.4) przyjmują postać, która wynika z parametryzacji nieortogonalnej względem ścieżki (3.74), Twierdzenia 1, Spostrzeżenia 10 i sterownika

kinematycznego (5.2)

$$\mathbf{a}_1(s) = -\mathbf{L}^{-1}\mathbf{f}_1(s), \quad (8.15a)$$

$$\mathbf{a}_2(s) = \mathbf{L}^{-1}(\dot{\mathbf{x}}_d - \mathbf{K}_k \mathbf{e}_x), \quad (8.15b)$$

$$\mathbf{b}_1(s) = -\mathbf{L}^{-1}\mathbf{f}_1(s), \quad (8.15c)$$

$$\mathbf{b}_2(s) = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{W}(s)\mathbf{f}_1(s) + \mathbf{L}^{-1}\dot{\mathbf{W}}(s)\mathbf{x}, \quad (8.15d)$$

$$\mathbf{b}_3(s) = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{W}(s)\mathbf{L}\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{L}}^{-1}\mathbf{f}_1(s) - \mathbf{L}^{-1}\mathbf{K}_k\mathbf{f}_1(s), \quad (8.15e)$$

$$\mathbf{b}_4(s) = \dot{\mathbf{L}}^{-1}(\dot{\mathbf{x}}_d - \mathbf{K}_k \mathbf{e}_x) + \mathbf{L}^{-1}(\ddot{\mathbf{x}}_d + \mathbf{K}_k\dot{\mathbf{x}}_d - \mathbf{K}_k\mathbf{L}\dot{\mathbf{q}}), \quad (8.15f)$$

gdzie $\mathbf{f}(s) = \dot{\mathbf{s}}\mathbf{f}_1(s)$ oraz $\mathbf{L} = \mathbf{L}(s, \mathbf{x}, \mathbf{q})$. Konfigurację początkową robota przyjęto tak, aby w stanie początkowym końcówka chwytaka znajdowała się w punkcie początkowym ścieżki, a więc $\mathbf{q}_0 = (0 \text{ [rad]} \quad 0,866 \text{ [m]} \quad -1,0472 \text{ [rad]})^T$ oraz $\dot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{0}$. Ponadto zdefiniowano symetryczne ograniczenia na sterowania

$$\mathbf{u}_{max} = (100 \text{ [Nm]} \quad 450 \text{ [N]} \quad 100 \text{ [Nm]})^T, \quad (8.16a)$$

$$\mathbf{u}_{min} = -\mathbf{u}_{max}, \quad (8.16b)$$

a także symetryczne ograniczenia na prędkości przegubowe

$$\dot{\mathbf{q}}_{max} = (1 \text{ [rad/s]} \quad 1 \text{ [m/s]} \quad 1 \text{ [rad/s]})^T, \quad (8.17a)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{min} = -\dot{\mathbf{q}}_{max}. \quad (8.17b)$$

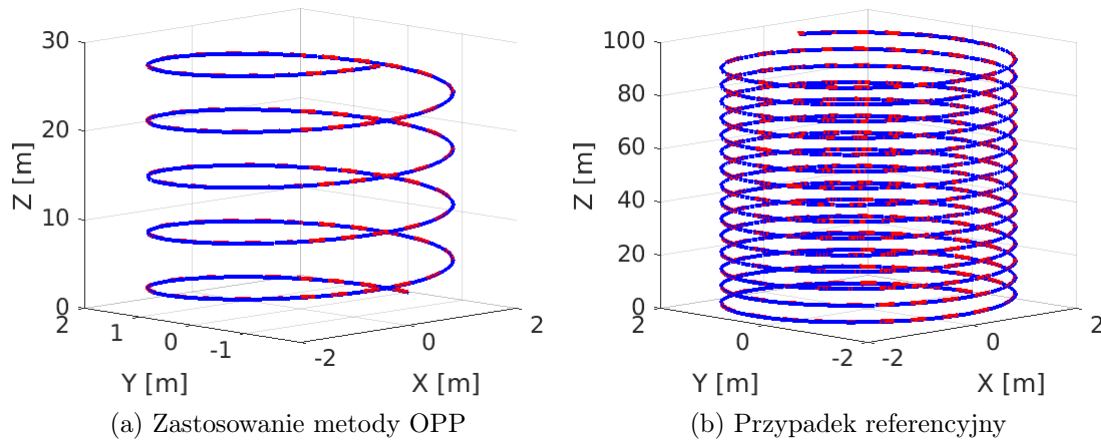
Jako ścieżkę zadaną przyjęto linię śrubową, zdefiniowaną w dodatku B.2, z parametrami $\mathbf{a} = 2$ oraz $\mathbf{b} = 1$. Profil prędkościowy wzdłuż ścieżki zdefiniowano poprzez zadanie przyspieszenia krzywoliniowego jako funkcji czasu

$$\ddot{s}_d(t) = \frac{5}{1+t^2} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] \quad (8.18)$$

przy zerowych warunkach początkowych, tj. $\dot{s}_d(0) = 0$ oraz $s_d(0) = 0$.

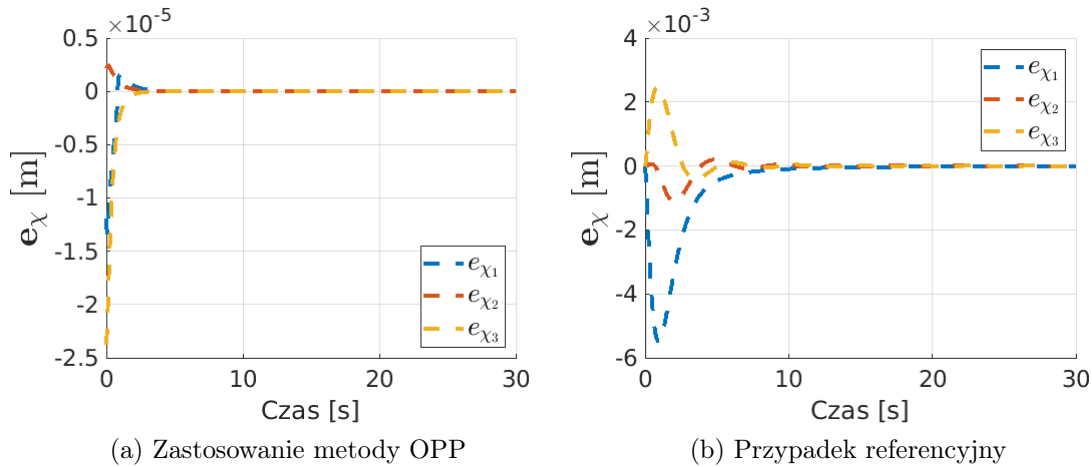
Dla tak zdefiniowanego przypadku przeprowadzono badania symulacyjne, których wyniki przedstawiono poniżej. Na rys. 8.1 porównano ścieżkę zrealizowaną przez manipulator w przypadku, gdy zastosowano rozważaną metodę do kontroli ograniczeń, a także w sytuacji, gdy nie rozpatrywano ograniczeń na sterowania oraz prędkości przegubowe. Główna różnica polega na długości zrealizowanej ścieżki. Oczywistym jest, że dla szybszego ruchu układu lokalnego została zrealizowana dłuższa ścieżka w tym samym czasie. Jest to cecha charakterystyczna dla zadania śledzenia ścieżki. Definicja zadania jest wolna od reżimów czasowych, a długość trwania manewru można dobrać do możliwości robota. Niniejszy przykład pokazuje, że poprzez odpowiedni dobór profilu prędkościowego można zrealizować tę samą ścieżkę, wydłużając czas manewru. Dzięki temu można w prosty sposób zachować ograniczenia wynikające z konstrukcji robota.

Zastosowana metoda nieznacznie wpłynęła na dokładność śledzenia ścieżki. Potwierdzają to przebiegi błędów śledzenia ścieżki oraz błędów śledzenia profili prędkościowych w przegubach manipulatora, które zostały przedstawione odpowiednio na rys. 8.2 oraz rys. 8.3. Dla przypadku z zastosowaną metodą OPP uzyskane wartości są mniejsze, co jest spodziewanym rezultatem. Przyjęto bowiem, że manipulator w stanie początkowym



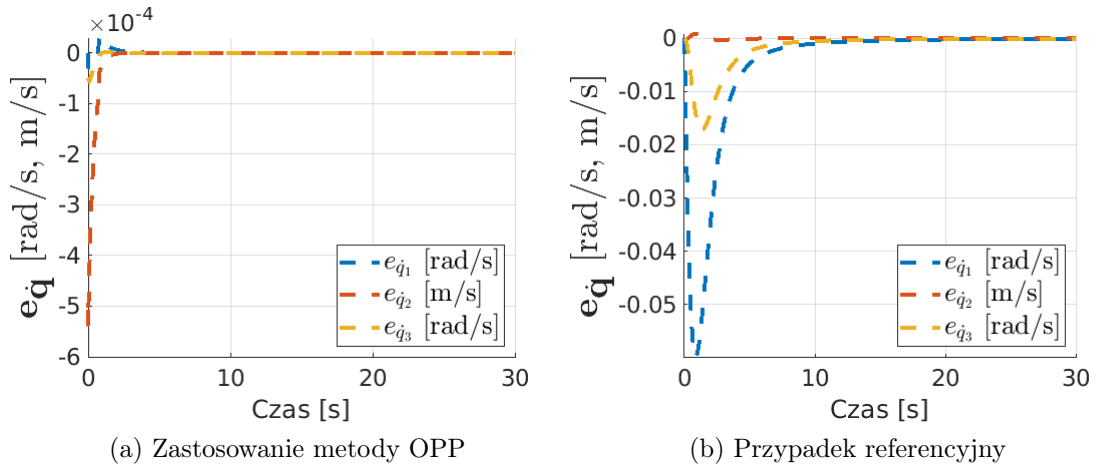
Rysunek 8.1: Porównanie ścieżki zadanej (linia niebieska ciągła) oraz ścieżki zrealizowanej przez manipulator (linia czerwona przerywana) – OPP.

pozostaje w spoczynku, a łatwiej jest rozpędzić robota do prędkości odpowiadających wolniejszemu ruchowi układu stowarzyszonego ze ścieżką. Różnica między uzyskanymi wartościami dochodzi wprawdzie do dwóch rzędów wielkości, lecz w obu przypadkach może być pomijalna ze względu na dokładność pomiarową.



Rysunek 8.2: Błędy śledzenia ścieżki e_x – OPP.

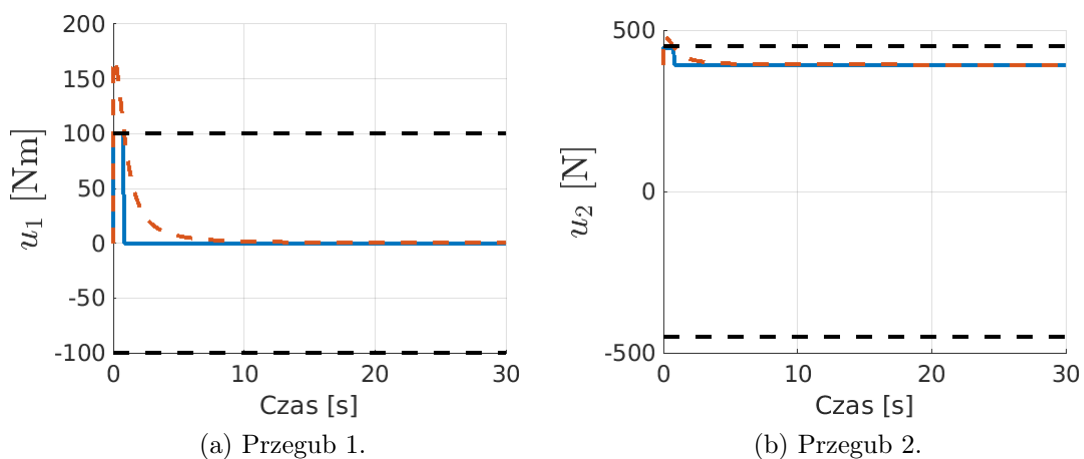
Warto zwrócić również uwagę na to, w jaki sposób metoda OPP wpłynęła na ograniczenie sterowań oraz prędkości przegubowych realizowanych w manipulatorze. Na rys. 8.4 zestawiono wygenerowane sterowania przy uwzględnieniu ograniczeń, a także w ogólnym przypadku. Zastosowana metoda pozwoliła ograniczyć piki zadawanych wartości w chwili początkowej. Dotyczy to zwłaszcza silników w przegubach pierwszym oraz drugim. W trakcie realizacji zadania momenty sterujące zostały wydatnie zredukowane w przegubie trzecim. W przeciwnym razie naruszone zostałyby przyjęte limity. Redukcja wartości w przegubie trzecim wydaje się być wręcz nadmiarowa, jednak wynika to z faktu ograniczenia prędkości przegubowych manipulatora. Zmierzone przebiegi prędkości zostały zaprezentowane na rys. 8.5. Widać wyraźnie, iż wartości w dwóch przegubach nasyciły



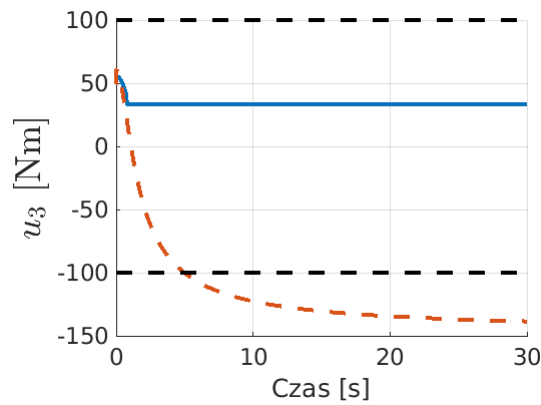
Rysunek 8.3: Błędy śledzenia profili prędkościowych $e_{\dot{q}}$ – OPP.

się, osiągając górną granicę przyjętych ograniczeń. Z otrzymanych rezultatów wynika, że zaproponowana metoda pozwala na ograniczenie sterowań oraz prędkości przegubowych robota w trakcie wykonywania zadania śledzenia ścieżki. Dzięki temu zadanie można wykonać bezpiecznie przy zmniejszeniu wymagań dotyczących profilu prędkościowego wzdłuż ścieżki i wydłużeniu czasu realizacji manewru.

Dodatkowo, na rys. 8.6 porównano przebiegi prędkości oraz przyspieszeń krzywoliniowych, które stymulowały ruch układu lokalnego na ścieżce. Warto zwrócić uwagę, że w początkowej fazie, gdy prędkość krzywoliniowa mogła narastać, przyspieszenie krzywoliniowe miało stałą wartość wynikającą z przyjętych ograniczeń na sterowanie. Jednakże nasycenie się prędkości krzywoliniowej do wartości maksymalnej, która wynikała z przyjętych ograniczeń prędkościowych, spowodowało nieciągłą zmianę wartości przyspieszenia krzywoliniowego. Choć rezultatem jest zmniejszenie co do wartości bezwzględnej generowanych sterowań, to należy podkreślić, że może to prowadzić do nieciągłej zmiany wartości uogólnionych sił sterujących.

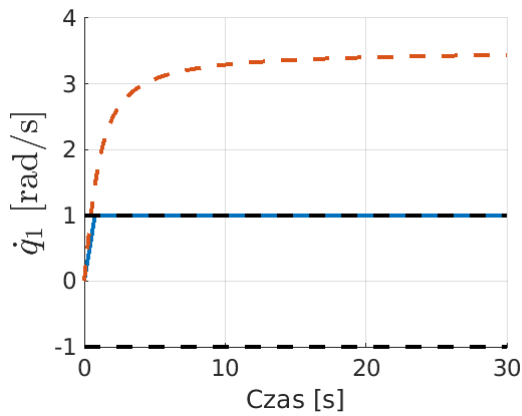


Rysunek 8.4: Porównanie wygenerowanych sterowań u : metoda OPP (linia niebieska), przypadek referencyjny (linia czerwona), narzucone ograniczenia (linia czarna).

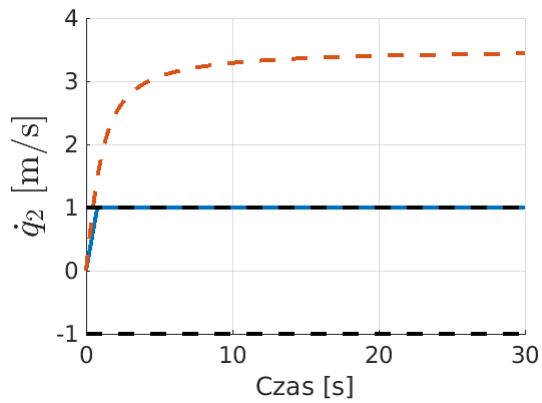


(c) Przegub 3.

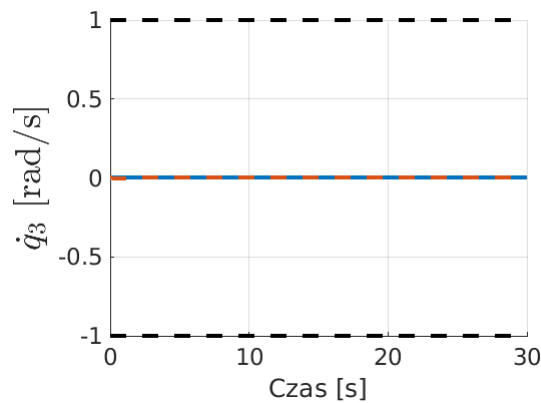
Rysunek 8.4: Porównanie wygenerowanych sterowań $\mathbf{u}$: metoda OPP (linia niebieska), przypadek referencyjny (linia czerwona), narzucone ograniczenia (linia czarna).



(a) Przegub 1.

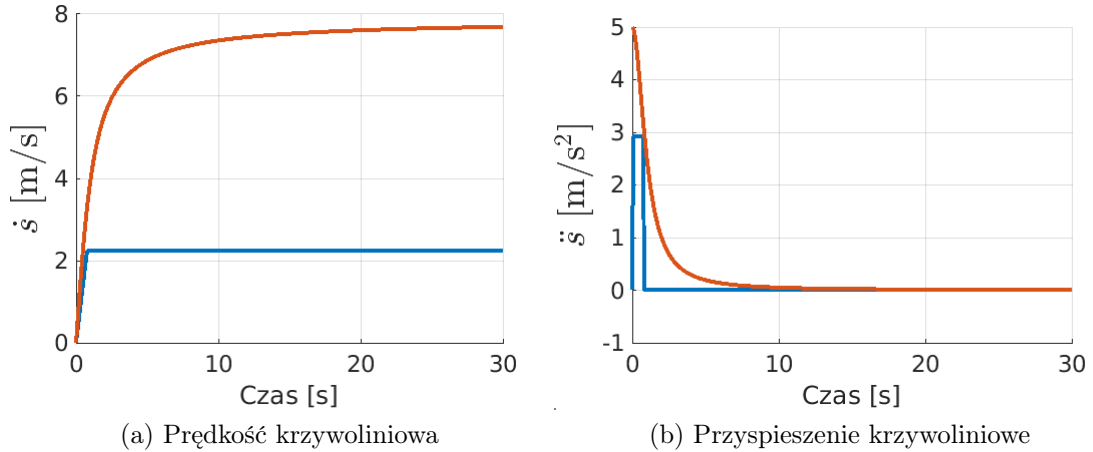


(b) Przegub 2.



(c) Przegub 3.

Rysunek 8.5: Porównanie prędkości w przegubach $\dot{\mathbf{q}}$: metoda OPP (linia niebieska), przypadek referencyjny (linia czerwona), narzucone ograniczenia (linia czarna).



Rysunek 8.6: Porównanie zrealizowanego profilu prędkościowego wzdłuż ścieżki: metoda OPP (linia niebieska), przypadek referencyjny (linia czerwona).

8.2 Skalowanie trajektorii robota (STR)

8.2.1 Opis metody

Skalowanie trajektorii to w ogólności metoda polegająca na zmianie reżimu czasowego podczas realizacji zadania tak, aby uniknąć osiągnięcia lub naruszenia fizycznych ograniczeń robota [48]. W przypadku zadania śledzenia ścieżki tę metodę można realizować poprzez dobór współczynnika skalującego. Za jego pomocą skaluje się równanie, które opisuje trajektorię realizowaną przez robota lub parametryzację robota względem krzywej [94]. Takie rozwiązanie zostało zastosowane do uwzględnienia ograniczeń na sterowanie podczas realizacji zadania śledzenia ścieżki dla manipulatorów stacjonarnych [95], a także manipulatorów mobilnych [96].

Do realizacji skalowania trajektorii można wykorzystać metodę sterowania wirtualnego zaproponowaną w pracy [94]. Zakłada ona wprowadzenie do prawa sterowania wirtualnego współczynnika skalującego $k(t)$. W rezultacie momenty sterujące generowane przez sterownik nie powinny przekraczać limitów wynikających z fizycznych ograniczeń robota (8.1). Należy podkreślić, że wprowadzenie dodatkowego współczynnika skalującego nie może naruszać charakteru wykonywanego zadania, innych ograniczeń nałożonych na robota, a także stabilności algorytmu sterowania.

Często stosowanym rozwiązaniem spełniającym powyższe wymagania jest skalowanie współczynników wzmocnienia prawa sterowania [97]. Aby wprowadzić wirtualne sterowanie $k(t)$, należy rozdzielić prawo sterowania na część zależną od wzmocnień ψ , a także część od nich niezależną δ . Wówczas prawo sterowania (5.12) przyjmuje postać

$$\mathbf{u} = \psi(\mathbf{K}_k, \mathbf{K}_d, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, s, \dot{s}) \cdot k(t) + \delta(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, s, \dot{s}, \ddot{s}), \quad (8.19)$$

gdzie $k(t) \in (0; 1]$. Jeśli sterowania nie naruszają przyjętych ograniczeń (8.1), to wirtualny współczynnik skalujący zachowuje wartość 1, $k(t) = 1$. Zadanie jest wtedy realizowane zgodnie z pierwotnym projektem układu sterowania. W przypadku przekroczenia ograniczeń wartość współczynnika jest odpowiednio zmniejszana.

Aby dobrać odpowiednią wartość współczynnika skalującego, należy rozważyć zależność (8.19) w nierówności opisującej ograniczenia (8.1)

$$\mathbf{u}_{min} \leq \boldsymbol{\psi} \mathbf{k}(t) + \boldsymbol{\delta} \leq \mathbf{u}_{max}. \quad (8.20)$$

Ponownie uzyskano zatem układ nierówności liniowych. Wzorem metody OPP przedstawionej w rozdziale 8.1 można zdefiniować warunki na ekstremalne wartości współczynnika $\mathbf{k}(t)$

$$\mathbf{k}_{max} = \min_{i \in \{1,2,\dots,m\}} \mathbf{k}_i^+, \quad (8.21a)$$

$$\mathbf{k}_{min} = \max_{i \in \{1,2,\dots,m\}} \mathbf{k}_i^-, \quad (8.21b)$$

gdzie warunki brzegowe $\mathbf{k}_i^+$ oraz $\mathbf{k}_i^-$ dla każdego wymiaru wektora sterowań $\mathbf{u}$ są definiowane zgodnie z następującymi regułami

$$\mathbf{k}_i^+ = \begin{cases} (\mathbf{u}_i^{max} - \delta_i) / \psi_i & \text{dla } \psi_i > 0, \\ \infty & \text{dla } \psi_i = 0, \\ (\mathbf{u}_i^{min} - \delta_i) / \psi_i & \text{dla } \psi_i < 0, \end{cases} \quad (8.22a)$$

$$\mathbf{k}_i^- = \begin{cases} (\mathbf{u}_i^{min} - \delta_i) / \psi_i & \text{dla } \psi_i > 0, \\ -\infty & \text{dla } \psi_i = 0, \\ (\mathbf{u}_i^{max} - \delta_i) / \psi_i & \text{dla } \psi_i < 0. \end{cases} \quad (8.22b)$$

Jeśli sterowanie przekracza dopuszczalny limit w jednym z przegubów, to należy zredukować współczynnik sterujący do wartości granicznej. Należy również podkreślić, że warunek

$$0 < \mathbf{k}_{min} \leq \mathbf{k}(t) \leq \mathbf{k}_{max} \leq 1 \quad (8.23)$$

jest warunkiem koniecznym istnienia rozwiązania [94].

Przedstawioną wyżej metodę doboru współczynnika skalującego należy stosować, gdy naruszony został co najmniej jeden z przyjętych limitów (8.1). Kiedy wartości generowanych sterowań spełniają określone ograniczenia, można zwiększać wartość wirtualnego współczynnika $\mathbf{k}(t)$ do jego granicznej wartości $\mathbf{k}(t) = 1$. Aby uniknąć gwałtownych reakcji systemu, można przyjąć prawo ewolucji wirtualnego współczynnika skalującego, które zostało zaproponowane w pracy [94]

$$\dot{\mathbf{k}}(t) = 1 - \mathbf{k}(t). \quad (8.24)$$

W ten sposób współczynnik $\mathbf{k}(t)$ będzie narastał asymptotycznie do jedności w sytuacji, gdy wszystkie ograniczenia są spełnione, lub osiągnie wartość graniczną wynikającą z warunku (8.23).

Wprowadzenie wirtualnego współczynnika sterującego jest szczególnie przydatne w fazie przejściowej, gdy robot osiąga zadaną krzywą. Kiedy robot w stanie początkowym znajduje się poza ścieżką, to błędy wynikające z jego opisu względem ścieżki są duże. Ograniczenie współczynników sterownika będzie skutkować zmniejszeniem momentów sterujących zadawanych na silniki. Dzięki temu można zachować limity wynikające z fizycznych ograniczeń robota. Ponadto, ze względu na fakt skalowania jedynie wzmocnień

sterowników, metoda ta nie wpływa na stabilność algorytmu sterowania. Z drugiej strony wzmocnienia sterownika są zawsze powiązane z sygnałem błędów. Jeśli robot osiągnie ścieżkę i na niej pozostanie, to rozważana metoda nie pozwoli na kontrolę ograniczeń sygnałów sterujących.

Realizacja w zadaniu śledzenia ścieżki. Aby zastosować przedstawioną metodę w zadaniu śledzenia ścieżki, należy wydzielić część sterownika kinematycznego (5.2) zależną od wzmocnienia $\mathbf{K}_k$

$$\dot{\mathbf{q}}_{ref} = \alpha_1(\mathbf{K}_k) + \beta_1. \quad (8.25)$$

W konsekwencji, pochodne referencyjnych profili prędkościowych przyjmą ogólną postać

$$\ddot{\mathbf{q}}_{ref} = \alpha_2(\mathbf{K}_k) + \beta_2, \quad (8.26)$$

gdzie $\alpha_2 = \dot{\alpha}_1$ oraz $\beta_2 = \dot{\beta}_1$. Uwzględnienie zależności (8.25) oraz (8.26) w prawie sterowania na poziomie dynamicznym (5.12) pozwala na uzyskanie postaci

$$\mathbf{u} = \psi(\mathbf{K}_k, \mathbf{K}_d) + \delta, \quad (8.27)$$

gdzie

$$\psi(\mathbf{K}_k, \mathbf{K}_d) = \mathbf{Q}(\mathbf{q})\alpha_2(\mathbf{K}_k) + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\alpha_1(\mathbf{K}_k) + \mathbf{K}_d\alpha_1(\mathbf{K}_k) + \mathbf{K}_d\beta_1 - \mathbf{K}_d\dot{\mathbf{q}},$$

$$\delta = \mathbf{Q}(\mathbf{q})\beta_2 + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\beta_1 + \mathbf{g}(\mathbf{q}).$$

Postać sterowania (8.27) można wprost zastosować, aby uzyskać żadaną formę (8.19). Wówczas można wykorzystać metodę STR do uwzględnienia ograniczeń w prawie sterowania.

8.2.2 Badania symulacyjne

W badaniach symulacyjnych ponownie rozważono holonomiczny stacjonarny manipulator RTR, którego model przedstawiono w dodatku A.1. Dla sterownika kinematycznego (5.2) elementy równania (8.25) przyjmują następującą postać

$$\alpha_1(\mathbf{K}_k) = -\mathbf{L}^{-1}\mathbf{K}_k\mathbf{e}_x, \quad (8.28a)$$

$$\beta_1 = \mathbf{L}^{-1}(\dot{\mathbf{x}}_d - \mathbf{f}). \quad (8.28b)$$

Początkowy stan manipulatora zdefiniowano jako $\mathbf{q}_0 = \left(\frac{3\pi}{8} [\text{rad}] \quad 0,5 [\text{m}] \quad -\frac{\pi}{4} [\text{rad}]\right)^T$ oraz zerowe prędkości przegubowe $\dot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{0}$. Przyjęto założenie, że w kolejnych przegubach obowiązują następujące limity sił i momentów generowanych przez napędy

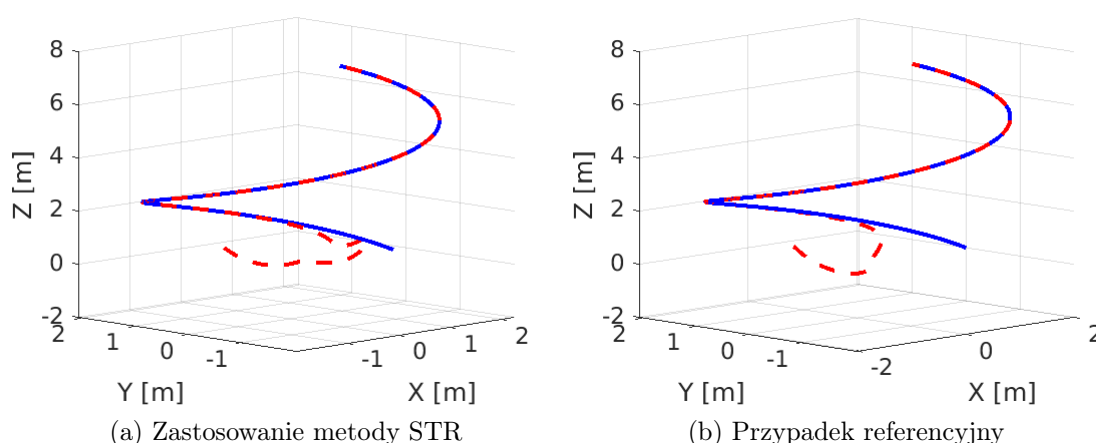
$$\mathbf{u}_{max} = (100 [\text{Nm}] \quad 450 [\text{N}] \quad 100 [\text{Nm}])^T, \quad (8.29a)$$

$$\mathbf{u}_{min} = -\mathbf{u}_{max}. \quad (8.29b)$$

W tym przypadku nie rozpatrywano ograniczeń na prędkości przegubowe manipulatora.

Ścieżka zadana została ponownie zdefiniowana jako linia śrubowa, opisana w dodatku B.2, z parametrami $\mathbf{a} = 2$ oraz $\mathbf{b} = 1$. Jako zadany profil prędkościowy wzdłuż ścieżki przyjęto $\dot{s}_d = 0,5 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$.

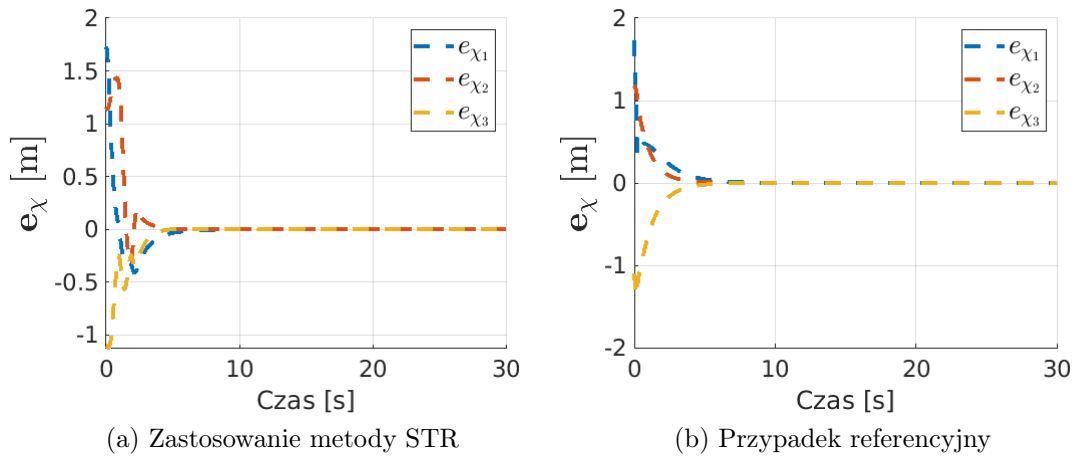
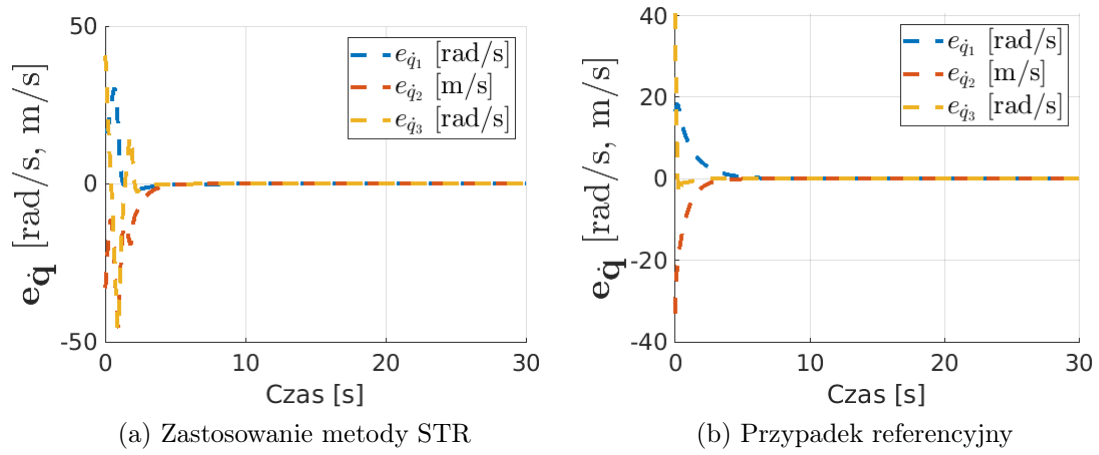
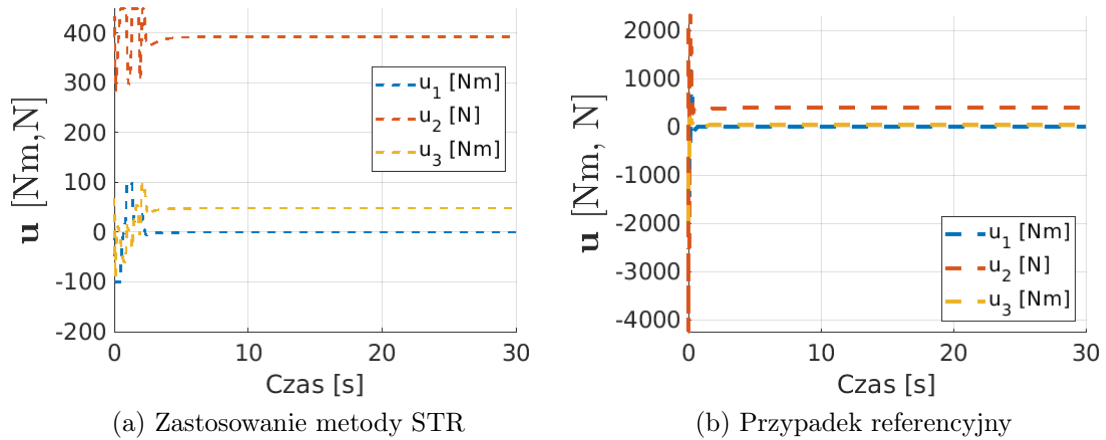
Poniżej przedstawiono wyniki badań symulacyjnych zaproponowanej metody. Rezultaty porównano z przypadkiem, gdy manipulator realizował to samo zadanie śledzenia ścieżki, lecz bez uwzględnienia ograniczeń na sterowanie. Na rys. 8.7 zestawiono ścieżki zrealizowane przez manipulator. Z przedstawionego porównania wyraźnie wynika, że ewolucja manipulatora w stanie przejściowym, a więc przed osiągnięciem ścieżki, jest odmienna. W przypadku zastosowania metody STR końcówka chwytaka zbliża się do ścieżki w punkcie znacznie bliższym jej początkowi, jednak ruch wciąż nie jest ustabilizowany. Warto podkreślić, że w stanie ustalonym, a więc po osiągnięciu ścieżki, nie zaobserwowano istotnych różnic w zachowaniu robota.

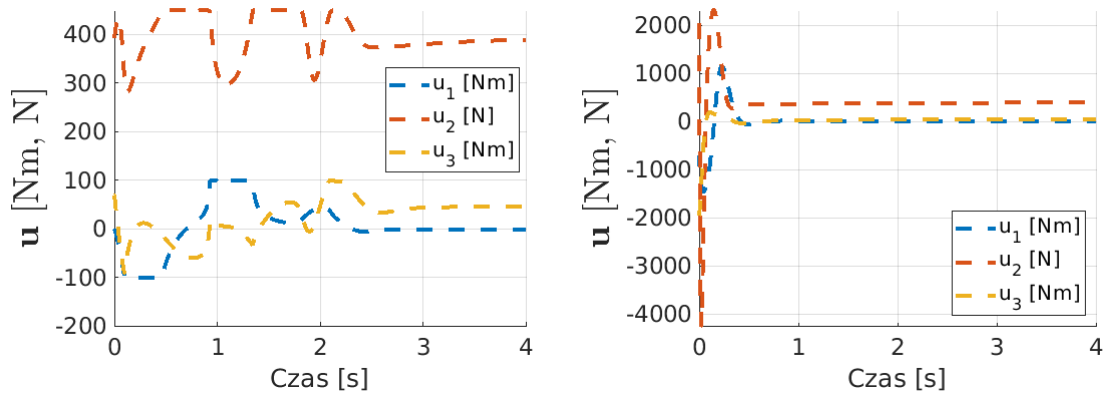


Rysunek 8.7: Porównanie ścieżki zadanej (linia niebieska ciągła) oraz ścieżki zrealizowanej przez manipulator (linia czerwona przerywana) – STR.

Te ogólne obserwacje potwierdzają przebiegi błędów śledzenia ścieżki (rys. 8.8) oraz błędów śledzenia profili prędkościowych (rys. 8.9). Z wykresów błędów wynika, że stabilizują się w podobnym momencie, a ewolucja układu w stanie ustalonym przebiega gładko wzdłuż ścieżki. Istotne różnice można zauważyć w stanie przejściowym. Choć w obu przypadkach błędy zachowują ten sam rząd wielkości, to jednak metoda STR wprowadza oscylacje w przebiegach błędów. Wiąże się to z faktem obniżenia wzmocnień sterownika, a przez to – zmniejszenia intensywności reakcji układu sterowania.

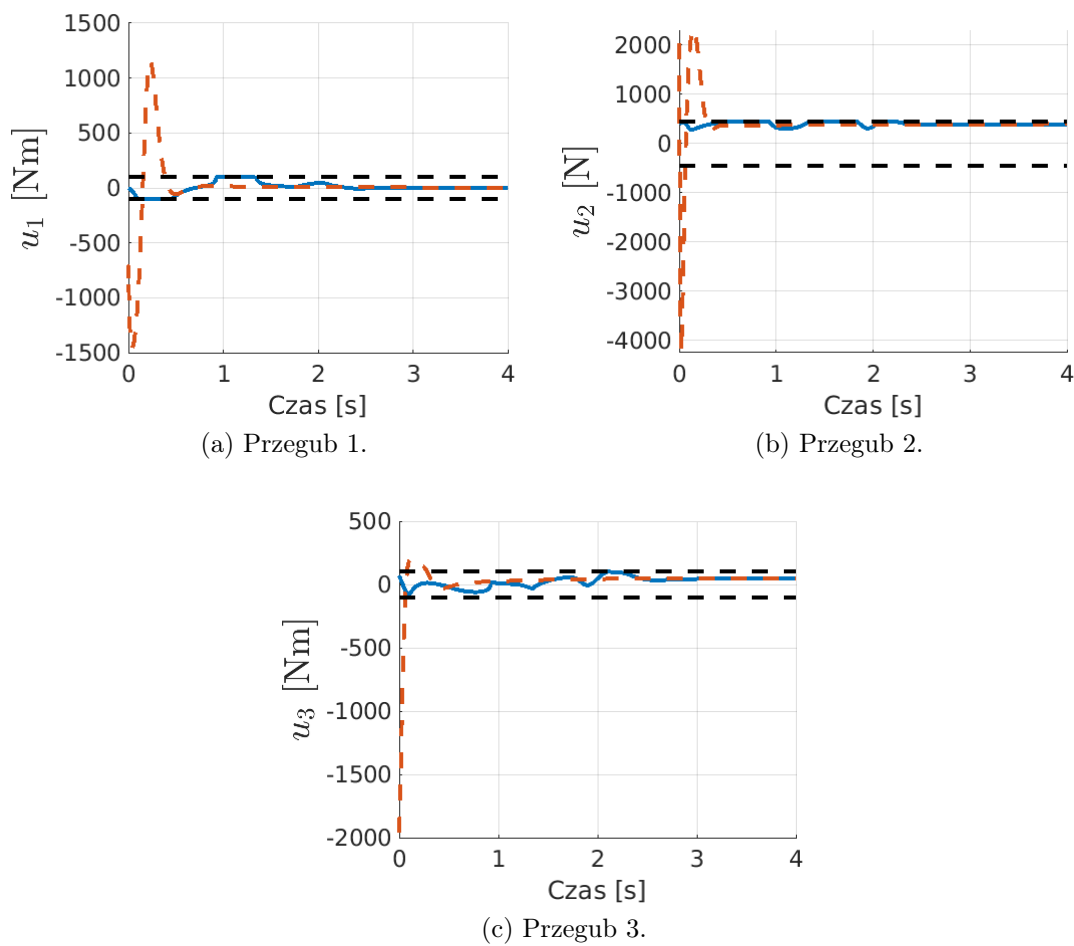
Ustalono już, że metoda STR nie wpływa na poprawność realizacji zadania śledzenia ścieżki. Jednakże w sposób istotny wpływa na generowane sterowania. Ogólne porównanie sygnałów wynikających z zastosowanego prawa sterowania przedstawiono na rys. 8.10. Wynika stąd ewidentnie, że zaproponowana metoda pozwoliła wyraźnie ograniczyć wysokie i wąskie piki występujące w przypadku referencyjnym. Wprawdzie stabilizacja wartości sygnału trwa nieco dłużej, lecz zachowane zostają wszystkie limity. Ponadto jest to zgodne z założeniami zadania śledzenia ścieżki, które nie narzuca reżimów czasowych.

Rysunek 8.8: Błędy śledzenia ścieżki e_x – STR.Rysunek 8.9: Błędy śledzenia profili prędkościowych e_q – STR.Rysunek 8.10: Wygenerowane sterowania u – STR.



(c) Zastosowanie metody STR – początek ruchu (d) Przypadek referencyjny – początek ruchu

Rysunek 8.10: Wygenerowane sterowania u – STR.



(a) Przegub 1.

(b) Przegub 2.

(c) Przegub 3.

Rysunek 8.11: Porównanie wygenerowanych sterowań u : zastosowana metoda STR (linia niebieska), przypadek referencyjny (linia czerwona), narzucone ograniczenia (linia czarna).

Przebiegi sterowań w poszczególnych przegubach zostały porównane i zestawione z przyjętymi ograniczeniami (8.29) na rys. 8.11. Przedmiotem zainteresowania są przebiegi sterowań w fazie przejściowej realizacji zadania. Widać wyraźnie, że metoda STR pozwala na zredukowanie sygnałów sterujących o rząd wielkości. Ponadto, zapobiega ona bardzo gwałtownym zmianom wartości sterowań. Wreszcie, gwarantuje zachowanie zdefiniowanych ograniczeń, co podkreślają przebiegi przedstawione na rys. 8.11.

8.3 Planowanie trajektorii zadanej względem układu lokalnego na ścieżce (PTZ)

8.3.1 Opis metody

Podczas realizacji zadania śledzenia ścieżki często żąda się, aby punkt prowadzenia robota miał zerowe położenie względem zadanego układu lokalnego stowarzyszonego z krzywą. W rezultacie możliwe jest dokładne odwzorowanie krzywej geometrycznej definiującej zadaną ścieżkę. Podobnie ma się rzecz ze względną orientacją, która najczęściej zadawana jest jako wartość stała, np. w zadaniu chwytania obiektu poprzez zamknięcie szczęk chwytaka.

Pośród różnorodnych aplikacji robotycznych nietrudno znaleźć przykłady, w których początkowy stan robota względem ścieżki jest różny od stanu żadanego, $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{x}_d$. W szczególności, punkt prowadzenia robota może po prostu znajdować się poza ścieżką w chwili początkowej. Podstawowe podejście, które opiera się na zadaniu stałego stanu żadanego względem ścieżki $\mathbf{x}_d = \text{const}$, prowadzi wówczas do skokowej zmiany stanu robota względem ścieżki. To z kolei może skutkować generowaniem bardzo wysokich wartości momentów i sił sterujących. Choć takie podejście umożliwia szybkie osiągnięcie zadanej ścieżki, to jednak w fazie przejściowej może być źródłem sterowań o wartościach niemożliwych do zrealizowania na rzeczywistym obiekcie.

W celu uniknięcia gwałtownej reakcji systemu w fazie przejściowej zadania, gdy robot dopiero osiąga zadaną ścieżkę, proponuje się ściśle zdefiniowanie zachowania względem układu lokalnego stowarzyszonego z krzywą. Precyzyjne określenie trajektorii dojścia robota do zadanej ścieżki pozwoli na uniknięcie skokowej zmiany stanu obiektu względem krzywej. Zamiast tego można wymusić zmianę ciągłą przebiegającą zgodnie z wielomianową trajektorią zależną od czasu. Taki wielomian powinien gładko przeprowadzić robota ze stanu początkowego do zadanej ścieżki, a więc do żadanego stanu względem układu lokalnego na ścieżce $\mathbf{x}_d$. Czas trwania ruchu t_f należy dobrać na podstawie znanych ograniczeń obiektu. Im dłuższy czas zostanie przewidziany na osiągnięcie ścieżki, tym mniej gwałtowna będzie reakcja systemu. W szczególności, metodę PTZ można wykorzystać do osiągnięcia punktu początkowego ścieżki przed rozpoczęciem docelowego manewru. Wówczas tempo dojścia do ścieżki nie powinno być kluczowe.

Należy podkreślić, że metoda PTZ nie pozwala na ilościowe uwzględnienie ograniczeń na sterowanie wyrażonych warunkiem (8.1), lecz pozwala uniknąć nagłych zmian stanu, a dzięki temu redukuje potencjalne wąskie i wysokie piki generowanych sterowań.

Jednakże, aby zagwarantować brak skokowych zmian sygnałów sterujących, nie wystarczy zdefiniowanie zadanej trajektorii położenia i orientacji robota względem ścieżki. Należy również uwzględnić trajektorie pochodnych: prędkości i przyspieszeń obiektu w układzie lokalnym stowarzyszonym z krzywą. Owe trajektorie również powinny przepro-

wadzić układ ze stanu początkowego do stanu żadanego. W związku z tym wielomian γ definiujący zachowanie robota względem ścieżki w stanie przejściowym jest określony jako

$$\gamma(t) = \mathbf{c}_5 t^5 + \mathbf{c}_4 t^4 + \mathbf{c}_3 t^3 + \mathbf{c}_2 t^2 + \mathbf{c}_1 t + \mathbf{c}_0, \quad (8.30a)$$

$$\dot{\gamma}(t) = 5\mathbf{c}_5 t^4 + 4\mathbf{c}_4 t^3 + 3\mathbf{c}_3 t^2 + 2\mathbf{c}_2 t + \mathbf{c}_1, \quad (8.30b)$$

$$\ddot{\gamma}(t) = 20\mathbf{c}_5 t^3 + 12\mathbf{c}_4 t^2 + 6\mathbf{c}_3 t + 2\mathbf{c}_2, \quad (8.30c)$$

przy czym trajektorie zadane są zdefiniowane w dziedzinie czasu $t \in [0; t_f]$. Zakłada się bowiem, że po czasie t_f robot osiągnie żądany stan $\mathbf{x}_d$, a zadaniem sterownika będzie utrzymywanie tej wartości.

Dla tak zdefiniowanego zadania określone są warunki brzegowe. Warunki początkowe wynikają z konfiguracji robota oraz jego postury względem układu lokalnego umieszczonego w punkcie początkowym ścieżki. Warunki końcowe to żądany stan robota względem ścieżki. Zachodzą zatem zależności

$$\gamma(0) = \mathbf{x}_0, \quad \gamma(t_f) = \mathbf{x}_d, \quad (8.31a)$$

$$\dot{\gamma}(0) = \dot{\mathbf{x}}_0, \quad \dot{\gamma}(t_f) = \dot{\mathbf{x}}_d, \quad (8.31b)$$

$$\ddot{\gamma}(0) = \ddot{\mathbf{x}}_0, \quad \ddot{\gamma}(t_f) = \ddot{\mathbf{x}}_d. \quad (8.31c)$$

Na podstawie definicji wielomianu (8.30) oraz znanych wartości warunków brzegowych (8.31) można zdefiniować następujący układ równań w formie macierzowej

$$\Xi_x = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0^T \\ \mathbf{x}_d^T \\ \dot{\mathbf{x}}_0^T \\ \dot{\mathbf{x}}_d^T \\ \ddot{\mathbf{x}}_0^T \\ \ddot{\mathbf{x}}_d^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ t_f^5 & t_f^4 & t_f^3 & t_f^2 & t_f & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5t_f^4 & 4t_f^3 & 3t_f^2 & 2t_f & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 20t_f^3 & 12t_f^2 & 6t_f & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_5^T \\ \mathbf{c}_4^T \\ \mathbf{c}_3^T \\ \mathbf{c}_2^T \\ \mathbf{c}_1^T \\ \mathbf{c}_0^T \end{bmatrix} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{C}_w. \quad (8.32)$$

Z równania (8.32) można wyznaczyć wartości współczynników $\mathbf{C}_w$ wielomianu γ , które gwarantują ciągłe przejście obiektu sterowania ze stanu początkowego do żadanego stanu względem ścieżki w czasie t_f

$$\mathbf{C}_w = \mathbf{T}^{-1} \Xi_x. \quad (8.33)$$

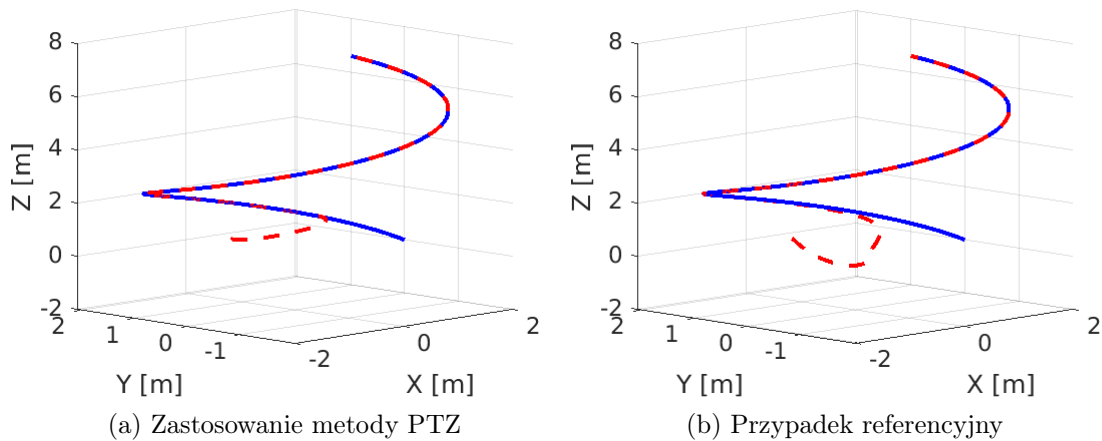
Problem znalezienia rozwiązania równania (8.33) sprowadza się zatem do:

- określenia czasu dojścia do ścieżki przy uwzględnieniu możliwości napędów oraz warunków otoczenia (np. ryzyka kolizji);
- określenia warunków brzegowych:
 - warunki początkowe wynikają ze stanu początkowego robota względem ścieżki oraz jego pochodnych po czasie. Można je wyznaczyć, bazując na równaniach opisujących obiekt sterowania względem ścieżki przedstawionych w rozdziale 3,
 - warunki końcowe są zdefiniowane przez żądany stan robota względem układu stowarzyszonego z krzywą.

8.3.2 Badania symulacyjne

Do analizy numerycznej opisanej metody PTZ znów wykorzystano manipulator RTR, którego równania przedstawiono w dodatku A.1. Jako ścieżkę zadaną wykorzystano linię śrubową, daną równaniami w dodatku B.2, z parametrami $a = 2$ oraz $b = 1$. Stan początkowy manipulatora został zdefiniowany jako $\mathbf{q}_0 = (\frac{3\pi}{8} [\text{rad}] \ 0,5 [\text{m}] \ -\frac{\pi}{4} [\text{rad}])^T$ przy zerowych prędkościach przegubowych, $\dot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{0}$. Zadano stały profil prędkościowy wzdłuż ścieżki $\dot{s}_d = 0,5 [\frac{\text{m}}{\text{s}}]$, a także określono czas dojścia do ścieżki równy $t_f = 3 [\text{s}]$. Poniżej przedstawiono rezultaty otrzymane dla badań symulacyjnych przy użyciu metody PTZ. Wyniki porównano z przypadkiem referencyjnym, gdy nie zastosowano żadnych ograniczeń na sterowanie.

Na rys. 8.12 porównano ścieżkę zadaną oraz ścieżkę zrealizowaną przez manipulator w dwóch przypadkach: przy wykorzystaniu metody PTZ oraz bez niej. Z rysunku jasno wynika, że po osiągnięciu ścieżki manipulator realizuje ją poprawnie. Wyraźną różnicę można zaobserwować w fazie dojścia robota do ścieżki. Należy podkreślić, że zaplanowanie trajektorii zadanej pozwoliło uzyskać płynniejszy ruch manipulatora. Ponadto, osiągnął on ścieżkę bliżej jej punktu początkowego i w ściśle określonym czasie.

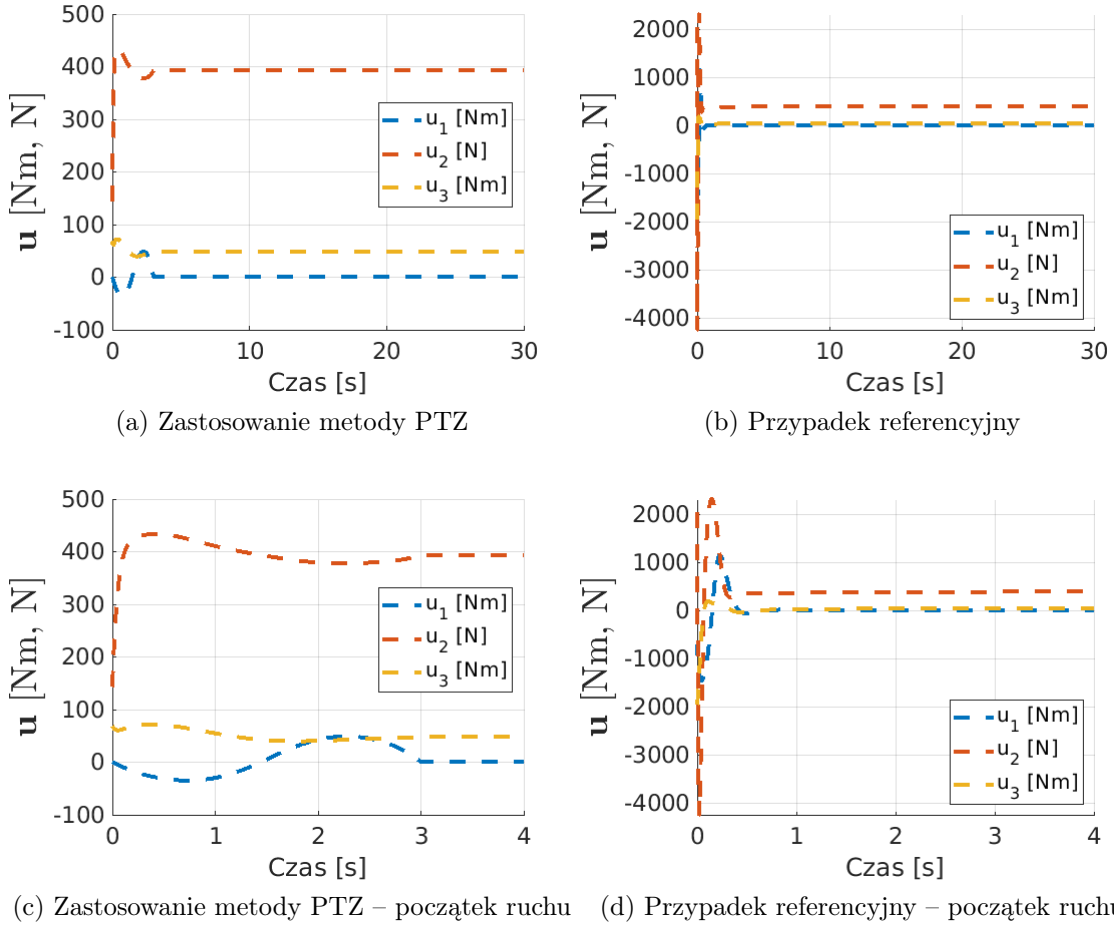


Rysunek 8.12: Porównanie ścieżki zadanej (linia niebieska ciągła) oraz ścieżki zrealizowanej przez manipulator (linia czerwona przerywana) – PTZ.

Wyraźną zaletę zaproponowanej metody można zauważyć na rys. 8.13, gdzie przedstawiono wygenerowane sterowania. Widać wyraźnie, że realizacja zaplanowanej trajektorii pozwoliła wydatnie zmniejszyć wartość sygnałów sterujących. W przypadku referencyjnym na początku ruchu robota pojawiły się bardzo wysokie i wąskie piki sterowań, które mogłyby uszkodzić układ. Wykorzystanie trajektorii zadanej względem układu lokalnego na ścieżce pozwoliło zniwelować ten problem, choć poziom generowanych sterowań nie był ograniczony ilościowo.

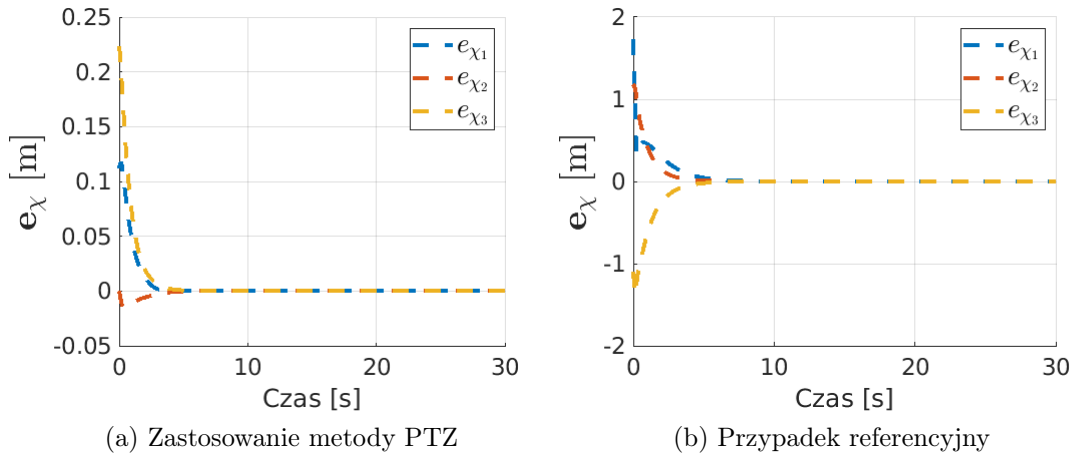
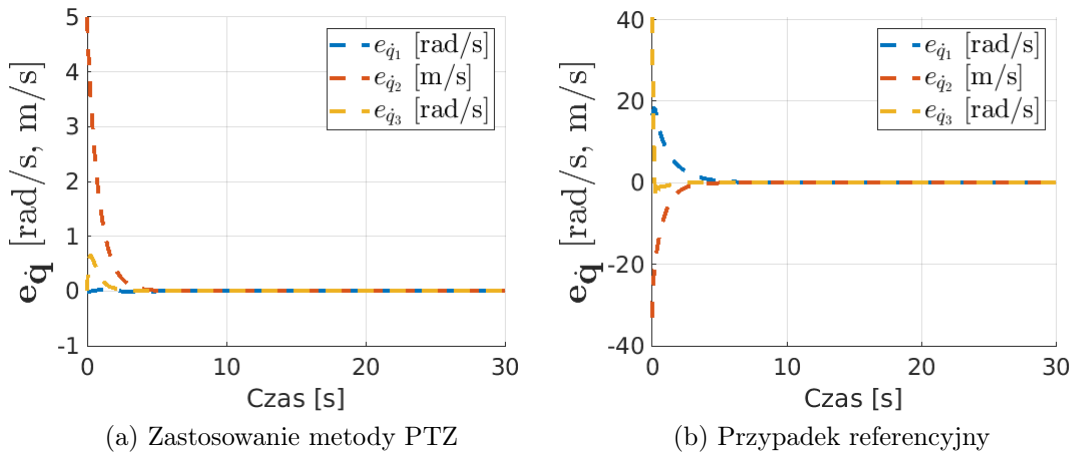
Na rys. 8.14 oraz 8.15 przedstawiono odpowiednio błędy śledzenia ścieżki oraz błędy śledzenia profili prędkościowych. Zastosowanie metody PTZ pozwoliło na wyraźną redukcję błędów, dzięki czemu ograniczono sygnały sterujące. W rezultacie osiągnięto bardziej płynny i gładki ruch manipulatora dochodzącego do zadanej ścieżki.

Zaplanowaną trajektorię zadaną względem układu lokalnego na ścieżce, wraz z jej pochodnymi, przedstawiono na rys. 8.16. Przedstawione wykresy pokazują, w jaki sposób

Rysunek 8.13: Wygenerowane sterowania $\mathbf{u}$ – PTZ.

stan manipulatora względem ścieżki został gładko przeprowadzony ze stanu początkowego do stanu docelowego. W tym przypadku zażądano, by końcówka chwytaka osiągnęła położenie układu lokalnego na ścieżce i poruszała się zgodnie z zadanym profilem prędkościowym wzdłuż ścieżki. Stąd wszystkie docelowe wartości były zerowe. Zaplanowane trajektorie wielomianowe przeprowadziły gładko układ ze stanu początkowego do docelowego w trakcie zadanego czasu 3 [s]. W razie konieczności można dowolnie zwiększać ten parametr. Należy jednak podkreślić, że może to spowodować znacznie późniejsze osiągnięcie ścieżki zadanej, co zazwyczaj jest zjawiskiem niekorzystnym. Zmniejszanie czasu dojścia robota do ścieżki będzie z kolei prowadziło do coraz bardziej gwałtownych reakcji w stanie początkowym i generowania coraz większych sterowań. Po osiągnięciu zadanego stanu robota względem ścieżki wartość docelowa $\chi_d = \text{const}$ jest utrzymywana jako wartość zadana wykorzystana w prawie sterowania (5.2).

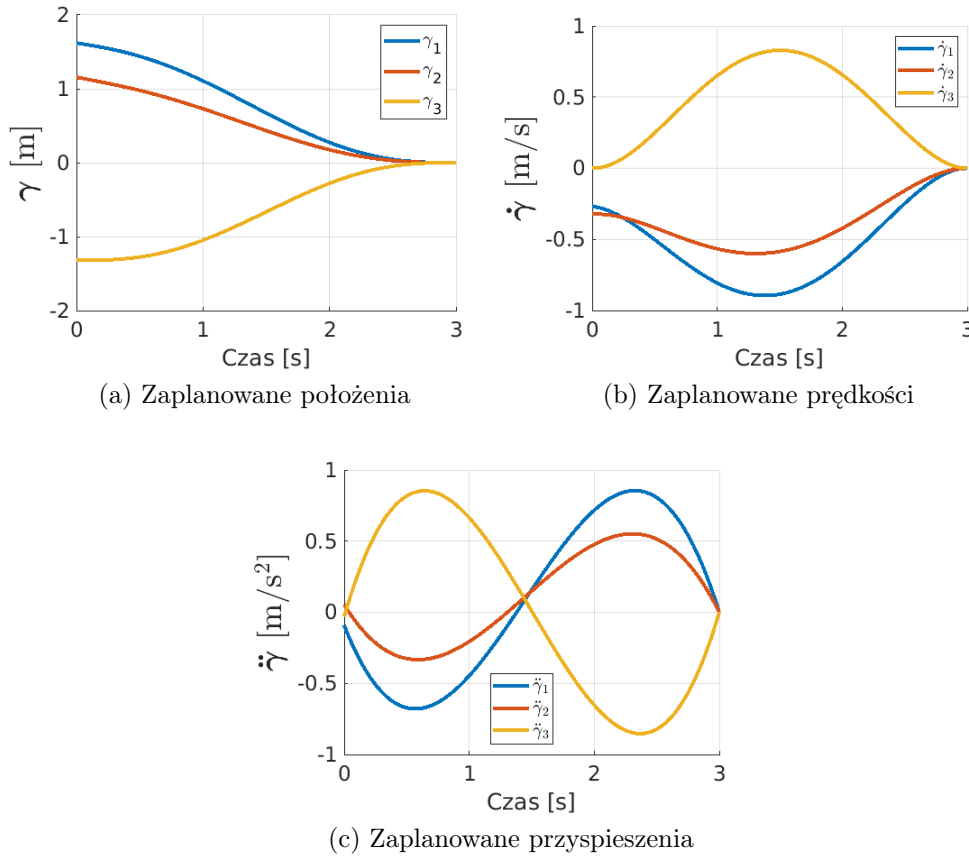
Warto podkreślić, że metodę PTZ zastosowano także dla manipulatora redundantnego w pracy [37]. Wówczas rozważono nie tylko położenie, ale również orientację końcówki chwytaka względem układu lokalnego na ścieżce. Metoda została zweryfikowana symulacyjnie oraz eksperymentalnie. Otrzymane wyniki pokazują, że w ten sposób można skutecznie zniwelować gwałtowność reakcji układu sterowania w fazie dojścia do ścieżki.

Rysunek 8.14: Błędy śledzenia ścieżki $\mathbf{e}_\chi$ – PTZ.Rysunek 8.15: Błędy śledzenia profili prędkościowych $\mathbf{e}_q$ – PTZ.

8.4 Podsumowanie

W niniejszym rozdziale przedstawiono metody pozwalające ograniczyć momenty wynikające z prawa sterowania, które pozwalają realizować zadanie śledzenia ścieżki. Przedstawione metody w dużym stopniu bazują na ogólnej właściwości tego rodzaju zadania, a więc braku zależności czasowych. Przy śledzeniu ścieżki nie narzuca się bowiem reżimów czasowych na obiekt sterowania, a zadana krzywa geometryczna może być zrealizowana w dowolnym czasie. Zaproponowano następujące metody:

1. Ograniczenie profilu prędkościowego wzdłuż ścieżki (OPP) – metoda opiera się na prostej idei redukcji zadanego profilu prędkościowego wzdłuż ścieżki, a przez to zwalnianiu ewolucji układu lokalnego stowarzyszonego z zadaną krzywą. Dzięki temu można wymusić wolniejsze ruchy robota, jeśli pierwotne wymagania wiążą się z koniecznością przekroczenia fizycznych ograniczeń urządzenia.
2. Skalowanie trajektorii robota (STR) – metoda zakłada adaptacyjne zmniejszanie wzmacnień sterownika, zarówno na poziomie kinematycznym, jak i dynamicznym,



Rysunek 8.16: Zaplanowana trajektoria zadana $\gamma(t)$ względem układu lokalnego na ścieżce w stanie przejściowym wraz z pochodnymi.

jeśli generowane sterowania przekraczają dopuszczalne limity. Metoda jest szczególnie przydatna w fazie dojścia do ścieżki. Pozwala zapobiec gwałtownym reakcjom robota w stanie przejściowym podczas realizacji zadania śledzenia ścieżki.

3. Planowanie trajektorii zadanej względem układu lokalnego na ścieżce (PTZ) – w tym przypadku ograniczenia nie są uwzględnione ilościowo, lecz jakościowo. Metoda zakłada zdefiniowanie wprost zachowania robota względem układu na ścieżce w taki sposób, aby zapobiec gwałtownym reakcjom niezależnie od początkowego stanu obiektu sterowania względem ścieżki.

Jak pokazały badania symulacyjne przedstawione w tym rozdziale, każda z metod pozwala ograniczyć sygnały generowane przez sterownik. Stanowią one skuteczną odpowiedź na problem ograniczenia momentów i sił sterujących zarówno w fazie dojścia do zadanej ścieżki, jak i podczas realizowania ruchu wzdłuż zadanej krzywej. Wszystkie są jednak również obarczone pewnymi wadami lub założeniami koniecznymi do spełnienia dla poprawnej realizacji metody. Zalety oraz wady poszczególnych metod zostały zestawione w tabeli 8.1. To podsumowanie może posłużyć do łatwego określenia, czy w danej aplikacji zastosowanie wybranej metody będzie możliwe. Ponadto, może służyć weryfikacji, czy wybrany sposób będzie stanowił odpowiednią odpowiedź na problemy związane z fizycznymi ograniczeniami napędów, które zostały napotkane przy realizacji zadania ścieżki.

Tabela 8.1: Porównanie metod ograniczających sygnały sterujące w zadaniu śledzenia ścieżki.

Metoda	Zalety	Wady
OPP (rozdział 8.1)	+ Pozwala zachować ograniczenia na sterowanie dane w postaci (8.1). + Pozwala zachować ograniczenia na prędkości w przestrzeni konfiguracyjnej dane w postaci (8.10). + Można ją stosować w stanie ustalonym, gdy robot porusza się wzdłuż ścieżki. + Skalowanie profilu prędkościowego wzdłuż ścieżki nie wpływa na analizę stabilności algorytmu.	– Wymaga uwzględnienia przyspieszeń krzywoliniowych w definicji zadania. – Dopuszcza nieciągłą zmianę przyspieszeń referencyjnych*. – Nie gwarantuje zabezpieczenia w stanie przejściowym przy dużym błędzie w stanie początkowym. – Nie można uzyskać rozwiązania, gdy ograniczenia są zdegenerowane, tzn. $\ddot{s}_{min} > \ddot{s}_{max}$.
STR (rozdział 8.2)	+ Pozwala zachować ograniczenia na sterowanie dane w postaci (8.1). + Można stosować w fazie przejściowej (dojście robota do ścieżki). + Zachowuje stabilność algorytmu przy spełnieniu warunków dla współczynnika skalującego, tj. $k(t) \in (0; 1]$.	– Skalowane wyrazy zależą od błędów śledzenia, więc w stanie ustalonym metoda jest nieskuteczna. – Wymaga spełnienia warunku istnienia rozwiązania (8.23). – Nieciągła zmiana współczynnika skalującego może wprowadzać nieciągłości w sygnałach sterujących.
PTZ (rozdział 8.3)	+ Pozwala na gładkie dojście robota do ścieżki (w szczególności do punktu początkowego ścieżki) z dowolnych warunków początkowych. + Nie wymusza skokowej zmiany stanu względem ścieżki. + Ogranicza sterowania w stanie przejściowym. + Pozwala na jawne określenie czasu, po którym robot osiąga ścieżkę.	– Nie uwzględnia wprost limitów na sterowania w postaci (8.1). – Opóźnia osiągnięcie zadanej ścieżki. – Wymaga precyzyjnego określenia stanu początkowego robota względem ścieżki.

*Wynikająca z tego faktu nieciągła zmiana sterowań powinna jednak objawiać się jedynie zmniejszeniem co do wartości bezwzględnej amplitudy sygnałów sterujących.

Rozdział 9

Studium przypadku: manewr przechwycenia obiektu w ruchu

W wielu współczesnych aplikacjach robotycznych podstawowym zadaniem jest wykonanie autonomicznego chwytu obiektów, które poruszają się względem robota. W fabrykach manipulatory często pobierają elementy z poruszającego się przenośnika taśmowego lub uczestniczą w procesach montażowych, podając i odbierając narzędzia czy materiały we współpracy z ludźmi i innymi urządzeniami. Roboty coraz powszechniej funkcjonują również jako asystenci życia codziennego, pomagając ludziom, w szczególności niepełnosprawnym. Problemem nabierającym coraz większego znaczenia jest także chwytanie obiektów na orbicie okołoziemskiej [72, 98]. Chwytanie kosmicznych śmieci lub satelitów stanowi jedno z podstawowych wyzwań robotyki kosmicznej.

Wszystkie wymienione przypadki są przykładami problemu przechwytywania obiektów [21]. To zadanie jest bardzo złożone, a w celu jego rozwiązania należy uwzględnić wiele aspektów, wśród których najważniejsze stanowią:

- przewidywanie ruchu obiektu do przechwycenia;
- znalezienie optymalnego punktu spotkania celu oraz końcówki chwytaka manipulatora;
- wykonanie ruchu manipulatora tak, aby końcówka chwytaka w określonym czasie osiągnęła punkt spotkania, przyjmując odpowiednią orientację względem obiektu.

Złożoność zagadnienia wzrasta, gdy cel nie pozostaje w spoczynku, lecz jest dynamiczny i przemieszcza się względem robota. Z tego względu na przestrzeni lat powstało wiele rozwiązań, które odnoszą się do postawionego problemu.

9.1 Problem przechwycenia obiektu – przegląd rozwiązań

Podstawową metodologią pozwalającą na rozwiązanie problemu przechwytywania obiektu jest podejście Przewiduj, Planuj i Wykonaj (PPE – ang. *Prediction, Planning and Execution*) zaproponowane w pracy [111]. Każdy aspekt w tym podejściu był realizowany przez osobny moduł. W przypadku zmiennego ruchu obiektu należy uwzględnić moduł

aktywny, który został dodatkowo zaproponowany w pracy [21] pod nazwą APPE. W tym rozwiązaniu należy ciągle na nowo poszukiwać najlepszego punktu spotkania lub modyfikować *online* zadaną trajektorię wykonywaną przez manipulator.

Te ogólne metodologie znalazły swoje odzwierciedlenie w konkretnych aplikacjach. Wiele z nich było inspirowanych sportem i grami zespołowymi, m. in. tenisem stołowym [88] czy piłką siatkową [138]. Uwypukliły one fakt, że rozwiązanie tego zadania jest często obarczone założeniami dotyczącymi ruchu obiektu do przechwycenia. Trajektorie obiektów (np. piłek) w różnorodnych sportach są często powtarzalne, dzięki czemu nieco łatwiej je sklasyfikować. To z kolei przekłada się na pewien szczególny zestaw ruchów, który należy wykonać do zrealizowania przechwycenia przemieszczającego się obiektu.

W ostatnich latach pojawiło się jednak wiele metod, które pozwalają realizować zadanie w warunkach zmiennych i trudnych do ustalenia *a priori*. Zaproponowano różnorodne podejścia do przewidywania ruchu obiektu oraz sterowania robotami. W pracy [2] zastosowano filtr Kalmana do przewidywania ruchu obiektu w długim horyzoncie czasowym. Następnie estymowany stan wykorzystywano do planowania sterowania optymalnego w zależności od czasu ruchu, odległości, odpowiedniego ułożenia obiektu do chwytu, a także ograniczeń na przyspieszenia. Z kolei autorzy artykułu [74] zaproponowali dwa algorytmy planowania:

- lokalny: do wygładzania ruchu śledzenia obiektu, a także
- globalny: do wymuszania zmian w ruchu robota, aby zmienić zaplanowaną posturę końcówki chwytaka, gdy dotychczasowa stała się nieosiągalna.

W pracy [74] została przedstawiona metoda dynamicznego przełączania się pomiędzy tymi algorytmami. Ponadto, w artykule [129] zastosowano wielomiany piątego stopnia do planowania ruchu manipulatora w przestrzeni przegubowej tak, aby spełniał ograniczenia kinematyczne. W ten sposób zmniejszono wpływ ruchu manipulatora na współczynnik sukcesu przechwytywania obiektów. Odmienne podejście przedstawiono w pracy [137], gdzie zdekomponowano ruch obiektu w przestrzeni trójwymiarowej i w każdym wymiarze planowano przyspieszenia manipulatora tak, aby podążał za śledzonym celem. Natomiast w artykule [63] zaproponowano strategię przechwytywania obiektów latających w oparciu o znajdowanie osiągalnej konfiguracji w sposób probabilistyczny.

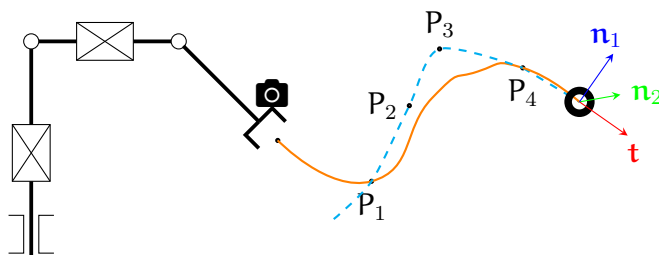
Do rozwiązania problemu przechwycenia obiektu zostały zaaplikowane również najnowsze metody sztucznej inteligencji i uczenia maszynowego. Zostały one wykorzystane w różnorodnych kontekstach. W pracy [131] zaproponowano sieć neuronową opartą o LSTM (ang. *Long Short-Term Memory*) do określania pozycji celu, a konwolucyjna sieć neuronowa została użyta do przewidywania punktu spotkania. Ponadto, techniki uczenia maszynowego zostały wykorzystane do wyboru punktu przechwycenia obiektu w artykule [9], podczas gdy algorytmy oparte o uczenie ze wzmocnieniem zastosowano do wykonania ruchu manipulatora w fazie przed przechwyceniem w pracy [134].

Nieco odmienne podejście do śledzenia obiektów, które wykorzystuje dane z systemów wizyjnych do sterowania robotem, jest nazywane w literaturze *visual servoing* [112]. Analiza obrazów może pozwolić na określenie pozycji obiektu do przechwycenia lub określenia prędkości, które powinien realizować manipulator. To podejście jest również wieloaspektowe [17]: należy określić sposób ekstrakcji cech z obrazów, a także dobrać odpowiednie strategie sterowania. W tym rozwiązaniu ważne jest również precyzyjne przewidywanie pozycji obiektu do przechwycenia, a przykładowe metody zostały wskazane w pracach [3, 50].

9.2 Zastosowanie parametryzacji krzywoliniowej do przechwycenia obiektu

Z powyższych rozważań wynika, że problem przechwycenia obiektów jest zadaniem trudnym i wymaga zastosowania odpowiednich rozwiązań na poszczególnych etapach realizacji. Warto zauważyć, że manewr w fazie poprzedzającej przejście obiektu można zrealizować za pomocą algorytmów proponowanych w niniejszej rozprawie. Bazują one bowiem na opisie robota względem nieinercyjnego układu odniesienia, który można wprost utożsamić z obiektem poruszającym się względem obiektu sterowania.

Dotychczas rozważano podejście, w którym zadana jest ścieżka, a wzdłuż niej porusza się wirtualny lokalny układ współrzędnych wynikający z równań parametryzacji krzywoliniowej. W przypadku zadania przechwycenia obiektu mamy do czynienia z podejściem odwrotnym: cel rzeczywisty porusza się wzdłuż nieznanej krzywej. Jeśli obiekt zostanie utożsamiony z układem lokalnym na ścieżce, to proponowany algorytm śledzenia ścieżki oparty o parametryzację krzywoliniową można zastosować do sterowania robotem w fazie przed przechwytem. Schemat wizualizujący proponowane podejście do problemu został przedstawiony na rys. 9.1. Na schemacie ruch obiektu do przechwycenia został zaznaczony



Rysunek 9.1: Schemat rozwiązania problemu w fazie przed przechwytem.

za pomocą błękitnej przerywanej linii. Kolejne pozycje celu (na schemacie oznaczone jako P_i , $i \in \{1, 2, 3, 4\}$) są mierzone za pomocą odpowiednich czujników, np. systemu wizyjnego umieszczonego na manipulatorze. Na ich podstawie definiowana jest ścieżka zadana, którą oznaczono za pomocą pomarańczowej linii ciągłej. Ruch manipulatora wzdłuż zadanej ścieżki można zrealizować za pomocą algorytmów zaproponowanych w niniejszej pracy. Warto zauważyć, że ścieżka nie musi idealnie odwzorowywać ruchu obiektu do przechwycenia. Wymaga się jedynie, aby w pewnym momencie zbiegała do krzywej, wzdłuż której porusza się cel do przechwyty. Tym samym układ lokalny ewoluujący wzdłuż ścieżki powinien dążyć do układu lokalnego zaczepionego w punkcie chwytu na poruszającym się obiekcie, a na końcu układy te powinny być nierozróżnialne.

Zaproponowane podejście do realizacji manewru w fazie przed przechwytem niesie ze sobą pewne korzyści. Przede wszystkim pozwala na swobodne kształtowanie ruchu manipulatora. Zadana ścieżka może być bowiem kształtowana dowolnie w zależności od wymagań zadania bądź ograniczeń robota. Dodatkowo, modyfikowanie zadanej ścieżki w trakcie wykonywania manewru umożliwia reakcję na dynamiczne zmiany w ruchu obiektu śledzonego. Ponadto, utożsamienie układów lokalnych stowarzyszonych z krzywą oraz z obiektem do przechwycenia umożliwia utrzymywanie odpowiedniej postury podczas zamykania szczęk chwytaka.

Taka definicja zadania jest oczywiście ograniczona pewnymi założeniami. Przede wszystkim obiekt poruszający się nie może opuścić przestrzeni roboczej manipulatora, gdyż wów-

czas realizacja ścieżki nie będzie możliwa. Ponadto, korzystnym jest posiadanie modelu ruchu obiektu lub narzędzi, które pozwalają przewidywać ten ruch w trakcie realizacji manewru. Wreszcie, planowanie zadanej ścieżki i jej modyfikacje nie są aspektami trywialnymi. Wymagają one spełnienia kryteriów ciągłości krzywej wynikających z definicji parametryzacji krzywoliniowych, zwłaszcza w punktach sklejania kolejnych fragmentów ścieżki, o ile takie występują.

W niniejszym rozdziale przedstawiono studium przypadku, w którym analizowano zastosowanie algorytmów śledzenia ścieżki opartych o parametryzację krzywoliniową do wykonania manewru w fazie poprzedzającej chwyt obiektu dynamicznego. W kolejnych sekcjach przedstawiono szczegółowe założenia przyjęte do realizacji zadania, a także wyniki badań symulacyjnych. Pozwala to wyeksponować korzyści płynące z zaproponowanego podejścia, a także podkreślić aspekty wymagające dalszych badań.

9.3 Opis analizowanego studium przypadku

Przedmiotem badań jest scenariusz, w którym zadaniem manipulatora jest przechwycenie obiektu poruszającego się względem robota. Analizie zostanie poddana faza przed przechwyceniem celu, a więc podejście manipulatora do obiektu i utrzymywanie położenia w małej odległości od obiektu. Do podstawowych elementów wykorzystanych w analizie należą:

1. obiekt sterowania – rozważono manipulator mobilny typu (nh, h) , którego równania zostały przedstawione w dodatku A.3;
2. obiekt do przechwycenia – przyjęto, że ciało do przechwycenia jest bryłą sztywną. W zadaniu istotne jest jedynie położenie miejsca chwytu, w którym zaczepiono układ lokalny stowarzyszony z obiektem. Zakłada się, że cel porusza się po pewnej krzywej ze stałą prędkością styczną. W badaniach uwzględniono ruch obiektu po okręgu (przypadek płaski linii śrubowej zdefiniowanej w dodatku B.2, czyli dla $\mathbf{b} = 0$ w równaniu (B.4)) lub po krzywej Lissajous, której równania dane są w dodatku B.3;
3. zadana ścieżka – założono, że żądana ścieżka jest modelowana w zadaniu jako krzywa η^{3D} -sklejana, której szczegółowe równania przedstawiono w dodatku B.7. Krzywa tego rodzaju charakteryzuje się dużą łatwością w sklejanu kolejnych elementów, dzięki definicji na podstawie warunków brzegowych [120]. Ta własność jest szczególnie istotna dla definiowania kolejnych etapów zadanej ścieżki na podstawie zmierzonego położenia obiektu do przechwycenia. Aktualizacje krzywej będą wykonywane tak, aby zachować ciągłość różniczkową, co jest istotne dla zastosowanego prawa sterowania;
4. układ sterowania – do realizacji ścieżki uzyskanej na podstawie pomiarów poruszającego się obiektu przez nieholonomiczny manipulator mobilny zastosowano prawo sterowania zaproponowane w rozdziale 6. Na poziomie kinematycznym wykorzystano sterownik oparty o nieortogonalną parametryzację Bishopa zdefiniowany w Twierdzeniu 6, natomiast na poziomie dynamicznym – sterownik bazujący na pełnej wiedzy o modelu zdefiniowany w Twierdzeniu 7. Warto podkreślić, że ogólna konstrukcja układu sterowania pozostała zgodna z ideą zaproponowaną w rozdziale 4. Jediną wprowadzoną modyfikacją jest fakt, że żądana ścieżka nie jest zadana

a priori przed wykonaniem manewru, lecz jest aktualizowana w trakcie jego realizacji na podstawie pomiarów położenia celu do przechwycenia.

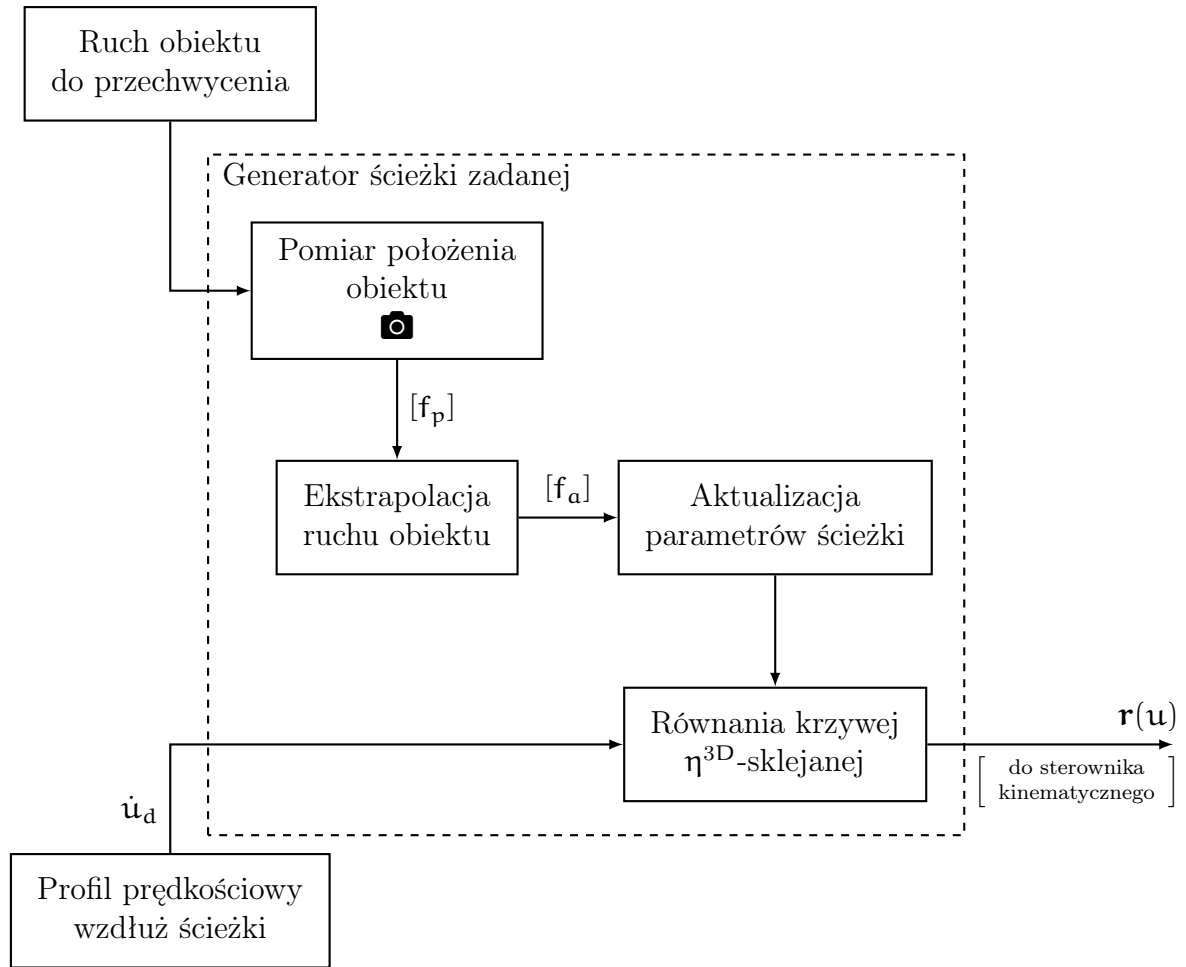
W niniejszym rozdziale przedstawiono szczegółową analizę dwóch podstawowych elementów, które stanowią wkład do zaproponowanej realizacji zadania w fazie przed przechwytem obiektu poruszającego się względem robota:

- konstrukcję generatora ścieżki zadanej w algorytmie śledzenia ścieżki;
- sposób modyfikowania ścieżki zadanej i sklejania jej kolejnych fragmentów.

Dla obu aspektów podano konieczne wymagania do poprawnej realizacji zadania oraz omówiono uproszczenia przyjęte na potrzeby badań symulacyjnych.

Generator ścieżki zadanej. Ogólna struktura układu sterowania wykorzystana do realizacji zadania jest niemal identyczna, jak ta zaproponowana na rys. 4.4. Wprowadzone rozszerzenie dotyczy jedynie generatora ścieżki zadanej, gdyż jej równania nie są znane *a priori*, lecz dynamicznie modyfikowane w trakcie wykonywania manewru. Należy podkreślić zatem, że struktura związana z prawem sterowania pozwalającym na realizację ścieżki zadanej pozostaje niezmienniona. W konsekwencji, wprowadzona modyfikacja nie wpływa w żaden sposób na analizę stabilności przeprowadzoną w rozdziale 6. Realizację generatora ścieżki w zadaniu przechwycenia obiektu przedstawiono na schemacie na rys. 9.2. Zgodnie z tym schematem procedura wyznaczania równań ścieżki jest następująca:

1. Pomiar pozycji obiektu względem manipulatora jest wykonywany za pomocą czujników umieszczonych na robocie. W tym celu można wykorzystać system wizyjny. W niektórych przypadkach można użyć prostszych czujników, np. dalmierzy laserowych, celem określenia jedynie względnego położenia obiektu. Pomiary są wykonywane z częstotliwością f_p .
2. Na podstawie wykonanych pomiarów wykonywana jest ekstrapolacja ruchu obiektu. Minimalnym celem tego modułu jest wyznaczenie kolejnego położenia obiektu, którą manipulator powinien zrealizować.
3. Wyznaczone pozycje (lub tylko położenia) obiektu są wykorzystywane do aktualizacji parametrów ścieżki zadanej. To zadanie jest wykonywane z częstotliwością f_a , która powinna być równa częstotliwości pomiarów bądź mniejsza od niej. Częstsze aktualizacje nie wnosząby nowych informacji do realizacji zadania. Nowe parametry ścieżki powinny zostać wyznaczone w taki sposób, aby zagwarantować ciągłość ewolucji układu lokalnego na ścieżce. Warto zauważyć, że im dokładniejsza jest ekstrapolacja ruchu celu do przechwycenia, tym rzadziej można aktualizować parametry ścieżki, co może wpłynąć korzystnie na reakcję układu sterowania.
4. Równania ścieżki zadanej są wyznaczane dla kolejnych wartości parametru u wynikającego z zadanego profilu prędkościowego wzdłuż ścieżki $\dot{u}_d$. Należy zaznaczyć, że zgodnie z definicją krzywej η^{3D} -sklejanej przedstawioną w dodatku B.7, dziedzi-
na krzywej jest ograniczona do przedziału $u \in [0; 1]$. Wynika stąd, że parametr u powinien być zerowany okresowo, zgodnie z częstotliwością aktualizacji parametrów



Rysunek 9.2: Schemat generatora ścieżki w zadaniu przechwycenia obiektu.

ścieżki. Z kolei profil prędkościowy wzdłuż ścieżki należy dobrać tak, aby gwarantował osiągnięcie wartości parametru $u = 1$ na koniec danej sekcji ścieżki, co pozwoli osiągnąć warunki brzegowe B. Tak uzyskane równania są przekazywane do sterownika kinematycznego, który wyznacza profile prędkościowe na podstawie uzyskanej kinematyki robota względem ścieżki (zob. rozdział 4).

W symulacjach wykorzystanych do analizy omawianego problemu przyjęto następujące założenia:

- Obiekt do przechwycenia porusza się wzdłuż ściśle określonych krzywych.
- Pomiar czujników jest realizowany jako odczytywanie położenia obiektu w kolejnych chwilach czasu, zgodnie z przyjętą częstotliwością $f_p = 100$ [Hz]. Pomija się zaburzenia wynikające z niedokładności urządzeń pomiarowych, a także problem filtracji i fuzji danych sensorycznych.
- Moduł ekstrapolacji, o ile jest wykorzystywany w danym scenariuszu, bazuje na modelu ruchu obiektu, który jest w pełni znany. Jest to zatem istotne uproszczenie rzeczywistego układu. W wielu aplikacjach model ruchu nie jest znany idealnie. Niemniej, jak wspomniano w rozdziale 9.1, rozwija się metody do predykcji ruchu

obiektu. Należy je wykorzystać w podanym module, gdy model ruchu obiektu nie jest w pełni znany. Warto również podkreślić, że im więcej jest dostępnych informacji lub prawdziwych założeń dotyczących ruchu obiektu, tym predykcja ruchu jest dokładniejsza.

- Parametry ścieżki są aktualizowane z częstotliwością f_a , której wartość zależy od warunków scenariusza.
- Parametry ścieżki są aktualizowane według następującej reguły. W chwili początkowej warunki brzegowe A dla krzywej η^{3D} -sklejanej wynikają z konfiguracji początkowej robota, natomiast warunki brzegowe B uzyskuje się z pomiaru pozycji celu w chwili początkowej manewru. Przy aktualizacji parametrów nowe warunki brzegowe A' są równe warunkom B z poprzedniego kroku, $A' = B$, natomiast warunki brzegowe B' wynikają z pomiarów lub ekstrapolacji ruchu celu do przechwylenia. Współczynniki η_i dobierane są tak, aby zachować ciągłość ścieżki i odpowiedni kształt krzywej.
- Przyjęto, że zadany profil prędkościowy wzdłuż ścieżki wynosi $\dot{u}_d = f_a \left[\frac{m}{s^2 \cdot Hz} \right]$, a więc jest równy co do wartości liczbowej częstotliwości aktualizacji parametrów. Dzięki temu dla każdej sekcji krzywej sklejanej otrzymano gwarancję zachowania dziedziny.
- Zawsze gdy aktualizowane są parametry ścieżki, wartość parametru u zeruje się, aby zachować dziedziny dla każdego fragmentu sklejanej krzywej.

Krzywe η^{3D} -sklejane jako ścieżka zadana. Do realizacji omawianego zadania wybrano krzywe η^{3D} -sklejane, których równania omówiono w dodatku B.7. Wykorzystuje się je do generowania *online* zadanej ścieżki dla manipulatora w fazie podejścia do dynamicznego obiektu. Zasadność takiego podejścia motywują następujące własności krzywych:

- Krzywe są zdefiniowane jako wielomiany o odpowiednich parametrach. Dzięki temu uzyskuje się prosty opis krzywej oraz jej pochodnych, które wykorzystuje się w równaniach parametryzacji krzywoliniowych.
- Krzywe pozwalają przeprowadzić układ z określonych warunków początkowych do warunków końcowych. Przyjmuje się, że warunki początkowe zawsze są określone przez aktualny stan robota, a warunki końcowe wynikają z pomiarów ruchu obiektu. Krzywe η^{3D} -sklejane pozwalają łączyć kolejne fragmenty krzywych. Każdy ze sklejanych fragmentów wielomianowych jest gładki, natomiast w punktach sklejania gwarantuje się geometryczną ciągłość ścieżki $\mathcal{G}^3$ [120]. Dzięki temu uzyskana krzywa jest klasy $\mathcal{G}^3$.
- Odpowiednia modyfikacja parametrów η_i pozwala uzyskać krzywe o różnych kształtach między tymi samymi warunkami brzegowymi. W pracy [120] autorzy przedstawiają różne metody heurystyczne, które umożliwiają dobór parametrów tak, aby wynikowa krzywa charakteryzowała się żądanymi własnościami.

Należy jednak podkreślić, że podstawowa własność krzywych η^{3D} -sklejanych, które zachowują ciągłość geometryczną klasy $\mathcal{G}^3$ w punktach sklejania, nie jest wystarczająca do zachowania ciągłej ewolucji układów lokalnych wynikających z równań parametryzacji

krzywoliniowych. Wymaga się bowiem, aby krzywa była klasy co najmniej $\mathcal{C}^2$ dla parametryzacji Bishopa lub co najmniej klasy $\mathcal{C}^3$ dla parametryzacji Serreta–Freneta. Tę własność można zapewnić poprzez odpowiedni dobór parametrów η_i zgodnie z Twierdzeniem 9.

Twierdzenie 9. *Niech krzywa η^{3D} -sklejana $\mathbf{r}(\mathbf{u})$ będzie określona przez warunki początkowe A i warunki końcowe B , a krzywa η^{3D} -sklejana $\mathbf{r}'(\mathbf{u})$ – przez warunki początkowe A' i warunki końcowe B' . Dodatkowo, niech warunki brzegowe A' będą równe warunkom brzegowym B . Wówczas krzywa powstała w wyniku sklejania krzywych $\mathbf{r}(\mathbf{u})$ oraz $\mathbf{r}'(\mathbf{u})$ w punkcie $B = A'$ jest klasy:*

$$a) \mathcal{C}^1, \text{ jeśli } \eta'_1 = \eta_2;$$

$$b) \mathcal{C}^2, \text{ jeśli } \eta'_1 = \eta_2 \text{ i } \eta'_3 = \eta_4;$$

$$c) \mathcal{C}^3, \text{ jeśli } \eta'_1 = \eta_2 \text{ i } \eta'_3 = \eta_4, \text{ i } \eta'_5 = \eta_6,$$

gdzie współczynniki η_i związane są z krzywą $\mathbf{r}(\mathbf{u})$, natomiast współczynniki η'_i – z krzywą $\mathbf{r}'(\mathbf{u})$.

Dowód. Na początku rozważmy wartości wielomianów w punkcie sklejania $B = A'$. Jako że dla krzywej $\mathbf{r}(\mathbf{u})$ jest to warunek końcowy, należy przyjąć $\mathbf{u} = 1$. W przypadku wielomianu $\mathbf{r}'(\mathbf{u})$ jest to warunek początkowy, więc należy przyjąć $\mathbf{u} = 0$. Wówczas, zgodnie z równaniami podanymi w dodatku B.7 zachodzi

$$\mathbf{r}(1) = \mathbf{r}_B, \quad (9.1a)$$

$$\mathbf{r}'(0) = \mathbf{r}_{A'}. \quad (9.1b)$$

Z faktu, że warunki brzegowe są sobie równe, $B = A'$, wynika, że $\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_{A'}$, zatem równanie (9.1) świadczy, że powstały wielomian jest krzywą ciągłą, klasy $\mathcal{C}^0$.

Następnie rozważmy równania pierwszej pochodnej. Zachodzi

$$\frac{d\mathbf{r}(1)}{d\mathbf{u}} = \eta_2 \mathbf{t}_B, \quad (9.2a)$$

$$\frac{d\mathbf{r}'(0)}{d\mathbf{u}} = \eta'_1 \mathbf{t}_{A'}. \quad (9.2b)$$

Nietrudno zauważyć, że dla tożsamości $B = A'$ prawdą jest, że $\mathbf{t}_B = \mathbf{t}_{A'}$. Zatem pierwsza pochodna krzywej powstałej w wyniku sklejania będzie ciągła dla warunku $\eta'_1 = \eta_2$. Dla takiej zależności parametrów otrzymana krzywa będzie klasy $\mathcal{C}^1$, co wynika z równania (9.2).

Kolejno sprawdzono ciągłość drugiej pochodnej. W tym celu obliczono

$$\frac{d^2\mathbf{r}(1)}{d\mathbf{u}^2} = \kappa_B \eta_2^2 \mathbf{n}_B + \eta_4 \mathbf{t}_B, \quad (9.3a)$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}'(0)}{d\mathbf{u}^2} = \kappa_{A'} (\eta'_1)^2 \mathbf{n}_{A'} + \eta'_3 \mathbf{t}_{A'}. \quad (9.3b)$$

Ponownie, w punkcie sklejania zachodzi $\kappa_B = \kappa_{A'}$, $\mathbf{n}_B = \mathbf{n}_{A'}$ oraz $\mathbf{t}_B = \mathbf{t}_{A'}$. Pokazano już, że dla zachowania ciągłości pierwszej pochodnej konieczne jest $\eta'_1 = \eta_2$. A zatem dla zapewnienia ciągłości drugiej pochodnej konieczne jest jeszcze, aby $\eta'_3 = \eta_4$, o czym

świadczy równanie (9.3). Dla takiego warunku krzywa powstała w wyniku sklejenia jest klasy $\mathcal{C}^2$.

Wreszcie, równania na trzecią pochodną w punkcie sklejenia prezentują się następująco

$$\frac{d^3 \mathbf{r}(1)}{du^3} = \bar{\kappa}_B \eta_2^2 \mathbf{n}_B + 3\kappa_B \eta_2 \eta_4 \mathbf{n}_B + \kappa_B \eta_2^3 \tau_B \mathbf{b}_B + 6\eta_6 \mathbf{t}_B, \quad (9.4a)$$

$$\frac{d^3 \mathbf{r}'(0)}{du^3} = \bar{\kappa}_{A'} (\eta_1')^2 \mathbf{n}_{A'} + 3\kappa_{A'} \eta_1' \eta_3' \mathbf{n}_{A'} + \kappa_{A'} (\eta_1')^3 \tau_{A'} \mathbf{b}_{A'} + 6\eta_5' \mathbf{t}_{A'}. \quad (9.4b)$$

Dla zachowania ciągłości pierwszej i drugiej pochodnej konieczne jest spełnienie warunków $\eta_1' = \eta_2$ i $\eta_3' = \eta_4$. Ponadto, ze względu na tożsamość warunków brzegowych $B = A'$ zachodzi równość między odpowiednimi elementami składającymi się na warunki brzegowe, tzn. $\bar{\kappa}_B = \bar{\kappa}_{A'}$, $\mathbf{n}_B = \mathbf{n}_{A'}$, $\kappa_B = \kappa_{A'}$, $\tau_B = \tau_{A'}$, $\mathbf{b}_B = \mathbf{b}_{A'}$, $\mathbf{t}_B = \mathbf{t}_{A'}$. Stąd, z równania (9.4) wynika, że trzecia pochodna krzywej sklejonej będzie ciągła, gdy zostanie spełniony dodatkowy warunek $\eta_5' = \eta_6$. Wówczas powstała krzywa będzie klasy $\mathcal{C}^3$. $\square$

Na podstawie Twierdzenia 9 można wnioskować, że dobór parametrów η_i w kolejnych okresach aktualizacji krzywej nie jest dowolny. Należy bowiem zadbać, aby uzyskana ścieżka była klasy odpowiadającej zastosowanej metodzie parametryzacji krzywoliniowej. Aby zapewnić tę własność, należy w punkcie sklejenia krzywych spełnić warunki podane w Twierdzeniu 9.

Niemniej jednak, trzeba podkreślić, że połowa współczynników η_i' , $i \in \{2, 4, 6\}$, dla aktualizowanej ścieżki może zostać dobrana dowolnie. W przeprowadzonych badaniach symulacyjnych wykorzystano metodę heurystyczną daną równaniem (B.26), która została podana w pracy [120]. Mianowicie, przyjęto, że $\eta_4' = \eta_6' = 0$, natomiast η_2' uzależniono od oczekiwanej długości ścieżki. Tę ostatnią wartość obliczano jako odległość euklidesową między punktem prowadzenia robota a punktem chwytu na poruszającym się obiekcie. W realizacji praktycznej dystans ten można obliczyć z wykorzystaniem czujników zastosowanych do określenia położenia celu względem robota.

9.4 Wyniki i dyskusja badań symulacyjnych

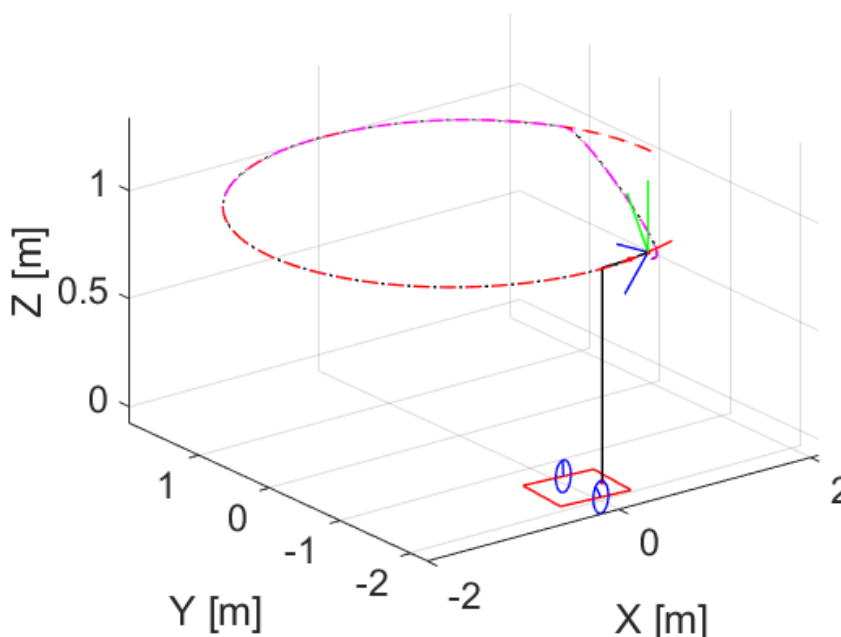
W tej części przedstawiono wyniki badań symulacyjnych dla różnych wariantów rozważanego scenariusza. Uzyskiwana ścieżka, złożona z wielu krzywych η^{3D} - sklejanych, dobrze odwzorowuje tor ruchu obiektu. Dzięki temu manipulator utrzymuje małą odległość od celu, która potencjalnie umożliwia złapanie obiektu poprzez zamknięcie szczęk chwytaka. Ponadto błędy śledzenia, zarówno na poziomie kinematycznym, jak i dynamicznym, zbiegają do wartości poniżej dokładności pomiarowej. W związku z okresową aktualizacją ścieżki pojawiają się oscylacje w przebiegach błędów, jednak ich amplituda jest nieznacząca. Warto podkreślić, że w badaniach symulacyjnych rozważono jedynie względne położenie robota i przechwytywanego obiektu.

9.4.1 Przechwyt obiektu poruszającego się po okręgu

Na początku zamodelowano ruch obiektu do przechwycenia jako ruch po okręgu danego parametrami $\mathbf{a} = 2$ oraz $\mathbf{b} = 0$, zgodnie z równaniem (B.4). Jako prędkość styczną obiektu przyjęto $v = 0,2 \left[\frac{m}{s} \right]$. Krzywą zadaną aktualizowano z częstotliwością $f_a = 0,2 \text{ [Hz]}$,

a więc znacznie rzadziej, niż wykonywane pomiary położenia celu. Na poniższych rysunkach przedstawiono uzyskane rezultaty.

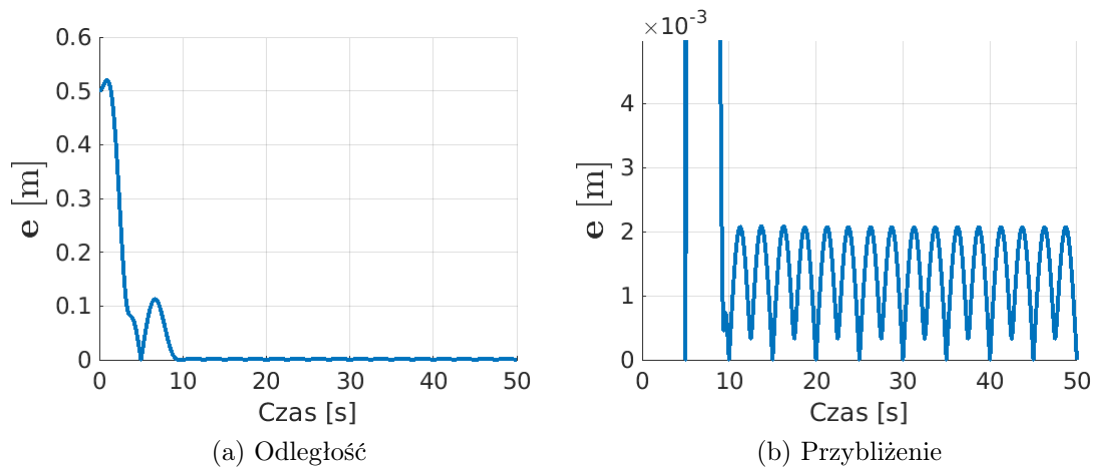
Na rys. 9.3 przedstawiono podstawowy rezultat badania. Obiekt porusza się po okręgu zaznaczonym linią czerwoną. Robot – po zniwelowaniu błędu początkowego – odwzorowuje ten ruch. Krzywe η^{3D} -sklejane dobrze dopasowują się do krzywej realizowanej przez cel. Na rys. 9.4 przedstawiono dystans, jaki dzieli punkt prowadzenia robota oraz obiekt do przechwycenia w każdej chwili manewru. Widać wyraźnie, że po zniwelowaniu błędu początkowego odległość utrzymuje się na poziomie milimetrów, co potencjalnie pozwoliłoby na wykonanie manewru chwytu obiektu.



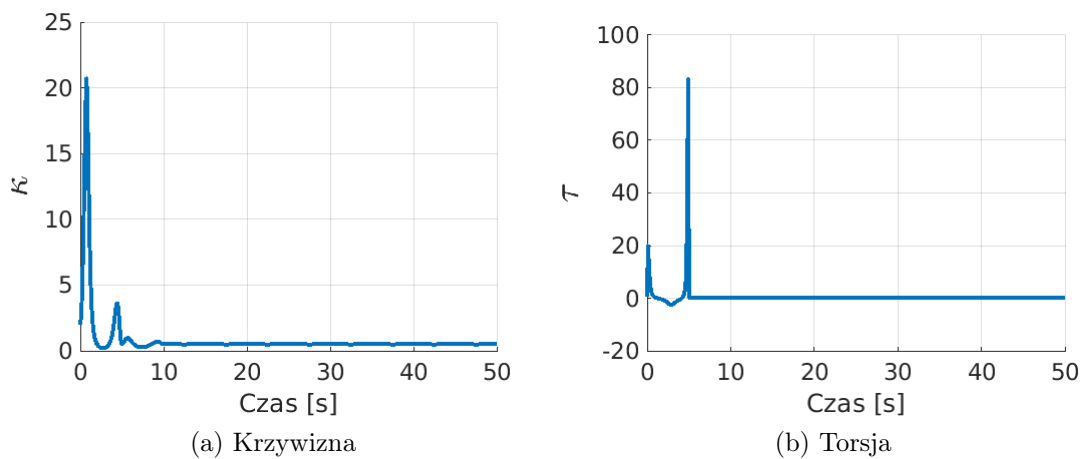
Rysunek 9.3: Ruch obiektu (linia czerwona) i ścieżka zrealizowana przez manipulator mobilny (linia różowa) – ruch celu po okręgu.

Następnie analizie poddano geometrię ścieżki uzyskanej poprzez łączenie kolejnych krzywych η^{3D} -sklejanych. Na rys. 9.5 przedstawiono niezmienniki geometryczne krzywej w parametryzacji Serreta–Freneta, a na rys. 9.6 – odpowiadające im wartości w parametryzacji Bishopa. Widać wyraźnie, że od pewnego momentu krzywizna oraz torsja ścieżki stabilizują się na pewnym poziomie, co odpowiada charakterystyce okręgu. Niemniej, wcześniej przebieg jest dość nieregularny, a wartość krzywizny spada do wartości bliskich zeru. Mogłoby to skutkować nieciągłością ewolucji układu lokalnego na ścieżce, stąd istotny był wybór sterownika opartego o parametryzację Bishopa.

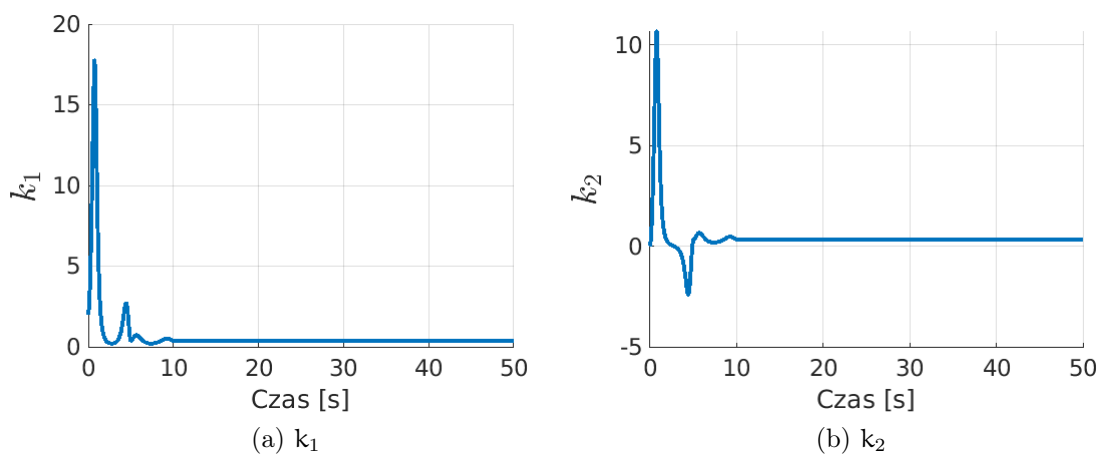
Kolejne wykresy przedstawiają przebiegi błędów śledzenia. Na rys. 9.7 przedstawiono błędy śledzenia ścieżki na poziomie kinematycznym, natomiast na rys. 9.8 – błędy śledzenia profili prędkościowych na poziomie dynamicznym. W obu wypadkach błędy zbiegają do bardzo małych wartości. Jak wspomniano na początku tego podrozdziału, na poziomie dokładności pomiarowej zaobserwowano oscylacje o małej amplitudzie, które jednak nie powinny mieć znaczenia dla realizacji zadania. Na rys. 9.9 przedstawiono wygenerowane sterowania, których przebiegi są akceptowalne do realizacji rzeczywistej.



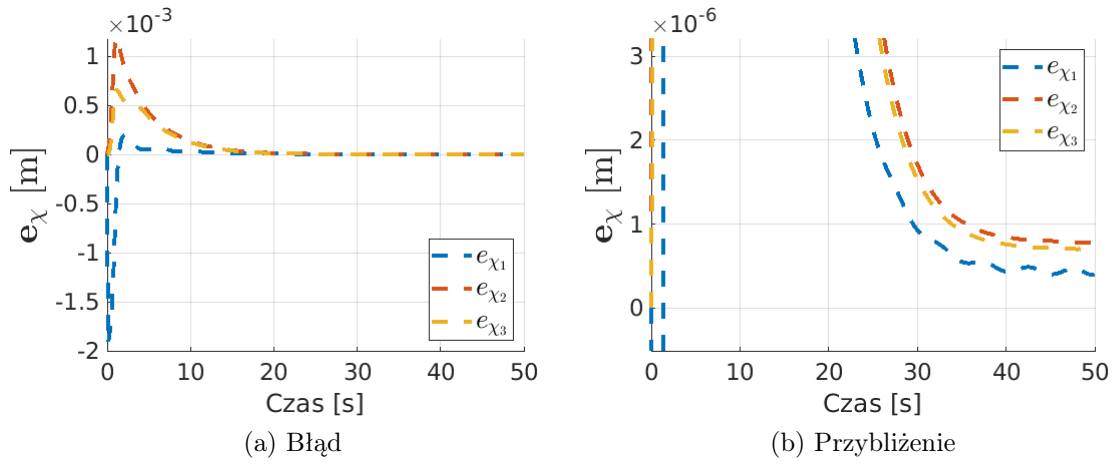
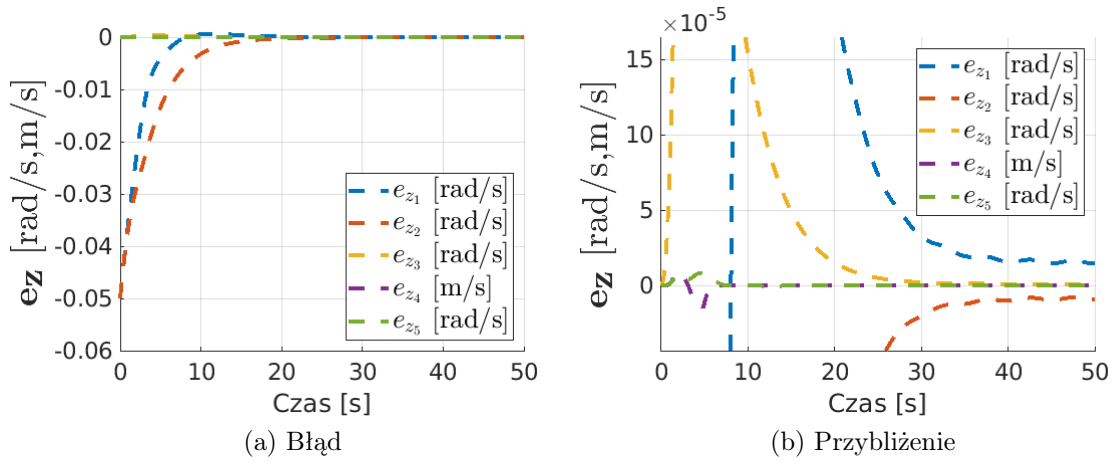
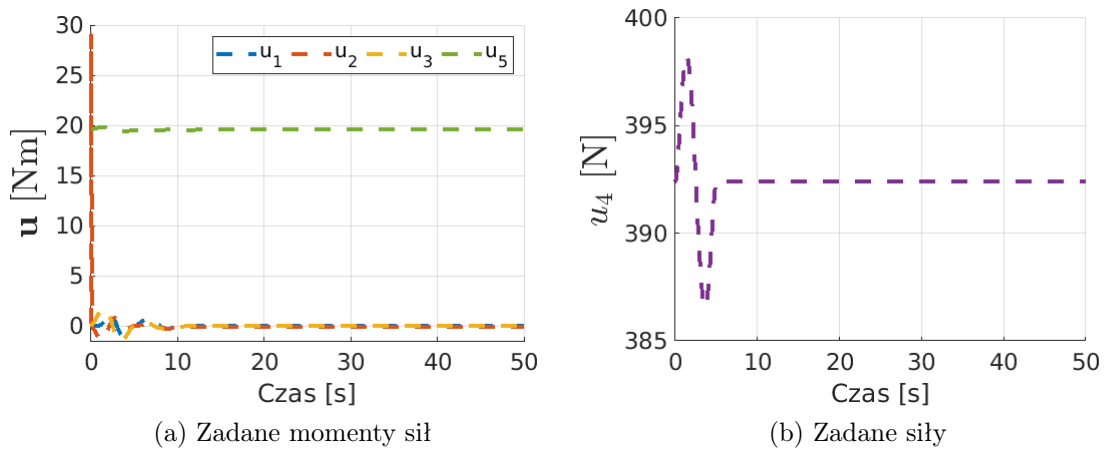
Rysunek 9.4: Dystans między końcówką chwytaka a obiektem – ruch celu po okręgu.



Rysunek 9.5: Niezmienniki geometryczne zrealizowanej ścieżki w parametryzacji Serreta–Freneta – ruch celu po okręgu.



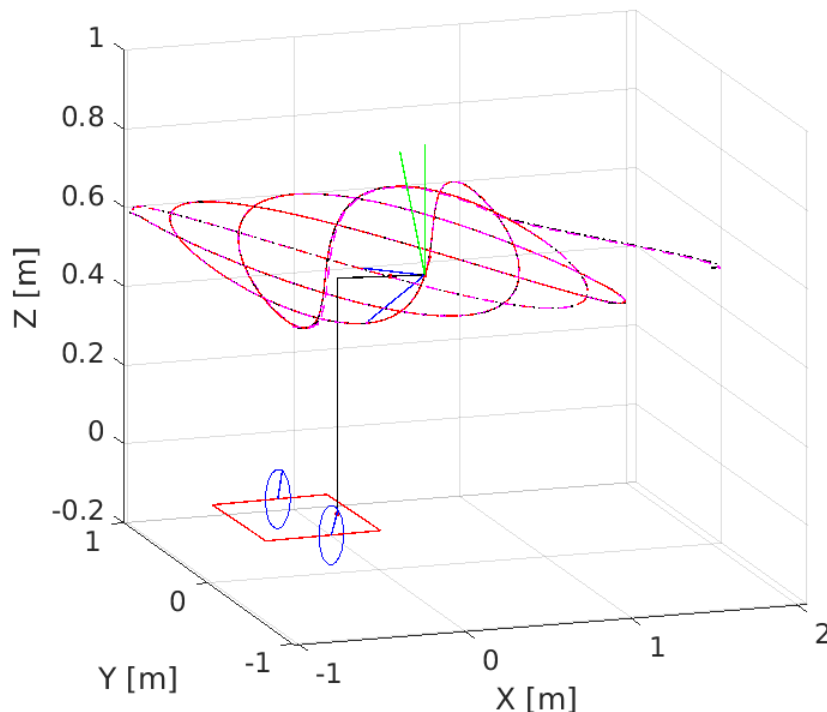
Rysunek 9.6: Niezmienniki geometryczne zrealizowanej ścieżki w parametryzacji Bishopa – ruch celu po okręgu.

Rysunek 9.7: Błędy śledzenia ścieżki e_χ – ruch celu po okręgu.Rysunek 9.8: Błędy śledzenia profili prędkościowych e_z – ruch celu po okręgu.Rysunek 9.9: Wygenerowane sterowania u – ruch celu po okręgu.

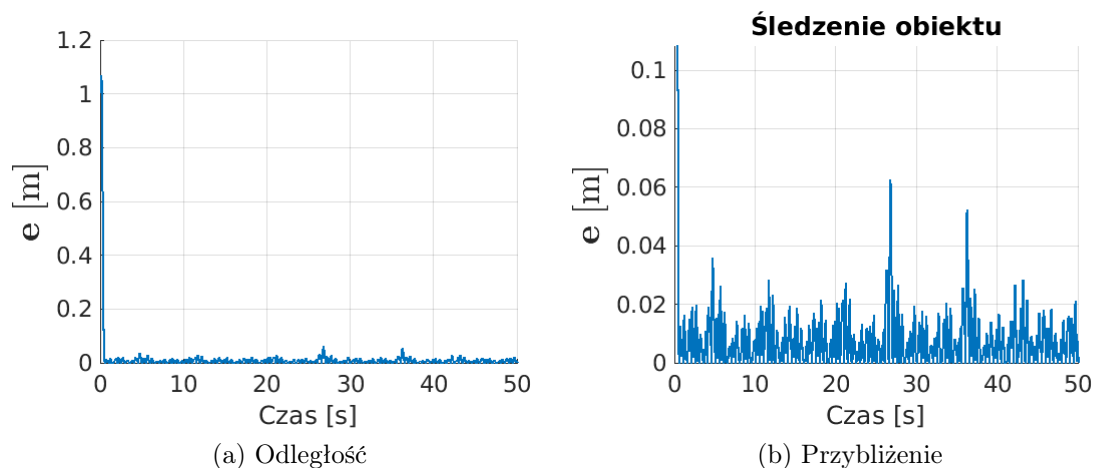
9.4.2 Przechwyt obiektu poruszającego się po krzywej Lissajous

W kolejnym badaniu sprawdzono, czy zaproponowane podejście jest równie skuteczne, gdy obiekt do przechwycenia porusza się po krzywej, która nie jest tak regularna, jak okrąg. W tym celu zdefiniowano ruch celu za pomocą krzywej Lissajous, danej równaniem (B.5) ze współczynnikami: $A = 1$; $B = 1$; $C = 0,6$; $a = 3$; $b = 5$ oraz $\delta = \frac{\pi}{2}$. Utrzymano wartość prędkości stycznej obiektu równą $v = 0,2 \left[\frac{m}{s} \right]$, lecz nowa krzywa wymagała większej częstotliwości aktualizowania ścieżki zadanej, którą w tym badaniu ustalono jako $f_a = 2$ [Hz]. Poniżej przedstawiono uzyskane wyniki symulacji.

Na rys. 9.10 przedstawiono ogólny rezultat analizy. Wynika stąd, że manipulator dobrze odwzorowuje ruch obiektu po krzywej Lissajous. Oznacza to, że ścieżka uzyskana z połączenia krzywych η^{3D} -sklejanych skutecznie dopasowuje się również do mniej regularnego toru ruchu, niż okrąg. Należy jednak zwrócić uwagę, że ścieżka realizowana przez manipulator mobilny wolniej zbiega do toru ruchu obiektu, niż w poprzednim badaniu. Ponadto, pojawiają się również istotne odchylenia na łukach, gdzie cel znacząco zmienia kierunek ruchu. Ma to swoje odzwierciedlenie w przebiegu odległości punktu prowadzenia robota od celu, który przedstawiono na rys. 9.11. Tym razem błąd śledzenia obiektu ma rząd centymetrów. Dodatkowo, jego przebieg charakteryzuje się gwałtowniejszymi oscylacjami, co wynika z większej częstotliwości aktualizacji parametrów ścieżki zadanej i mniejszej regularności toru ruchu celu. Wskazuje to również na fakt, że manewru zamknięcia chwytaka nie można rozpocząć w dowolnym momencie. Korzystniej jest go wykonać wzdłuż fragmentów prostych, niż na łukach, gdyż tam odległość między chwytakiem manipulatora a obiektem nieznacznie zwiększa się.

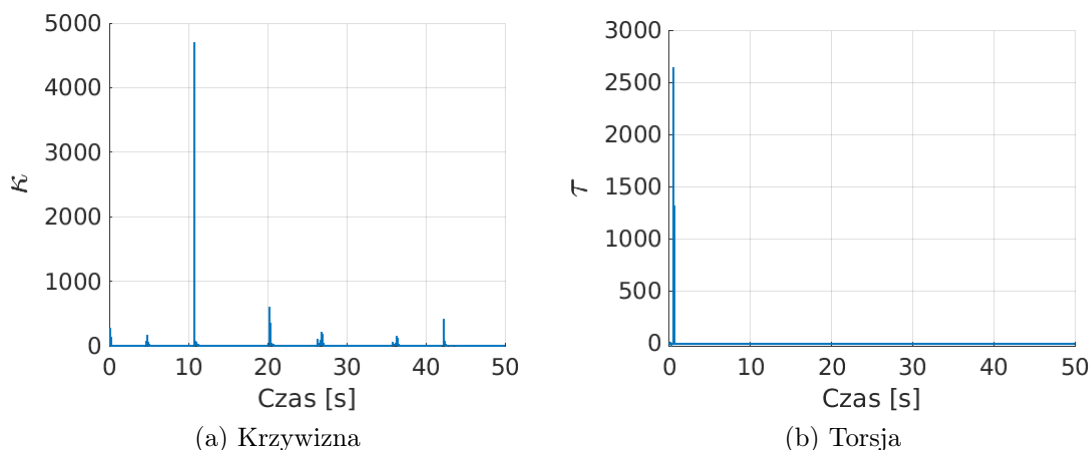


Rysunek 9.10: Ruch obiektu (linia czerwona) i ścieżka zrealizowana przez manipulator mobilny (linia różowa) – ruch celu po krzywej Lissajous.



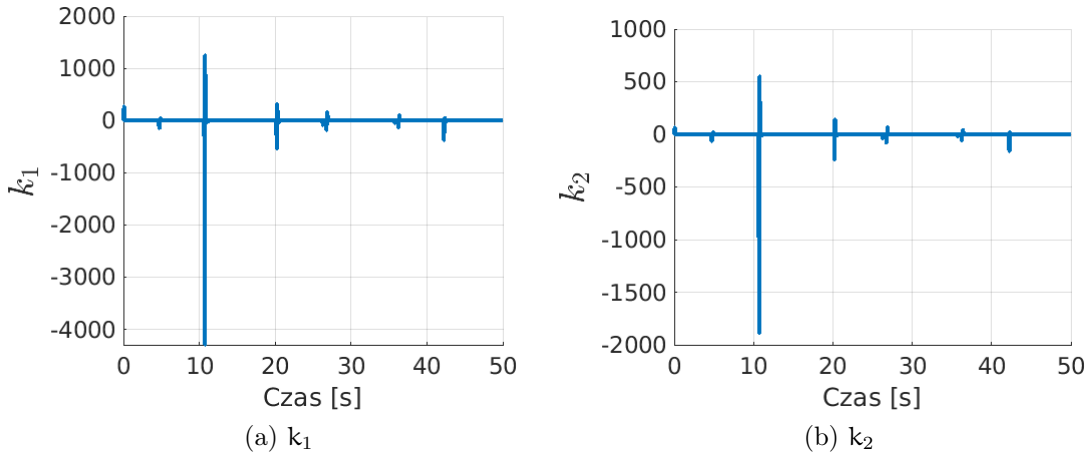
Rysunek 9.11: Dystans między końcówką chwytaka a obiektem – ruch celu po krzywej Lissajous.

Na rys. 9.12 oraz 9.13 przedstawiono geometryczne niezmienniki zadanej ścieżki odpowiednio w parametryzacji Serreta–Freneta oraz Bishopa. Uzyskana ścieżka zadana jest mniej regularna, o czym świadczą występujące na wykresie piki. Wynika to z częstszej aktualizacji krzywej oraz większego poziomu skomplikowania toru ruchu celu do przechwycenia. Niemniej jednak, uzyskana krzywa i ewolucja układu lokalnego Bishopa wzdłuż ścieżki są ciągłe.



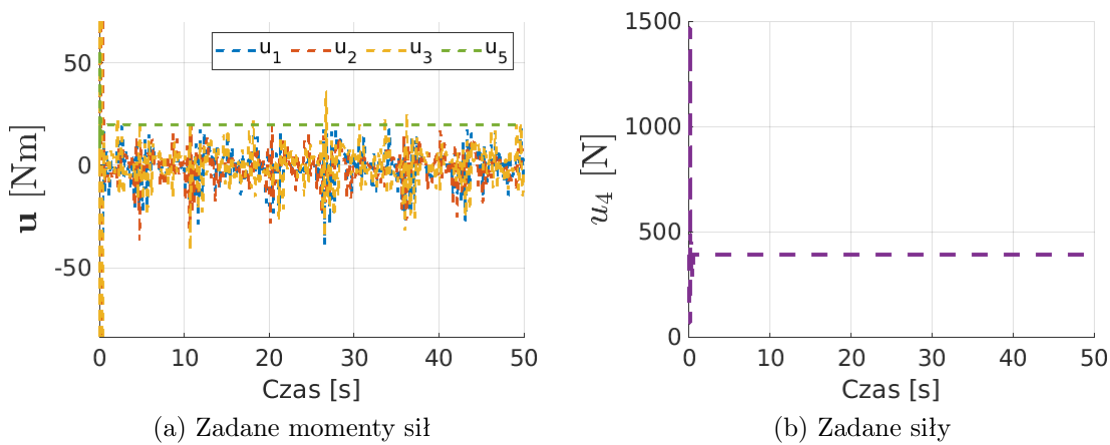
Rysunek 9.12: Niezmienniki geometryczne zrealizowanej ścieżki w parametryzacji Serreta–Freneta – ruch celu po krzywej Lissajous.

Siły i momenty sterujące wygenerowane w tym przypadku, rys. 9.14, charakteryzują się przebiegiem oscylacyjnym, przede wszystkim dla momentów zadawanych w napędach kół oraz w pierwszym przegubie obrotowym manipulatora, co jest skutkiem częstej aktualizacji parametrów krzywej. Ponadto, na początku manewru można zaobserwować wysokie i krótkie piki wartości sterowań. Wynika to z faktu gwałtownej kompensacji błędu ze stanu początkowego. Aby je zniwelować, można zastosować metody zaproponowane w rozdziale 8 lub wymusić wprost wolniejszą zbieżność ścieżki zadanej do toru ruchu obiektu. Ta



Rysunek 9.13: Niezmienniki geometryczne zrealizowanej ścieżki w parametryzacji Bishopa – ruch celu po krzywej Lissajous.

druga opcja może być istotna zwłaszcza w aplikacjach, w których częstotliwość aktualizacji parametrów ścieżki zadanej jest szczególnie wysoka.

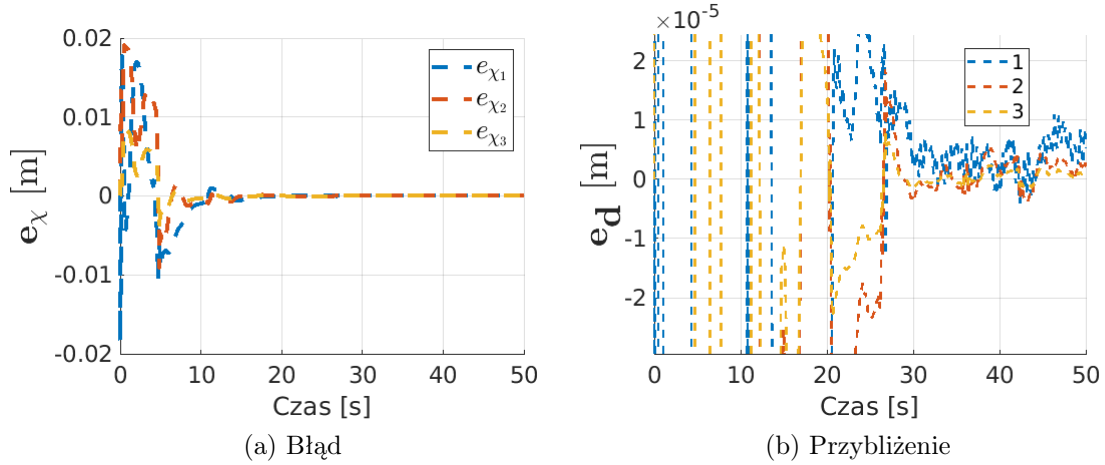


Rysunek 9.14: Wygenerowane sterowania $\mathbf{u}$ – ruch celu po krzywej Lissajous.

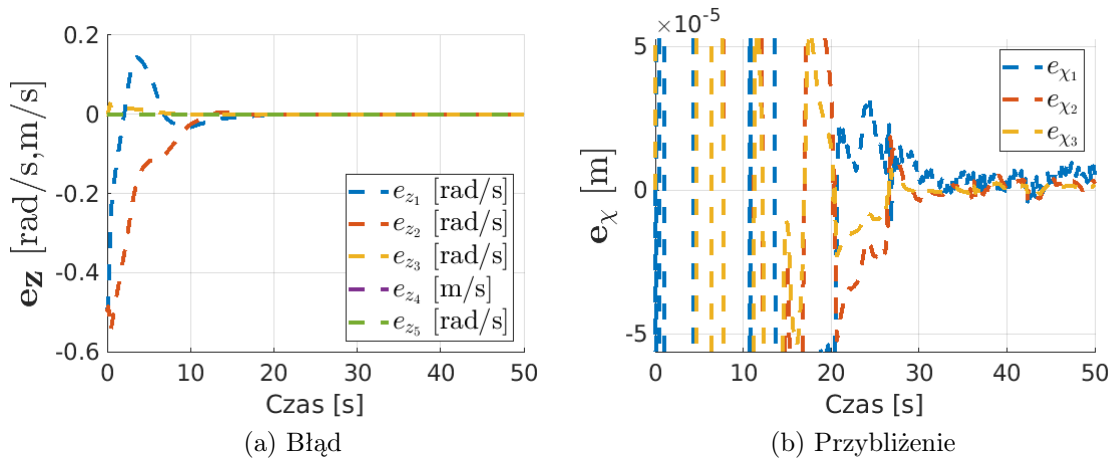
Wreszcie, na rys. 9.15 oraz rys. 9.16 przedstawiono odpowiednio wykresy błędów śledzenia ścieżki oraz błędów śledzenia profili prędkościowych. Ponownie należy podkreślić, że uzyskano zbieżność do niewielkich wartości. A zatem zaproponowany algorytm sterowania dobrze sprawdza się również w warunkach, gdy równanie ścieżki zadanej jest aktualizowane w trakcie wykonywania manewru.

9.4.3 Przechwyt obiektu poruszającego się po okręgu – bez ekstrapolacji ruchu

Ponownie przeanalizowano możliwość przechwytu celu poruszającego się po okręgu, lecz tym razem zrezygnowano z ekstrapolacji ruchu obiektu. Tym samym bazowano jedynie na bieżących pomiarach. Aby uzyskać satysfakcjonujący ruch manipulatora, który



Rysunek 9.15: Błędy śledzenia ścieżki $\mathbf{e}_x$ – ruch celu po krzywej Lissajous.

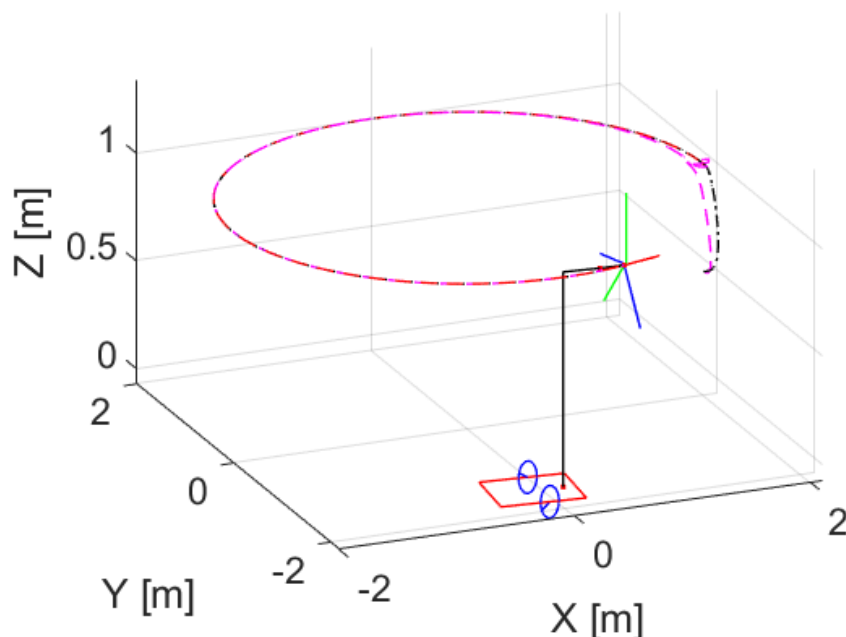


Rysunek 9.16: Błędy śledzenia profili prędkościowych $\mathbf{e}_z$ – ruch celu po krzywej Lissajous.

pozwala na podejście do celu i utrzymywanie jego położenia, ścieżkę zadaną aktualizowano z częstotliwością $f_a = 10$ [Hz].

Uzyskane wyniki są poprawne, na co wskazuje porównanie toru ruchu obiektu i ścieżki zrealizowanej przez robota na rys. 9.17. Można zauważyć jednak, że manipulator wykonał dodatkowe ruchy przy dojściu do płaszczyzny, w której poruszał się cel. Ewidentnie wzrósł również dystans między punktem prowadzenia robota a obiektem do przechwycenia, co widać na rys. 9.18. W tym przypadku błąd śledzenia obiektu charakteryzuje się wysokoczęstotliwościowymi oscylacjami, będącymi rezultatem częstej aktualizacji parametrów ścieżki. Ponadto, błąd oscyluje wokół stałej wartości 2 [cm], a zatem jest o rząd większy, niż w przypadku analogicznego studium wykorzystującego ekstrapolację ruchu obiektu, które zostało przedstawione w rozdziale 9.4.1.

Częste aktualizacje parametrów ścieżki zadanej przekładają się na błędy śledzenia ścieżki (rys. 9.19), a także błędy śledzenia profili prędkościowych (rys. 9.20). Zaproponowany algorytm sterowania dobrze wymusza zbieżność błędów do zera, jednakże w przebiegach pojawiają się wysokoczęstotliwościowe oscylacje o małych amplitudach. To z kolei przekłada się na wygenerowane sterowania, które przedstawiono na rys. 9.21. Warto zwró-



Rysunek 9.17: Ruch obiektu (linia czerwona) i ścieżka zrealizowana przez manipulator mobilny (linia różowa) – bez ekstrapolacji ruchu obiektu.

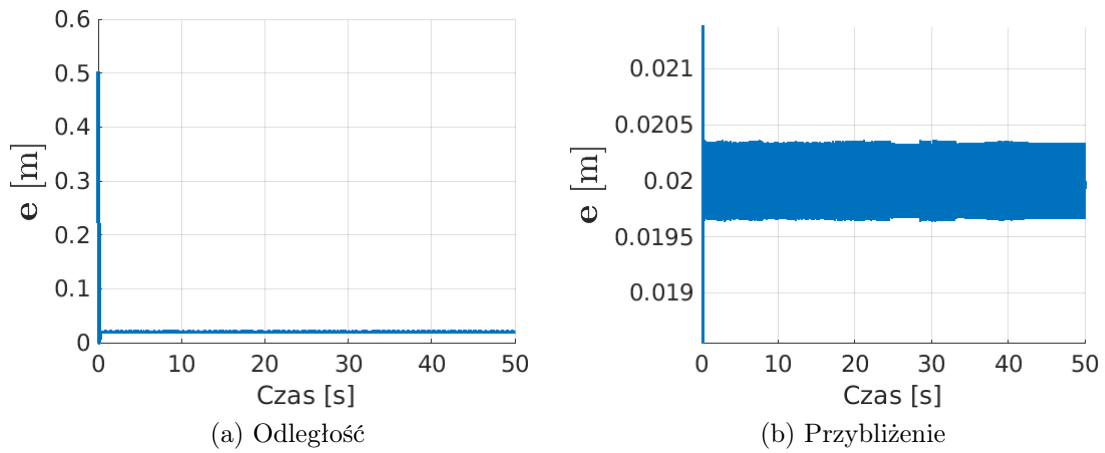
cić uwagę na bardzo wysoki i wąski pik wartości sterowań na początku manewru, który wynika z zadanego krótkiego czasu dojścia do płaszczyzny ruchu obiektu.

Stały dystans między manipulatorem a obiektem do przechwycenia, powstały w wyniku braku ekstrapolacji ruchu i bazowaniu jedynie na bieżących pomiarach położenia celu, można minimalizować poprzez zwiększanie częstotliwości aktualizacji ścieżki zadanej f_a z zachowaniem warunku $f_a \leq f_p$. Prowadzi to jednak do następujących problemów:

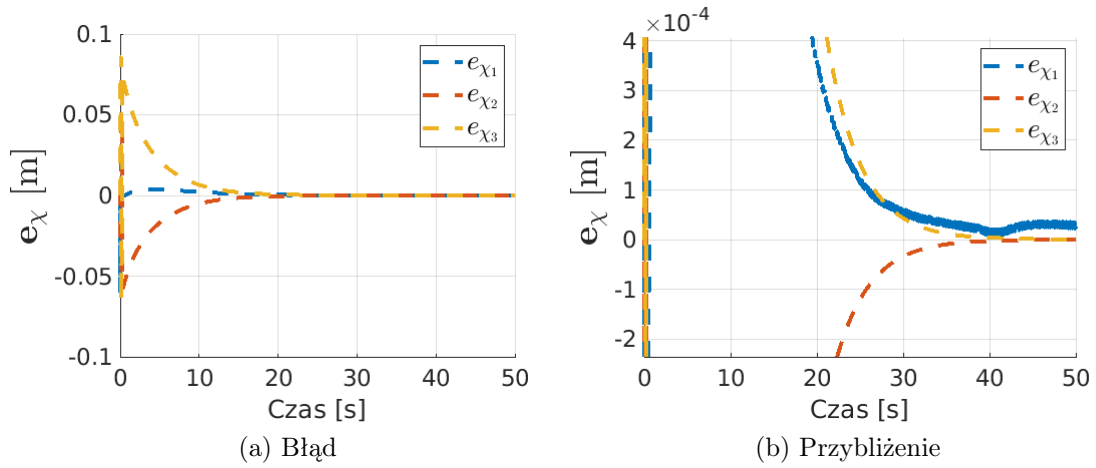
1. Bardzo gwałtowna reakcja systemu w chwili początkowej ze względu na niedoskonałość tego podejścia w stanie przejściowym (punkt prowadzenia robota poza torem ruchu obiektu). Może to skutkować wysokimi wartościami wygenerowanych sterowań, których nie będzie można zrealizować na rzeczywistym obiekcie. Ten problem uwiidoczniał się już w tym scenariuszu, o czym świadczą wykresy na rys. 9.21.
2. Oscylacyjny charakter przebiegu błędów śledzenia, a w konsekwencji sterowań. Amplituda takich przebiegów pozostanie mała, ale będzie wzrastać częstotliwość oscylacji.

Pierwszy z wymienionych problemów można niwelować poprzez wprowadzenie adaptacyjnego zwiększania częstotliwości aktualizacji ścieżki na podstawie dystansu między chwytakiem a obiektem. Opcjonalnie, można zastosować metody ograniczania sterowań zaproponowane w rozdziale 8. Pozwoliłoby to uniknąć wysokich pików wartości sterowań w stanie przejściowym układu z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego.

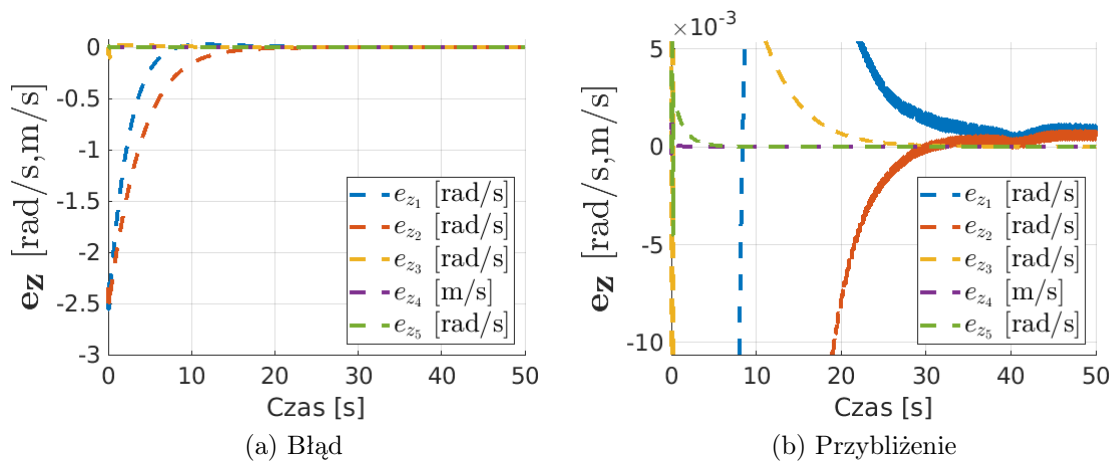
Drugi problem jest konsekwencją zbyt częstej aktualizacji ścieżki zadanej. Rzadsza aktualizacja parametrów wymaga skutecznego przewidywania ruchu obiektu do przechwycenia.



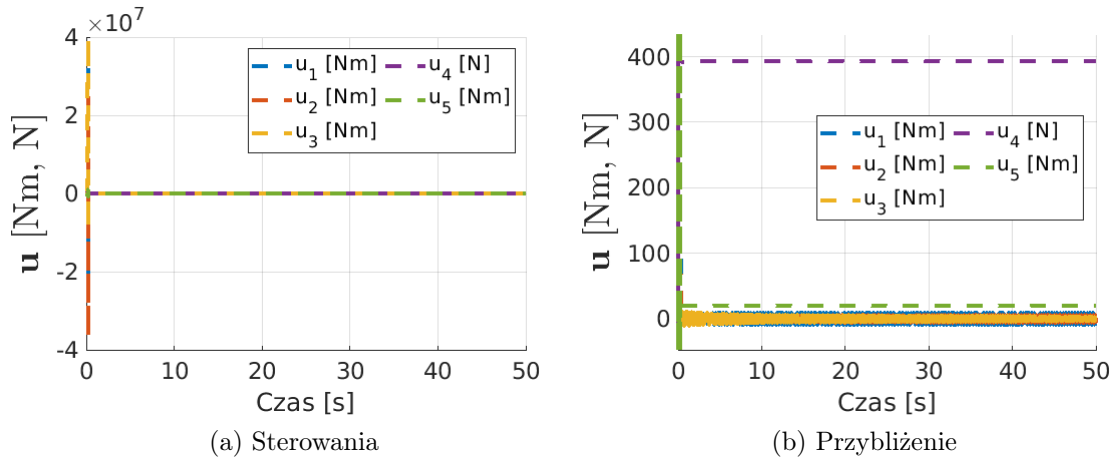
Rysunek 9.18: Dystans między końcówką chwytaka a obiektem – bez ekstrapolacji ruchu obiektu.



Rysunek 9.19: Błędy śledzenia ścieżki $\mathbf{e}_\chi$ – bez ekstrapolacji ruchu obiektu.



Rysunek 9.20: Błędy śledzenia profili prędkościowych $\mathbf{e}_z$ – bez ekstrapolacji ruchu obiektu.



Rysunek 9.21: Wygenerowane sterowania u – bez ekstrapolacji ruchu obiektu.

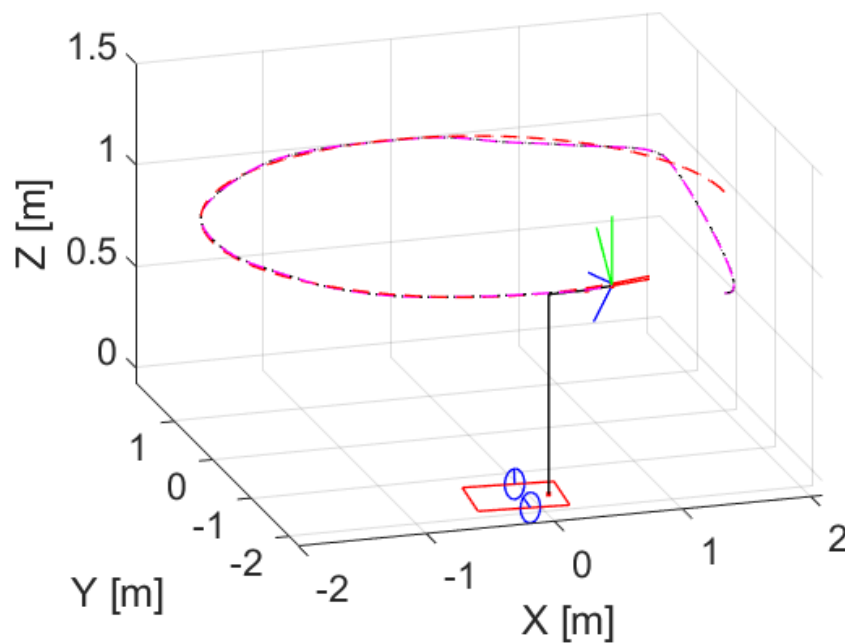
9.4.4 Przechwyt obiektu poruszającego się po okręgu – zaszumienie pomiarów położenia celu

W ostatnim przedstawionym badaniu symulacyjnym ponownie analizowano scenariusz, w którym cel do przechwycenia porusza się po okręgu, analogicznie do rozdziału 9.4.1. Tym razem jednak do pomiarów położenia obiektu względem manipulatora dodano szum o rozkładzie normalnym z zerową wartością oczekiwaną i wariancją rzędu części setnych. Przebieg wprowadzonego szumu przedstawiono na rys. 9.23b. Taki zabieg ma na celu:

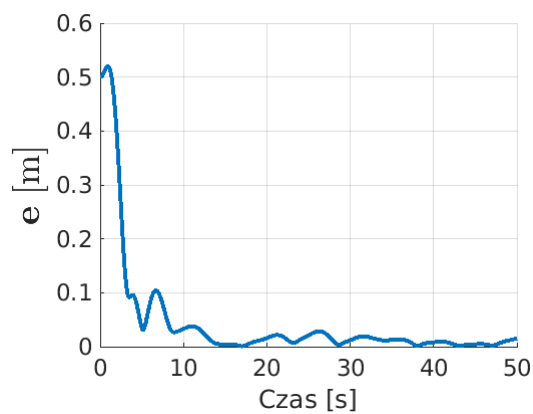
- urealnienie wykonywanych pomiarów, które w rzeczywistości są obciążone błędami;
- zaburzenie ekstrapolacji ruchu obiektu, która dotychczas była wykonywana idealnie na podstawie pełnej znajomości modelu ruchu.

Na rys. 9.22 zestawiono ścieżkę zrealizowaną przez mobilny manipulator i tor ruchu obiektu do przechwycenia. Widać wyraźnie, że wprowadzenie niewielkich zakłóceń do szacowania pozycji obiektu spowodowało odchylenia ścieżki zadanej od rzeczywistego toru ruchu celu. Skutkuje to zwiększeniem dystansu między chwytakiem a obiektem poruszającym się, co przedstawiono na rys. 9.23a. Błąd utrzymuje się jednak na poziomie $2 \div 3$ [cm]. W takich warunkach zamknięcie szczęk chwytaka powinno być możliwe. Należy podkreślić, że nie zostały zastosowane żadne procedury filtracji pomiarów, które mogłyby zwiększyć precyzję wykonania manewru.

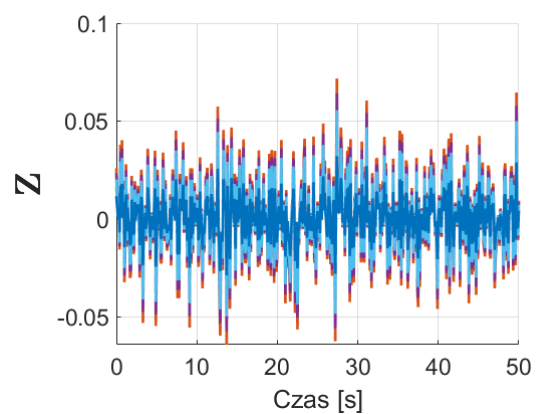
Wprowadzone zaszumienie pomiarów przełożyło się na definicję ścieżki zadanej. Jej niezmienniki geometryczne przedstawiono na rys. 9.24 oraz 9.25. Widoczna zmienność przebiegu świadczy, że powstała krzywa η^{3D} -sklejana nie odwzorowuje okręgu idealnie. Niemniej jednak, wprowadzone zaszumienie nie pogorszyło jakości realizowania zadanej ścieżki, o czym świadczą wykresy błędów na rys. 9.26 oraz rys. 9.27. Również przebiegi wygenerowanych sterowań na rys. 9.28 są akceptowalne i możliwe do realizacji na rzeczywistym robocie. Wprowadzony szum pogarsza zatem jakość generowanej ścieżki zadanej, lecz nie wpływa na samą realizację zadania śledzenia ścieżki.



Rysunek 9.22: Ruch obiektu (linia czerwona) i ścieżka zrealizowana przez manipulator mobilny (linia różowa) – zaburzony pomiar położenia celu.

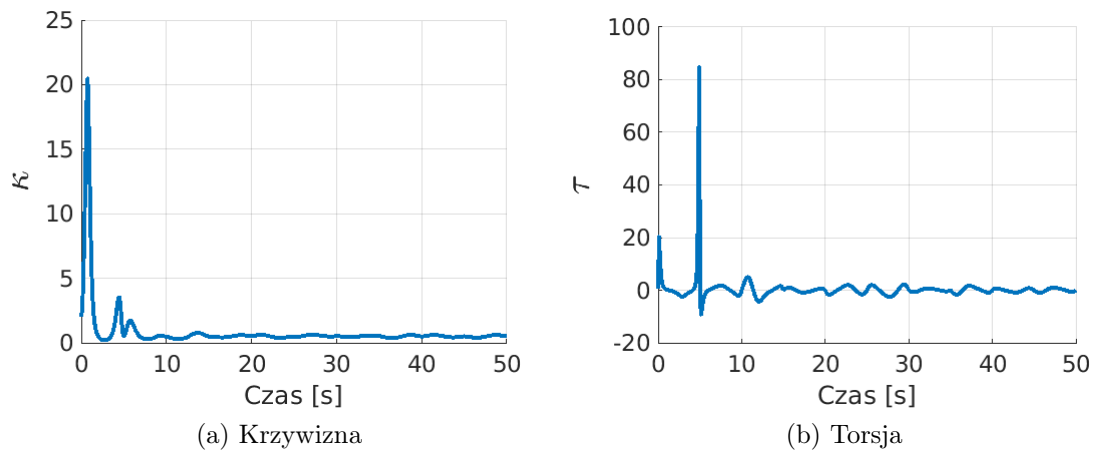


(a) Odległość

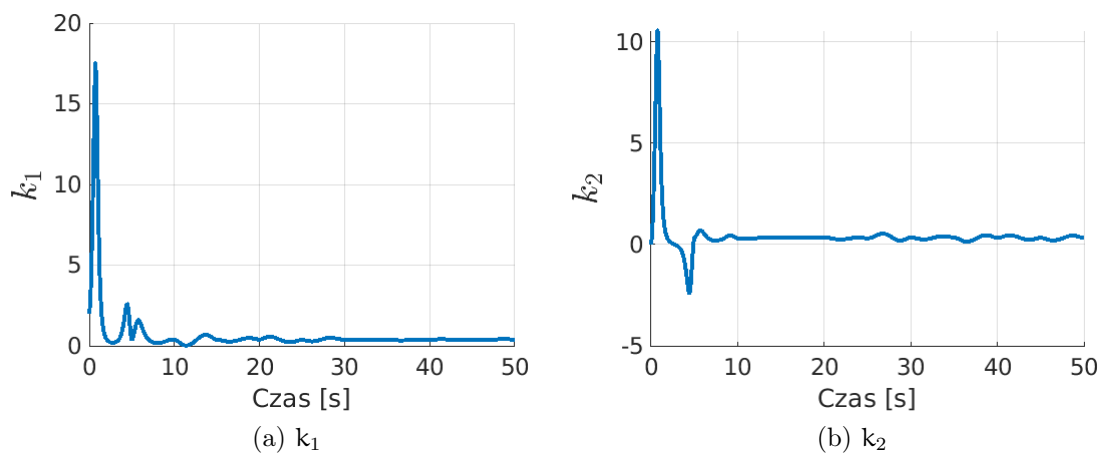


(b) Wprowadzony szum

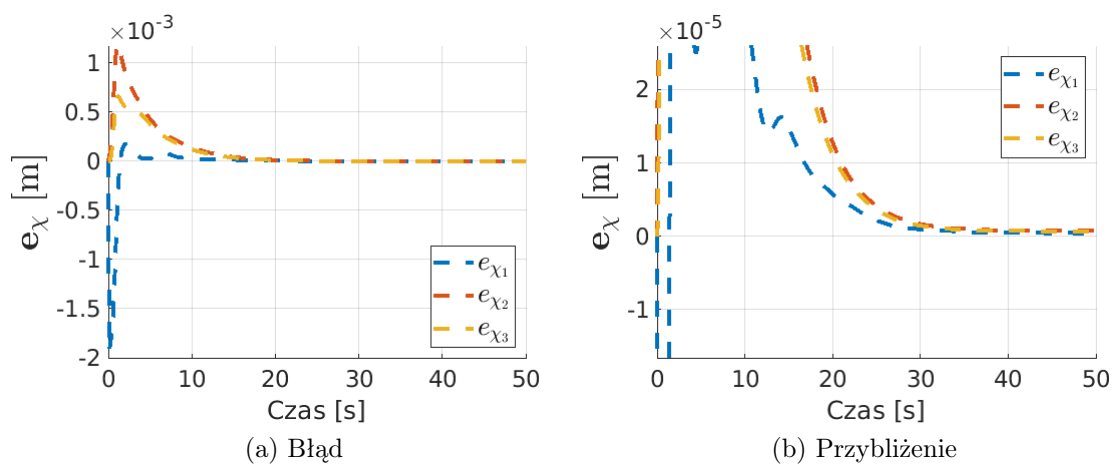
Rysunek 9.23: Dystans między końcówką chwytaka a obiektem – zaburzony pomiar położenia celu.



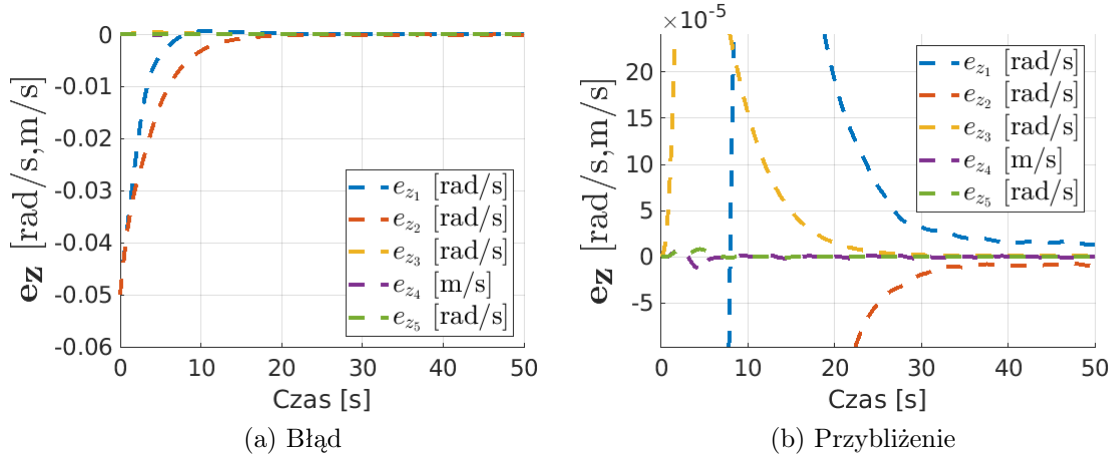
Rysunek 9.24: Niezmienniki geometryczne zrealizowanej ścieżki w parametryzacji Serreta-Freneta – zaburzony pomiar położenia celu.



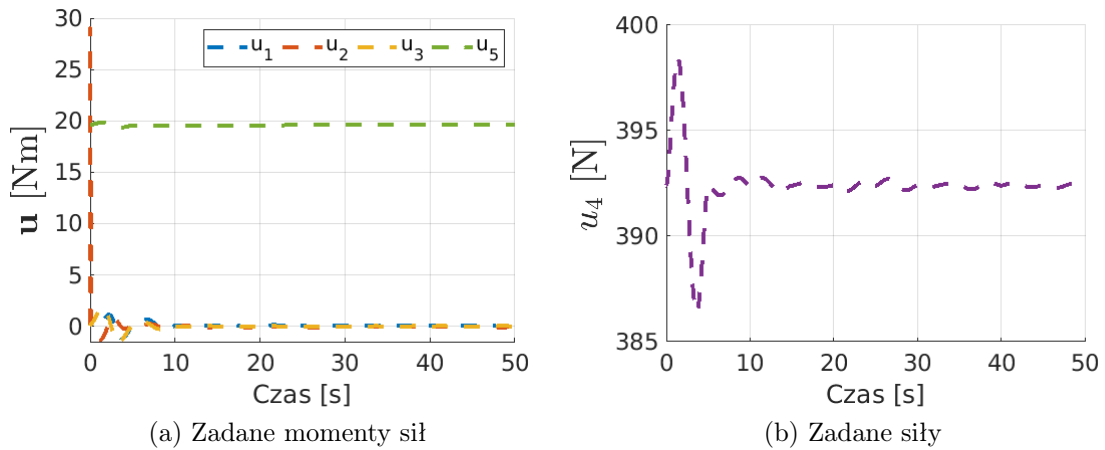
Rysunek 9.25: Niezmienniki geometryczne zrealizowanej ścieżki w parametryzacji Bishopa – zaburzony pomiar położenia celu.



Rysunek 9.26: Błędy śledzenia ścieżki $\mathbf{e}_x$ – zaburzony pomiar położenia celu.



Rysunek 9.27: Błędy śledzenia profili prędkościowych e_z – zaburzony pomiar położenia celu.



Rysunek 9.28: Wygenerowane sterowania u – zaburzony pomiar położenia celu.

9.5 Podsumowanie

Przedstawione w niniejszym rozdziale studium potwierdza, że parametryzacje krzywoliniowe można z powodzeniem wykorzystać w zadaniach polegających na chwytaniu obiektów dynamicznych. Podejście oparte o śledzenie ścieżki definiowanej przez nieinercjalny układ odniesienia dobrze sprawdza się w fazie przed przechwytem, kiedy manipulator powinien zbliżyć się do obiektu w ruchu i utrzymywać pozycję względem niego. Utożsamienie układu stowarzyszonego z celem do przechwycenia oraz układu lokalnego wynikającego z parametryzacji krzywoliniowej pozwala na kształtowanie ruchu robota poprzez dobór ścieżki i jej modyfikowanie w trakcie wykonywania manewru.

Krzywymi o własnościach szczególnie pożądanym do tego celu są krzywe η^{3D} -sklejane. Dobór współczynników tych wielomianów pozwala na:

- łączenie kolejnych wielomianów z zachowaniem odpowiedniej klasy ciągłości geometrycznej i różniczkowej w punktach sklejenia;
- kształtowanie ścieżki;
- łączenie warunków początkowych i końcowych, zdefiniowanych przez ewolucję układu lokalnego, za pomocą gładkich wielomianów.

Można je zatem wykorzystać do definiowania kolejnych etapów ścieżki w trakcie wykonywania manewru i łączenia ich w odpowiedni sposób w punktach sklejenia. Przedstawione badania symulacyjne wskazują, że krzywe η^{3D} -sklejane dobrze aproksymują nie tylko okręgi, ale także krzywe o innej charakterystyce, np. linia śrubowa czy krzywa Lissajous.

Należy jednak podkreślić, że kształtowanie ścieżki w trakcie wykonywania manewru nie pozwala na aprioryczne zdefiniowanie jej krzywizny. W analizowanych przypadkach krzywizna ścieżki często malała do wartości bliskich zeru. W szczególności takie zachowanie będzie miało miejsce, gdy obiekt do przechwycenia porusza się po linii prostej. Wskazuje to na konieczność zastosowania parametryzacji Bishopa lub parametryzacji *beta* w rozważanym scenariuszu. Dzięki temu możliwe będzie uniknięcie problemów wynikających z osobliwości parametryzacji Serreta–Freneta w punktach o zerowej krzywiznie, co omówiono szerzej w rozdziale 7.2.

Przedstawione wyniki podkreślają także istotę przewidywania ruchu obiektu. Znany model ruchu celu, ekstrapolacja kolejnych pozycji na podstawie pomiarów lub metody predykcyjne w istotny sposób zwiększają dokładność wykonania manewru przechwycenia. Ważne są również wszelkie założenia dotyczące ruchu obiektu, które można uwzględnić w działaniu generatora ścieżki zadanej.

Im mniej danych zostanie wykorzystanych na poziomie generatora ścieżki, tym częściej należy aktualizować parametry ścieżki zadanej. Może to jednak prowadzić do powstania wysokoczęstotliwościowych oscylacji w przebiegach sygnałów sterujących. Choć charakteryzują się one niewielką amplitudą, to mogą niekorzystnie wpłynąć na działanie napędów robota. Ponadto, należy podkreślić fakt, że precyzyjna predykcja ruchu znacznie bardziej poprawia dokładność pozycjonowania robota względem obiektu w ruchu, niż zwiększanie częstotliwości aktualizowania parametrów ścieżki zadanej.

Zaproponowane podejście sprawdza się również w warunkach zaszumienia pomiarów pozycji obiektu do przechwycenia. Do poprawnej realizacji zadania nie jest bowiem konieczne dokładne odwzorowanie toru ruchu celu, lecz osiągnięcie i utrzymanie jego pozycji. Należy jednak podkreślić, że zastosowanie odpowiedniej filtracji i fuzji danych pomiarowych jest korzystne, gdyż zwiększa to precyzję predykcji ruchu celu. Jak wspomniano powyżej, jest to aspekt kluczowy dla dobrej aktualizacji parametrów ścieżki zadanej w trakcie wykonywania manewru.

Rozdział 10

Podsumowanie

Zadanie śledzenia ścieżki to jedno z podstawowych zadań robotycznych. Dla wielu klas obiektów pozostaje najtrudniejszym zadaniem w przygotowaniu koncepcyjnym oraz implementacji algorytmu. Jednocześnie jest to zadanie istotne z perspektywy najważniejszych wyzwań współczesnej robotyki, np. sterowania pojazdami autonomicznymi czy realizacji zadań na orbicie okołoziemskiej przez manipulatory kosmiczne.

W pracy zostało przedstawione i rozwinięte podejście parametryczne do realizacji zadania śledzenia ścieżki. W tym celu wykorzystano parametryzacje krzywoliniowe – formalizm matematyczny stanowiący fundament geometrii różniczkowej, który został zaproponowany po raz pierwszy w XIX wieku i był rozwijany na przestrzeni kolejnych dziesięcioleci. Przedstawiona aplikacja to przykład nadający nowe życie formułom i modelom matematycznym opisującym otaczającą nas rzeczywistość.

W niniejszej rozprawie najpierw omówiono różne metody parametryzacji krzywoliniowych. W rozdziale 2 przedstawiono równania ewolucji układów lokalnych wzdłuż krzywych geometrycznych dla różnych reprezentacji parametryzacji krzywoliniowych, a także w zależności od unormowania parametru. Istotnym wynikiem tego przeglądu jest fakt, że ogólna struktura równań opisująca ewolucję układu lokalnego w czasie jest identyczna dla każdego rodzaju parametryzacji.

W rozdziale 3 wykorzystano parametryzacje krzywoliniowe do wyprowadzenia równań opisujących położenie oraz orientację obiektów robotycznych względem ścieżki w przestrzeni trójwymiarowej. W tej części przedstawiono równania robota względem ścieżki w parametryzacji ortogonalnej oraz nieortogonalnej, analizując ich własności. W szczególności, rozważono osobliwości wynikające z podejścia ortogonalnego. Wskazano metodę przesunięcia osobliwości ortogonalnych poza ścieżkę, a także zdefiniowano warunki gwarantujące ich ominięcie. Sformułowano również równania **kinematyki robota względem ścieżki**, które stanowią ograniczenia prędkościowe gwarantujące poprawny ruch robota względem zadanej krzywej. Należy podkreślić, że zaproponowana formuła jest ogólna i prawdziwa dla każdej metody parametryzacji oraz rodzaju opisu robota: względnego położenia, orientacji lub postury.

Rozdział 4 to precyzyjne sformułowanie problemu sterowania, a także wskazanie ogólnego schematu rozwiązania opartego o parametryczny opis robota względem ścieżki. Kluczowe w tym schemacie są ograniczenia prędkościowe zdefiniowane w rozdziale 3. Występowanie tego typu ograniczeń skutkuje podobnymi konsekwencjami dla układu sterowania, jak obecność ograniczeń nieholonomicznych pierwszego rzędu. Z tego względu przyjęto kaskadową strukturę układu sterowania, również dla obiektów holonomicznych. Jako ogólną

metodę rozwiązywania problemu sterowania wskazano algorytm całkowania wstecznego.

Metoda ta została zastosowana do zaprojektowania algorytmów sterowania dla obiektów holonomicznych (rozdział 5) oraz mobilnych obiektów nieholonomicznych (rozdział 6). Przedstawiono algorytmy śledzenia ścieżki wraz z dowodami stabilności dla różnych poziomów znajomości modelu dynamiki robota (pełna znajomość, brak znajomości parametrycznej lub strukturalnej, całkowita nieznajomość). Wyniki teoretyczne zweryfikowano za pomocą badań symulacyjnych oraz częściowo eksperymentalnych. Uzyskane rezultaty potwierdzają właściwości zaproponowanych algorytmów. Na szczególną uwagę zasługują wyniki **badania eksperymentalnych** przedstawione w rozdziale 5.4. Zostały one przeprowadzone dla manipulatora redundantnego KINOVA® Gen3, który był dostępny w miejscu prowadzenia badań – Katedrze Cybernetyki i Robotyki Politechniki Wrocławskiej. Satisfakcjonujące wyniki tej walidacji świadczą o praktycznej stosowalności proponowanych rozwiązań.

W rozprawie przedstawiono ogólne modele do realizacji zadania śledzenia ścieżki przez obiekty robotyczne w oparciu o różne metody parametryzacji krzywoliniowych. Rozważań dopełnia rozdział 7, w którym zestawiono najważniejsze zalety oraz wady poszczególnych metod. Rozważono następujące aspekty: minimalne wymagania na klasę krzywej, wpływ punktów o zerowej krzywiznie, rotacje układu lokalnego względem krzywej, osobliwości parametryzacji, możliwość łączenia różnych metod. Zebrano również najważniejsze wskazówki i porady praktyczne, które mogą posłużyć wyborowi metody parametryzacji odpowiadającej warunkom bieżącej aplikacji.

Kolejne dwa rozdziały stanowią próbę zmierzenia się z wybranymi praktycznymi wyzwaniami zadania śledzenia ścieżki. W rozdziale 8 zaproponowano trzy rozwiązania, które pozwalają ograniczyć momenty sterujące generowane przez podane prawa sterowania bez naruszenia własności algorytmów. W tym celu skorzystano z podstawowej cechy wynikającej z definicji zadania śledzenia ścieżki: opis ścieżki jest czysto geometryczny i nie nakłada reżimów czasowych na obiekt sterowania. Dzięki temu generowane sterowania mogą być ograniczane, np. poprzez autonomiczne spowalnianie ruchu robota wzdłuż ścieżki. Zaproponowane metody zostały przeanalizowane i porównane pod względem wad, zalet oraz zakresu ich stosowania.

W rozdziale 9 rozważono z kolei możliwości zastosowania zaprojektowanych algorytmów w zadaniach przechwytywania obiektów dynamicznych. U podstaw tego pomysłu leży utożsamienie poruszającego się obiektu z wirtualnym układem odniesienia, który można uzyskać na podstawie wybranej metody parametryzacji. W ten sposób można uzyskać opis robota względem ruchomego celu. Takie rozwiązanie można zastosować do realizacji fazy przed przechwytem, gdy konieczne jest odpowiednie podejście do dynamicznego obiektu. Wyzwaniem w tej metodzie jest odpowiednia predykcja ruchu oraz aktualizacja ścieżki zadanej w wykorzystanym układzie sterowania. Niemniej jednak, zaproponowane podejście pozwala realizować zadanie w sposób intuicyjny, a jednocześnie gwarantuje dużą elastyczność na zmieniające się warunki.

Wyniki zaprezentowane w niniejszej rozprawie potwierdzają tezę postawioną we wstępie. W tabeli 10.1 wskazano najważniejsze wyniki pracy, które potwierdzają szczegółowe tezy postawione w rozdziale 1.3.

Kierunki przyszłych badań. Z niniejszej rozprawy wynika, że realizacja zadania śledzenia ścieżki jest istotna dla współczesnych problemów robotyki, a jednocześnie jest to temat nietrywialny. Przedstawione wyniki stanowią pewien zbiór rozwiązań o własno-

ściach potwierdzonych teoretycznie. Jednocześnie zaproponowany opis posiada stopień ogólności, który można dostosować do realizowanych aplikacji i ich ograniczeń. Warto jednak podkreślić, że przedstawione wyniki nie wyczerpują tego niezwykle rozbudowanego tematu. Można wskazać następujące dalsze kierunki badań naukowych:

1. Opis postury robota względem ścieżki można wyrazić za pomocą kwaternionów dualnych [6, 125]. W ten sposób można uzyskać opis w bardziej zwartej i jednolitej postaci. Należałoby zbadać, jakie konsekwencje niesie to dla struktury układu sterowania, w szczególności sterownika kinematycznego.
2. Przedstawione algorytmy pozwalają na sterowanie posturą robota. Ciekawym rozwinięciem byłoby powiązanie zaproponowanych rozwiązań z algorytmami sterowania siłowego. Badania nad taką koncepcją zostały przedstawione m. in. w pracy [60]. Wskazano tam na możliwość rozważenia parametryzacji nieortogonalnej oraz parametryzacji innej niż metoda Serreta–Freneta w projektowaniu algorytmów sterowania pozycyjno-siłowego.
3. Rozwinięcia wymaga również podejście przedstawione w rozdziale 9. Dotyczy to zarówno predykcji ruchu dynamicznego celu, jak i aktualizacji ścieżki zadanej. Powiązanie algorytmów śledzenia ścieżki z algorytmami sterowania siłą pozwoliłoby z kolei na rozszerzenie aplikacji o procedurę chwytu.
4. Wyniki teoretyczne zostały zweryfikowane eksperymentalnie tylko dla manipulatora holonomicznego. Należałoby rozwinąć stanowisko laboratoryjne wyposażone w manipulator mobilny i przeprowadzić poszerzone badania eksperymentalne również dla mobilnych obiektów nieholonomicznych.

Tabela 10.1: Najważniejsze wyniki pracy potwierdzające szczegółowe tezy pracy.

Teza	Wyniki
$\mathcal{T}_1$	Pokazano, że do realizacji zadania śledzenia ścieżki można stosować różne metody parametryzacji krzywoliniowych. W rozdziale 3 wskazano ogólną postać kinematyki robota względem ścieżki. Jej szczegółowa postać zależy od arbitralnego doboru metody parametryzacji krzywoliniowej. W rozdziałach 5 oraz 6 przedstawiono prawa sterowania oparte na tej strukturze. Nie zależą one od konkretnej postaci parametryzacji krzywoliniowej. Przedstawione tam badania symulacyjne oraz eksperymentalne wykonano dla różnych metod parametryzacji, za każdym razem uzyskując poprawne wyniki. Konsekwencje z wyboru konkretnych metod przeanalizowano w rozdziale 7.
$\mathcal{T}_2$	Parametryzacja nieortogonalna jest globalnym opisem robota względem ścieżki. W rozdziale 3 pokazano, że parametryzacja nieortogonalna nie wprowadza dodatkowych ograniczeń do opisu robota względem ścieżki. Zgodnie ze Spostrzeżeniem 18, parametryzacja nieortogonalna zwiększa wymiarowość zadania, ale pozwala uzyskać dobrze zdefiniowany opis robota względem ścieżki w całej przestrzeni trójwymiarowej.

Tabela 10.1: Najważniejsze wyniki pracy potwierdzające szczegółowe tezy pracy.

Teza	Wyniki
$\mathcal{T}_3$	Algorytm całkowania wstecznego można skutecznie wykorzystać do projektowania algorytmów śledzenia ścieżki. W rozdziale 4 zaproponowano ogólną strukturę układu sterowania pozwalającego na realizację zadania śledzenia ścieżki. Algorytmy sterowania, zaprezentowane w rozdziałach 5 oraz 6, zostały zaprojektowane w oparciu o metodę całkowania wstecznego, którą stosuje się w wielu aplikacjach do realizacji sterowania dla układów z ograniczeniami nieholonomicznymi. W projektowaniu algorytmów śledzenia ścieżki można stosować analogię do układów nieholonomicznych dzięki zdefiniowaniu opisu robota względem ścieżki w formie ograniczenia prędkościowego, co wynika z Twierdzenia 1.
$\mathcal{T}_4$	W realizacji zadania śledzenia ścieżki można stosować różne sterowniki dynamiczne bez naruszenia ogólnej architektury układu sterowania. W rozdziale 4 wskazano, że sterownik realizujący zadanie śledzenia ścieżki zbudowany jest z dwóch poziomów: sterownika kinematycznego oraz sterownika dynamicznego, które działają równolegle. Sterownik kinematyczny odpowiada za spełnienie narzuconych ograniczeń prędkościowych, a sterownik dynamiczny – za realizację odpowiednich profili prędkościowych. Dzięki temu sterownik dynamiczny można dobrać dowolnie, zgodnie z poziomem znajomości modelu dynamiki robota. Wskazują na to twierdzenia przedstawione w rozdziałach 5 oraz 6. Przedstawiono tam rozwiązania dla różnych poziomów znajomości dynamiki obiektów holonomicznych oraz mobilnych nieholonomicznych. Za każdym razem stosowano jednak ten sam sterownik kinematyczny.
$\mathcal{T}_5$	Przedstawione podejście oparte o parametryzacje krzywoliniowe można rozszerzyć do sterowania posturą robota względem ścieżki. Opis orientacji robota względem ścieżki został zdefiniowany w rozdziale 3.3. Dalej w rozdziale 3 przedstawiono równania postury robota względem ścieżki. Wskazano, że opis parametryczny jest znakomitym narzędziem do opisu położenia i orientacji robota względem układu na ścieżce. Taka definicja może być przydatna zwłaszcza w realizacji zadań manipulacyjnych. Poprawność rozwiązania została zweryfikowana symulacyjnie oraz eksperymentalnie w rozdziale 5.4.2.
$\mathcal{T}_6$	Ograniczenia na sterowania można jawnie uwzględnić w algorytmach śledzenia ścieżki. W rozdziale 8 przedstawiono różne metody realizacji tego aspektu.
$\mathcal{T}_7$	Parametryczny opis robota względem ścieżki można zastosować do śledzenia rzeczywistych obiektów. Przykład takiego rozwiązania został zaprezentowany w rozdziale 9. Przedstawione studium przypadku obrazuje, w jaki sposób można dostosować rozwijane algorytmy śledzenia ścieżki oparte o parametryzacje krzywoliniowe do realizacji manewru przechwytywania obiektów dynamicznych.

Literatura

- [1] A. S. S. Abadi, P. A. Hosseinabadi, S. Mekhilef, A. Ordys. A new strongly predefined time sliding mode controller for a class of cascade high-order nonlinear systems. *Archives of Control Sciences*, 30(3):599–620, 2020.
- [2] F. Aghili. A prediction and motion-planning scheme for visually guided robotic capturing of free-floating tumbling objects with uncertain dynamics. *IEEE Transactions on Robotics*, 28(3):634–649, 2012.
- [3] A. Al-Shanoon, H. Lang. Robotic manipulation based on 3-D visual servoing and deep neural networks. *Robotics and Autonomous Systems*, 152(104041), 2022.
- [4] O. Amidi, C. E. Thorpe. Integrated mobile robot control. W. H. Chun, W. J. Wolfe, redaktorzy, *Mobile Robots V*, wolumen 1388, strony 504–523. International Society for Optics and Photonics (SPIE), 1991.
- [5] A. Bartoszewicz, K. Adamiak. A reference trajectory based discrete time sliding mode control strategy. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 29(3):517–525, 2019.
- [6] E. Bayro-Corrochano. *Geometric Algebra Applications. Robot Modelling and Control*, wolumen 2. Springer Cham, 2020.
- [7] H. Berghuis. *Model-based Robot Control: from Theory to Practice*. Praca doktorska, Uniwersytet Twente, 1993.
- [8] R. L. Bishop. There is more than one way to frame a curve. *The American Mathematical Monthly*, 82(3):246–251, 1975.
- [9] M. Bombile, A. Billard. Bimanual dynamic grabbing and tossing of objects onto a moving target. *Robotics and Autonomous Systems*, 167(104481), 2023.
- [10] M. Buehler, K. Iagnemma, S. Singh. *The DARPA Urban Challenge. Autonomous Vehicles in City Traffic*. Springer Berlin, Heidelberg, 2009.
- [11] H. Cai, S. Guo, H. Gao. A dynamic leader–follower approach for line marching of swarm robots. *Unmanned Systems*, 11(1):67–82, 2023.
- [12] G. Campion, G. Bastin, B. D’Andréa-Novel. Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 12:47–61, 1996.
- [13] C. Canudas de Wit, G. Bastin, B. Siciliano. *Theory of Robot Control*. Springer-Verlag, Londyn, wydanie 1, 1996.
- [14] D. Carroll, E. Köse, I. Sterling. Improving Frenet’s Frame Using Bishop’s Frame. *Journal of Mathematics Research*, 5:97–106, 2013.

- [15] Y. Chen, J. Yu, Y. Mei, Y. Wang, X. Su. Modified central force optimization (MCFO) algorithm for 3D UAV path planning. *Neurocomputing*, 171:878–888, 2016.
- [16] V. Cichella, I. Kaminer, E. Xargay, V. Dobrokhodov, N. Hovakimyan, A. P. Aguiar, A. M. Pascoal. A Lyapunov-based approach for Time-Coordinated 3D Path-Following of multiple quadrotors. *Proceedings of the 51st Annual IEEE Conference on Decision and Control*, strony 1776–1781, Maui, Hawaje, USA, 2012.
- [17] V. D. Cong, L. D. Hanh. A review and performance comparison of visual servoing controls. *International Journal of Intelligent Robotics and Applications*, 7:65–90, 2023.
- [18] L. Consolini, M. Maggiore, C. Nielsen, M. Tosques. Path following for the PVTOL aircraft. *Automatica*, 46(8):1284–1296, 2010.
- [19] M. M. Costa, M. F. Silva. A survey on path planning algorithms for mobile robots. *2019 IEEE International Conference on Autonomous Robot Systems and Competitions (ICARSC)*, strony 1–7, Porto, Portugalia, 2019.
- [20] H. C. Crenshaw, L. Edelstein-Keshet. Orientation by helical motion–II. Changing the direction of the axis of motion. *Bulletin of Mathematical Biology*, 55:213–230, 1993.
- [21] E. A. Croft, R. G. Fenton, B. Benhabib. Time-optimal interception of objects moving along predictable paths. *Proceedings of IEEE International Symposium on Assembly and Task Planning*, strony 419–425, Pittsburgh, PA, USA, 1995.
- [22] N. Dadkhah, B. Mettler. Control system design and evaluation for robust autonomous rotorcraft guidance. *Control Engineering Practice*, 21(11):1488–1506, 2013. Advanced Software Engineering in Industrial Automation (INCOM’09).
- [23] O. Dahl, L. Nielsen. Torque-limited path following by online trajectory time scaling. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 6(5):554–561, 1990.
- [24] E. Damar. Adjoint curves of special Smarandache curves with respect to Bishop frame. *AIMS Mathematics*, 9(12):35355–35376, 2024.
- [25] I. Danaïla, P. Joly, S. M. Kaber, M. Postel. *An Introduction to Scientific Computing: Twelve Computational Projects Solved with MATLAB*. Springer-Verlag, Nowy Jork, 2007.
- [26] K. Do. Global output-feedback path-following control of unicycle-type mobile robots: A level curve approach. *Robotics and Autonomous Systems*, 74:229–242, 2015.
- [27] W. Domski, A. Mazur. Path tracking with orthogonal parametrization for a satellite with partial state information. *Proceedings of the 15th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics (ICINCO 2018)*, wolumen 2, strony 262–267, 2018.
- [28] L. E. Dubins. On curves of minimal length with a constraint on average curvature, and with prescribed initial and terminal positions and tangents. *American Journal of Mathematics*, 79(3):497–516, 1957.
- [29] I. Duleba. Modeling and control of mobile manipulators. *IFAC Proceedings Volumes*, 33(27):447–452, 2000. IFAC Symposium on Robot Control (SYROCO 2000), Wiedeń, Austria.

- [30] F. Dyba. Video of the experiment results: algorithm for a redundant manipulator to follow poses with respect to the desired path based on the non-orthogonal Serret–Frenet parametrization and unit quaternions. [video]. Dostępny w Atlasie Zasobów Otwartej Nauki, <https://zasobynauki.pl/zasoby/video-of-the-experiment-results-algorithm-for-a-redundant-manipulator-to-follow-poses-with-respect,83193/>. Licencja: CC BY-SA 4.0, <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/legalcode.pl>. Data dostępu: 22 września 2025.
- [31] F. Dyba. Video of the experiment results: algorithm for a redundant manipulator to follow poses with respect to the desired path based on the non-orthogonal Serret–Frenet parametrization and Euler angles. [video]. Dostępny w Atlasie Zasobów Otwartej Nauki, <https://zasobynauki.pl/zasoby/video-of-the-experiment-results-algorithm-for-a-redundant-manipulator-to-follow-poses-with-respect,83192/>. Licencja: CC BY-SA 4.0, <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/legalcode.pl>. Data dostępu: 22 września 2025.
- [32] F. Dyba. Video of the experiment results: path following algorithm based on the non-orthogonal Bishop parametrization for a redundant manipulator. [video]. Dostępny w Atlasie Zasobów Otwartej Nauki, <https://zasobynauki.pl/zasoby/video-of-the-experiment-results-path-following-algorithm-based-on-the-non-orthogonal-bishop-paramet,83191/>. Licencja: CC BY-SA 4.0, <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/legalcode.pl>. Data dostępu: 22 września 2025.
- [33] F. Dyba. Video of the experiment results: path following algorithm based on the non-orthogonal Serret–Frenet parametrization and the fully known robot dynamics for a redundant manipulator. [video]. Dostępny w Atlasie Zasobów Otwartej Nauki, <https://zasobynauki.pl/zasoby/video-of-the-experiment-results-path-following-algorithm-based-on-the-non-orthogonal-serret-frenet,83190/>. Licencja: CC BY-SA 4.0, <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/legalcode.pl>. Data dostępu: 22 września 2025.
- [34] F. Dyba. *Zastosowanie parametryzacji krzywoliniowych do realizacji różnych zadań robotycznych*. Praca dyplomowa magisterska, Politechnika Wrocławska, 2021.
- [35] F. Dyba. Experimental Validation of the Non-Orthogonal Serret–Frenet Parametrization Applied to the Path Following Task. *Proceedings of the 20th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics - Volume 1: ICINCO*, strony 608–615, Rzym, Włochy, 2023. INSTICC, SciTePress.
- [36] F. Dyba. Parallel position and orientation control for a redundant manipulator performing the path following task. *2024 13th International Workshop on Robot Motion and Control (RoMoCo)*, strony 199–204, Poznań, Polska, 2024. IEEE.
- [37] F. Dyba. Control of the end-effector orientation in the path following task for a manipulator. G. Gini, H. Nijmeijer, D. Filev, redaktorzy, *Informatics in Control, Automation and Robotics. 20th International Conference, ICINCO 2023 Rome, Italy, November 13–15, 2023 Revised Selected Papers*, Lecture Notes in Electrical Engineering. Springer Cham, 2025. W druku.
- [38] F. Dyba, M. Frego. Non-Orthogonal Serret–Frenet Parametrization Applied to Path Following of B-Spline Curves by a Mobile Manipulator. *Robotics*, 13(9):1–18, 2024.

- [39] F. Dyba, A. Mazur. Comparison of curvilinear parametrization methods and avoidance of orthogonal singularities in the path following task. *Journal of Automation, Mobile Robotics and Intelligent Systems*, 17(3):46–64, 2024.
- [40] F. Dyba, A. Mazur. Sterowanie z ograniczonym momentem w zadaniu śledzenia ścieżki manipulatora. A. Mazur, C. Zieliński, redaktorzy, *Postępy robotyki*, strony 105–114. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 2025.
- [41] P. Encarnacao, A. Pascoal. 3D path following for autonomous underwater vehicle. *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*, wolumen 3, strony 2977–2982, Sydney, Australia, 2000.
- [42] E. Erkan, S. Yüce. Serret-Frenet Frame and Curvatures of Bézier Curves. *Mathematics*, 6(12), 2018.
- [43] M. Frego. Closed form parametrisation of 3D clothoids by arclength with both linear varying curvature and torsion. *Applied Mathematics and Computation*, 421(126907), 2022.
- [44] F. Frenet. Sur les courbes à double courbure. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 17:437–447, 1852.
- [45] M. Galicki. Adaptive control of kinematically redundant manipulator along a prescribed geometric path. K. Kozłowski, redaktor, *Robot Motion and Control*, wolumen 335, strony 129–139, Londyn, 2006. Springer London.
- [46] V. M. Gonçalves, B. V. Adorno, A. Crosnier, P. Fraisse. Stable-by-design kinematic control based on optimization. *IEEE Transactions on Robotics*, 36(3):644–656, 2020.
- [47] V. M. Gonçalves, L. C. A. Pimenta, C. A. Maia, B. C. O. Dutra, G. A. S. Pereira. Vector fields for robot navigation along time-varying curves in n -dimensions. *IEEE Transactions on Robotics*, 26(4):647–659, 2010.
- [48] C. Guarino Lo Bianco, M. Faroni, M. Beschi, A. Visioli. A predictive technique for the real-time trajectory scaling under high-order constraints. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 27(1):315–326, 2022.
- [49] A. J. Hanson. *Visualizing quaternions*. Morgan Kaufmann Publishers, Elsevier, Canada, 2006.
- [50] Y. He, J. Gao, Y. Chen. Deep learning-based pose prediction for visual servoing of robotic manipulators using image similarity. *Neurocomputing*, 491:343–352, 2022.
- [51] M. Heller. *Uchwycić przemijanie*. Copernicus Center Press, wydanie 3, 2020.
- [52] S. Hota, D. Ghose. A modified Dubins method for optimal path planning of a miniature air vehicle converging to a straight line path. *Proceedings of the 2009 Conference on American Control Conference, ACC'09*, strony 2397–2402, St. Louis, Missouri, USA, 2009. IEEE Press.
- [53] N. Hung, F. Rego, J. Quintas, J. Cruz, M. Jacinto, D. Souto, A. Potes, L. Sebastiao, A. Pascoal. A review of path following control strategies for autonomous robotic vehicles: Theory, simulations, and experiments. *Journal of Field Robotics*, 40(3):747–779, 2023.

- [54] N. T. Hung, A. M. Pascoal, T. A. Johansen. Cooperative path following of constrained autonomous vehicles with model predictive control and event-triggered communications. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 30(7):2644–2670, 2020.
- [55] A. Iglesias, A. Gálvez, C. Loucera. Two Simulated Annealing Optimization Schemas for Rational Bézier Curve Fitting in the Presence of Noise. *Mathematical Problems in Engineering*, 2016(1):8241275, 2016.
- [56] S. Islam, X. P. Liu. Robust sliding mode control for robot manipulators. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 58(6):2444–2453, 2011.
- [57] W. Jacak, K. Tchoń. *Podstawy Robotyki*. Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 1992.
- [58] H. Jafarzadeh, C. H. Fleming. An exact geometry-based algorithm for path planning. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 28(3):493–504, 2018.
- [59] J. Kabziński, P. Mosiołek. *Projektowanie nieliniowych układów sterowania*. Wydawnictwo Naukowe PWN, 2018.
- [60] M. Kaczmarek. *Sterowanie pozycyjne i siłowe manipulatorów z ograniczeniami holonomicznymi i nieholonomicznymi*. Praca doktorska, Politechnika Wrocławska, 2019.
- [61] Y. A. Kapitanyuk, A. V. Proskurnikov, M. Cao. A guiding vector-field algorithm for path-following control of nonholonomic mobile robots. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 26(4):1372–1385, 2018.
- [62] S. Kato, E. Takeuchi, Y. Ishiguro, Y. Ninomiya, K. Takeda, T. Hamada. An open approach to autonomous vehicles. *IEEE Micro*, 35(6):60–68, 2015.
- [63] S. Kim, A. Shukla, A. Billard. Catching objects in flight. *IEEE Transactions on Robotics*, 30(5):1049–1065, 2014.
- [64] Kinova Robotics. KINOVA® Gen3 Ultra lightweight robot user guide r10.0. Raport instytutowy EN-UG-014-r10.0-202412, Kinova inc., Quebec, Kanada, 2024. Dostęp: 22 września 2025.
- [65] K. Kozłowski. *Modelling and Identification in Robotics*. Springer London, 1998.
- [66] M. Krstić, I. Kanellakopoulos, P. V. Kokotovic. *Nonlinear and Adaptive Control Design*. John Wiley & Sons, Inc., Nowy Jork, 1995.
- [67] J. M. Lee. *Riemannian manifolds: an introduction to curvature*. Springer-Verlag, Nowy Jork, 1997.
- [68] X. Li, G. Zhao, B. Li. Generating optimal path by level set approach for a mobile robot moving in static/dynamic environments. *Applied Mathematical Modelling*, 85:210–230, 2020.
- [69] Y.-L. Liao, M.-J. Zhang, L. Wan. Serret-Frenet frame based on path following control for underactuated unmanned surface vehicles with dynamic uncertainties. *Journal of Central South University*, 22:214–223, 2015.
- [70] H. Liu, D. Pei. Singularities of a Space Curve according to the Relatively Parallel Adapted Frame and Its Visualization. *Mathematical Problems in Engineering*, 2013(1):512020, 2013.

- [71] I. Lugo-Cárdenas, S. Salazar, R. Lozano. Lyapunov Based 3D Path Following Kinematic Controller for a Fixed Wing UAV. *IFAC-PapersOnLine*, 50(1):15946–15951, 2017. 20th IFAC World Congress.
- [72] M. A. Luu, D. E. Hastings. Review of on-orbit servicing considerations for low-earth orbit constellations. *Proceedings of ASCEND'2021 Conference*, Las Vegas, NV, USA, 2021.
- [73] A. B. Martinsen, A. M. Lekkas. Straight-path following for underactuated marine vessels using deep reinforcement learning. *IFAC-PapersOnLine*, 51(29):329–334, 2018. 11th IFAC Conference on Control Applications in Marine Systems, Robotics, and Vehicles CAMS 2018.
- [74] N. Marturi, M. Kopicki, A. Rastegarpanah, V. Rajasekaran, M. Adjigble, R. Stolkin, A. Leonardis, Y. Bekiroglu. Dynamic grasp and trajectory planning for moving objects. *Autonomous Robots*, 43:1241–1256, 2019.
- [75] A. Mazur. Hybrid adaptive control laws solving a path following problem for non-holonomic mobile manipulators. *International Journal of Control*, 77(15):1297–1306, 2004.
- [76] A. Mazur. *Sterowanie oparte na modelu dla nieholonomicznych manipulatorów mobilnych*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 2009.
- [77] A. Mazur. Trajectory tracking control in workspace-defined tasks for nonholonomic mobile manipulators. *Robotica*, 28(1):57–68, 2010.
- [78] A. Mazur, F. Dyba. The Non-orthogonal Serret–Frenet Parametrization Applied to the Path Following Problem of a Manipulator with Partially Known Dynamics. *Archives of Control Sciences*, 33(2):339–370, 2023.
- [79] A. Mazur, F. Dyba. A Robust Path Following Algorithm Based on the Orthogonal Bishop Parametrization for a Non-holonomic Mobile Manipulator. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 35(2):209–224, 2025.
- [80] A. Mazur, J. Płaskonka. The Serret–Frenet parametrization in a control of a mobile manipulator of (nh, h) type. *IFAC Proceedings Volumes*, 45(22):405–410, 2012. 10th IFAC Symposium on Robot Control.
- [81] A. Mazur, J. Płaskonka, M. Kaczmarek. Following 3D paths by a manipulator. *Archives of Control Sciences*, 25(1):117–133, 2015.
- [82] A. Mazur, C. Schmid. Adaptive λ -tracking for rigid manipulators. A. Morecki, G. Bianchi, C. Rzymkowski, redaktorzy, *Romansy 13. Theory and practice of robots and manipulators*, strony 103–112, Wiedeń, Austria, 2000. Springer.
- [83] A. Mazur, D. Szakiel. On path following control of nonholonomic mobile manipulators. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 19(4):561–574, 2009.
- [84] A. Micaelli, C. Samson. Trajectory tracking for unicycle-type and two-steering-wheels mobile robots. *Technical Report No. 2097*, Sophia-Antipolis, 1993. INRIA.
- [85] M. M. Michałek. A highly scalable path-following controller for N-trailers with off-axle hitching. *Control Engineering Practice*, 29:61–73, 2014.

- [86] M. M. Michałek, T. Gawron. VFO path following control with guarantees of positionally constrained transients for unicycle-like robots with constrained control input. *Journal of Intelligent and Robotic Systems: Theory and Applications*, 89(1-2):191–210, 2018.
- [87] F. Milano, G. Tzounas, I. Dassios, T. Kërçi. Applications of the Frenet Frame to Electric Circuits. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 69(4):1668–1680, 2022.
- [88] F. Miyazaki, M. Takeuchi, M. Matsushima. Realization of the table tennis task based on virtual targets. *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA 2002)*, wolumen 4, strony 3844–3849, Waszyngton, DC, USA, 2002.
- [89] A. Morro, A. Sgorbissa, R. Zaccaria. Path following for unicycle robots with an arbitrary path curvature. *IEEE Transactions on Robotics*, 27(5):1016–1023, 2011.
- [90] S. H. Nazra, R. A. Abdel-Baky. Time-Like Sweeping Surfaces with a Bishop Frame in the Minkowski 3-Space E13. *Mathematical Problems in Engineering*, 2022(1):4189643, 2022.
- [91] O. Nelles. Nonlinear dynamic system identification. *Nonlinear System Identification: From Classical Approaches to Neural Networks and Fuzzy Models*, strony 547–577. Springer Berlin Heidelberg, 2001.
- [92] D. R. Nelson, D. B. Barber, T. W. McLain, R. W. Beard. Vector field path following for miniature air vehicles. *IEEE Transactions on Robotics*, 23(3):519–529, 2007.
- [93] J. Oprea. *Differential Geometry and Its Applications*. Prentice Hall, Waszyngton, Cleveland State University, 2007.
- [94] G. Pająk. *Manipulatory mobilne. Zadania z ograniczeniami na stan i sterowanie*. Oficyna Wydawnicza Uniwersytetu Zielonogórskiego, Zielona Góra, 2019.
- [95] G. Pająk, I. Pająk. Collision-free sub-optimal trajectory planning of the redundant manipulators. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*, 15(3):799–810, 2010.
- [96] G. Pająk, I. Pająk. Sub-optimal trajectory planning for mobile manipulators. *Robotica*, 33(6):1181–1200, 2015.
- [97] I. Pająk. *Współpraca manipulatorów mobilnych: ograniczenia na stan i sterowanie*. Oficyna Wydawnicza Uniwersytetu Zielonogórskiego, Zielona Góra, 2019.
- [98] E. Papadopoulos, F. Aghili, O. Ma, R. Lampariello. Robotic manipulation and capture in space: A survey. *Frontiers in Robotics and AI*, 8:686723, 2021.
- [99] S. Park, J. Deyst, J. P. How. Performance and Lyapunov Stability of a Nonlinear Path Following Guidance Method. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 30(6):1718–1728, 2007.
- [100] L. Piegl, W. Tiller. *The NURBS Book*. Monographs in Visual Communication. Springer Berlin Heidelberg, 1997.
- [101] J. Płaskonka. Path following control algorithm for planar holonomic N-link manipulators using non-singular path parametrization. *Proceedings 19th International*

- Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR)*, strony 216–220, Międzyzdroje, Polska, 2014.
- [102] J. Płaskonka. Different kinematic path following controllers for a wheeled mobile robot of (2,0) type. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 77(3):481–498, 2015.
 - [103] Z. Qu, J. Dorsey. Robust tracking control of robots by a linear feedback law. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(9):1081–1084, 1991.
 - [104] A. M. C. Rezende, V. M. Goncalves, L. C. A. Pimenta. Constructive time-varying vector fields for robot navigation. *IEEE Transactions on Robotics*, 38(2):852–867, 2022.
 - [105] M. Rokonzaman, N. Mohajer, S. Nahavandi, S. Mohamed. Review and performance evaluation of path tracking controllers of autonomous vehicles. *IET Intelligent Transport Systems*, 15(5):646–670, 2021.
 - [106] B. Rubí, R. Pérez, B. Morcego. A Survey of Path Following Control Strategies for UAVs Focused on Quadrotors. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 98(2):241–265, 2020.
 - [107] C. Samson. Control of chained systems application to path following and time-varying point-stabilization of mobile robots. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(1):64–77, 1995.
 - [108] P. S. Schenker, T. L. Huntsberger, P. Pirjanian, E. T. Baumgartner, E. Tunstel. Planetary Rover Developments Supporting Mars Exploration, Sample Return and Future Human-Robotic Colonization. *Autonomous Robots*, 14(2):103–126, 2003.
 - [109] J. M. Selig, Y. Wu. Interpolated rigid-body motions and robotics. *2006 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, strony 1086–1091, 2006.
 - [110] J.-A. Serret. Sur quelques formules relatives à la théorie des courbes à double courbure. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 16:193–207, 1851.
 - [111] R. Sharma, J.-Y. Herve, P. Cucka. Dynamic robot manipulation using visual tracking. *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics Automation*, strony 1844–1849, Nicea, Francja, 1992.
 - [112] B. Siciliano, O. Khatib. *Handbook of Robotics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2007.
 - [113] B. Siciliano, L. Sciavicco, L. Villani, G. Oriolo. *Robotics: Modelling, Planning and Control*. Advanced Textbooks in Control and Signal Processing. Springer-Verlag, Londyn, 2009.
 - [114] J. Slotine, W. Li. Adaptive manipulator control: a case study. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33(11):995–1003, 1988.
 - [115] J.-J. Slotine, W. Li. *Applied nonlinear control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 1991.
 - [116] D. Soetanto, L. Lapierre, A. M. Pascoal. Adaptive, non-singular path-following control of dynamic wheeled robots. *42nd IEEE International Conference on Decision and Control*, 2:1765–1770, 2003.
 - [117] M. Spong, M. Vidyasagar. *Robot Dynamics and Control*. John Wiley & Sons, Inc., Nowy Jork, 1991.

- [118] P. Sujit, S. Saripalli, J. Sousa. Unmanned aerial vehicle path following: A survey and analysis of algorithms for fixed-wing unmanned aerial vehicles. *IEEE Control Systems*, 34(1):42–59, 2014.
- [119] K. Sun, X. Liu. Path planning for an autonomous underwater vehicle in a cluttered underwater environment based on the heat method. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 31(2):289–301, 2021.
- [120] A. Tagliavini, C. Guarino Lo Bianco. η^3 -splines for the generation of 3D Cartesian paths with third order geometric continuity. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 72:102203, 2021.
- [121] K. Tchoń, J. Jakubiak, K. Zadarnowska. Doubly nonholonomic mobile manipulators. *IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2004. Proceedings. ICRA '04. 2004*, wolumen 5, strony 4590–4595, 2004.
- [122] K. Tchoń, A. Mazur, I. Duleba, R. Hossa, R. Muszyński. *Manipulatory i roboty mobilne: Modele, Planowanie Ruchu, Sterowanie*. Akademicka Oficyna Wydawnicza PLJ, Warszawa, 2000.
- [123] K. Teramoto. Parallel and dual surfaces of cuspidal edges. *Differential Geometry and its Applications*, 44:52–62, 2016.
- [124] A. Thoesen, H. Marvi. Planetary surface mobility and exploration: A review. *Current Robotics Reports*, 2(3):239–249, 2021.
- [125] F. Thomas. Approaching dual quaternions from matrix algebra. *IEEE Transactions on Robotics*, 30(5):1037–1048, 2014.
- [126] V. I. Utkin. *Sliding Modes in Control and Optimization*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1992.
- [127] P. Walker, S. Amirpour Amraii, M. Lewis, N. Chakraborty, K. Sycara. Control of swarms with multiple leader agents. *2014 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics (SMC)*, strony 3567–3572, 2014.
- [128] C. Wang, J. Du, J. Wang, Y. Ren. AUV Path Following Control using Deep Reinforcement Learning Under the Influence of Ocean Currents. *Proceedings of the 2021 5th International Conference on Digital Signal Processing, ICDSP '21*, strona 225–231, Nowy Jork, NY, USA, 2021. Association for Computing Machinery.
- [129] J. Wang, K. Zhang, M. Yang, X. Zhang, F. Liang. A time-optimal intersection search algorithm for robot grasping. *Mathematical Problems in Engineering*, 2022(1):5349426, 2022.
- [130] J. P. Wilhelm, G. Clem. Vector Field UAV Guidance for Path Following and Obstacle Avoidance with Minimal Deviation. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 42(8):1848–1856, 2019.
- [131] C.-C. Wong, M.-Y. Chien, R.-J. Chen, H. Aoyama, K.-Y. Wong. Moving object prediction and grasping system of robot manipulator. *IEEE Access*, 10:20159–20172, 2022.
- [132] Y. Yamamoto, X. Yun. Effect of the dynamic interaction on coordinated control of mobile manipulators. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 12(5):816–824, 1996.

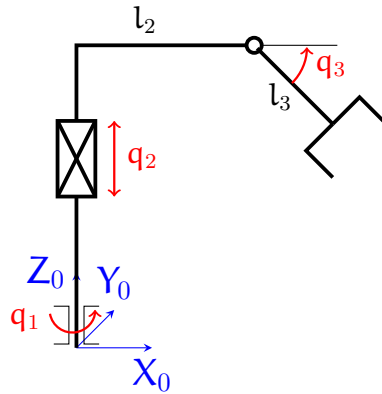
- [133] J. Yang, C. Liu, M. Coombes, Y. Yan, W.-H. Chen. Optimal Path Following for Small Fixed-Wing UAVs Under Wind Disturbances. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 29(3):996–1008, 2021.
- [134] S.-M. Yang, M. Magnusson, J. A. Stork, T. Stoyanov. Data-driven grasping and pre-grasp manipulation using hierarchical reinforcement learning with parameterized action primitives. *IROS 2023 Workshop on Leveraging Models for Contact-Rich Manipulation*, 2023.
- [135] W. Yao. *Guiding Vector Fields for Robot Motion Control*. Springer Tracts in Advanced Robotics. Springer Cham, 2023.
- [136] W. Yao, H. G. de Marina, B. Lin, M. Cao. Singularity-free guiding vector field for robot navigation. *IEEE Transactions on Robotics*, 37(4):1206–1221, 2021.
- [137] X. Ye, S. Liu. Velocity decomposition based planning algorithm for grasping moving object. *2018 IEEE 7th Data Driven Control and Learning Systems Conference (DDCLS)*, strony 644–649, Enshi, Chiny, 2018.
- [138] P. Y. Zhang, T. S. Lü. Real-time motion planning for a volleyball robot task based on a multi-agent technique. *Journal of Intelligent Robotic Systems*, 49:355–366, 2007.

Dodatek A

Modele robotów

A.1 Manipulator RTR

W badaniach przedstawionych w niniejszej rozprawie rozważono stacjonarny manipulator holonomiczny o trzech stopniach swobody: rotacyjnym, translacyjnym i rotacyjnym. Z tego względu manipulator został oznaczony skrótem RTR. Schemat robota przedstawiono na rys. A.1. Zmienne konfiguracyjne manipulatora RTR opisują pozycje kątowe dla



Rysunek A.1: Struktura kinematyczna manipulatora RTR.

przegubów rotacyjnych, q_1 oraz q_3 , oraz położenie przegubu translacyjnego q_2 . Wektor zmiennych stanu jest zdefiniowany jako

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

A.1.1 Kinematyka

Położenie końcówki chwytaka manipulatora w układzie bazy $X_0Y_0Z_0$ można uzyskać na podstawie parametryzacji Denavita–Hartenberga [122]. Parametry Denavita–Hartenberga dla manipulatora RTR zostały przedstawione w tabeli A.1, gdzie jako l_i oznaczono długość i -tego ogniwa manipulatora. Z przyjętej parametryzacji wynika homogeniczna macierz

Tabela A.1: Parametry Denavita–Hartenberga dla manipulatora RTR.

Ogniwo	Rot(Z, θ_i)	Trans(Z, d_i)	Trans(X, a_i)	Rot(X, α_i)
1	q_1	0	0	0
2	0	q_2	l_2	$\pi/2$
3	q_3	0	l_3	0

transformacji od układu bazowego do układu końcówki chwytaka

$$\Pi_0^3 = \begin{bmatrix} \cos q_1 \cos q_3 & -\cos q_1 \sin q_3 & \sin q_1 & \cos q_1(l_2 + l_3 \cos q_3) \\ \cos q_3 \sin q_1 & -\sin q_1 \sin q_3 & -\cos q_1 & \sin q_1(l_2 + l_3 \cos q_3) \\ \sin q_3 & \cos q_3 & 0 & q_2 + l_3 \sin q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

skąd można odczytać zależność położenia $\mathbf{p}$ od wartości zmiennych z przestrzeni konfiguracyjnej $\mathbf{q}$ [81]

$$\mathbf{p}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \cos q_1(l_2 + l_3 \cos q_3) \\ \sin q_1(l_2 + l_3 \cos q_3) \\ q_2 + l_3 \sin q_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Różniczkując równanie (A.3) względem czasu, można uzyskać równania opisujące prędkości końcówki chwytaka w przestrzeni zadaniowej

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \quad (\text{A.4})$$

gdzie $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ jest macierzą Jacobiego następującej postaci

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -\sin q_1(l_3 \cos q_3 + l_2) & 0 & -l_3 \cos q_1 \sin q_3 \\ \cos q_1(l_3 \cos q_3 + l_2) & 0 & -l_3 \sin q_1 \sin q_3 \\ 0 & 1 & l_3 \cos q_3 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Analizując postać jakobianu (A.5), należy zwrócić uwagę na konfiguracje osobliwe manipulatora RTR, dla których nie istnieje transformacja odwrotna zależności (A.4), a zachowanie manipulatora jest nieokreślone. Są to konfiguracje, w których wyznacznik jakobianu zeruje się. Wyznacznik macierzy Jacobiego dla manipulatora RTR jest równy

$$\det(\mathbf{J}) = -\sin q_3(l_2 + l_3 \cos q_3). \quad (\text{A.6})$$

Z równania (A.6) można wywnioskować, że osobliwości manipulatora występują wówczas, gdy zachodzi $q_3 = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, lub $\cos q_3 = -l_2/l_3$. Pierwszy z warunków ma swoją interpretację geometryczną w postaci wyprostowanego lub zagiętego ramienia manipulatora. Tych konfiguracji należy unikać. Drugi z warunków można łatwo wyeliminować poprzez zapewnienie odpowiednich parametrów geometrycznych – wystarczy zapewnić, że drugie ogniwo będzie dłuższe od trzeciego, tzn. $l_2 > l_3$ [60].

A.1.2 Dynamika

Dynamika obiektu holonomicznego dana jest równaniem (4.2). Poszczególne elementy dla manipulatora RTR przyjmują następujące wartości [57]:

- macierz bezwładności $\mathbf{Q}(\mathbf{q})$

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 & 0 \\ 0 & Q_{22} & Q_{23} \\ 0 & Q_{23} & Q_{33} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.7})$$

gdzie

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{1}{3}m_2l_2^2 + m_3l_2^2 + \frac{1}{3}m_3l_3^2 \cos^2 q_3 + m_3l_2l_3 \cos q_3, \\ Q_{22} &= m_2 + m_3, \\ Q_{23} &= \frac{1}{2}m_3l_3 \cos q_3, \\ Q_{33} &= \frac{1}{3}m_3l_3^2, \end{aligned}$$

- macierz sił Coriolisa i sił odśrodkowych $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & C_{13} \\ 0 & 0 & C_{23} \\ -C_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.8})$$

przy czym

$$\begin{aligned} C_{11} &= -\dot{q}_3 m_3 l_3 \left(\frac{1}{2}l_2 + \frac{1}{3}l_3 \cos q_3 \right) \sin q_3, \\ C_{13} &= -\dot{q}_1 m_3 l_3 \left(\frac{1}{2}l_2 + \frac{1}{3}l_3 \cos q_3 \right) \sin q_3, \\ C_{23} &= -\dot{q}_3 \frac{1}{2}m_3 l_3 \sin q_3, \end{aligned}$$

- wektor grawitacji $\mathbf{g}(\mathbf{q})$

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ (m_2 + m_3)g \\ \frac{1}{2}g m_3 l_3 \cos q_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

W powyższych wzorach g oznacza przyspieszenie ziemskie, natomiast m_i oznacza masę i -tego ogniwa manipulatora.

A.1.3 Wartości parametrów

W badaniach symulacyjnych uwzględniono wartości parametrów masowych i geometrycznych, które zostały przedstawione w tabeli A.2.

Tabela A.2: Parametry geometryczne i masowe manipulatora RTR.

Symbol	Wartość	Opis
m_2	20 [kg]	masa drugiego ogniwa manipulatora
m_3	20 [kg]	masa trzeciego ogniwa manipulatora
l_2	0,3 [m]	długość drugiego ogniwa manipulatora
l_3	0,2 [m]	długość trzeciego ogniwa manipulatora

A.2 Manipulator redundantny

Innym manipulatorem holonomicznym rozważanym w rozprawie jest robot KINOVA[®] Gen3 [64]. Jest to manipulator redundantny o siedmiu stopniach swobody, które stanowi siedem przegubów rotacyjnych. Robot ten został wykorzystany zarówno do badań symulacyjnych, jak i walidacji eksperymentalnej. Strukturę kinematyczną robota przedstawiono na rys. A.2. Na schemacie zaznaczono układy lokalne stowarzyszone z bazą manipulatora, kolejnymi przegubami, a także interfejsem*, do którego można przyłączyć chwytak. Ponadto, na schemacie przedstawiono parametry geometryczne robota. Manipulator znajdujący się na stanowisku laboratoryjnym został przedstawiony na rys. A.3.

Stan manipulatora definiują pozycje katowe w kolejnych przegubach. Zachodzi zatem $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^7$, gdzie

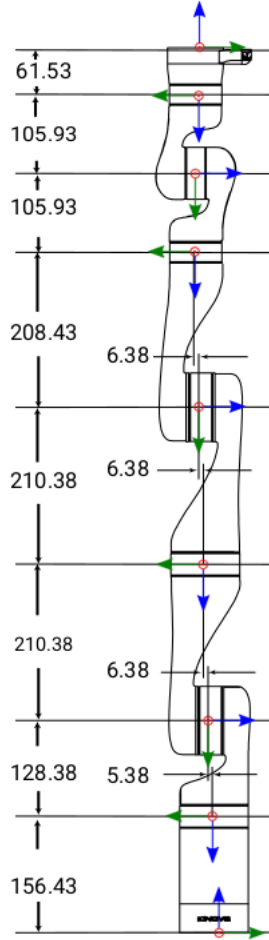
$$\mathbf{q} = (q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6 \ q_7)^T. \quad (\text{A.10})$$

A.2.1 Kinematyka

Transformacje pomiędzy kolejnymi układami lokalnymi, zaznaczonymi na rys. A.2, zostały zdefiniowane w dokumentacji manipulatora [64]. Są one dane następującymi macierzami

$$\begin{aligned}
\Pi_0^1 &= \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 & 0 \\ -\sin q_1 & -\cos q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0,1564 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \Pi_1^2 &= \begin{bmatrix} \cos q_2 & -\sin q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0,0054 \\ \sin q_2 & \cos q_2 & 0 & -0,1284 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
\Pi_2^3 &= \begin{bmatrix} \cos q_3 & -\sin q_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0,2104 \\ -\sin q_3 & -\cos q_3 & 0 & -0,0064 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \Pi_3^4 &= \begin{bmatrix} \cos q_4 & -\sin q_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0,0064 \\ \sin q_4 & \cos q_4 & 0 & -0,2104 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
\Pi_4^5 &= \begin{bmatrix} \cos q_5 & -\sin q_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0,2084 \\ -\sin q_5 & -\cos q_5 & 0 & -0,0064 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \Pi_5^6 &= \begin{bmatrix} \cos q_6 & -\sin q_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin q_6 & \cos q_6 & 0 & -0,1059 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
\Pi_6^7 &= \begin{bmatrix} \cos q_7 & -\sin q_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0,1059 \\ -\sin q_7 & -\cos q_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \Pi_7^8 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -0,0615 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

*Ten układ lokalny można utożsamić z układem narzędzia, jeśli chwytak nie jest zamontowany.



Rysunek A.2: Struktura kinematyczna manipulatora KINOVA[®] Gen3 wraz z parametrami geometrycznymi wyrażonymi w milimetrach (schemat pochodzi z dokumentacji technicznej robota [64]).

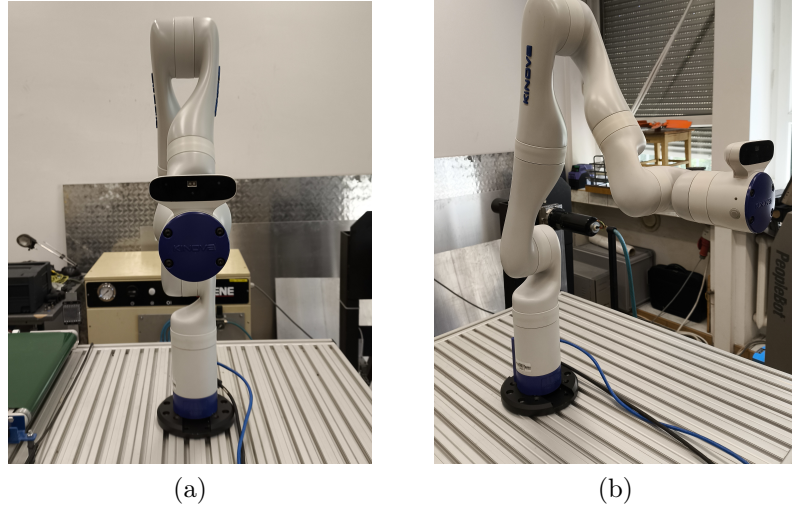
przy czym wszystkie wartości zostały podane w metrach. Na podstawie podanych macierzy można uzyskać transformację układu bazy do układu narzędzia (interfejsu) na podstawie zależności

$$\Pi_0^8 = \prod_{i=0}^7 \Pi_i^{i+1}. \quad (\text{A.11})$$

Z macierzy Π_0^8 można odczytać macierz rotacji opisującą orientację układu narzędzia względem układu bazy, a także położenie końcówki ramienia robotycznego względem układu bazy (ten punkt uwzględniono jako punkt prowadzenia robota w przedstawionych badaniach). Ze względu na rozbudowaną postać równań nie zostaną one podane w formie jawnej. Można je jednak uzyskać w prosty sposób, wykonując działanie (A.11).

Jakobian geometryczny w przestrzeni dla rozważanego manipulatora również można wyznaczyć na podstawie transformacji danej równaniem (A.11). Zgodnie z pracą [122], i -tą kolumnę jacobianu geometrycznego dla przegubu rotacyjnego można wyznaczyć z zależności

$$\mathbf{J}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_0^{i-1} \times (\mathbf{R}_0^{i-1})_{3\text{kol}} \\ (\mathbf{R}_0^{i-1})_{3\text{kol}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6, \quad (\text{A.12})$$



Rysunek A.3: Manipulator KINOVA[®] Gen3 na stanowisku laboratoryjnym w konfiguracji *HOME* [64].

gdzie $\mathbf{p}_0^{i-1}$ oznacza położenie układu $(i-1)$ -szego w układzie bazy, natomiast $(\mathbf{R}_0^{i-1})_{3\text{kol}}$ oznacza trzecią kolumnę macierzy rotacji opisującą orientację układu $(i-1)$ -szego w układzie bazy. Ponownie, ze względu na rozbudowaną formę równań, postać macierzy jacobianu manipulatora nie zostanie przytoczona w formie jawnej. Należy jednak podkreślić, że w dokumentacji [64] zostały przeanalizowane konfiguracje osobliwe ramienia robotycznego.

A.2.2 Dynamika

Równania dynamiki manipulatora redundantnego o siedmiu stopniach swobody są bardzo rozbudowane. Z tego powodu nie zostaną podane w formie jawnej. W niniejszym rozdziale przedstawiono jednak metodologię uzyskania tych równań wynikających z formalizmu Eulera–Lagrange’a [122]. W tej części przytoczono również parametry masowo-inercyjne manipulatora, które zostały zdefiniowane w dokumentacji [64] i wykorzystane do modelowania dynamiki robota.

Równanie dynamiki manipulatora holonomicznego, zgodnie z równaniem (4.2), przyjmuje ogólną postać

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{u}. \quad (\text{A.13})$$

Wektor grawitacji $\mathbf{g}$ można wyznaczyć jako gradient energii potencjalnej

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \frac{\partial V(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}, \quad (\text{A.14})$$

gdzie V oznacza całkowitą energię potencjalną, którą oblicza się zgodnie z zależnością

$$V(\mathbf{q}) = - \sum_{i=1}^7 m_i \mathbf{g}_v^T \mathbf{\Pi}_0^i \tilde{\mathbf{p}}_i, \quad (\text{A.15})$$

przy czym m_i oznacza masę i -tego ogniwa, $\mathbf{g}_v = (0 \ 0 \ -g \ 0)^T$ jest wektorem określającym kierunek działania przyspieszenia ziemskiego g względem układu podstawowego $X_0Y_0Z_0$, natomiast wektor $\tilde{\mathbf{p}}_i = (\tilde{x}_i \ \tilde{y}_i \ \tilde{z}_i \ 1)^T$ definiuje położenie środka masy ogniwa w lokalnym układzie odniesienia stowarzyszonym z przegubem poprzedzającym dane ogniwo. Wartości mas poszczególnych ogniw oraz współrzędne położenia środka masy zostały podane w dokumentacji [64] i przedstawione w tabeli A.3.

Tabela A.3: Wartości masy oraz współrzędne położenia środka masy dla kolejnych ogniw manipulatora KINOVA[®] Gen3.

Ogniwo	Masa m_i [kg]	Wsp. $\tilde{x}_i$ [m]	Wsp. $\tilde{y}_i$ [m]	Wsp. $\tilde{z}_i$ [m]
0 (baza)	1,697	-0,0006	-0,0002	0,0845
1	1,377	0	-0,01036	-0,0734
2	1,1636	0	-0,0996	-0,0133
3	1,1636	0	-0,0066	-0,1179
4	0,93	0	-0,0755	-0,0150
5	0,678	0	-0,0094	-0,0639
6	0,678	0	-0,0455	-0,0097
7	0,5	-0,0003	-0,0114	-0,0298

Macierz inercji $\mathbf{Q}$ można z kolei uzyskać na podstawie analizy energii kinetycznej manipulatora. W tym celu dla każdego ogniwa definiuje się macierz pseudoinercji postaci

$$\mathbf{I}_i = \begin{bmatrix} I_{xx_i} & I_{xy_i} & I_{xz_i} & m_i \tilde{x}_i \\ I_{xy_i} & I_{yy_i} & I_{yz_i} & m_i \tilde{y}_i \\ I_{xz_i} & I_{yz_i} & I_{zz_i} & m_i \tilde{z}_i \\ m_i \tilde{x}_i & m_i \tilde{y}_i & m_i \tilde{z}_i & m_i \end{bmatrix}. \quad (\text{A.16})$$

Wartości poszczególnych momentów bezwładności obliczone w układzie środka masy ogniwa względem układu lokalnego stowarzyszonego z przegubem poprzedzającym dane ogniwo podano w dokumentacji [64]. Zostały one przedstawione w tabeli A.4.

Tabela A.4: Wartości momentów bezwładności dla kolejnych ogniw manipulatora KINOVA[®] Gen3 (wyrażone w jednostce $[\text{kg} \cdot \text{m}^2]$).

Ogniwo	I_{xx}	I_{xy}	I_{xz}	I_{yy}	I_{yz}	I_{zz}
0 (baza)	0,005	0	0	0,004	0	0,002
1	0,005	0	0	0,005	0	0,001
2	0,011	0	0	0,001	-0,001	0,011
3	0,011	0	0	0,011	0,001	0,001
4	0,008	0	0	0,001	-0,001	0,008
5	0,002	0	0	0,002	0	0
6	0,002	0	0	0	0	0,002
7	0,001	0	0	0	0	0,001

Kolejne elementy macierzy bezwładności $\mathbf{Q}$ można wyznaczyć, korzystając z zależności

$$Q_{ij} = \sum_{p=0}^7 \text{tr} \left(\frac{\partial \Pi_0^p}{\partial q_i} \mathbf{I}_p \left(\frac{\partial \Pi_0^p}{\partial q_j} \right)^T \right), \quad (\text{A.17})$$

przy czym $\text{tr}(\cdot)$ oznacza ślad macierzy.

Macierz sił odśrodkowych i sił Coriolisa $\mathbf{C}$ można wyznaczyć na podstawie macierzy inercji $\mathbf{Q}$. W tym celu definiuje się symbole Christoffela I rodzaju dla macierzy bezwładności [122] jako

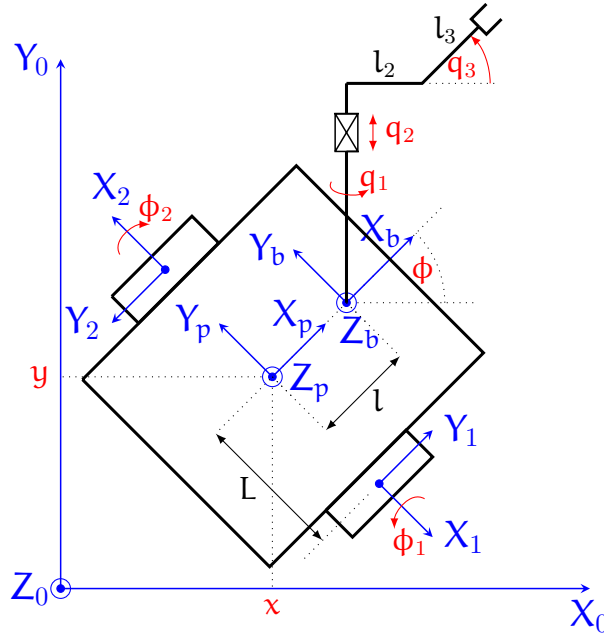
$$c_{kj}^i(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial Q_{ij}(\mathbf{q})}{\partial q_k} + \frac{\partial Q_{ik}(\mathbf{q})}{\partial q_j} - \frac{\partial Q_{jk}(\mathbf{q})}{\partial q_i} \right). \quad (\text{A.18})$$

Na tej podstawie można wyznaczyć kolejne elementy macierzy sił odśrodkowych i sił Coriolisa ze wzoru

$$C_{ij}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{k=1}^7 c_{kj}^i(\mathbf{q}) \dot{q}_k. \quad (\text{A.19})$$

A.3 Manipulator mobilny

W badaniach przedstawionych w niniejszej rozprawie rozważono manipulator mobilny typu (nh, h) . Platformę stanowi kołowy robot mobilny klasy $(2, 0)$, zwany monocyklem [12]. Jako manipulator uwzględniono ramię RTR o trzech stopniach swobody, które szczegółowo opisano w dodatku A.1. Schemat robota został przedstawiony na rys. A.4, gdzie zdefiniowano parametry geometryczne: L – połowa szerokości platformy mobilnej; l – odległość między środkiem ciężkości platformy mobilnej a punktem mocowania bazy manipulatora; l_i – długość i -tego ogniwa manipulatora, $i \in \{2, 3\}$. Jako stan rozważanego



Rysunek A.4: Schemat konstrukcji manipulatora mobilnego.

systemu robotycznego przyjęto wektor

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_p \\ \mathbf{q}_m \end{pmatrix}, \quad (\text{A.20})$$

gdzie $\mathbf{q}_p = (x \ y \ \phi \ \phi_1 \ \phi_2)^T$ oznacza stan platformy mobilnej, (x, y) to położenie środka masy platformy na płaszczyźnie X_0Y_0 w układzie globalnym, ϕ oznacza orien-

tację platformy w układzie globalnym, ϕ_i opisuje kąt obrotu i -tego koła, $i \in \{1, 2\}$; $\mathbf{q}_m = (q_1 \ q_2 \ q_3)^T$ oznacza zmienne konfiguracyjne manipulatora RTR.

A.3.1 Kinematyka

Dla ruchu platformy mobilnej zakłada się brak poślizgu poprzecznego, a także brak poślizgu wzdłużnego dla obu kół. Wówczas macierz Pfaffa z równania (4.4) przyjmuje postać

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}_p) = \begin{bmatrix} \sin \phi & -\cos \phi & 0 & 0 & 0 \\ \cos \phi & \sin \phi & L & -R & 0 \\ \cos \phi & \sin \phi & -L & 0 & -R \end{bmatrix}, \quad (\text{A.21})$$

gdzie R oznacza promień koła platformy. Dla tak określonych ograniczeń nieholonomicznych można zdefiniować równania kinematyki monocykla, które przyjmują postać bezdrowego układu sterowania (4.6)

$$\dot{\mathbf{q}}_p = \begin{bmatrix} \cos \phi & \cos \phi \\ \sin \phi & \sin \phi \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{R} & 0 \\ 0 & \frac{2}{R} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \mathbf{G}(\mathbf{q}_p) \boldsymbol{\eta}. \quad (\text{A.22})$$

Z równania (A.22) można wnioskować o interpretacji prędkości pomocniczych $\boldsymbol{\eta}$. Są one równe odpowiednio przeskalowanym prędkościom obrotowym poszczególnych kół monocykla. Za ich pomocą można również wyrazić podstawowe parametry prędkościowe platformy, jak prędkość liniowa V czy prędkość kątową ω

$$V = \eta_1 + \eta_2, \quad (\text{A.23a})$$

$$\omega = \frac{1}{L}(\eta_1 - \eta_2). \quad (\text{A.23b})$$

Położenie i orientację końcówki chwytaka manipulatora w układzie globalnym można uzyskać za pomocą złożenia dwóch transformacji. Najpierw należy wyznaczyć transformację z globalnego układu odniesienia $X_0 Y_0 Z_0$ do układu lokalnego stowarzyszonego z bazą manipulatora $X_b Y_b Z_b$, który znajduje się na platformie mobilnej

$$\boldsymbol{\Pi}_0^b = \mathbf{Trans}(X, x) \mathbf{Trans}(Y, y) \mathbf{Rot}(Z, \phi) \mathbf{Trans}(X, l), \quad (\text{A.24})$$

gdzie $\mathbf{Rot}(A, \alpha) \in \mathbb{SE}(4)$ oznacza homogeniczną macierz rotacji wokół osi A o kąt α , natomiast $\mathbf{Trans}(A, \alpha) \in \mathbb{SE}(4)$ to homogeniczna macierz opisująca translację wzdłuż osi A o długość α . Następnie, trzeba wyznaczyć transformację z układu bazy do układu narzędzia manipulatora, którą można oznaczyć jako $\boldsymbol{\Pi}_b^3$. Dla ramienia RTR została ona określona w rozdziale A.1. Równanie (A.2) definiuje przekształcenie z układu bazy do układu stowarzyszonego z chwytakiem na podstawie parametrów Denavita–Hartenberga podanych w tabeli A.1. Poprzez złożenie tych przekształceń można uzyskać homogeniczną macierz transformacji z układu globalnego $X_0 Y_0 Z_0$ do układu końcówki chwytaka mani-

pulatora mobilnego, która przyjmuje postać

$$\mathbf{\Pi}_0^3 = \mathbf{\Pi}_0^b \mathbf{\Pi}_b^3 = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{\phi+q_1} \mathbf{c}_{q_3} & -\mathbf{c}_{\phi+q_1} \mathbf{s}_{q_3} & \mathbf{s}_{\phi+q_1} & \mathbf{l} \mathbf{c}_{\phi} + \mathbf{c}_{\phi+q_1} (\mathbf{l}_2 + \mathbf{l}_3 \mathbf{c}_{q_3}) + \mathbf{x} \\ \mathbf{c}_{q_3} \mathbf{s}_{\phi+q_1} & -\mathbf{s}_{\phi+q_1} \mathbf{s}_{q_3} & -\mathbf{c}_{\phi+q_1} & \mathbf{l} \mathbf{s}_{\phi} + \mathbf{s}_{\phi+q_1} (\mathbf{l}_2 + \mathbf{l}_3 \mathbf{c}_{q_3}) + \mathbf{y} \\ \mathbf{s}_{q_3} & \mathbf{c}_{q_3} & 0 & \mathbf{q}_2 + \mathbf{l}_3 \mathbf{s}_{q_3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.25})$$

gdzie $\mathbf{s}_{\theta} = \sin \theta$ oraz $\mathbf{c}_{\theta} = \cos \theta$. Stąd położenie końcówki chwytaka manipulatora w globalnym układzie odniesienia, utożsamiane z punktem prowadzenia robota, można opisać równaniem

$$\mathbf{p}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \mathbf{l} \cos \phi + \cos(\phi + \mathbf{q}_1) (\mathbf{l}_2 + \mathbf{l}_3 \cos \mathbf{q}_3) + \mathbf{x} \\ \mathbf{l} \sin \phi + \sin(\phi + \mathbf{q}_1) (\mathbf{l}_2 + \mathbf{l}_3 \cos \mathbf{q}_3) + \mathbf{y} \\ \mathbf{q}_2 + \mathbf{l}_3 \sin \mathbf{q}_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.26})$$

Z kolei orientacja układu lokalnego stowarzyszonego z chwytakiem manipulatora wyrażona w układzie globalnym za pomocą macierzy rotacji jest równa

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos(\phi + \mathbf{q}_1) \cos \mathbf{q}_3 & -\cos(\phi + \mathbf{q}_1) \sin \mathbf{q}_3 & \sin(\phi + \mathbf{q}_1) \\ \sin(\phi + \mathbf{q}_1) \cos \mathbf{q}_3 & -\sin(\phi + \mathbf{q}_1) \sin \mathbf{q}_3 & -\cos(\phi + \mathbf{q}_1) \\ \sin \mathbf{q}_3 & \cos \mathbf{q}_3 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.27})$$

W dalszych rozważaniach pod uwagę zostaną wzięte jedynie współrzędne położenia chwytaka, gdyż tylko one zostały wykorzystane w badaniach symulacyjnych przedstawionych w niniejszej rozprawie.

Można zauważyć, że położenie chwytaka w globalnym układzie odniesienia opisane równaniem (A.26) nie zależy od pozycji kątowych poszczególnych kół platformy. Stąd można uprościć wektor stanu do postaci

$$\mathbf{q}_s = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \phi \\ \mathbf{q}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_{p1} \\ \mathbf{q}_m \end{pmatrix}. \quad (\text{A.28})$$

Wówczas równanie (A.22) można zdekomponować

$$\dot{\mathbf{q}}_p = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}_{p1} \\ \dot{\mathbf{q}}_{p2} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{G}_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{\eta}. \quad (\text{A.29})$$

Biorąc pod uwagę uproszczony wektor stanu manipulatora mobilnego $\mathbf{q}_s$, prędkości końcówki chwytaka w inercjalnym układzie odniesienia można opisać za pomocą równania

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{q}_s} \dot{\mathbf{q}}_s = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{q}_{p1}} & \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{q}_m} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_s = [\mathbf{J}_1 \quad \mathbf{J}_2] \dot{\mathbf{q}}_s = \mathbf{J}(\mathbf{q}_s) \dot{\mathbf{q}}_s, \quad (\text{A.30})$$

gdzie $\mathbf{J}(\mathbf{q}_s) = [\mathbf{J}_1 \quad \mathbf{J}_2]$ jest macierzą Jacobiego, dla której zachodzi

$$\mathbf{J}_1 = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{q}_{p1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\mathbf{l} \sin \phi - (\mathbf{l}_2 + \mathbf{l}_3 \cos \mathbf{q}_3) \sin(\phi + \mathbf{q}_1) \\ 0 & 1 & \mathbf{l} \cos \phi + (\mathbf{l}_2 + \mathbf{l}_3 \cos \mathbf{q}_3) \cos(\phi + \mathbf{q}_1) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.31a})$$

$$\mathbf{J}_2 = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{q}_m} = \begin{bmatrix} -(\mathbf{l}_2 + \mathbf{l}_3 \cos \mathbf{q}_3) \sin(\phi + \mathbf{q}_1) & 0 & -\mathbf{l}_3 \sin \mathbf{q}_3 \cos(\phi + \mathbf{q}_1) \\ (\mathbf{l}_2 + \mathbf{l}_3 \cos \mathbf{q}_3) \cos(\phi + \mathbf{q}_1) & 0 & -\mathbf{l}_3 \sin \mathbf{q}_3 \sin(\phi + \mathbf{q}_1) \\ 0 & 1 & \mathbf{l}_3 \cos \mathbf{q}_3 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.31b})$$

Uwzględniając zależności z równania (A.29), można przekształcić równanie (A.30) do postaci

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}} &= [\mathbf{J}_1 \mid \mathbf{J}_2] \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}_{p1} \\ \dot{\mathbf{q}}_m \end{pmatrix} = [\mathbf{J}_1 \mid \mathbf{J}_2] \begin{pmatrix} \mathbf{G}_1 \boldsymbol{\eta} \\ \dot{\mathbf{q}}_m \end{pmatrix} = \\ &= [\mathbf{J}_1 \mathbf{G}_1 \mid \mathbf{J}_2] \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \dot{\mathbf{q}}_m \end{pmatrix} = [\mathbf{J}_1^* \mid \mathbf{J}_2] \mathbf{z} = \mathbf{J}^*(\mathbf{q}_s) \mathbf{z},\end{aligned}\tag{A.32}$$

gdzie $\mathbf{z} = (\boldsymbol{\eta}^T \quad \mathbf{q}_m^T)^T$ jest rozszerzonym wektorem prędkości pomocniczych, a także zachodzi

$$\mathbf{J}_1^* = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} L \cos \phi - l \sin \phi - j \sin(\phi + q_1) & L \cos \phi + l \sin \phi + j \sin(\phi + q_1) \\ L \sin \phi + l \cos \phi + j \cos(\phi + q_1) & L \sin \phi - l \cos \phi - j \cos(\phi + q_1) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{A.33}$$

przy czym $j = l_2 + l_3 \cos q_3$.

Należy zauważyć, że równanie (A.32) opisuje system, dla którego jakobian $\mathbf{J}^* \in \mathbb{R}^{3 \times 5}$ jest macierzą prostokątną o wymiarach 3×5 . W celu zbadania konfiguracji osobliwych rozważanego obiektu można określić współczynnik manipulowalności, który definiowany jest jako wyznacznik macierzy manipulowalności, tj. $\mu = \det(\mathbf{M})$, gdzie $\mathbf{M} = \mathbf{J}^*(\mathbf{J}^*)^T$ [122].

A.3.2 Dynamika

Równania dynamiki nieholonomicznego manipulatora mobilnego (4.5), które wynikają z zasady d'Alemberta, można przedstawić, uwzględniając wprost część związaną z dynamiką platformy mobilnej oraz dynamiką ramienia robotycznego [80]

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} \\ \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_p \\ \ddot{\mathbf{q}}_m \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}_p \\ \dot{\mathbf{q}}_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{5 \times 1} \\ \mathbf{g}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{0}_{5 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 2} & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_p \\ \mathbf{u}_m \end{pmatrix}, \tag{A.34}$$

gdzie kolejne elementy mają następującą interpretację:

- $\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} \\ \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$ jest macierzą inercji mobilnego manipulatora;
- $\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$ jest macierzą sił odśrodkowych i Coriolisa;
- $\begin{pmatrix} \mathbf{0}_{5 \times 1} \\ \mathbf{g}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^8$ jest wektorem grawitacji. Zakłada się, że platforma mobilna porusza się cały czas na płaszczyźnie, więc można przyjąć, że jej energia potencjalna jest tożsamościowo równa zero;
- $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^3$ jest wektorem mnożników Lagrange'a. Więzy nieholonomiczne są zdefiniowane jedynie dla platformy mobilnej, więc mnożniki Lagrange'a nie występują w części modelu związanej z ramieniem robotycznym;
- $\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{0}_{5 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 2} & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{8 \times 5}$ jest macierzą wejściową;

- $\begin{pmatrix} \mathbf{u}_p \\ \mathbf{u}_m \end{pmatrix} = \mathbf{u} \in \mathbb{R}^5$ jest wektorem sterowań. Wektor $\mathbf{u}_p \in \mathbb{R}^2$ reprezentuje momenty sił przyłożone do kół platformy, natomiast $\mathbf{u}_m \in \mathbb{R}^3$ – momenty sił w przegubach ramienia robotycznego.

Warto podkreślić, że elementy macierzy $\mathbf{Q}_{12}$, $\mathbf{Q}_{21}$, $\mathbf{C}_{12}$ oraz $\mathbf{C}_{21}$ wynikają z dynamicznego sprzężenia platformy mobilnej oraz manipulatora.

W celu uzyskania reprezentacji dynamiki we współrzędnych pomocniczych (4.10), należy zastosować zależność wynikającą z bezdryfowego układu sterowania dla platformy mobilnej (A.22) oraz pomnożyć lewostronnie równanie (A.34) przez macierz

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}^T & \mathbf{0}_{2 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 5} & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}.$$

Wówczas można otrzymać model w postaci

$$\mathbf{Q}^*(\mathbf{q})\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{C}^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{z} + \mathbf{g}^*(\mathbf{q}) = \mathbf{B}^*\mathbf{u}, \quad (\text{A.35})$$

gdzie kolejne elementy są zdefiniowane następująco:

- macierz bezwładności

$$\mathbf{Q}^*(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^T \mathbf{Q}_{11} \mathbf{G} & \mathbf{G}^T \mathbf{Q}_{12} \\ \mathbf{Q}_{21} \mathbf{G} & \mathbf{Q}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11}^* & q_{12}^* & q_{13}^* & 0 & q_{15}^* \\ q_{12}^* & q_{22}^* & q_{23}^* & 0 & q_{25}^* \\ q_{13}^* & q_{23}^* & q_{33}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{44}^* & q_{45}^* \\ q_{15}^* & q_{25}^* & 0 & q_{45}^* & q_{55}^* \end{bmatrix}, \quad (\text{A.36})$$

przy czym

$$q_{11}^* = m_2 + m_3 + \frac{q^{33}}{L^2} - \frac{2w}{L} \sin q_1 + M_t + \frac{I_p}{L^2} + 4M_k,$$

$$q_{12}^* = m_2 + m_3 - \frac{q^{33}}{L^2} + M_t - \frac{I_p}{L^2},$$

$$q_{13}^* = \frac{q^{36}}{L} - w \sin q_1,$$

$$q_{15}^* = \frac{q^{38}}{L} - t \cos q_1,$$

$$q_{22}^* = m_2 + m_3 + \frac{q^{33}}{L^2} + \frac{2w}{L} \sin q_1 + M_t + \frac{I_p}{L^2} + 4M_k,$$

$$q_{23}^* = -\frac{q^{36}}{L} - w \sin q_1,$$

$$q_{25}^* = -\frac{q^{38}}{L} - t \cos q_1,$$

$$q_{33}^* = \frac{1}{3}m_2 l_2^2 + m_3 l_2^2 + \frac{1}{3}m_3 l_3^2 \cos^2 q_3 + m_3 l_2 l_3 \cos q_3,$$

$$q_{44}^* = m_2 + m_3,$$

$$q_{45}^* = \frac{1}{3} m_3 l_3 \cos q_3,$$

$$q_{55}^* = \frac{1}{3} m_3 l_3^2,$$

$$q^{33} = \frac{1}{3} m_2 l_2^2 + l^2 (m_2 + m_3) + m_2 l_2 l \cos q_1 + \frac{1}{3} m_3 l_3^2 \cos^2 q_3 + m_3 l_2^2 + \\ + m_3 l_2 l_3 \cos q_3 + m_3 l_3 l \cos q_1 \cos q_3 + 2 m_3 l_2 l \cos q_1,$$

$$q^{36} = \frac{1}{3} m_2 l_2^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2 l \cos q_1 + \frac{1}{3} m_3 l_3^2 \cos^2 q_3 + m_3 l_2^2 + \\ + \frac{1}{2} m_3 l_3 l \cos q_1 \cos q_3 + m_3 l_2 l \cos q_1,$$

$$q^{38} = -\frac{1}{2} m_3 l_3 l \sin q_1 \sin q_3,$$

$$w = \frac{1}{2} m_2 l_2 + \frac{1}{2} m_3 l_3 \cos q_3 + m_3 l_2,$$

$$t = \frac{1}{2} m_3 l_3 \sin q_3,$$

gdzie m_i oznacza masę i -tego ogniwa manipulatora, $M_t = M_p + 2M_k$ – całkowitą masę platformy mobilnej (M_p) wraz z kołami (M_k), $I_p = I_z + 2I_{zz} + 2M_k L^2$ – całkowity moment bezwładności platformy względem osi Z_p układu lokalnego platformy, I_z – moment bezwładności samej platformy względem osi Z_p jej układu lokalnego, $I_{zz} = \frac{1}{4} M_k R^2$ – moment bezwładności koła ustalonego względem osi Z jego lokalnego układu współrzędnych;

- macierz sił Coriolisa i sił odśrodkowych

$$\mathbf{C}^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^T (\mathbf{Q}_{11} \dot{\mathbf{G}} + \mathbf{C}_{11} \mathbf{G}) & \mathbf{G}^T \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} \mathbf{G} + \mathbf{Q}_{21} \dot{\mathbf{G}} & \mathbf{C}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^* & c_{12}^* & c_{13}^* & 0 & c_{15}^* \\ c_{21}^* & c_{22}^* & c_{23}^* & 0 & c_{25}^* \\ c_{31}^* & -c_{31}^* & c_{33}^* & 0 & c_{35}^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{45}^* \\ c_{51}^* & -c_{51}^* & c_{53}^* & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.37})$$

przy czym

$$c_{11}^* = p + \frac{c^{33}}{L^2},$$

$$c_{12}^* = \frac{2}{L} (w \cos q_1 + (m_2 + m_3) l) \dot{\phi} - p - \frac{c^{33}}{L^2},$$

$$c_{13}^* = -w(\dot{\phi} + \dot{q}_1) \cos q_1 + t \dot{q}_3 \sin q_1 + \frac{c^{36}}{L},$$

$$c_{15}^* = t(\dot{\phi} + \dot{q}_1) \sin q_1 - \frac{1}{2} m_3 l_3 \dot{q}_3 \cos q_1 \cos q_3 + \frac{c^{38}}{L},$$

$$c_{21}^* = -\frac{2}{L}(w \cos q_1 + (m_2 + m_3)l)\dot{\phi} + p - \frac{c^{33}}{L^2},$$

$$c_{22}^* = -p + \frac{c^{33}}{L^2},$$

$$c_{23}^* = -w(\dot{\phi} + \dot{q}_1) \cos q_1 + t\dot{q}_3 \sin q_1 - \frac{c^{36}}{L},$$

$$c_{25}^* = t(\dot{\phi} + \dot{q}_1) \sin q_1 - \frac{1}{2}m_3l_3\dot{q}_3 \cos q_1 \cos q_3 - \frac{c^{38}}{L},$$

$$c_{31}^* = \frac{c^{63}}{L},$$

$$c_{33}^* = c^{66},$$

$$c_{35}^* = c^{68},$$

$$c_{45}^* = c^{78},$$

$$c_{51}^* = \frac{c^{83}}{L},$$

$$c_{53}^* = -c^{68},$$

$$c^{33} = \dot{q}_1 \left(-\frac{1}{2}m_2l_2l \sin q_1 - \frac{1}{2}m_3l_3l \sin q_1 \cos q_3 - m_3l_2l \sin q_1 \right) + \\ - \dot{q}_3 \left(\frac{1}{3}m_3l_3^2 \sin q_3 \cos q_3 + \frac{1}{2}m_3l_2l_3 \sin q_3 + \frac{1}{2}m_3l_3l \cos q_1 \sin q_3 \right),$$

$$c^{36} = (\dot{\phi} + \dot{q}_1) \left(-\frac{1}{2}m_2l_2l \sin q_1 - \frac{1}{2}m_3l_3l \sin q_1 \cos q_3 - m_3l_2l \sin q_1 \right) + \\ - \dot{q}_3 \left(\frac{1}{3}m_3l_3^2 \sin q_3 \cos q_3 + \frac{1}{2}m_3l_3l \sin q_3 \cos q_1 \right),$$

$$c^{38} = -\dot{\phi} \left(\frac{1}{3}m_3l_3^2 \sin q_3 \cos q_3 + \frac{1}{2}m_3l_2l_3 \sin q_3 + \frac{1}{2}m_3l_3l \cos q_1 \sin q_3 \right) + \\ - \dot{q}_1 \left(\frac{1}{3}m_3l_3^2 \sin q_3 \cos q_3 + \frac{1}{2}m_3l_3l \cos q_1 \sin q_3 \right) - \frac{1}{2}\dot{q}_3m_3l_3l \sin q_1 \cos q_3,$$

$$c^{63} = \dot{\phi} \left(\frac{1}{2}m_2l_2l \sin q_1 + \frac{1}{2}m_3l_3l \sin q_1 \cos q_3 + m_3l_2l \sin q_1 \right) + \\ - \frac{1}{3}\dot{q}_3m_3l_3^2 \sin q_3 \cos q_3,$$

$$c^{66} = \dot{q}_3 \left(-\frac{1}{3}m_3l_3^2 \sin q_3 \cos q_3 - \frac{1}{2}m_3l_2l_3 \sin q_3 \right),$$

$$c^{68} = -\frac{1}{3}\dot{\phi}m_3l_3^2 \sin q_3 \cos q_3 + \dot{q}_1 \left(-\frac{1}{3}m_3l_3^2 \sin q_3 \cos q_3 - \frac{1}{2}m_3l_2l_3 \sin q_3 \right),$$

$$\mathbf{c}^{78} = -\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}_3 \mathbf{m}_3 \mathbf{l}_3 \sin \mathbf{q}_3,$$

$$\mathbf{c}^{83} = \dot{\Phi} \left(\frac{1}{3} \mathbf{m}_3 \mathbf{l}_3^2 \sin \mathbf{q}_3 \cos \mathbf{q}_3 + \frac{1}{2} \mathbf{m}_3 \mathbf{l}_2 \mathbf{l}_3 \sin \mathbf{q}_3 + \frac{1}{2} \mathbf{m}_3 \mathbf{l}_3 \mathbf{l} \cos \mathbf{q}_1 \sin \mathbf{q}_3 \right) + \\ + \frac{1}{3} \dot{\mathbf{q}}_1 \mathbf{m}_3 \mathbf{l}_3^2 \sin \mathbf{q}_3 \cos \mathbf{q}_3,$$

$$\mathbf{p} = -\frac{\mathbf{w} \cos \mathbf{q}_1}{\mathbf{L}} \dot{\mathbf{q}}_1 + \frac{\mathbf{t} \sin \mathbf{q}_1}{\mathbf{L}} \dot{\mathbf{q}}_3;$$

- wektor grawitacji

$$\mathbf{g}^*(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ (\mathbf{m}_2 + \mathbf{m}_3)\mathbf{g} \\ \frac{1}{2}\mathbf{g}\mathbf{m}_3\mathbf{l}_3 \cos \mathbf{q}_3 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.38})$$

gdzie $\mathbf{g}$ oznacza przyspieszenie ziemskie;

- macierz wejściowa

$$\mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} \frac{2}{\mathbf{R}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\mathbf{R}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.39})$$

Ponadto, dla rozważanego manipulatora mobilnego macierz korekcji $\mathbf{C}^\gamma$ wynikająca ze Spostrzeżenia 17 przyjmuje postać

$$\mathbf{C}^\gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \gamma_{13}^* & 0 & \gamma_{15}^* \\ 0 & 0 & \gamma_{13}^* & 0 & \gamma_{15}^* \\ \gamma_{13}^* & \gamma_{13}^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{15}^* & \gamma_{15}^* & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.40})$$

przy czym

$$\gamma_{13}^* = \frac{1}{2} \dot{\Phi} \left(\frac{1}{2} \mathbf{m}_2 \mathbf{l}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{m}_3 \mathbf{l}_3 \cos \mathbf{q}_3 + \mathbf{m}_3 \mathbf{l}_2 \right) \cos \mathbf{q}_1, \\ \gamma_{15}^* = -\frac{1}{4} \mathbf{m}_3 \mathbf{l}_3 \dot{\Phi} \sin \mathbf{q}_3 \sin \mathbf{q}_1.$$

A.3.3 Wartości parametrów

W badaniach symulacyjnych uwzględniono wartości parametrów masowych i geometrycznych, które zostały przedstawione w tabeli A.5. Należy podkreślić, że parametry platformy mobilnej są identyczne, jak parametry robota mobilnego klasy (2,0) wykorzystanego do badań w pracy [132]. Parametry manipulatora zostały dobrane arbitralnie.

Tabela A.5: Parametry masowe i geometryczne mobilnego manipulatora.

Symbol	Wartość	Opis
M_p	94 [kg]	masa platformy mobilnej
M_k	5 [kg]	masa koła
R	0,075 [m]	promień koła
I_z	6,609 [kg · m ²]	moment bezwładności platformy mobilnej względem osi Z_p jej układu lokalnego
L	0,3 [m]	połowa szerokości platformy mobilnej
l	0,2 [m]	odległość między środkiem ciężkości platformy mobilnej a punktem mocowania bazy manipulatora w kierunku osi X_p układu lokalnego platformy
m_2	20 [kg]	masa drugiego ogniwa manipulatora
m_3	20 [kg]	masa trzeciego ogniwa manipulatora
l_2	0,3 [m]	długość drugiego ogniwa manipulatora
l_3	0,2 [m]	długość trzeciego ogniwa manipulatora

Dodatek B

Równania krzywych geometrycznych

B.1 Linia prosta

Prostą w danej przestrzeni można wyznaczyć za pomocą punktu początkowego $\mathbf{r}_0$ oraz wektora kierunkowego $\mathbf{t}_r$. Równanie prostej w parametryzacji unormowanej przyjmuje postać

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}_0 + s \frac{\mathbf{t}_r}{\|\mathbf{t}_r\|}. \quad (\text{B.1})$$

B.2 Linia śrubowa

Linia śrubowa w parametryzacji nieunormowanej dana jest zależnością [93]

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \cos \mathbf{u} \\ \mathbf{a} \sin \mathbf{u} \\ \mathbf{b} \mathbf{u} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.2})$$

gdzie $\mathbf{a}$ oraz $\mathbf{b}$ są współczynnikami krzywej. Korzystając z równania (2.1), można unormować parametr krzywej

$$s(\mathbf{u}) = \mathbf{c} \mathbf{u}, \quad (\text{B.3})$$

gdzie $\mathbf{c} = \sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}$. Na tej podstawie równanie linii śrubowej w parametryzacji unormowanej dane jest wzorem

$$\mathbf{r}(s) = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \cos \frac{s}{c} \\ \mathbf{a} \sin \frac{s}{c} \\ \frac{\mathbf{b}s}{c} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.4})$$

B.3 Krzywa Lissajous

Krzywa Lissajous zdefiniowana jest poprzez równanie w parametryzacji nieunormowanej

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} A \sin(\mathbf{a} \mathbf{u} + \delta) \\ B \sin(\mathbf{b} \mathbf{u}) \\ C \end{pmatrix}, \quad (\text{B.5})$$

gdzie A , B , C , $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, δ są współczynnikami krzywej. Równanie (B.5) odpowiada krzywej zdefiniowanej na płaszczyźnie.

B.4 Klotoida

Klotoida to krzywa geometryczna, której krzywizna oraz torsja zależą liniowo od unormowanej odległości krzywoliniowej. Zachodzi zatem

$$\kappa(s) = \kappa' s + \kappa_0, \quad (\text{B.6a})$$

$$\tau(s) = \tau' s + \tau_0. \quad (\text{B.6b})$$

Cechą charakterystyczną klotoidy jest fakt, że stanowi swoiste uogólnienie krzywych, które często stanowią podstawowe składowe ścieżek:

- linii śrubowej (stałe krzywizna i torsja),
- okręgu (stała krzywizna i zerowa torsja), a także
- prostej (zerowe krzywizna i torsja).

Z tego względu klotoidy mogą być przydatne do łączenia ze sobą tego rodzaju krzywych i uogólnienia ich opisu.

W pracy [43] przedstawiono równania klotoidy kanonicznej, tzn. przypadku, gdy zachodzi $\kappa_0 = 0$ oraz $\tau_0 = 0$. W parametryzacji Serreta–Freneta równanie krzywej jest zdefiniowane następująco

$$\mathbf{r}(s) = \frac{1}{\Delta} \left((\kappa'^2 C(s) + \tau'^2) \mathbf{t}_0 + \sqrt{\Delta} \kappa' S(s) \mathbf{n}_0 \kappa' \tau' (s - C(s)) \mathbf{b}_0 \right), \quad (\text{B.7})$$

gdzie $\{\mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0\}$ określa stan początkowy układu Serreta–Freneta na ścieżce, $\Delta = \kappa'^2 + \tau'^2$, natomiast $S(s)$ oraz $C(s)$ oznaczają całki Fresnela zgodnie z równaniami

$$S(s) = \int_0^s \sin \left(\frac{\sqrt{\Delta} \xi^2}{2} \right) d\xi,$$

$$C(s) = \int_0^s \cos \left(\frac{\sqrt{\Delta} \xi^2}{2} \right) d\xi.$$

Warto zwrócić uwagę, że określenie układu Serreta–Freneta na początku krzywej determinuje przebieg całej krzywej. Ponadto, w pracy [43] przedstawiono jawne równania ewolucji układu Serreta–Freneta wzdłuż ścieżki

$$\mathbf{t}(s) = \frac{1}{\Delta} \left((\kappa'^2 c(s) + \tau'^2) \mathbf{t}_0 + \sqrt{\Delta} \kappa' s(s) \mathbf{n}_0 + \kappa' \tau' (1 - c(s)) \mathbf{b}_0 \right), \quad (\text{B.8a})$$

$$\mathbf{n}(s) = \frac{1}{\Delta} \left(-\kappa' s(s) \mathbf{t}_0 + \sqrt{\Delta} c(s) \mathbf{n}_0 + \tau' s(s) \mathbf{b}_0 \right), \quad (\text{B.8b})$$

$$\mathbf{b}(s) = \frac{1}{\Delta} \left(\kappa' \tau' (1 - c(s)) \mathbf{t}_0 - \sqrt{\Delta} \tau' s(s) \mathbf{n}_0 + (\tau'^2 c(s) + \kappa'^2) \mathbf{b}_0 \right), \quad (\text{B.8c})$$

przy czym $s(s) = \sin \left(\sqrt{\Delta} s^2 / 2 \right)$ oraz $c(s) = \cos \left(\sqrt{\Delta} s^2 / 2 \right)$.

W artykule [43] wskazano również, że równania klotoidy w ogólnym przypadku, tzn. dla $\kappa_0 \neq 0$ oraz $\tau_0 \neq 0$, można uzyskać na podstawie równań klotoidy kanonicznej. Klotoida uogólniona musi jednak spełniać warunek komutatora, a więc wymaga się, aby jej parametry spełniały warunek $\kappa' \tau_0 - \tau' \kappa_0 = 0$. Wówczas taka klotoida ma tylko jeden

punkt przegięcia zdefiniowany jako $\bar{s} = -\kappa_0/\kappa' = -\tau_0/\tau'$. W przypadku klotoidy kanonicznej punkt przegięcia znajduje się w początku układu współrzędnych, więc odpowiednia translacja klotoidy uogólnionej może sprowadzić ją do postaci klotoidy kanonicznej. Tym samym, możliwe będzie wykorzystanie równań typowych dla klotoidy kanonicznej (B.7) oraz (B.8). Za pracą [43] oznaczmy równania (B.7) oraz (B.8) w postaci funkcji zależnej od parametrów krzywizny i torsji oraz warunków początkowych krzywej

$$[\mathbf{r}_s^{\mathfrak{C}} \quad \mathbf{t}_s^{\mathfrak{C}} \quad \mathbf{n}_s^{\mathfrak{C}} \quad \mathbf{b}_s^{\mathfrak{C}}] = \mathfrak{C}(s; \mathbf{r}_0, \mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0, \kappa', \tau'). \quad (\text{B.9})$$

Analogiczne równania dla klotoidy uogólnionej można oznaczyć jako

$$[\mathbf{r}_s^{\mathfrak{G}} \quad \mathbf{t}_s^{\mathfrak{G}} \quad \mathbf{n}_s^{\mathfrak{G}} \quad \mathbf{b}_s^{\mathfrak{G}}] = \mathfrak{G}(s; \mathbf{r}_0, \mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0, \kappa', \tau', \kappa_0, \tau_0). \quad (\text{B.10})$$

W sposób oczywisty zachodzi $\mathfrak{G}(s; \mathbf{r}_0, \mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0, \kappa', \tau', 0, 0) = \mathfrak{C}(s; \mathbf{r}_0, \mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0, \kappa', \tau')$. Wówczas równania dla klotoidy uogólnionej można wyznaczyć w następujący sposób

$$\mathfrak{G}(s; \mathbf{r}_0, \mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0, \kappa', \tau', \kappa_0, \tau_0) = \mathfrak{C}(s - \bar{s}; \mathbf{r}_0^{\mathfrak{G}} - \mathbf{r}_T^{\mathfrak{C}}, \mathbf{t}_0^{\mathfrak{G}} - \mathbf{t}_T^{\mathfrak{C}}, \mathbf{n}_0^{\mathfrak{G}} - \mathbf{n}_T^{\mathfrak{C}}, \mathbf{b}_0^{\mathfrak{G}} - \mathbf{b}_T^{\mathfrak{C}}, \kappa', \tau'), \quad (\text{B.11})$$

gdzie kolejne argumenty klotoidy kanonicznej, wynikającej z przesunięcia klotoidy uogólnionej, wyznaczone są w następujący sposób

$$[\mathbf{r}_0^{\mathfrak{C}} \quad \mathbf{t}_0^{\mathfrak{C}} \quad \mathbf{n}_0^{\mathfrak{C}} \quad \mathbf{b}_0^{\mathfrak{C}}] = \mathfrak{C}(-\bar{s}; \mathbf{0}, \mathbf{t}_0^{\mathfrak{G}}, \mathbf{n}_0^{\mathfrak{G}}, \mathbf{b}_0^{\mathfrak{G}}, -\kappa', -\tau'), \quad (\text{B.12a})$$

$$[\mathbf{r}_T^{\mathfrak{C}} \quad \mathbf{t}_T^{\mathfrak{C}} \quad \mathbf{n}_T^{\mathfrak{C}} \quad \mathbf{b}_T^{\mathfrak{C}}] = \mathfrak{C}(-\bar{s}; \mathbf{0}, \mathbf{t}_0^{\mathfrak{C}}, \mathbf{n}_0^{\mathfrak{C}}, \mathbf{b}_0^{\mathfrak{C}}, \kappa', \tau'). \quad (\text{B.12b})$$

To podejście pozwala przesunąć układ odniesienia tak, aby punkt przegięcia klotoidy uogólnionej znajdował się w początku nowego układu odniesienia. W nowym układzie odniesienia klotoida staje się zatem klotoidą kanoniczną. Wymaga to przesunięcia zarówno współrzędnych punktu początkowego krzywej, jak i argumentu odległości krzywoliniowej od początku krzywej, co realizują równania (B.12).

B.5 Krzywa Béziera

Krzywa Béziera m -tego stopnia to krzywa w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ zależna od ogólnego parametru u , $u \in [0, 1]$. Krzywa jest wyznaczona przez zbiór $m + 1$ punktów kontrolnych danych w przestrzeni $\mathbb{R}^n$, $P = \{P_0, P_1, \dots, P_m\}$. Krzywa Béziera jest opisana wzorem [25]

$$\mathbf{r}(u) = \sum_{k=0}^m B_{k,m}(u) P_k, \quad (\text{B.13})$$

gdzie $B_{k,m}(u)$ oznacza wielomian Bernsteina dany zależnością

$$B_{k,m}(u) = \binom{m}{k} u^k (1-u)^{m-k}. \quad (\text{B.14})$$

Na tej podstawie można wnioskować, że krzywa Béziera jest liniową kombinacją funkcji bazowych (wielomiany Bernsteina), gdzie wagami są wektory z przestrzeni $\mathbb{R}^n$ zwane punktami kontrolnymi lub węzłami P_k [55].

W pracy [42] pokazano, że pochodna krzywej Béziera dana jest wzorem

$$\frac{d\mathbf{r}(\mathbf{u})}{d\mathbf{u}} = m \sum_{k=0}^{m-1} B_{k,m-1}(\mathbf{u}) \Delta \mathbf{P}_k, \quad (\text{B.15})$$

gdzie $\Delta \mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{k+1} - \mathbf{P}_k$. Stąd można pokazać, że druga pochodna wzdłuż krzywej dana jest zależnością

$$\frac{d^2 \mathbf{r}(\mathbf{u})}{d\mathbf{u}^2} = m(m-1) \sum_{k=0}^{m-2} B_{k,m-2}(\mathbf{u}) \Delta^2 \mathbf{P}_k, \quad (\text{B.16})$$

gdzie $\Delta^2 \mathbf{P}_k = \Delta \mathbf{P}_{k+1} - \Delta \mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{k+2} - 2\mathbf{P}_{k+1} + \mathbf{P}_k$.

Ponadto, warto przytoczyć wynik pracy [42], w której przedstawiono jawnie równania krzywej Béziera w parametryzacji Serreta–Freneta. Wersory układu Serreta–Freneta dla krzywej Béziera zdefiniowane są przez następujące równania

$$\mathbf{t}(\mathbf{u}) = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} B_{k,m-1}(\mathbf{u}) \Delta \mathbf{P}_k}{\left\| \sum_{k=0}^{n-1} B_{k,m-1}(\mathbf{u}) \Delta \mathbf{P}_k \right\|}, \quad (\text{B.17a})$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{u}) = \frac{\sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-2} B_{k,m-1}(\mathbf{u}) B_{j,m-2}(\mathbf{u}) (\Delta \mathbf{P}_k \times \Delta^2 \mathbf{P}_j)}{\left\| \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-2} B_{k,m-1}(\mathbf{u}) B_{j,m-2}(\mathbf{u}) (\Delta \mathbf{P}_k \times \Delta^2 \mathbf{P}_j) \right\|}, \quad (\text{B.17b})$$

$$\mathbf{n}(\mathbf{u}) = \mathbf{b}(\mathbf{u}) \times \mathbf{t}(\mathbf{u}). \quad (\text{B.17c})$$

W tej samej pracy [42] przedstawiono również wzory, za pomocą których można obliczyć podstawowe parametry geometryczne krzywej – krzywiznę oraz torsję

$$\kappa(\mathbf{u}) = \frac{m-1}{m} \frac{\left\| \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-2} B_{k,m-1}(\mathbf{u}) B_{j,m-2}(\mathbf{u}) (\Delta \mathbf{P}_k \times \Delta^2 \mathbf{P}_j) \right\|}{\left\| \sum_{k=0}^{n-1} B_{k,m-1}(\mathbf{u}) \Delta \mathbf{P}_k \right\|^3}, \quad (\text{B.18a})$$

$$\tau(\mathbf{u}) = \frac{m-2}{m} \frac{\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-2} \sum_{k=0}^{m-3} B_{i,m-1}(\mathbf{u}) B_{j,m-2}(\mathbf{u}) B_{k,m-3}(\mathbf{u}) \langle \Delta \mathbf{P}_i \times \Delta^2 \mathbf{P}_j, \Delta^3 \mathbf{P}_k \rangle}{\left\| \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-2} B_{k,m-1}(\mathbf{u}) B_{j,m-2}(\mathbf{u}) (\Delta^2 \mathbf{P}_k \times \Delta^2 \mathbf{P}_j) \right\|^2}. \quad (\text{B.18b})$$

B.6 Krzywa B-sklejana

Zgodnie z definicją zaproponowaną w pracy [100], krzywą B-sklejaną p -tego stopnia nazywa się krzywą geometryczną określoną przez równanie

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(\mathbf{u}) \mathbf{P}_i, \quad (\text{B.19})$$

gdzie P_i , $i \in \{0, \dots, n\}$, to punkty kontrolne wyznaczające otoczenie wypukłe krzywej, natomiast $N_{i,p}(u)$ to funkcje bazowe p -tego stopnia zdefiniowane na zbiorze węzłów

$$U = \{\underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, u_{p+1}, \dots, u_{m-p-1}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1}\}, \quad (B.20)$$

przy czym dziedzina krzywej jest określona jako $u \in [a, b]$.

Funkcje $N_{i,p}(u)$ to funkcje kawałkami wielomianowe (ang. *piecewise polynomial functions*), które tworzą bazę dla przestrzeni wektorowej wszystkich funkcji kawałkami wielomianowych o zadanych parametrach:

- stopień wielomianów;
- klasa ciągłości funkcji;
- ustalony zbiór punktów węzłowych U .

Ponadto żąda się, aby funkcje bazowe cechowały się pewnymi własnościami, które sprawiają, że będą podobne do krzywych Béziera [100]. Wymaga się zatem m. in. otoczenia wypukłego, niezmienności transformacji, a także lokalności. Ostatnia własność oznacza, że i -ta funkcja bazowa jest niezerowa tylko na pewnym przedziale dziedziny. Dzięki temu punkt kontrolny P_i wpływa na ostateczny kształt krzywej tylko w otoczeniu, w którym odpowiadająca mu funkcja bazowa jest niezerowa. Funkcje bazowe p -tego stopnia definiuje się za pomocą następującego wzoru rekurencyjnego [100]

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0, & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}, \quad (B.21a)$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u), \quad (B.21b)$$

przy czym w przypadku zerowania się mianowników w równaniu (B.21b), a zatem dla $u_{i+p} = u_i$ lub $u_{i+p+1} = u_{i+1}$, przyjmuje się, że odpowiadający danemu mianownikowi składnik jest zerowy [100].

Tak zdefiniowane krzywe B-sklejane charakteryzują się pewnymi własnościami [100]. Spośród nich warto przytoczyć następujące:

1. Jeśli $n = p$ i $U = \{0, \dots, 0, 1, \dots, 1\}$, to krzywa B-sklejana jest krzywą Béziera. Wynika to z faktu, że funkcje bazowe krzywej B-sklejanej przyjmują postać wielomianów Bernsteina dla odpowiednio dobranych punktów węzłowych, a także odpowiednio dobranej liczby punktów kontrolnych do stopni wielomianów.
2. Krzywa B-sklejana składa się z funkcji wielomianowych zdefiniowanych na wybranych przedziałach dziedziny. Taka krzywa ma stopień p i jest zdefiniowana dla $n + 1$ punktów kontrolnych. Liczba węzłów dla takiej krzywej wynosi $m + 1$, przy czym $m = n + p + 1$.
3. Krzywa osiąga krańcowe punkty kontrolne, tzn. zachodzi $r(a) = P_0$ oraz $r(b) = P_n$.
4. Krzywa w całości znajduje się w otoczeniu wypukłym wyznaczonym przez wielokąt utworzony z punktów kontrolnych.

5. Wielokąt wyznaczony przez punkty kontrolne odpowiada liniowemu przybliżeniu krzywej B-sklejanej. Jako ogólną zasadę przyjmuje się, że im mniejszy stopień wielomianów bazowych $\mathbf{p}$, tym dokładniej krzywa B-sklejana odwzorowuje wielokąt wyznaczony przez punkty kontrolne. W szczególności, dla $\mathbf{p} = 1$ krzywa B-sklejana jest równa wielokątowi wyznaczonemu przez punkty kontrolne.
6. Ciągłość i różniczkowalność krzywej B-sklejanej wynika wprost z własności funkcji bazowych. Stąd, krzywa B-sklejana jest gładka wewnątrz przedziałów wyznaczonych przez punkty węzłowe i jest co najmniej klasy $\mathcal{C}^{p-k}$ w punkcie węzłowym krotności k . Dla przykładu przyjmijmy, że funkcje bazowe są kwadratowe ($\mathbf{p} = 2$). Wówczas krzywa B-sklejana jest klasy $\mathcal{C}^1$, jeśli wszystkie punkty węzłowe $\mathbf{u}_i$ ze zbioru (B.20) są jednokrotne. Jeśli występują dwukrotne punkty węzłowe, to krzywa B-sklejana nie ma ciągłej pochodnej, a jej klasa redukuje się do $\mathcal{C}^0$.

Pochodną k -tego stopnia krzywej B-sklejanej definiuje się wzorem [100]

$$\frac{d^k \mathbf{r}(\mathbf{u})}{d\mathbf{u}^k} = \mathbf{r}^{(k)}(\mathbf{u}) = \sum_{i=0}^n \mathbf{N}_{i,p}^{(k)}(\mathbf{u}) \mathbf{P}_i. \quad (\text{B.22})$$

Z równania (B.22) wynika zatem, że aby wyznaczyć pochodną krzywej B-sklejanej należy obliczyć pochodne funkcji bazowych wzdłuż krzywej. Można to wykonać za pomocą zależności

$$\mathbf{N}_{i,p}^{(k)} = \frac{p!}{(p-k)!} \sum_{j=0}^k \mathbf{a}_{k,j} \mathbf{N}_{i+j,p-k}, \quad (\text{B.23})$$

gdzie współczynnik $\mathbf{a}_{k,j}$ definiuje się następująco

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{0,0} &= 1, \\ \mathbf{a}_{k,0} &= \frac{\mathbf{a}_{k-1,0}}{\mathbf{u}_{i+p-k+1} - \mathbf{u}_i}, \\ \mathbf{a}_{k,j} &= \frac{\mathbf{a}_{k-1,j} - \mathbf{a}_{k-1,j-1}}{\mathbf{u}_{i+p+j-k+1} - \mathbf{u}_{i+j}}, \quad j = 1, \dots, k-1, \\ \mathbf{a}_{k,k} &= \frac{-\mathbf{a}_{k-1,k-1}}{\mathbf{u}_{i+p+1} - \mathbf{u}_{i+k}}. \end{aligned}$$

W definicji pochodnych funkcji bazowych należy uwzględnić następujące reguły:

1. Zachodzi $k \leq p$. Wszystkie pochodne rzędu wyższego niż stopień krzywej zerują się.
2. Jeśli mianownik uwzględniający różnicę węzłów $\mathbf{u}_i$ zeruje się, to cały odpowiadający mu współczynnik przyjmuje wartość zerową.

B.7 Krzywa η^{3D} -sklejana

Krzywe η^{3D} -sklejane zostały zaproponowane w pracy [120]. Ich podstawą są wielomiany siódmego stopnia. Można je wykorzystać do generowania trójwymiarowych ścieżek z zachowaniem ciągłości geometrycznej trzeciego rzędu. Współczynniki wielomianów uzyskuje się na podstawie zdefiniowanych warunków brzegowych krzywej w oparciu o ewolucję

układu Serreta–Freneta. Takie podejście pozwala na intuicyjne generowanie nowych ścieżek na podstawie wiedzy o bieżącej ścieżce oraz wyboru nowych warunków końcowych. Ponadto, krzywe η^{3D} -sklejane mogą być kształtowane za pomocą doboru sześciu parametrów η_i .

Krzywa η^{3D} -sklejana jest zdefiniowana za pomocą wielomianu

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}) = \chi_0 + \chi_1 \mathbf{u} + \chi_2 \mathbf{u}^2 + \chi_3 \mathbf{u}^3 + \chi_4 \mathbf{u}^4 + \chi_5 \mathbf{u}^5 + \chi_6 \mathbf{u}^6 + \chi_7 \mathbf{u}^7, \quad (\text{B.24})$$

gdzie $\mathbf{u} \in [0; 1]$, natomiast χ_i , $i \in \{0, \dots, 7\}$ są współczynnikami zdefiniowanymi tak, aby połączyć zadane warunki brzegowe i zachować ciągłość geometryczną $\mathcal{G}^3$ na krańcach dziedziny. Nietrudno zauważyć, że dla stałych współczynników χ_i pochodne dowolnego rzędu wielomianu $\mathbf{r}(\mathbf{u})$ są ciągłe dla całej dziedziny. Warunki ciągłości geometrycznej odnoszą się zatem jedynie do potencjalnych punktów sklejenia z innymi krzywymi.

Warunki brzegowe dla krzywej η^{3D} -sklejanej zdefiniowane są przez następujące elementy:

- współrzędne punktu na krzywej w globalnym układzie odniesienia;
- wersory układu Serreta–Freneta;
- krzywizna;
- torsja;
- pochodna krzywizny wzdłuż ścieżki.

Oznaczając zestaw warunków początkowych jako A oraz zestaw warunków końcowych jako B , można przyjąć notację poszczególnych elementów przedstawioną w tabeli B.1.

Tabela B.1: Warunki brzegowe dla krzywej η^{3D} -sklejanej [120].

Opis	Warunki początkowe A	Warunki końcowe B
Punkt na krzywej	$\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_A$	$\mathbf{r}(1) = \mathbf{r}_B$
Układ Serreta–Freneta	$\begin{bmatrix} \mathbf{t}(0) & \mathbf{n}(0) & \mathbf{b}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_A & \mathbf{n}_A & \mathbf{b}_A \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \mathbf{t}(1) & \mathbf{n}(1) & \mathbf{b}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_B & \mathbf{n}_B & \mathbf{b}_B \end{bmatrix}$
Krzywizna	$\kappa(0) = \kappa_A$	$\kappa(1) = \kappa_B$
Torsja	$\tau(0) = \tau_A$	$\tau(1) = \tau_B$
Pochodna krzywizny	$\frac{d\kappa(0)}{ds} = \bar{\kappa}_A$	$\frac{d\kappa(1)}{ds} = \bar{\kappa}_B$

Stosując takie oznaczenia, można zdefiniować wartości parametrów χ_i dla wielomianu (B.24). W pracy [120] zostały podane następujące definicje

$$\chi_0 = \mathbf{r}_A, \quad (\text{B.25a})$$

$$\chi_1 = \eta_1 \mathbf{t}_A, \quad (\text{B.25b})$$

$$\chi_2 = \frac{1}{2} \left(\kappa_A \eta_1^2 \mathbf{n}_A + \eta_3 \mathbf{t}_A \right), \quad (\text{B.25c})$$

$$\chi_3 = \frac{1}{6} \left(\kappa_A \tau_A \mathbf{b}_A \eta_1^3 + (\bar{\kappa}_A \eta_1^2 + 3\kappa_A \eta_1 \eta_3) \mathbf{n}_A \right) + \eta_5 \mathbf{t}_A, \quad (\text{B.25d})$$

$$\begin{aligned}\chi_4 = & -\frac{2}{3}\kappa_A\tau_A\mathbf{b}_A\eta_1^3 - \frac{1}{6}\kappa_B\tau_B\mathbf{b}_B\eta_2^3 - \frac{1}{3}\left(\eta_1^2(2\bar{\kappa}_A + 15\kappa_A) + 6\kappa_A\eta_1\eta_3\right)\mathbf{n}_A + \\ & - \frac{1}{6}\left(\eta_2^2(\bar{\kappa}_B - 15\kappa_B) + 3\kappa_B\eta_2\eta_4\right)\mathbf{n}_B - \left(20\eta_1 + 5\eta_3 + 4\eta_5\right)\mathbf{t}_A + \\ & - 35\mathbf{r}_A + 35\mathbf{r}_B - \frac{1}{2}\left(30\eta_2 - 5\eta_4 + 2\eta_6\right)\mathbf{t}_B, \quad (\text{B.25e})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\chi_5 = & \kappa_A\tau_A\mathbf{b}_A\eta_1^3 + \frac{1}{2}\kappa_B\tau_B\mathbf{b}_B\eta_2^3 + \left(\eta_1^2(\bar{\kappa}_A + 10\kappa_A) + 3\kappa_A\eta_1\eta_3\right)\mathbf{n}_A + \\ & + \frac{1}{2}\left(\eta_2^2(\bar{\kappa}_B - 14\kappa_B) + 3\kappa_B\eta_2\eta_4\right)\mathbf{n}_B + \left(45\eta_1 + 10\eta_3 + 6\eta_5\right)\mathbf{t}_A + \\ & + \left(39\eta_2 - 7\eta_4 + 3\eta_6\right)\mathbf{t}_B + 84\mathbf{r}_A - 84\mathbf{r}_B, \quad (\text{B.25f})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\chi_6 = & -\frac{2}{3}\kappa_A\tau_A\mathbf{b}_A\eta_1^3 - \frac{1}{2}\kappa_B\tau_B\mathbf{b}_B\eta_2^3 - \frac{1}{6}\left(\eta_1^2(4\bar{\kappa}_A + 45\kappa_A) + 12\kappa_A\eta_1\eta_3\right)\mathbf{n}_A + \\ & - \frac{1}{2}\left(\eta_2^2(\bar{\kappa}_B - 13\kappa_B) + 3\kappa_B\eta_2\eta_4\right)\mathbf{n}_B - \frac{1}{2}\left(72\eta_1 + 15\eta_3 + 8\eta_5\right)\mathbf{t}_A + \\ & - 70\mathbf{r}_A + 70\mathbf{r}_B - \frac{1}{2}\left(68\eta_2 - 13\eta_4 + 6\eta_6\right)\mathbf{t}_B, \quad (\text{B.25g})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\chi_7 = & \frac{1}{6}\left(\kappa_A\tau_A\mathbf{b}_A\eta_1^3 + \kappa_B\tau_B\mathbf{b}_B\eta_2^3\right) + \frac{1}{6}\left(\eta_1^2(\bar{\kappa}_A + 12\kappa_A) + 3\kappa_A\eta_1\eta_3\right)\mathbf{n}_A + \\ & + \frac{1}{6}\left(\eta_2^2(\bar{\kappa}_B - 12\kappa_B) + 3\kappa_B\eta_2\eta_4\right)\mathbf{n}_B + \left(10\eta_1 + 2\eta_3 + \eta_5\right)\mathbf{t}_A + \\ & + \left(10\eta_2 - 2\eta_4 + \eta_6\right)\mathbf{t}_B + 20\mathbf{r}_A - 20\mathbf{r}_B, \quad (\text{B.25h})\end{aligned}$$

gdzie η_i , $i \in \{1, \dots, 6\}$, są współczynnikami wpływającymi na kształt krzywej. Wymaga się, aby współczynniki spełniały następujące warunki: $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}^+$ oraz $\eta_3, \eta_4, \eta_5, \eta_6 \in \mathbb{R}$. Wybór konkretnych wartości parametrów nie jest oczywisty, jednak autorzy pracy [120] podali również metody heurystyczne, które pozwalają na dobre oszacowanie wartości współczynników η_i . W szczególności, zwrócono uwagę, że krzywe o dobrych własnościach geometrycznych można uzyskać przyjmując

$$\eta_1 = \eta_2 = s_f, \quad (\text{B.26a})$$

$$\eta_3 = \eta_4 = \eta_5 = \eta_6 = 0, \quad (\text{B.26b})$$

gdzie s_f oznacza całkowitą długość krzywej.