

PROBLEMY WSPÓŁCZESNEJ NAUKI
TEORIA I ZASTOSOWANIA
ROBOTYKA

Krzysztof Tchoń

Alicja Mazur

Robert Hossa

Ignacy Dulęba

Robert Muszyński

MANIPULATORY I ROBOTY MOBILNE

Modele
planowanie ruchu
sterowanie



Akademicka Oficyna Wydawnicza PLJ
Warszawa 2000

Książka zawiera monograficzny wykład podstaw robotyki obejmujący kinematykę, dynamikę, planowanie ruchu i sterowanie manipulatorów i robotów mobilnych. Szczególne miejsce zajmują w książce zagadnienia modelowania kinematyki i dynamiki robotów, osobliwości kinematyki, algorytmy regularnej i osobliwej kinematyki odwrotnej, algorytmy sterowania manipulatorów sztywnych i elastycznych oraz robotów mobilnych przy ograniczonej znajomości modelu dynamiki, a także algorytmy planowania ruchu robotów mobilnych wykorzystujące metody geometrycznej teorii sterowania. W zakresie tych zagadnień wyniki własne autorów zostały przedstawione w kontekście wyników udokumentowanych w literaturze przedmiotu.

Książka stanowi świadectwo dorobku szkoły uprawiania robotyki, jaka powstała w Zakładzie Podstaw Cybernetyki i Robotyki Instytutu Cybernetyki Technicznej Politechniki Wrocławskiej. Do jej adresatów należą studenci kierunku Automatyka i Robotyka politechnik, konstruktorzy robotów i projektanci systemów automatyki i robotyki, inżynierowie zajmujący się automatyzacją i robotyzacją, a także pracownicy naukowi i doktoranci z dyscyplin Automatyka i Robotyka, Informatyka, Matematyka Stosowana.

Manipulatory i roboty mobilne

Modele, planowanie ruchu, sterowanie

Książka zostaje udostępniona w wersji pdf za zgodą
Ofcyny Wydawniczej PLJ i może być kopiowana wyłącznie
w całości, razem ze stroną tytułową i tym przypisem.

Kompilacja: 19 listopada 2010

PROBLEMY WSPÓŁCZESNEJ NAUKI
TEORIA I ZASTOSOWANIA

ROBOTYKA

Edytor serii: Leonard Bolc

Krzysztof Tchoń
Alicja Mazur Ignacy Dulęba
Robert Hossa Robert Muszyński

Manipulatory i roboty mobilne

Modele, planowanie ruchu, sterowanie

Akademicka Oficyna Wydawnicza PLJ
Warszawa 2000

© Copyright by Ignacy Dulęba, Robert Hossa, Alicja Mazur,
Robert Muszyński, Krzysztof Tchoń
Wrocław 2000

© Copyright by Akademicka Oficyna Wydawnicza PLJ
Warszawa 2000

Autorzy

*Ignacy Dulęba, Robert Hossa, Alicja Mazur,
Robert Muszyński, Krzysztof Tchoń,
Zakład Podstaw Cybernetyki i Robotyki,
Instytut Cybernetyki Technicznej, Politechnika Wrocławska*

Recenzent

Prof. dr hab. inż. Krzysztof Kozłowski, Politechnika Poznańska

Redaktor

Anna Bittner

Komputerowy skład tekstu

Robert Muszyński

Dobór koloru okładki

Ula Tchoń

Projekt graficzny serii

Akademicka Oficyna Wydawnicza PLJ

ISBN 83-7101-427-9

Spis rzeczy

Spis oznaczeń	9
1 Wprowadzenie	15
Literatura	20
I Kinematyka manipulatorów i robotów mobilnych	23
2 Modele kinematyki układów robotycznych	25
2.1 Ruch ciała sztywnego	25
2.2 Kinematyka układu robotycznego	36
2.3 Kinematyka manipulatora	40
2.3.1 Reprezentacja Denavita-Hartenberga	41
2.3.2 Reprezentacja wykładnicza	51
2.3.3 Kinematyka we współrzędnych	55
2.3.4 Jakobiany	61
2.3.5 Konfiguracje osobliwe	79
2.4 Kinematyka robota mobilnego	83
2.5 Komentarze i uwagi bibliograficzne	88
Literatura	90
3 Algorytmy kinematyki odwrotnej manipulatora	95
3.1 Regularne odwrotne zadanie kinematyki	97
3.1.1 Bezpośrednie podejście algebraiczne	98
3.1.2 Podejście geometryczne	101
3.1.3 Metody jacobianowe	103
3.1.4 Metoda mnożników Lagrange'a	125
3.1.5 Elipsoida manipulowalności	128
3.2 Osobliwe odwrotne zadanie kinematyki	131
3.2.1 Unikanie osobliwości	131

3.2.2	Metoda postaci normalnych	140
3.2.3	Metoda jakobianu dołączonego	163
3.2.4	Metoda przestrzeni zerowej	166
3.2.5	Metoda jakobianu odpornego	168
3.3	Komentarze i uwagi bibliograficzne	173
	Literatura	176
4	Kinematyka odwrotna robotów mobilnych	181
4.1	Metoda Newtona	181
4.2	Elipsoida mobilności	186
4.3	Komentarze i uwagi bibliograficzne	186
	Literatura	188
II	Algorytmy sterowania manipulatorów	191
5	Algorytmy sterowania manipulatorów sztywnych w przestrzeni zadaniowej	193
5.1	Dynamika układu robotycznego	194
5.2	Dynamika manipulatora sztywnego	196
5.3	Sterowanie w przestrzeni zadaniowej manipulatora	202
5.3.1	Linearyzacja i odsprężanie wejściowo-wyjściowe . . .	203
5.3.2	Transformacja do zadania sterowania w przestrzeni przegubowej	206
5.4	Komentarze i uwagi bibliograficzne	206
	Literatura	207
6	Algorytmy sterowania manipulatorów sztywnych w przestrzeni przegubowej	209
6.1	Algorytmy wymagające pełnej znajomości modelu	213
6.1.1	Algorytmy typu obliczanego momentu	213
6.1.2	Algorytmy typu dysypatywnego	216
6.2	Algorytmy sterowania przy parametrycznej nieznajomości modelu	222
6.2.1	Algorytmy adaptacyjne typu obliczanego momentu . .	224
6.2.2	Algorytmy adaptacyjne typu dysypatywnego	228
6.3	Algorytmy sterowania przy strukturalnej nieznajomości modelu	231
6.3.1	Algorytm sterowania ślizgowego	232

6.3.2	Algorytm Qu-Dorsey — regulator PD o stałym wzmo- cnieniu	235
6.3.3	Algorytm λ -śledzenia — regulator PD o dynamicz- nym wzmacnieniu	236
6.4	Komentarze i uwagi bibliograficzne	239
	Literatura	241
7	Algorytmy sterowania manipulatorów o elastycznych prze- gubach	245
7.1	Dynamika manipulatora o elastycznych przegubach	246
7.2	Algorytmy sterowania	251
7.2.1	Algorytm linearyzacji statycznej	251
7.2.2	Algorytm całkowania wstecznego	254
7.2.3	Algorytm Ortegi-Lorii	259
7.3	Komentarze i uwagi bibliograficzne	261
	Literatura	262
III	Algorytmy planowania ruchu i sterowania robotów mobilnych	263
8	Zadanie planowania ruchu	265
8.1	Pojęcia podstawowe	265
8.2	Technika nawiasu Liego	273
8.3	Komentarze i uwagi bibliograficzne	280
	Literatura	281
9	Metody planowania ruchu ogólnego przeznaczenia	285
9.1	Metoda oparta na Zasadzie Maksimum Pontriagina	286
9.2	Metoda Newtona	287
9.3	Metoda uśredniania	292
9.4	Metoda Lie-algebraiczna	297
9.4.1	Uogólniona formuła Campbella-Bakera-Hausdorffa- -Dynkina	299
9.4.2	Algorytm metody Lie-algebraicznej	305
9.4.3	Znaczenie uogólnionej formuły Campbella-Bakera- -Hausdorffa-Dynkina	307
9.5	Komentarze i uwagi bibliograficzne	309
	Literatura	312

10 Specjalizowane metody planowania ruchu	317
10.1 Optymalne planowanie ruchu jednokołowego robota mobilnego	317
10.1.1 Rodziny ekstremal dla zadania Reedsa-Sheppa	318
10.1.2 Synteza trajektorii optymalnej	325
10.1.3 Planowanie ruchu jednokołowego robota mobilnego poruszającego się do przodu	329
10.1.4 Podsumowanie	330
10.2 Metoda sterowań sinusoidalnych	331
10.3 Metoda bazująca na twierdzeniu Stokesa	336
10.4 Metoda osiągania podcelów	341
10.5 Komentarze i uwagi bibliograficzne	347
Literatura	349
 11 Modele i algorytmy sterowania kołowych robotów mobilnych	 351
11.1 Dynamika układu robotycznego z ograniczeniami	352
11.2 Modele kołowych robotów mobilnych	353
11.2.1 Ograniczenia fazowe	354
11.2.2 Modele kinematyki prostych kołowych robotów mobilnych	358
11.2.3 Modele kinematyki złożonych kołowych robotów mobilnych	366
11.2.4 Modele dynamiki	367
11.3 Algorytmy sterowania kołowych robotów mobilnych	369
11.3.1 Algorytm Corona-Pometa	370
11.3.2 Algorytm linearyzacji dynamicznej	373
11.3.3 Algorytm Walsha-Tilbury'ego-Sastry'ego-Murray-Laumonda	377
11.3.4 Sterowanie we współrzędnych linearyzujących	379
11.3.5 Sterowanie adaptacyjne we współrzędnych linearyzujących	386
11.3.6 Uniwersalny adaptacyjny λ -śledzący algorytm sterowania	389
11.4 Komentarze i uwagi bibliograficzne	392
Literatura	394

Dodatki	399
A Podstawowe pojęcia matematyczne	401
A.1 Algebra liniowa	401
A.2 Funkcje i odwzorowania	403
A.3 Układy dynamiczne, pola wektorowe, nawiasy Liego	404
A.4 Układy sterowania	406
A.5 Zasada Maksimum Pontriagina	408
A.6 Równania Eulera-Lagrange'a	409
Literatura	409
B Wybrane twierdzenia o stabilności	411
B.1 Układy autonomiczne	411
B.2 Układy nieautonomiczne	412
B.2.1 II Metoda Lapunowa	412
B.2.2 Lemat Barbalata	413
B.2.3 Twierdzenie La Salle'a-Yoshizawy	413
B.2.4 Lemat Wena-Bayarda	413
Literatura	414
C Wybrane dowody stabilności algorytmów sterowania	417
C.1 Algorytm Sadegha-Horowitza	417
C.2 Adaptacyjny algorytm Slotine'a-Li	419
Literatura	421
Indeks	423

Spis oznaczeń

Oznaczenia zostały podporządkowane następującej zasadzie ogólnej: symbole niewytłuszczone (typu x) odnoszą się do wielkości skalarnych, wytłuszczone (jak $\mathbf{x}$, $\mathbf{X}$, $\mathbf{X}$) oznaczają wektory, macierze lub zbiory. Symbole postaci $\mathbb{X}$ oznaczają wyróżnione klasy obiektów matematycznych, a symbole typu $\mathcal{X}$ odnoszą się do pojęć o znaczeniu specjalnym w kontekście robotyki. Liczby w nawiasach podają numer strony, na której dane oznaczenie zostało wprowadzone lub użyte po raz pierwszy.

$\simeq$	— równość przybliżona (298)
$\cong$	— równoważność (29)
$\equiv$	— równość tożsamościowa (146)
$\ \quad \ $	— norma euklidesowa wektora (25)
$\ \quad \ $	— norma macierzy (402)
$[\quad]$	— macierz skośnie symetryczna (31)
$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$	— nawias Liego (38)
$\mathbf{A}^T$	— transpozycja macierzy (28)
$\mathbf{A}^{-1}$	— odwrotność macierzy (29)
$\mathbf{A}^\#$	— pseudoodwrotność macierzy (402)
$\mathbf{A} > 0$	— macierz dodatnio określona (205)
$\mathbf{f} _{\mathbf{u}}$	— obcięcie odwzorowania w dziedzinie (146)
$\mathbf{x}^T$	— transpozycja wektora (25)
$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$	— iloczyn skalarny (25)
$\mathbf{x}^T \mathbf{y}$	— iloczyn skalarny (25)
$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$	— iloczyn skalarny (25)
$\mathbf{x} \times \mathbf{y}$	— iloczyn wektorowy (25)
$\mathbf{U} \times \mathbf{V}$	— iloczyn kartezjański zbiorów (41)
$\varphi \circ \psi$	— złożenie odwzorowań (55)
$\mathbf{A}$	— macierz ograniczeń fazowych w postaci Pfaffa (36)
$\mathbf{A}_i^j$	— transformacja układu i w układ j (43)
$\text{ad}_{\mathbf{X}}^i \mathbf{Y}$	— iterowany nawias Liego (406)
$\text{adj} \mathbf{A}$	— macierz dołączona (401)
atan2	— funkcja atan2 (99)
$\mathbb{B}$	— klasa funkcji ograniczonych (403)
$\overline{\mathbf{B}}_\lambda(\mathbf{0})$	— kula domknięta (236)

b	— wektor binormalny (26)
C	— macierz sił Coriolisa manipulatora (195)
$\mathbb{C}^k$	— klasa funkcji gładkich rzędu k (403)
$\mathbb{C}^\infty$	— klasa funkcji gładkich (403)
$\mathbb{C}^\omega$	— klasa funkcji analitycznych (403)
c_{kj}^i	— symbole Christoffela I rodzaju (195)
codim	— kowymiar (80)
corank	— korząd (79)
D	— różniczka Gâteaux (84)
D	— wektor sił grawitacji manipulatora (195)
$D\mathbf{k}_{\mathbf{q}_0, \mathbf{T}}$	— jacobian analityczny robota mobilnego (86)
$(D\mathbf{k}_{\mathbf{q}_0, \mathbf{T}})^\#$	— pseudoodwrotność jacobianu analitycznego robota mobilnego (183)
d	— różniczka (406)
det	— wyznacznik macierzy (25)
diag	— macierz diagonalna (214)
dim	— wymiar (30)
div	— dywergencja (136)
Δ	— wyróżnik konfiguracji osobliwej (134)
δ_m	— stopień mobilności robota mobilnego (361)
δ_s	— stopień sterowalności robota mobilnego (361)
$\mathbf{E}_m$	— elipsoida manipulowalności (128)
$\mathbf{E}_m^{\mathbf{q}_0, \mathbf{T}}$	— elipsoida mobilności (186)
e	— błąd śledzenia (205)
$\mathbf{e}_i$	— i -ty wektor bazowy przestrzeni liniowej (401)
exp	— odwzorowanie wykładnicze (35)
exp	— strumień pola wektorowego (278)
Φ	— macierz fundamentalna liniowego układu dynamicznego (86)
φ_t	— strumień układu dynamicznego (404)
$\mathcal{G}$	— dystrybucja (37)
G	— pola stowarzyszone z ograniczeniami fazowymi w postaci Pfaffa (37)
Γ	— indeks konfiguracji osobliwej (138)
$\mathcal{H}$	— baza Ph. Halla (277)
H	— hamiltonian (406)
$\mathcal{I}$	— przedział czasu (95)
I	— macierz momentów bezwładności silników (249)
I_i	— moment bezwładności wirnika i -tego silnika (199)
$\mathbb{I}_n$	— macierz jednostkowa rozmiaru $n \times n$ (29)

$\text{id}_{\mathbb{R}^n}$	— odwzorowanie identycznościowe na $\mathbb{R}^n$ (403)
$\inf$	— infimum (212)
$\mathcal{J}$	— wskaźnik jakości sterowania (408)
J^a	— jacobian analityczny manipulatora (61)
J^{ae}	— rozszerzony jacobian analityczny manipulatora (120)
$J^{a\lambda}$	— odwrotność przybliżona jacobianu analitycznego manipulatora (168)
$J_W^{a\#}$	— pseudoodwrotność jacobianu analitycznego manipulatora (112)
J^b	— jacobian geometryczny w ciele (64)
J^m	— jacobian manipulatora (68)
J^s	— jacobian geometryczny w przestrzeni (64)
J^{se}	— rozszerzony jacobian geometryczny w przestrzeni (125)
$J_W^{s\#}$	— pseudoodwrotność jacobianu geometrycznego w przestrzeni (125)
J_{L_i}	— macierz inercji i-tego ramienia manipulatora (197)
J_{M_i}	— macierz inercji wirnika i-tego silnika (247)
$\mathbb{K}$	— klasa funkcji dodatnich, ściśle rosnących (412)
K	— energia kinetyczna (194)
$\mathbf{K}$	— kinematyka manipulatora (39)
$\mathbf{K} _{\mathbf{u}}$	— obcięcie kinematyki w dziedzinie (55)
$\mathbf{k}$	— kinematyka manipulatora we współrzędnych (55)
$\mathbf{k}_0$	— postać normalna kinematyki (141)
$\mathbf{k}_{q_0, T}$	— kinematyka robota mobilnego (84)
Ker	— przestrzeń zerowa (37)
κ	— stopień uwarunkowania (130)
L	— lagranżian (194)
$\mathbb{L}_n^2[0, T]$	— przestrzeń funkcji całkowalnych z kwadratem (403)
$\mathbb{L}_k$	— klasa funkcji całkowalnych z k-tą potęgą (403)
$\mathbb{L}_\infty$	— klasa funkcji ograniczonych prawie wszędzie (403)
$\bar{\lambda}_{\mathbf{A}}$	— największa wartość własna macierzy (402)
$\underline{\lambda}_{\mathbf{A}}$	— najmniejsza wartość własna macierzy (402)
$\mathcal{M}$	— rozmaitość gładka (30)
$\mathbf{M}$	— macierz manipulowalności (128)
$\mathbf{M}_{q_0, T}$	— macierz mobilności (186)
$\mathbf{m}$	— manipulowalność (129)
$\mathbf{m}_{q_0, T}$	— mobilność (186)
$\max$	— maksimum (286)
mod	— modulo (149)
N	— funkcja Nussbauma (212)
$\mathbf{n}$	— wektor normalny (26)

o^n	— mała funkcja rzędu n (153)
Ω^b	— prędkość kątowa w układzie ciała (31)
Ω^s	— prędkość kątowa w układzie przestrzeni (31)
ω_b	— wektor prędkości kątowej w układzie ciała (32)
ω_s	— wektor prędkości kątowej w układzie przestrzeni (32)
P	— macierz struktury kinematycznej robota mobilnego (361)
ψ	— zmienna dołączona (408)
$\mathcal{Q}$	— rozmaitość konfiguracyjna (przegubowa) (36)
Q	— macierz inercji manipulatora (195)
R	— macierz obrotu (28)
$\mathbb{R}$	— zbiór liczb rzeczywistych (25)
$\mathbb{R}_+$	— zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych (378)
$\mathbb{R}^n$	— przestrzeń euklidesowa n -wymiarowa (25)
rank	— rząd (30)
Rot	— elementarny obrót (43)
S	— zbiór konfiguracji osobliwych (79)
S^1	— okrąg jednostkowy (41)
s	— zmienna ślizgu (216)
$SE(2)$	— specjalna grupa euklidesowa w $\mathbb{R}^2$ (39)
$SE(3)$	— specjalna grupa euklidesowa w $\mathbb{R}^3$ (29)
$se(3)$	— algebra Liego specjalnej grupy euklidesowej w $\mathbb{R}^3$ (32)
sgn	— signum (232)
$SO(3)$	— specjalna grupa obrotów (28)
span	— obiekt rozpięty (37)
sup	— supremum (212)
σ	— permutacja (299)
T	— wektor przesunięcia (28)
$\mathcal{TM}$	— wiązka styczna (30)
T^r	— torus r -wymiarowy (41)
$T_r(t)$	— sympleks r -wymiarowy (299)
t	— wektor styczny (26)
tr	— ślad (34)
Trans	— elementarne przesunięcie (43)
θ	— wektor parametrów modelu dynamiki (223)
$\hat{\theta}$	— wektor estymat parametrów modelu dynamiki (224)
U	— zbiór otwarty (30)
$u(\cdot)$	— sterowanie (84)

V	— energia potencjalna (194)
V	— funkcja Lapunowa (214)
$\mathbf{V}$	— zbiór otwarty (30)
$\mathbf{V}^b$	— prędkość w układzie ciała (31)
$\mathbf{V}^s$	— prędkość w układzie przestrzeni (31)
$\mathbf{v}_b$	— wektor prędkości liniowej w układzie ciała (32)
$\mathbf{v}_s$	— wektor prędkości liniowej w układzie przestrzeni (32)
$\mathcal{W}$	— przestrzeń robocza manipulatora (96)
$\mathbf{X}$	— pole wektorowe ruchu własnego (166)
$\mathbf{X}_{i_1 \dots i_{m+1}}$	— pole hamiltonowskie (136)
$\mathbf{Y}$	— macierz regresji (223)
$\mathcal{Z}$	— rozmaiłość zadaniowa (41)

Roger Bacon, którego cześć jako mistrza, nauczał nas, że Boski plan wskaże pewnego dnia wiedzę o machinach, które są magią naturalną i świętą. I będzie tak, że siły przyrody pozwolą zrobić maszyny do pływania, by okręty poruszały się tylko homine regente i znacznie szybciej niż te pchane wiatrem lub wiosłami; i będą wozy ut sine animali moveantur cum impetu inaeestimabili, et instrumenta volandi et homo sedens in medio instrumentis revolvens aliquod ingenium per quod alae artificialiter composita aerem verberent, ad modum avis volantis. I małe narzędzia, które podnosić będą nieskończenie wielkie ciężary, i wozy, którymi jeździć będzie można po dnie morza.

U. Eco, *Imię róży*.

(tłum. A. Szymanowski)

Rozdział 1

Wprowadzenie

Wiele znaków wskazuje na to, że nadszedł czas „magii naturalnej i świętej”, który przepowiada Roger Bacon, zwany *doctor mirabilis*, franciszkanin, wynalazca okularów i konstruktor androidu, a imieniem owej magii jest robotyka. Robotyka traktuje o samoczynnych maszynach, które naśladują funkcje manualne i intelektualne człowieka. Samoczynne maszyny nazywamy automatami. Aby automat stał się przedmiotem zainteresowań robotyki, powinien mieć pewien stopień samodzielności, czyli zdolności do celowego funkcjonowania w różnorodnych, nie w pełni znanych, środowiskach. Własność samodzielności, a więc względnej niezależności od otoczenia, często nazywa się autonomią lub inteligencją. Ponieważ zapewnienie samodzielności automatu wymaga nieustannego czerpania i przetwarzania informacji o środowisku, definiuje się robotykę jako naukę o inteligentnym wykorzystaniu percepcji do działania. W tym kontekście, obiekty robotyki nazywane tradycyjnie robotami można określić jako samoczynne i samodzielne maszyny, autonomiczne automaty lub obdarzyć mianem inteligentnych agentów. Jest przeto robotyka nauką interdyscyplinarną, zachwycającą i budzącą przerażenie *ut castrorum acies ordinata*, zakorzenioną w takich dyscyplinach jak mechanika, elektronika i cybernetyka (w klasycznym, wienerowskim rozumieniu). Jak być powinno w każdej ścisłej nauce, językiem i narzędziem robotyki jest matematyka, albowiem w myśl słów Wilhelma z Baskerville:

„Wiedza matematyczna składa się z twierdzeń zbudowanych przez nasz umysł w ten sposób, by zawsze funkcjonowały jako prawda, albo dlatego że są przyrodzone, albo dlatego że matematyka była wynaleziona *wpierw niż inne nauki*.” (U. Eco, *Imię róży*)

Na fundamencie matematycznym opiera się wielka różnorodność me-

to i teorii, heurystyk i hipotez, technik i technologii robotyki. Niniejsza książka ogranicza się do niewielkiego fragmentu tej różnorodności, jakim są podstawy robotyki, i dostarcza opisu podstawowych problemów robotyki i sposobów ich rozwiązania (algorytmów) odnoszących się do modelowania kinematyki i dynamiki, planowania ruchu oraz sterowania manipulatorów i robotów mobilnych. Z punktu widzenia zastosowań, omawiane w książce metody i algorytmy odnoszą się do dwóch klas robotów: robotów przemysłowych oraz robotów usługowych. Nasze ujęcie problemów robotyki ma charakter selektywny i koncentruje się na tych zagadnieniach, do których sformułowania lub rozwiązania udało nam się wnieść pewien wkład oryginalny. Obszary tematyczne robotyki, którym poświęciliśmy szczególną uwagę są zatem następujące: modele kinematyki i dynamiki manipulatorów i nieholonomicznych robotów mobilnych, modelowanie osobiwości kinematyki i kryteria unikania osobiwości manipulatorów redundantnych, algorytmy kinematyki odwrotnej manipulatorów z osobiwościami, algorytmy sterowania manipulatorów sztywnych i manipulatorów o elastycznych przegubach przy ograniczonej znajomości modelu dynamiki, algorytmy planowania ruchu robotów nieholonomicznych wykorzystujące metody geometrycznej teorii sterowania, algorytmy sterowania kołowych robotów mobilnych. W wymienionych obszarach własne wyniki autorów książki zostały przedstawione w szerokim kontekście wyników udokumentowanych w literaturze, dając, jak sądzimy, wyczerpujący i aktualny obraz sytuacji problemowej w dziedzinie podstaw robotyki oraz otwierając nowe perspektywy, zarówno w zakresie badań teoretycznych, jak i stosowanych*.

Książka opiera się na rezultatach badań naukowych, jakie prowadziliśmy w latach 1991–1999, w ramach trzech projektów badawczych finansowanych przez Komitet Badań Naukowych:

- Metody topologiczno-różniczkowe w robotyce,
- Roboty osobiwe i nieholonomiczne: modele i algorytmy sterowania,
- Roboty osobiwe i nieholonomiczne: modele, sterowanie i planowanie trajektorii,

jak również kilku grantów statutowych KBN. Wyniki szczegółowe zostały udokumentowane w rozprawie habilitacyjnej [Dul98], trzech rozprawach

* Jakkolwiek podstawowym narzędziem weryfikacji wyników teoretycznych są w książce symulacje komputerowe, wypada zaznaczyć, że metoda postaci normalnych rozwiązania osobiwego odwrotnego zadania kinematyki oraz algorytmy sterowania manipulatorów sztywnych typu λ -śledzenia przeszły pomyślnie weryfikację eksperymentalną.

doktorskich [Hos96, Maz96, Mus96] oraz w kilkudziesięciu publikacjach. Oprócz wyników opublikowanych, nie oparliśmy się pokusie zamieszczenia w książce wyników zupełnie nowych, uzyskanych przy pracy nad projektem badawczym KBN pt. Modelowanie, planowanie ruchu i sterowanie manipulatorów mobilnych. Sądzymy, że prace których podsumowaniem jest ta książka stanowią dorobek pewnej szkoły uprawiania robotyki, jaka powstała w Zakładzie Podstaw Cybernetyki i Robotyki Instytutu Cybernetyki Technicznej Politechniki Wrocławskiej. Pragniemy ją zadedykować naszemu Mistrzowi, zmarłemu w 1991 roku **Profesorowi Jerzemu Jaroniowi**, którego fascynacja robotyką ukształtowała nasze zainteresowania badawcze, i którego arystokratycznej kulturze logiczno-matematycznej zawdzięczamy podstawy warsztatu naukowego, [Jar78]. Autorzy książki mają zaszczyt zaliczać się do dzieci i wnuków naukowych Profesora.

Książka składa się z trzech części:

- Kinematyka manipulatorów i robotów mobilnych,
- Algorytmy sterowania manipulatorów,
- Algorytmy planowania ruchu i sterowania robotów mobilnych,

i dzieli się na 11 rozdziałów oraz 3 dodatki zawierające definicje podstawowych pojęć matematycznych, ze szczególnym uwzględnieniem dziedziny stabilności układów dynamicznych. Wydaje się nam, że wiedza z analizy matematycznej, algebry i teorii równań różniczkowych w zakresie wykładanym inżynierom, na przykład na kierunku Automatyka i Robotyka politechnik, wsparta podstawowym kursem teorii sterowania i pewną otwartością matematyczną, jest wystarczająca do zrozumienia większości materiału przedstawionego w tej książce. W posługiwaniu się bardziej zaawansowanymi technikami matematycznymi staraliśmy się zachować pewną powściągliwość (dotyczy to zwłaszcza geometrii różniczkowej), aczkolwiek nie podzielamy obawy, że pojawienie się w tekście robotycznym nawiasu Liego uczyni ten tekst całkowicie niezrozumiałym. Co więcej, jesteśmy przekonani, że język matematyczny ułatwia komunikowanie problemów, metod i twierdzeń robotyki nie tylko robotykom, lecz także badaczom spoza kręgu profesjonalnych robotyków. Jakościowy postęp w zakresie metod planowania ruchu i sterowania robotów mobilnych, jaki miał miejsce w bieżącej dekadzie, zawdzięczamy sformułowaniu pewnych zagadnień robotyki w sposób interesujący dla matematyków.

Cechą wyróżniającą nasz sposób podejścia jest poszukiwanie równowagi, transformowanie złożonych modeli i zadań do jak najprostszej po-

staci równoważnej, umożliwiające ich rozwiązanie. W perspektywie filozoficzno-metodologicznej takie podejście można wyprowadzić z poglądów W. Ockhama[†]. Źródła matematyczne metody postaci normalnych znajdują się u H. Poincaré'go i E. Cartana; punktem odniesienia dla naszego sposobu myślenia na temat równoważności są prace B. Jakubczyka [Jak90]. W zasadzie unikamy w książce przedstawiania dowodów twierdzeń odsyłając zainteresowanego Czytelnika do źródłowej literatury. Wyjątkiem są dwa standardowe dowody stabilności algorytmów sterowania, które zamieściliśmy w specjalnym dodatku. Dla wygody Czytelnika wywody formalne zostały zilustrowane licznymi przykładami obliczeniowymi, a także symulacjami komputerowymi przeprowadzonymi w środowiskach MATHEMATICA^{®‡} i MATLAB[®] (SIMULINK^{®§}). Każdy rozdział kończymy serią komentarzy i uwag bibliograficznych umożliwiających Czytelnikowi dotarcie do źródeł przedstawionych wyników i naświetlających dodatkowo ich genezę, znaczenie i wzajemne powiązania. Szybkie odnalezienie potrzebnych pojęć ułatwia indeks zamieszczony na końcu książki.

Różne fragmenty tej książki służyły jako podstawa do wykładów z przedmiotów Mechanika analityczna, Podstawy robotyki oraz Systemy sterowania robotów, jakie prowadzimy na kierunku Automatyka i Robotyka, na Wydziale Elektroniki Politechniki Wrocławskiej. Reakcje naszych studentów, którzy, najprawdopodobniej bez własnej winy, byli kształceni na kilku roboczych wersjach tekstu tej książki, staraliśmy się wykorzystać przy opracowaniu wersji ostatecznej. Jesteśmy wdzięczni tym studentom, dla których robotyka nie pozostała dziedziną obojętną. Są wśród nich nie tylko tacy, którzy z naszych wykładów wynieśli przeświadczenie, że „robotyka to koszmarny”, lecz również tacy, którzy w czasie studiów, niekiedy jeszcze przed napisaniem pracy dyplomowej, uzyskali własne wyniki naukowe. Za pomoc przy wykonaniu symulacji komputerowych dziękujemy przedstawicielowi tej drugiej grupy, mgrowi inż. T. Wróblewskiemu.

Szczególną wdzięczność chcemy wyrazić Redaktorowi Naukowemu Akademickiej Oficyny Wydawniczej, Panu Profesorowi L. Bolcowi, który odważył się podjąć ryzyko związane z publikacją tej książki i zechciał nam udzielić fachowych wskazówek edytorskich w trakcie przygotowania jej do druku.

[†]Nazwanego *venerabilis inceptor*, podobnie jak R. Bacon franciszkanina z Oksfordu, autora dyrektywy metodologicznej „*Entia non sunt multiplicanda praeter necessitatem*”, znanej jako brzytwa Ockhama.

[‡]MATHEMATICA[®] jest znakiem firmowym Wolfram Research, Inc.

[§]MATLAB[®] i SIMULINK[®] są znakami firmowymi The MathWorks, Inc.

Na zakończenie dziękujemy Recenzentowi naszej książki, Panu Profesorowi K. Kozłowskiemu, którego kompetencje merytoryczne i profesorska wnikliwość w znacznym stopniu wpłynęły na ostateczną formę i treść książki. Zamieszczone w recenzji stwierdzenie, że Recenzent dwukrotnie przeczytał maszynopis książki traktujemy jako dowód, że książka nadaje się do czytania. Mamy przy tym świadomość, że odpowiedzialność za błędy, które pomimo naszych wysiłków redakcyjnych pozostały w książce, spoczywa wyłącznie na jej autorach.

Jak już napisaliśmy, ze względu na swoją specyficzną genezę, nasza książka traktuje o podstawach robotyki i ze zrozumiałych względów nie pokrywa całego zakresu problemowego współczesnej robotyki. W kilku dziedzinach robotyki wykraczających całkowicie lub częściowo poza zakres tej książki były prowadzone w Polsce w latach 90-tych poważne prace badawcze, których wyniki zostały opublikowane w formie rozpraw habilitacyjnych, książek lub monografii, mogących stanowić tematyczne uzupełnienie tej książki. Wymienimy niektóre z nich. Pracą zbiorową o charakterze przekrojowym jest książka [MK99] pod redakcją A. Moreckiego i J. Knapczyka. Metody projektowania manipulatorów przemysłowych zostały przedstawione w monografii K. Tomaszewskiego [Tom93]. O identyfikacji modeli dynamiki robotów manipulacyjnych traktuje rozprawa habilitacyjna K. Kozłowskiego [Koz92] oraz monografia [Koz98]. Zagadnieniom planowania trajektorii manipulatorów została poświęcona monografia M. Galickiego [Gal00]. Problematyka syntezy chwytu, bliska w swym ujęciu kinetycznym teorii układów nieholonomicznych, jest obecna w rozprawie habilitacyjnej A. Kasińskiego [Kas98]. Modeli kinematyki, dynamiki i algorytmów sterowania robotów mobilnych dotyczą rozprawy habilitacyjne Z. Hendzla [Hen96] i W. Żylskiego [Żyl96]. Planowaniem trajektorii kołowych robotów mobilnych zajął się w monografii habilitacyjnej L. Podsędkowski [Pod99]. Wprowadzenie do inteligentnych układów robotycznych stanowi rozprawa habilitacyjna W. Jacaka [Jac91] i monografia [Jac99]. Zagadnień modelowania elastycznych systemów produkcyjnych dotyczy książka Z. Banaszaka [BJ91]. Metodom programowania robotów zostały poświęcone rozprawy habilitacyjne C. Zielińskiego [Zie95b] i T. Kocha [Koc96]. Zagadnienia syntezy ruchu maszyn kroczących były przedmiotem rozprawy habilitacyjnej T. Zielińskiej [Zie95a]. Aktywności Wydawnictw Naukowo-Technicznych zawdzięczamy publikację przekładów książek [Cra93, SV97]. Aktualny przegląd wyników badań prowadzonych w Polsce w zakresie robotyki zawierają materiały Krajowych Konferencji Robotyki.

Literatura

- [BJ91] Z. Banaszak i L. S. Jampolski, *Komputerowo wspomagane modelowanie elastycznych systemów produkcyjnych*. WNT, Warszawa, 1991.
- [Cra93] J. J. Craig, *Wprowadzenie do robotyki*. WNT, Warszawa, 1993.
- [Dul98] I. Dulęba, *Algorithms of Motion Planning for Nonholonomic Robots*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 1998.
- [Gal00] M. Galicki, *Wybrane metody planowania optymalnych trajektorii robotów manipulacyjnych*. WNT, Warszawa, 2000.
- [Hen96] Z. Hendzel, *Sterowanie ruchem nadążnym mobilnych robotów kołowych*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów, 1996.
- [Hos96] R. Hossa, *Modele i algorytmy sterowania kołowych robotów mobilnych*. Rozprawa doktorska, Instytut Cybernetyki Technicznej, Politechnika Wrocławska, 1996.
- [Jac91] W. Jacak, *Roboty inteligentne*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 1991.
- [Jac99] W. Jacak, *Intelligent Robotic Systems*. Kluwer, New York, 1999.
- [Jak90] B. Jakubczyk, Equivalence and invariants of nonlinear control systems. W: H. J. Sussmann, (red.), *Differential Geometric Control Theory*, strony 177–218. M. Dekker, New York, 1990.
- [Jar78] J. Jaroń, *Systemic Prolegomena to Theoretical Cybernetics*. Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 1978.
- [Kas98] A. Kasiński, *Metody syntezy chwytu dla autonomicznych systemów manipulacyjnych*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Poznańskiej, Poznań, 1998.
- [Koc96] T. Koch, *Programowanie redundantnych robotów przemysłowych*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 1996.
- [Koz92] K. Kozłowski, *Modele matematyczne dynamiki robotów oraz identyfikacja parametrów tych modeli*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Poznańskiej, Poznań, 1992.
- [Koz98] K. Kozłowski, *Modelling and Identification in Robotics*. Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [Maz96] A. Mazur, *Algorytmy sterowania robotów oparte na zasadzie uniwersalnego adaptacyjnego układu sterowania*. Rozprawa doktorska, Instytut Cybernetyki Technicznej, Politechnika Wrocławska, 1996.

- [MK99] A. Morecki i J. Knapczyk, (red.), *Podstawy Robotyki. Teoria i Elementy Manipulatorów*. WNT, Warszawa, 1999.
- [Mus96] R. Muszyński, *Modele i algorytmy sterowania manipulatorów z osobliwościami kinematycznymi*. Rozprawa doktorska, Instytut Cybernetyki Technicznej, Politechnika Wrocławska, 1996.
- [Pod99] L. Podsędkowski, *Dynamiczne planowanie trajektorii robotów mobilnych w zmiennej przestrzeni roboczej*. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź, 1999.
- [SV97] M. Spong i M. Vidyasagar, *Dynamika i sterowanie robotów*. WNT, Warszawa, 1997.
- [Tom93] K. Tomaszewski, *Roboty przemysłowe*. WNT, Warszawa, 1993.
- [Zie95a] T. Zielińska, *Wykorzystanie własności chodu człowieka i zwierząt do syntezy ruchu maszyn kroczących*. Wydawnictwo Instytutu Biocybernetyki i Inżynierii Biomedycznej PAN, Warszawa, 1995.
- [Zie95b] C. Zieliński, *Robot Programming Methods*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 1995.
- [Żyl96] W. Żylski, *Kinematyka i dynamika mobilnych robotów kołowych*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów, 1996.

Do składu książki wykorzystano system przygotowania dokumentów $\text{\LaTeX}$, opracowany przez L. Lamport'a [Lam94], będący nakładką systemu $\text{\TeX}$, [Knu86a,Knu86b]. Matematyczne czcionki o nazwie AMS Euler, których używamy w tej książce, zostały opracowane przez H. Zapfa [KZ86] na zlecenie Amerykańskiego Towarzystwa Matematycznego. Czcionki składu tekstu, zwane Concrete Roman i Concrete Italic, należące do knuthowskiej rodziny czcionek Computer Modern, zostały specjalnie przystosowane do kształtu czcionki AMS Euler na potrzeby książki [GKP96]. Wszystkie symulacje komputerowe zamieszczone w książce zostały przeprowadzone w środowiskach obliczeniowych MATHEMATICA[®] firmy Wolfram Research, Inc., [Wol96], oraz MATLAB[®] i SIMULINK[®] firmy The MathWorks, Inc., [Mat94a,Mat94b].

- [GKP96] R. L. Graham, D. E. Knuth i O. Patashnik, *Matematyka konkretna*. PWN, Warszawa, 1996.
- [Knu86a] D. E. Knuth, *The $\text{\TeX}$ book*, volume A of Computers and Typesetting. Addison-Wesley, Reading, 1986.
- [Knu86b] D. E. Knuth, *$\text{\TeX}$: The Program*, volume B of Computers and Typesetting. Addison-Wesley, Reading, 1986.
- [KZ86] D. E. Knuth i H. Zapf, AMS Euler — A new typesface for mathematics. Scholarly Publishing, 20:131–157, 1986.
- [Lam94] L. Lamport, *$\text{\LaTeX}$: A Document Preparation System*. Addison-Wesley, Reading, 1994.
- [Mat94a] The MathWorks, Inc., *MATLAB User's Guide*, 1994.
- [Mat94b] The MathWorks, Inc., *SIMULINK User's Guide*, 1994.
- [Wol96] S. Wolfram, *The MATHEMATICA[®] Book*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

Część I

Kinematyka manipulatorów i robotów mobilnych

Rozdział 2

Modele kinematyki układów robotycznych

2.1 Ruch ciała sztywnego

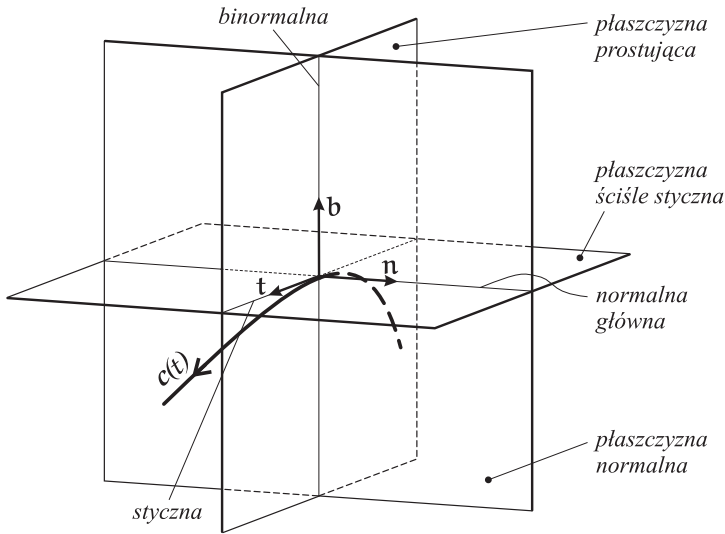
Wszystkie obiekty robotyki istnieją w czasoprzestrzeni fizycznej złożonej z jednowymiarowego czasu i trójwymiarowej przestrzeni. *Czas fizyczny* jest zbiorem chwil, który będziemy utożsamiać ze zbiorem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. *Przestrzeń fizyczna* składa się z punktów, których położenie względem zadanego, prawoskrętnego układu współrzędnych kartezjańskich (zwanego układem przestrzeni) można wyrazić przy pomocy trójki liczb rzeczywistych. W efekcie, przestrzeń fizyczną utożsamiamy z przestrzenią *euklidesową* $\mathbb{R}^3$ wyposażoną w operacje *mnożenia skalarnego* i *mnożenia wektorowego*. Weźmy dwa wektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$ i niech wektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ stanowią standardową bazę w $\mathbb{R}^3$. Iloczyn skalarny i iloczyn wektorowy definiujemy następująco

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{y} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^3 x_i y_i, \quad \mathbf{x} \times \mathbf{y} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

Miarę *długości* wektora $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ w przestrzeni euklidesowej wyznacza norma euklidesowa $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$. Każde gładkie* przekształcenie czasu w przestrzeń

$$\mathbf{c} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad (2.2)$$

*Klasy $\mathbb{C}^\infty$, tzn. posiadające ciągłe pochodne dowolnego rzędu.



Rysunek 2.1 Trójszcian Freneta.

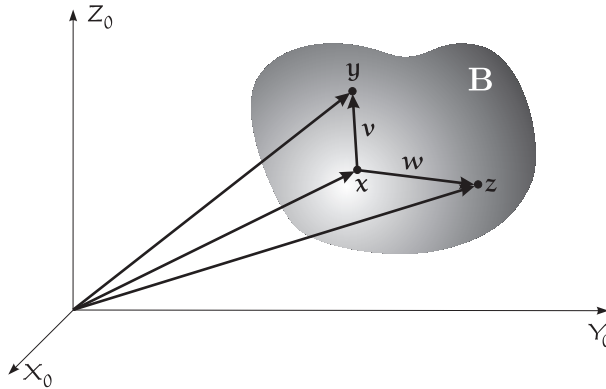
nazywamy *ruchem* punktu materialnego. Przestrzeń $\mathbb{R}^3$ nazywamy *przestrzenią konfiguracyjną* punktu materialnego. Wykres ruchu (2.2) w czasoprzestrzeni stanowi *trajektorię* ruchu. Krzywą w $\mathbb{R}^3$ będącą obrazem ruchu nazywamy *torem* (*ścieżką*) ruchu. Pochodną $\dot{\mathbf{c}}(t)$ ruchu względem czasu nazywamy *prędkością* ruchu. Wektor prędkości jest styczny do toru ruchu. Pochodną rzędu drugiego $\ddot{\mathbf{c}}(t)$ ruchu względem czasu nazywamy *przyspieszeniem* ruchu. Lokalnie geometrię toru ruchu opisuje tzw. *trójszcian Freneta*, przedstawiony na rysunku 2.1. Trójszcian Freneta jest rozpięty przez wektory jednostkowe (wersory) $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$, zdefiniowane w następujący sposób. Wektor styczny $\mathbf{t} = \frac{\dot{\mathbf{c}}}{\|\dot{\mathbf{c}}\|}$. Wektor normalny $\mathbf{n} = \frac{1}{\kappa} \frac{d\mathbf{t}}{ds}$, gdzie $ds = \|\dot{\mathbf{c}}\| dt$ jest elementem długości toru, natomiast

$$\kappa = \left\| \frac{d\mathbf{t}}{ds} \right\| = \frac{\sqrt{\|\dot{\mathbf{c}}\|^2 \|\ddot{\mathbf{c}}\|^2 - (\dot{\mathbf{c}} \cdot \ddot{\mathbf{c}})^2}}{\|\dot{\mathbf{c}}\|^3}$$

nosi nazwę *krzywizny* toru i stanowi miarę odchylenia toru od linii prostej. Wektor binormalny $\mathbf{b}$ jest iloczynem wektorowym dwóch poprzednio zdefiniowanych wektorów

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} = \frac{1}{\kappa \|\dot{\mathbf{c}}\|^3} (\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}).$$

Odchylenie toru od krzywej płaskiej określa parametr zwany *skręceniem*

Rysunek 2.2 Ciało sztywne w $\mathbb{R}^3$.

lub torsją toru

$$T = \left\| \frac{d\mathbf{b}}{ds} \right\| = \frac{1}{K^2} \frac{|(\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}) \cdot \ddot{\mathbf{c}}|}{\|\dot{\mathbf{c}}\|^6}.$$

Występujący w powyższej formule *iloczyn mieszany* wektorów $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$, $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3)^T$ definiuje się jako

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}.$$

Nietrudno się przekonać, że wektor przyspieszenia $\ddot{\mathbf{c}}(t)$ leży w płaszczyźnie stycznej do toru i w ogólnym przypadku posiada dwie składowe: styczną i normalną.

Rozważmy afiniczne przekształcenie przestrzeni euklidesowej

$$\mathbf{D} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{D}(\mathbf{x}) = \mathbf{R}\mathbf{x} + \mathbf{T}, \quad (2.3)$$

gdzie $\mathbf{R}$ jest macierzą rozmiaru 3×3 , zaś wektor $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^3$. Niech zwarty (domknięty i ograniczony) podzbiór $B \subset \mathbb{R}^3$ oznacza *ciało sztywne* (rysunek 2.2). Wybierzmy punkty $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in B$ i zdefiniujmy wektory swobodne $\mathbf{v} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$, $\mathbf{w} = \mathbf{z} - \mathbf{x}$ łączące punkt $\mathbf{x}$ z punktami $\mathbf{y}$ i $\mathbf{z}$. Przekształcenie (2.3) można w naturalny sposób przenieść na wektory swobodne określając

$$\mathbf{D}_*(\mathbf{v}) = \mathbf{D}(\mathbf{y}) - \mathbf{D}(\mathbf{x}) = \mathbf{R}\mathbf{v}, \quad \mathbf{D}_*(\mathbf{w}) = \mathbf{D}(\mathbf{z}) - \mathbf{D}(\mathbf{x}) = \mathbf{R}\mathbf{w}. \quad (2.4)$$

Przekształcenie afiniczne opisane wzorem (2.3) nazywamy *przemieszczeniem* ciała sztywnego w przestrzeni euklidesowej, jeżeli $\mathbf{D}_\star$ zachowuje iloczyn skalarny i iloczyn wektorowy[†], tzn.

$$\mathbf{D}_\star(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{D}_\star(\mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{D}_\star(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{D}_\star(\mathbf{v}) \times \mathbf{D}_\star(\mathbf{w}). \quad (2.5)$$

Na mocy definicji, przemieszczenie ciała sztywnego zachowuje długość wektorów swobodnych (odległość między punktami) oraz kąt między wektorami swobodnymi

$$\|\mathbf{D}_\star(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{v}\|, \quad \angle(\mathbf{D}_\star(\mathbf{v}), \mathbf{D}_\star(\mathbf{w})) = \angle(\mathbf{v}, \mathbf{w}).$$

Biorąc pod uwagę definicję (2.4) i własności (2.5), nietrudno otrzymać następującą charakterystykę przemieszczenia ciała sztywnego w przestrzeni euklidesowej:

- macierz $\mathbf{R}$ jest ortogonalna: $\mathbf{R}\mathbf{R}^\top = \mathbf{R}^\top\mathbf{R} = \mathbb{I}_3$,
- $\mathbf{R}(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{R}\mathbf{v}) \times (\mathbf{R}\mathbf{w})$,
- $\det \mathbf{R} = ((\mathbf{R}\mathbf{e}_1) \times (\mathbf{R}\mathbf{e}_2)) \cdot (\mathbf{R}\mathbf{e}_3) = \|\mathbf{R}\mathbf{e}_3\|^2 = 1^\ddagger$,
- wektor $\mathbf{T}$ jest dowolny.

Macierze $\mathbf{R}$ spełniające pierwsze trzy warunki nazywają się *macierzami obrotu* i tworzą *specjalną grupę obrotów* $\mathbb{SO}(3)$.

Dzięki wprowadzeniu do przestrzeni euklidesowej tzw. *współrzędnych jednorodnych* pozwalających opisać punkt o współrzędnych $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^\top$ układem czterech liczb $(x_1, x_2, x_3, 1)^\top$, można przedstawić przekształcenie afiniczne (2.3) przy pomocy macierzy rozmiaru 4×4 postaci $\begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$. Wówczas

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}\mathbf{x} + \mathbf{T} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Transformacja (2.6) posiada dwojaką interpretację. Po pierwsze, opisuje ona zmianę współrzędnych jednorodnych $(\mathbf{x}^\top, 1)^\top$ (przemieszczenie) pewnego punktu w przestrzeni euklidesowej względem ustalonego układu przestrzeni. Po drugie, jeżeli punkt $(\mathbf{x}^\top, 1)^\top$ jest ustalony, transformacja (2.6) charakteryzuje przemieszczenie pewnego układu współrzędnych względem

[†]Ściśle mówiąc, ze wzoru (2.5) wynika, że iloczyn skalarny jest inwariantny (niezmieniony), natomiast iloczyn wektorowy jest ekwiwariantny (równozmieniony) względem przemieszczenia ciała sztywnego.

[‡]Wykorzystujemy tu prawoskrętność układu $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.

układu przestrzeni, które zachodzi w taki sposób, że jeżeli $(\mathbf{x}^\top, 1)^\top$ oznacza współrzędne jednorodne ustalonego punktu w układzie przemieszczonym, to $((\mathbf{R}\mathbf{x} + \mathbf{T})^\top, 1)^\top$ określa współrzędne jednorodne tego punktu w układzie przestrzeni. Korzystając z tej drugiej interpretacji rozważmy przemieszczenie ciała sztywnego w przestrzeni euklidesowej. Ponieważ podczas przemieszczania odległość między punktami ciała sztywnego nie ulega zmianie, jego ruch jest zdeterminowany przez ruch dowolnie wybranego punktu ciała. Wybierzmy taki punkt i umieśćmy w nim prawoskrętny, kartezjański układ współrzędnych związany z ciałem sztywnym (układ ciała). Załóżmy, że w chwili początkowej układ ciała i układ przestrzeni pokrywają się. Po przemieszczeniu elementy $\mathbf{R}$, $\mathbf{T}$ przekształcenia afinicznego (2.3) wyznaczają położenie ($\mathbf{T}$) i orientację ($\mathbf{R}$) układu ciała względem układu przestrzeni. W konsekwencji, ruch ciała sztywnego w przestrzeni euklidesowej może być rozumiany jako gładkie przekształcenie czasu w grupę przesunięć $\mathbb{R}^3$ oraz w specjalną grupę obrotów $\text{SO}(3)$,

$$\mathbf{c} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3) \cong \text{SE}(3),$$

które określa w każdej chwili położenie i orientację układu ciała względem układu przestrzeni. Występujący w powyższym wzorze obiekt $\text{SE}(3)$ nazywa się *specjalną grupą euklidesową* i stanowi *przestrzeń konfiguracyjną* ciała sztywnego. Zauważmy, że zależność (2.6) pozwala na reprezentowanie elementów specjalnej grupy euklidesowej przy pomocy macierzy $\begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$. Tę macierzową reprezentację grupy $\text{SE}(3)$ będziemy odtąd utożsamiać z grupą $\text{SE}(3)$. Nietrudno wykazać, że $\text{SE}(3)$ istotnie jest grupą z działaniem grupowym będącym mnożeniem macierzy

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_2 & \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1\mathbf{R}_2 & \mathbf{R}_1\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

elementem neutralnym $\mathbb{E} = \mathbb{I}_4$ oraz elementem odwrotnym

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^\top & -\mathbf{R}^\top\mathbf{T} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}.$$

Jak wynika ze wzoru (2.7), specjalna grupa euklidesowa jest tzw. iloczynem półprostym dwóch grup: podgrupy przesunięć $\mathbb{R}^3$ i podgrupy obrotów $\text{SO}(3)$. Zauważmy, że na mocy definicji każdy element $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \in \text{SE}(3)$, formalnie należący do przestrzeni $\mathbb{R}^{12}$ ($\mathbf{R} \in \mathbb{R}^9$, $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^3$), spełnia 6 niezależnych warunków ortogonalności $\mathbf{R}^\top\mathbf{R} = \mathbb{I}_3$, co pozostawia elementom macierzy $\mathbf{S}$

sześć stopni swobody. Z tego powodu powiadamy, że specjalna grupa euklidesowa ma wymiar 6, $\dim \mathbb{SE}(3) = 6$. Grupa $\mathbb{SE}(3)$ stanowi przykład obiektu matematycznego zwanego *gładką rozmaitością*. W dalszym ciągu przez gładką rozmaitość *kowymiaru* k będziemy rozumieć podzbiór pewnej przestrzeni $\mathbb{R}^n$ zdefiniowany przy pomocy k warunków (więzów, ograniczeń) postaci

$$\mathcal{M} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\},$$

gdzie $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_k)^\top$, a funkcje $f_1, \dots, f_k$ są gładkie (klasy $\mathbb{C}^\infty$) oraz niezależne w każdym punkcie $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$, to znaczy rząd macierzy Jacobiego ograniczeń

$$\text{rank} \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right] (\mathbf{x}) = k.$$

Liczbę $m = n - k$ nazywamy *wymiarem* rozmaitości $\mathcal{M}$. W każdym punkcie $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$ gładkiej rozmaitości jest określona tzw. *przestrzeń styczna*,

$$\mathbf{T}_{\mathbf{x}}\mathcal{M} = \text{Ker} \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right] (\mathbf{x}),$$

złożona z wektorów anihilowanych przez macierz Jacobiego ograniczeń w tym punkcie. Na mocy definicji rozmaitości, $\dim \mathbf{T}_{\mathbf{x}}\mathcal{M} = \dim \mathcal{M} = m$. Obiekt powstały ze sklejenia przestrzeni stycznych w poszczególnych punktach $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$,

$$\mathbf{T}\mathcal{M} = \bigcup_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}} (\mathbf{x}, \mathbf{T}_{\mathbf{x}}\mathcal{M}),$$

nazywa się *wiązką styczną* rozmaitości $\mathcal{M}$.

Każda gładka rozmaitość m -wymiarowa jest lokalnie równoważna przestrzeni $\mathbb{R}^m$. Rozumiemy przez to, że istnieją wzajemnie jednoznaczne i gładkie przekształcenia

$$\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{U}}: \mathbf{U} \longrightarrow \mathbf{V} \quad \text{oraz} \quad \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{V}}: \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{U},$$

określone na otwartych podzbiorach $\mathbf{U} \subset \mathcal{M}$, $\mathbf{V} \subset \mathbb{R}^m$, będące wzajemnymi odwrotnościami[§] i zwane, odpowiednio, *układem współrzędnych* oraz *parametryzacją* rozmaitości $\mathcal{M}$. Para $(\mathbf{U}, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{U}})$ nazywa się *mapą* rozmaitości $\mathcal{M}$.

[§]Tzn. $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{U}} \circ \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{V}} = \text{id}_{\mathbf{V}}$, $\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{V}} \circ \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{U}} = \text{id}_{\mathbf{U}}$.

Największy układ zgodnych map[¶], którego dziedziny $\mathbf{U}$ pokrywają $\mathcal{M}$ nazywa się *atlasem* rozmaitości $\mathcal{M}$. Jak już powiedzieliśmy, specjalna grupa euklidesowa $\mathbb{SE}(3)$ jest gładką (ściślej: analityczną) rozmaitością wymiaru 6 i jednocześnie grupą. Grupa posiadająca strukturę gładkiej rozmaitości, której działanie grupowe jest gładką funkcją współrzędnych, nosi nazwę *grupy Liego*.

Podobnie, jak w przypadku ruchu punktu materialnego, wprowadzimy obecnie pojęcie prędkości ruchu ciała sztywnego. W tym celu dla ruchu $\mathbf{c}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(t) & \mathbf{T}(t) \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$ obliczamy pochodną względem czasu $\dot{\mathbf{c}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{R}}(t) & \dot{\mathbf{T}}(t) \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}$. W naturalny sposób definiuje się dwa rodzaje prędkości ciała sztywnego: *prędkość w układzie przestrzeni*

$$\mathbf{V}^s = \dot{\mathbf{c}}(t)\mathbf{c}^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_s & \dot{\mathbf{T}} - \boldsymbol{\Omega}_s\mathbf{T} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

oraz *prędkość w układzie ciała*

$$\mathbf{V}^b = \mathbf{c}^{-1}(t)\dot{\mathbf{c}}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_b & \mathbf{R}^T\dot{\mathbf{T}} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

W powyższych wyrażeniach $\boldsymbol{\Omega}_s = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T$ definiujemy jako *prędkość kątową w układzie przestrzeni*, $\boldsymbol{\Omega}_b = \mathbf{R}^T\dot{\mathbf{R}}$ jest *prędkością kątową w układzie ciała*. Z ortogonalności macierzy obrotu $\mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbb{I}_3$ wynika, że każda z macierzy $\boldsymbol{\Omega}_s$, $\boldsymbol{\Omega}_b$ jest skośnie symetryczna rozmiaru 3×3 , a zatem zdeteterminowana przez wektory prędkości kątowej w układzie przestrzeni $\boldsymbol{\omega}_s$ i w układzie ciała $\boldsymbol{\omega}_b$. Związek między macierzowymi a wektorowymi prędkościami kątowymi jest opisany przy pomocy odwzorowania

$$[\] : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \text{macierze skośnie symetryczne rozmiaru } 3 \times 3,$$

zdefiniowanego formułą

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\omega} \longmapsto [\boldsymbol{\omega}] = \boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Wprowadzone odwzorowanie jest wzajemnie jednoznaczne i określa wektorową reprezentację prędkości w układzie przestrzeni i w układzie ciała

$$\boldsymbol{\Omega}_s = [\boldsymbol{\omega}_s], \quad \boldsymbol{\Omega}_b = [\boldsymbol{\omega}_b]. \quad (2.11)$$

[¶]Dwie mapy $(\mathbf{U}_1, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{U}_1})$, $(\mathbf{U}_2, \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{U}_2})$ nazywamy *zgodnymi*, jeżeli złożenie $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{U}_2} \circ \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{U}_1}^{-1}$ jest lokalnym homeomorfizmem (zobacz dodatek A.2) przestrzeni $\mathbb{R}^m$.

Ponadto, dla każdego wektora $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ jest spełniona zależność

$$\boldsymbol{\Omega}\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega}]\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}.$$

Reprezentacja (2.11) umożliwia zastąpienie macierzy prędkości $\mathbf{V}^s$, $\mathbf{V}^b$ wektorami postaci

$$\mathbf{v}^s = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_s \\ \boldsymbol{\omega}_s \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}^b = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_b \\ \boldsymbol{\omega}_b \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

gdzie

$$\mathbf{v}_s = \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{T} \times \boldsymbol{\omega}_s, \quad \mathbf{v}_b = \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{T}}$$

oznaczają, odpowiednio, *prędkość liniową w układzie przestrzeni* i *w układzie ciała*. Macierze $\mathbf{V}^s$, $\mathbf{V}^b$ należą do przestrzeni stycznej do grupy $\text{SE}(3)$ w elemencie jednostkowym $\mathbb{E} = \mathbb{I}_4$, identyfikowanej z tzw. algebrą Liego $\mathfrak{se}(3)$ grupy $\text{SE}(3)$. Z zależności (2.12) wynika, że $\mathfrak{se}(3)$ można utożsamić z przestrzenią $\mathbb{R}^6$.

Wprowadzonym w sposób formalny pojęciom prędkości ciała sztywnego w układzie przestrzeni i w układzie ciała można nadać następującą interpretację. Wyobraźmy sobie, że układ ciała przemieszcza się względem układu przestrzeni wzdłuż trajektorii $\mathbf{c}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(t) & \mathbf{T}(t) \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$. Wybierzmy w układzie ciała pewien punkt $\mathbf{P}$ o współrzędnych jednorodnych $(\mathbf{p}^T, 1)^T$. W chwili t współrzędne jednorodne tego punktu względem układu przestrzeni wynoszą

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}(t) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(t) & \mathbf{T}(t) \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Prędkość ruchu punktu $\mathbf{P}$ względem układu przestrzeni

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{r}}(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{R}}(t) & \dot{\mathbf{T}}(t) \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

wyrażona w układzie ciała jest równa

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}(t) & \mathbf{T}(t) \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{R}}(t) & \dot{\mathbf{T}}(t) \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{V}^b \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}_b \times \mathbf{p} + \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{T}} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Z zależności (2.15) wynika, że prędkość w układzie ciała jest prędkością ruchu względem układu przestrzeni punktu $\mathbf{P}$, którego współrzędne w układzie

ciała są ustalone, widzianą z układu ciała. Z kolei, jeżeli chcemy uzależnić prędkość ruchu punktu $\mathbf{P}$, widzianego z układu przestrzeni, od współrzędnych jednorodnych tego punktu, z połączenia wzorów (2.13) i (2.14) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{r}}(t) \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{R}}(t) & \dot{\mathbf{T}}(t) \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}(t) & \mathbf{T}(t) \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{r}(t) \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \mathbf{V}^s \begin{pmatrix} \mathbf{r}(t) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}_s \times (\mathbf{r}(t) - \mathbf{T}(t)) + \dot{\mathbf{T}}(t) \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Formuła (2.16) oznacza, że prędkość punktu $\mathbf{P}$ w układzie przestrzeni posiada składową pochodzącą od obrotu wektora $\mathbf{r} - \mathbf{T}$ z prędkością $\boldsymbol{\omega}_s$ oraz składową wynikającą z ruchu początku układu ciała. Mimo formalnego podobieństwa wyrażeń (2.15) i (2.16) należy pamiętać, że faktycznie punkt $\mathbf{P}$ nie porusza się względem układu ciała.

Grupa $\text{SE}(3)$, traktowana jako gładka rozmaitość, dopuszcza rozmaite układy współrzędnych i parametryzacje. Najczęściej przy ich konstruowaniu wykorzystuje się utożsamienie rozmaitości $\text{SE}(3) \cong \mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3)$ i definiuje układ współrzędnych bądź parametryzację osobno dla podgrupy przesunięć $\mathbb{R}^3$, osobno dla podgrupy obrotów $\text{SO}(3)$. Trywialna parametryzacja w podgrupie przesunięć jest wyznaczona przez przekształcenie tożsamościowe $\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{V}}(\mathbf{T}) = \mathbf{T}$ wprowadzające *kartezjański* układ współrzędnych. Oczywiście, w tym przypadku $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$. Współrzędne *walcowe* i *sferyczne* pochodzą od parametryzacji grupy przesunięć opisanych następującymi formułami^{||}

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{V}}(r, \varphi, z) &= (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)^T = \mathbf{T}, \\ \mathbf{V} &= \left\{ (r, \varphi, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid r > 0, 0 < \varphi < 2\pi \right\} \end{aligned} \quad (2.17)$$

oraz

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{V}}(r, \varphi, \theta) &= (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)^T = \mathbf{T}, \\ \mathbf{V} &= \left\{ (r, \varphi, \theta)^T \in \mathbb{R}^3 \mid r > 0, 0 < \varphi < 2\pi, 0 < \theta < \pi \right\}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

W grupie obrotów $\text{SO}(3)$ stosowany jest układ współrzędnych typu *oś-kąt* przypisujący każdemu elementowi tej grupy obrót wokół pewnej osi o pewien

^{||}Zauważmy, że oba odwzorowania $\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{V}}$ są określone na pewnych nadzbiorach $\mathbf{V}$, ale są różnowartościowe tylko na $\mathbf{V}$.

kąt. Ma on postać

$$\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{U}}(\mathbf{R}) = (\mathbf{l}(\mathbf{r}), \varphi)^T, \quad (2.19)$$

gdzie $\mathbf{l}(\mathbf{r})$ jest *osią obrotu* wyznaczoną przez wektor jednostkowy $\mathbf{r}$ spełniający zależność

$$[\mathbf{r}] = \frac{1}{2 \sin \varphi} (\mathbf{R} - \mathbf{R}^T), \quad \varphi = \arccos \frac{\text{tr} \mathbf{R} - 1}{2}, \quad (2.20)$$

a φ jest kątem obrotu. Dziedziną układu współrzędnych typu oś-kąt jest zbiór

$$\mathbf{U} = \{\mathbf{R} \in \mathbb{SO}(3) \mid -1 < \text{tr} \mathbf{R} < 3\}. \quad (2.21)$$

Zbliżony pod względem formalnym do układu współrzędnych typu oś-kąt jest układ współrzędnych *wykładniczych*

$$\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{U}}(\mathbf{R}) = \mathbf{r}, \quad (2.22)$$

gdzie $[\mathbf{r}] = \frac{\varphi}{2 \sin \varphi} (\mathbf{R} - \mathbf{R}^T)$, a kąt φ jest określony jak we wzorze (2.20), którego dziedziną, podobnie jak w przypadku układu współrzędnych typu oś-kąt, jest zbiór (2.21).

Typowym przykładem parametryzacji grupy obrotów jest *parametryzacja Cayleya*

$$\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{V}}(\mathbf{r}) = (\mathbb{I}_3 - [\mathbf{r}])^{-1}(\mathbb{I}_3 + [\mathbf{r}]), \quad (2.23)$$

dla której

$$\mathbf{V} = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{r}\| < 2\}.$$

Często używane parametryzacje grupy obrotów uzyskuje się przez złożenie trzech kolejnych obrotów wokół osi, parami prostopadłych. Do tego rodzaju parametryzacji należą *kąty Eulera Z-Y-Z*

$$\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{V}}(\varphi, \theta, \psi) = \mathbf{R}(Z, \varphi) \mathbf{R}(Y, \theta) \mathbf{R}(Z, \psi), \quad (2.24)$$

których dziedziną jest

$$\mathbf{V} = \{(\varphi, \theta, \psi) \mid 0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi, 0 < \psi < 2\pi\},$$

oraz parametryzacja przy pomocy kątów zwanych *kołysanie-kiwanie-myszowanie* (Roll-Pitch-Yaw)**

$$\psi_V(\varphi, \theta, \psi) = \mathbf{R}(Z, \varphi)\mathbf{R}(Y, \theta)\mathbf{R}(X, \psi), \quad (2.25)$$

określona na zbiorze

$$\mathbf{V} = \{(\varphi, \theta, \psi) \mid -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, 0 < \varphi < 2\pi, 0 < \psi < 2\pi\}.$$

We wzorach (2.24), (2.25) symbol $\mathbf{R}(\text{oś}, \text{kąt})$ oznacza obrót wokół jednej z osi układu ciała o zadany kąt. Łatwo pokazać, że obroty względem osi X, Y, Z ustalonego układu współrzędnych są zdefiniowane przy pomocy następujących macierzy obrotu:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(X, \alpha) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}(Y, \beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}, \\ \mathbf{R}(Z, \gamma) &= \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Na zakończenie omówimy układ współrzędnych *wykładniczych* w specjalnej grupie euklidesowej $\mathbb{SE}(3)$, zdefiniowany formułą

$$\varphi_U(\mathbf{R}, \mathbf{T}) = (\mathbf{r}, \mathbf{t}), \quad (2.27)$$

w której $[\mathbf{r}] = \frac{\varphi}{2 \sin \varphi} (\mathbf{R} - \mathbf{R}^T)$, $\mathbf{t} = \left(\mathbb{I}_3 - \frac{1}{2}[\mathbf{r}] + \frac{2 \sin \varphi - \varphi(1 + \cos \varphi)}{2 \varphi^2 \sin \varphi} [\mathbf{r}]^2 \right) \mathbf{T}$ oraz $\varphi = \arccos \frac{\text{tr} \mathbf{R} - 1}{2}$. Dziedzina układu współrzędnych wykładniczych jest

$$\mathbf{U} = \{(\mathbf{R}, \mathbf{T}) \in \mathbb{SE}(3) \mid -1 < \text{tr} \mathbf{R} < 3\}.$$

Układ współrzędnych wykładniczych stanowi odwzorowanie odwrotne do *parametryzacji wykładniczej* grupy $\mathbb{SE}(3)$, określonej wyrażeniem

$$\psi_V(\mathbf{r}, \mathbf{t}) = \exp \begin{bmatrix} [\mathbf{r}] & \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

gdzie $\exp \mathbf{A} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!}$. Nietrudno zauważyć, że wszystkie układy współrzędnych i parametryzacje (2.17)–(2.28) są lokalnie, a nie globalnie, wzajemnie jednoznaczne (odwracalne).

**Tak wg *Słownika żeglarskiego angielsko-polskiego* pod redakcją W. Petryńskiego, PWN, Warszawa, 1996. Wydaje się, że zaproponowane terminy są bardziej komunikatywne od używanych dotąd w polskich przekładach; wystarczy wyobrazić sobie, że płyniemy łódką w kierunku osi X układu współrzędnych, którego oś Z jest skierowana w górę.

2.2 Kinematyka układu robotycznego

Niech będzie dany pewien *układ robotyczny* opisany *współrzędnymi uogólnionymi* $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N)^T$ należącymi do pewnego *uniwersum konfiguracyjnego* $\mathbb{R}^N$. Załóżmy, że ruch układu jest opisany gładkim przekształceniem $t \mapsto \mathbf{q}(t)$. Oznaczmy przez $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^N$ *prędkości uogólnione* układu. Przestrzeń $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \cong \mathbb{R}^{2N}$ położeń i prędkości uogólnionych będziemy nazywać *uniwersum fazowym* układu robotycznego^{††}.

Wzajemne związki między elementami układu, a także między układem a jego otoczeniem, będziemy reprezentować w formie *ograniczeń (więzów) konfiguracyjnych*

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}) = (f_1(\mathbf{q}), f_2(\mathbf{q}), \dots, f_k(\mathbf{q}))^T = \mathbf{0} \quad (2.29)$$

oraz *ograniczeń (więzów) fazowych*

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}. \quad (2.30)$$

Zakładamy, że liczba więzów konfiguracyjnych $k \leq N$, a funkcje $f_1, f_2, \dots, f_k$ są gładkie i niezależne, tzn.

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \implies \text{rank} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}) = k,$$

oraz że macierz $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ ma rozmiar $l \times N$, $l \leq N$, składa się z gładkich funkcji $a_{ij}(\mathbf{q})$ i jest pełnego rzędu,

$$\text{rank} \mathbf{A}(\mathbf{q}) = l.$$

Postać (2.30) ograniczeń fazowych nazywa się *postacią Pfaffa*. Załóżmy na moment, że ograniczenia fazowe (2.30) nie występują ($l = 0$). Wówczas k niezależnych ograniczeń konfiguracyjnych wyznacza *rozmaitość konfiguracyjną*

$$\mathcal{Q} = \{ \mathbf{q} \in \mathbb{R}^N \mid f_1(\mathbf{q}) = \dots = f_k(\mathbf{q}) = 0 \} \quad (2.31)$$

układu, której wymiar $\dim \mathcal{Q} = N - k = n$, z przestrzenią styczną $\mathbf{T}_{\mathbf{q}}\mathcal{Q} = \text{Ker} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q})$. Liczbę n nazywamy liczbą *stopni swobody* układu robotycznego. W rezultacie, ruch układu jest ograniczony do rozmaitości $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^N$.

^{††} Jeżeli ruch układu nie podlega ograniczeniom, uniwersum fazowe pokrywa się z przestrzenią fazową (przestrzenią stanu) układu dynamicznego zdefiniowanego równaniami Eulera-Lagrange'a.

Obecność ograniczeń fazowych (2.30) może, ale nie musi, prowadzić do dalszego ograniczenia dopuszczalnych konfiguracji układu. Zależy to od własności ograniczeń fazowych zwanej *holonomicznością*. Ograniczenia fazowe nazywamy holonomicznymi, jeżeli jest możliwe ich scałkowanie i zastąpienie ograniczeniami postaci (2.29). Zatem, w przypadku ograniczeń holonomicznych istnieje odwzorowanie $\mathbf{h}(\mathbf{q}) = (h_1(\mathbf{q}), h_2(\mathbf{q}), \dots, h_l(\mathbf{q}))^T$, takie że (2.30) jest równoważne warunkowi

$$\mathbf{h}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}.$$

Łatwo zauważyć, że holonomiczne ograniczenia fazowe można dołączyć do ograniczeń konfiguracyjnych. Inaczej jest w przypadku ograniczeń nieholonomicznych. Nieholonomiczność ograniczeń (2.30) oznacza, że scałkowanie systemu (2.30) nie jest możliwe, a obecność tych ograniczeń nie zmniejsza osiągalności konfiguracji w obrębie rozmaitości konfiguracyjnej. Utrudnieniu może ulec natomiast sposób osiągania pewnych konfiguracji. Aby przeanalizować bardziej szczegółowo znaczenie nieholonomiczności ograniczeń fazowych założmy, że układ nie podlega ograniczeniom konfiguracyjnym ($k = 0$, $n = N$). Wówczas z (2.30) wynika, że w każdej konfiguracji $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ dopuszczalne prędkości układu muszą należeć do przestrzeni zerowej (jądra) macierzy $\mathbf{A}(\mathbf{q})$,

$$\dot{\mathbf{q}} \in \text{Ker } \mathbf{A}(\mathbf{q}). \quad (2.32)$$

Niech $\mathbf{G}(\mathbf{q}) = [g_1(\mathbf{q}), g_2(\mathbf{q}), \dots, g_{n-l}(\mathbf{q})]$ będzie macierzą, której kolumnami są wektory rozpinające przestrzeń liniową $\text{Ker } \mathbf{A}(\mathbf{q})$ w konfiguracji $\mathbf{q}$. Z niezależności ograniczeń fazowych wynika, że w każdym punkcie rząd $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ jest pełny,

$$\text{rank } \mathbf{G}(\mathbf{q}) = n - l = m,$$

natomiast własność (2.32) jest równoważna istnieniu wektora $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, takiego że

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{G}(\mathbf{q})\mathbf{u} = \sum_{i=1}^m \mathbf{g}_i(\mathbf{q})u_i. \quad (2.33)$$

Pola wektorowe $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_m$ wyznaczają w uniwersum fazowym obiekt geometryczny $\mathcal{G} = \text{span}_{\mathbb{C}^\infty} \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_m\}$, zwany *dystrybucją*. Elementami dystrybucji są kombinacje pól $\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m$ mnożonych przez funkcje gładkie[†]. Spełnienie ograniczeń fazowych oznacza, że w każdym punkcie uniwersum konfiguracyjnego prędkość układu należy do dystrybucji $\mathcal{G}$, a więc

[†]Formalnie, pola wektorowe należące do dystrybucji $\mathcal{G}$ mają postać $\sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{g}_i$, gdzie $\alpha_i \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

jest rozpięta przez kolumny macierzy $\mathbf{G}$. Mając wyznaczoną dystrybucję $\mathcal{G}$, możemy się posługiwać następującym kryterium nieholonomiczności ograniczeń.

Twierdzenie 2.2.1 *Niech $\mathcal{G} = \text{span}_{\mathbb{C}^\infty} \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_m\}$. Zdefiniujmy ciąg dystrybucji*

$$\mathcal{G}^0 = \mathcal{G}, \quad \mathcal{G}^1 = \mathcal{G}^0 + [\mathcal{G}^0, \mathcal{G}^0], \dots, \quad \mathcal{G}^j = \mathcal{G}^{j-1} + [\mathcal{G}^{j-1}, \mathcal{G}^0], \dots,$$

$j = 1, 2, \dots$, w którym operacja $[\ , \]$ oznacza nawias Liego pól wektorowych i jest zdefiniowana formułą

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}](\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{X}(\mathbf{q}) - \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{Y}(\mathbf{q}). \quad (2.34)$$

Wówczas, jeżeli dla pewnego $j = r$ zachodzi $\dim \mathcal{G}^r(\mathbf{q}) = n$, to ograniczenia (2.30) są nieholonomiczne. Liczba r nazywa się stopniem nieholonomiczności dystrybucji $\mathcal{G}$.

Ciąg $\mathcal{G}^0 \subset \mathcal{G}^1 \subset \dots \subset \mathcal{G}^j \subset \dots$ nazywamy *filtracją* dystrybucji $\mathcal{G}$. Filtracja jest regularna, jeżeli każda dystrybucja $\mathcal{G}^j$ ma stały wymiar, to znaczy w każdym punkcie $\mathbf{q}$ $\dim \mathcal{G}^j(\mathbf{q}) = r_j = \text{const}$. W przypadku filtracji regularnej ciąg wymiarów $r_0 \leq r_1 \leq \dots \leq r_k \leq \dots$ ustala się w skończonej liczbie kroków $p \leq n$ na pewnym poziomie r_p . Ciąg $(r_0, r_1, \dots, r_p)$ nazywamy *wektorem wzrostu* dystrybucji $\mathcal{G}$. Jeżeli $r_p < n$, to ograniczenia fazowe (2.30) są holonomiczne. W szczególności, jeżeli $l = n - 1$ (tzn. $p = 0$ i $r_p = 1$), to dystrybucja $\mathcal{G}$ jest generowana przez jedno pole wektorowe i ograniczenia (2.30) są holonomiczne.

Jeżeli występują ograniczenia konfiguracyjne (2.29), a zatem ruch układu jest ograniczony do rozmaitości konfiguracyjnej $\mathcal{Q}$, nałożenie ograniczeń nieholonomicznych (2.30) powinno być zgodne z istniejącymi ograniczeniami konfiguracyjnymi. Rozumiemy przez to spełnienie następującego warunku

$$\text{Ker } \mathbf{A}(\mathbf{q}) \subset \text{Ker } \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}),$$

co oznacza, że w każdym punkcie $\mathbf{q} \in \mathcal{Q}$ dystrybucja $\mathcal{G}$ spełnia warunek $\mathcal{G}(\mathbf{q}) \subset \mathbf{T}_{\mathbf{q}}\mathcal{Q}$, skąd wynika, że dopuszczalne prędkości układu należą do podprzestrzeni $\mathcal{G}(\mathbf{q})$ przestrzeni stycznej do $\mathcal{Q}$. Warunek nieholonomiczności przybierze wtedy postać $\dim \mathcal{G}^p(\mathbf{q}) = r_p = \dim \mathcal{Q}^\ddagger$.

[‡]Przykłady ograniczeń konfiguracyjnych i fazowych związanych z zadaniem toczenia się koła bez poślizgu oraz z kinematyką spadającego kota podajemy w rozdziale 8.

Zadanie, jakie ma wykonać układ robotyczny polega na celowym oddziaływaniu (akcji) na otoczenie układu. Opis formalny tego oddziaływania na poziomie uniwersum fazowego wymaga wprowadzenia obiektu zwanego *rozmaitością zadaniową*. W przypadku pojedynczego manipulatora oddziaływanie na otoczenie zachodzi za pośrednictwem efektora, a rozmaitością zadaniową jest zbiór położeń i orientacji efektora, czyli grupa $\mathbb{SE}(3)$ (lub pewna podgrupa $\mathbb{SE}(3)$), dla jednokołowego robota mobilnego poruszającego się po płaszczyźnie, którego oddziaływanie na otoczenie zachodzi za pośrednictwem koła, rozmaitością zadaniową będzie grupa $\mathbb{SE}(2) \cong \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$, złożona z położeń i orientacji ciała sztywnego w $\mathbb{R}^2$. Dla ustalonej rozmaitości zadaniowej, możliwości wywierania przez układ określonych akcji na otoczenie opisujemy przy pomocy odwzorowania zwanego *kinematyką układu robotycznego*. W przypadku układu holonomicznego (np. manipulatora) kinematyka jest pewnym odwzorowaniem

$$\mathbf{K} : \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{Z}, \quad \mathbf{z} = \mathbf{K}(\mathbf{q}) \quad (2.35)$$

rozmaitości konfiguracyjnej układu w rozmaitość zadaniową. Kinematyka $\mathbf{K}$ układu nie zawsze jest zadana w sposób jawny. Na przykład, w przypadku układów zawierających zamknięte łańcuchy kinematyczne, kinematyka może być wyrażona w formie uwikłanej za pośrednictwem ograniczeń konfiguracyjnych $\mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{z}) = \mathbf{0}$. Jeżeli w układzie istnieją nieholonomiczne ograniczenia fazowe, do opisu kinematyki służy *układ sterowania* postaci

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{G}(\mathbf{q})\mathbf{u}, \quad (2.36)$$

w którym wektor $\mathbf{u}$ należy do pewnej przestrzeni sterowań.

Aby zrozumieć znaczenie sterowań $\mathbf{u}$ w układzie nieholonomicznym, przeanalizujemy teraz dokładniej formułę (2.30) opisującą ograniczenia fazowe. W pewnym otoczeniu punktu $\mathbf{q}^s$ formułę tę można przepisać w postaci

$$[\mathbf{A}_1(\mathbf{q}) \quad \mathbf{A}_2(\mathbf{q})] \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}, \quad (2.37)$$

w której macierz $\mathbf{A}_2(\mathbf{q})$ jest rozmiaru $l \times l$ i pełnego rzędu. Oczywiście, ograniczenia (2.37) będą spełnione[¶], jeżeli pomnożymy obie strony równości (2.37) lewostronnie przez macierz odwrotną $\mathbf{A}_2^{-1}(\mathbf{q})$. W rezultacie otrzymamy następującą lokalnie równoważną postać ograniczeń fazowych

$$[\mathbf{A}_2^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{A}_1(\mathbf{q}) \quad \mathbb{I}_l] \dot{\mathbf{q}} = [-\mathbf{W}(\mathbf{q}) \quad \mathbb{I}_l] \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$$

^sW razie potrzeby, po przenumеровaniu współrzędnych uogólnionych.

[¶]W każdym punkcie, w którym macierz $\mathbf{A}_2(\mathbf{q})$ jest nieosobliwa.

prowadzącą do macierzy $\mathbf{G}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{N-l} \\ \mathbf{W}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}$ układu sterowania (2.36). Podzielmy współrzędne uogólnione $\mathbf{q}$ na dwie grupy $\mathbf{q} = (\mathbf{q}^1, \mathbf{q}^2)^T$, gdzie $\dim \mathbf{q}^1 = N - l = m$, $\dim \mathbf{q}^2 = l$. Przy takim podziale kinematyka układu (2.36) przyjmie postać

$$\dot{\mathbf{q}}^1 = \mathbf{u}, \quad \dot{\mathbf{q}}^2 = \mathbf{W}(\mathbf{q})\mathbf{u}. \quad (2.38)$$

Ze wzoru (2.38) wynika, że sterowania $\mathbf{u}$ występujące w równaniach kinematyki układu nieholonomicznego mogą być interpretowane jako pewne składowe prędkości uogólnionych układu.

2.3 Kinematyka manipulatora

Manipulator o n stopniach swobody jest układem robotycznym złożonym z n ciał sztywnych zwanych *ramionami*, połączonych za pośrednictwem *przegubów*. Jeden koniec łańcucha ramion tworzącego manipulator jest związany z nieruchomą bazą (np. podłożem), drugi koniec pozostaje swobodny. Parę złożoną z przegubu i następującego po nim ramienia będziemy nazywać *ogniwem* manipulatora. Dwa ramiona połączone przegubem noszą nazwę *pary kinematycznej*. W układach robotycznych najczęściej są spotykane pary kinematyczne V klasy, to znaczy takie, które posiadają jeden stopień swobody ruchu w przegubie. Istnieją dwa rodzaje przegubów spełniających ten warunek: *przeguby obrotowe* i *przeguby przesuwne*. Geometrycznie, przegub obrotowy można zdefiniować zadając punkt w przestrzeni (środek przegubu) i wektor w tym punkcie (oś obrotu przegubu). Umieścmy układ współrzędnych związany z pierwszym elementem pary obrotowej w środku przegubu w taki sposób, by oś Z pokrywała się z osią przegubu. Niech układ związany z drugim elementem pary obrotowej znajduje się również w środku przegubu i niech oś Z tego układu będzie osią przegubu. Rozważmy ruch jednego elementu pary względem drugiego. Jak wiadomo, rozmaitość konfiguracyjna ciała sztywnego, $\mathbb{SE}(3)$, jest sześciowymiarowa i składa się z przesunięć $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^3$ oraz obrotów $\mathbf{R} \in \mathbb{SO}(3)$. Ustalenie położenia środka przegubu wyznacza wektor $\mathbf{T}$ ($\mathbf{T} = \mathbf{0}$). Co więcej, ustalenie osi obrotu wymaga, by $\mathbf{R}\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3$, czyli, biorąc pod uwagę ortogonalność macierzy obrotu, $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Z ortogonalności macierzy $\mathbf{R}$ wynika również, że $r_{11}^2 + r_{12}^2 = 1$, $r_{21}^2 + r_{22}^2 = 1$, $r_{11}r_{21} + r_{12}r_{22} = 0$. Te trzy ograniczenia będą spełnione, jeżeli $r_{11} = \cos \varphi$, $r_{12} = -\sin \varphi$, $r_{21} = \sin \varphi$, $r_{22} = \cos \varphi$. Otrzymana w ten sposób macierz $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ reprezentuje obrót

wokół osi Z o kąt φ , skąd wynika, że rozmaiłość konfiguracyjna pary kinematycznej V klasy wykonującej ruch w zamocowanym, nieograniczonym przegubie obrotowym ma postać okręgu jednostkowego S^1 . Ograniczenie zakresu ruchu w przegubie może wymagać zastąpienia okręgu pewnym łukiem okręgu. W przypadku, gdy ruch ciała sztywnego zachodzi względem zamocowanego, nieograniczonego przegubu przesuwne, rozumowanie analogiczne do powyższego prowadzi do wniosku, że rozmaiłość konfiguracyjna może być utożsamiona ze zbiorem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ lub z pewnym przedziałem liczb rzeczywistych, jeżeli zakres ruchu w przegubie jest ograniczony.

Biorąc pod uwagę powyższe spostrzeżenia, nietrudno dojść do wniosku, że dla manipulatora o n stopniach swobody, posiadającego r przegubów obrotowych i $n-r$ przegubów przesuwne (wszystkie nieograniczone), rozmaiłość konfiguracyjna może być zdefiniowana jako iloczyn kartezjański torusa T^r i przestrzeni $\mathbb{R}^{n-r}$

$$Q = \underbrace{S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1}_{r \text{ razy}} \times \underbrace{\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \times \dots \times \mathbb{R}^1}_{(n-r) \text{ razy}} \cong T^r \times \mathbb{R}^{n-r}. \quad (2.39)$$

Rozmaiłość konfiguracyjną (2.39) będziemy odtąd nazywać *rozmaiłością przegubową*. Naturalną parametryzację rozmaiłości przegubowej tworzy zbiór kątów obrotu w przegubach obrotowych $q_1, q_2, \dots, q_r \in (0, 2\pi)$ oraz zestaw przesunięć w przegubach przesuwne $q_{r+1}, q_{r+2}, \dots, q_n \in \mathbb{R}$.

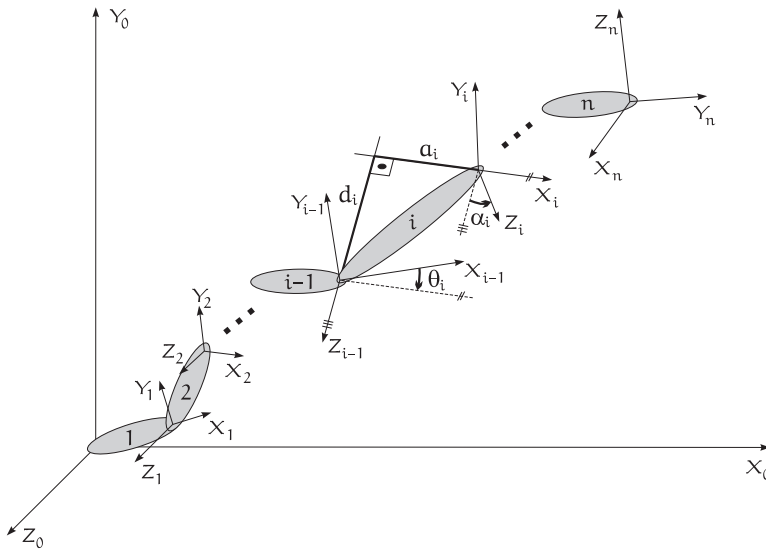
Ostatnie ramię manipulatora, licząc od bazy, służy do oddziaływania na otoczenie i dlatego jest nazywane *efektorem* manipulatora. Jak zauważyliśmy w poprzednim podrozdziale, zadanie jakie ma wykonać manipulator formuluje się zwykle przez określenie pożądanego położenia i orientacji efektora. W związku z tym, będziemy zakładać, że rozmaiłość zadaniowa manipulatora zawiera się w specjalnej grupie euklidesowej, $\mathcal{Z} \subset SE(3)$, a przez *kinematykę manipulatora* będziemy rozumieć gładkie (analityczne) odwzorowanie

$$K: Q \longrightarrow \mathcal{Z} \subset SE(3) \quad (2.40)$$

rozmaiłości przegubowej w rozmaiłość zadaniową.

2.3.1 Reprezentacja Denavita-Hartenberga

Odwzorowanie K określa położenie i orientację efektora w funkcji położen przyjmowanych przez przeguby manipulatora. Powszechnie przyjęty w ro-



Rysunek 2.3 Schemat kinematyki manipulatora.

botyce sposób reprezentowania kinematyki manipulatora pochodzi od Denavita i Hartenberga. Algorytm Denavita-Hartenberga wyznaczania kinematyki polega na związaniu z każdym przegubem manipulatora lokalnego układu współrzędnych, a następnie określeniu ciągu transformacji sąsiednich układów współrzędnych, i prowadzi do wyliczenia kinematyki manipulatora jako złożenia tych transformacji. Niech będzie dany manipulator o n przegubach, obrotowych bądź przesuwanych, i układ przestrzeni $X_0Y_0Z_0$ (podstawowy układ współrzędnych). Zakładamy, że przegub nr 1 został umieszczony w początku układu przestrzeni w taki sposób, że oś Z układu przestrzeni pokrywa się z osią tego przegubu. Początek układu współrzędnych $X_{i-1}Y_{i-1}Z_{i-1}$ związanego z ramieniem nr $i-1$ manipulatora leży na osi i -tego przegubu, $i = 2, 3, \dots, n$. Ruch i -tego przegubu zachodzi względem osi Z układu $(i-1)$ -szego. Układ $X_nY_nZ_n$ związany z efektozem umieszczamy tak, aby jego oś X przecinała się z osią Z_{n-1} i była do niej prostopadła. Rozmieszczenie układów współrzędnych ilustruje rysunek 2.3. Załóżmy, że wyznaczyliśmy położenie i orientację układu $X_{i-1}Y_{i-1}Z_{i-1}$. Położenie i orientację układu $X_iY_iZ_i$ definiujemy na podstawie znajomości położenia i orientacji układu $(i-1)$ -szego. W tym celu prowadzimy normalną do osi przegubów nr $i, i+1$. Wyznaczamy punkty przecięcia normalnej z osiami. Następnie obracamy układ $(i-1)$ -szy wokół osi i -tego przegubu, tak by oś X układu stała się równoległa do normalnej, przesuwamy ten układ wzdłuż osi

i -tego przegubu aż do punktu przecięcia tej osi z normalną, z kolei przesuwamy układ wzdłuż normalnej, do punktu przecięcia z osią przegubu nr $i + 1$, i w końcu obracamy układ wokół osi X aż do pokrycia się osi Z układu z osią przegubu $(i + 1)$ -szego*. Tę procedurę powtarzamy dla kolejnych ogniw dochodząc do układu związanego z efekтором. Z formalnego punktu widzenia, transformacja układu numer $i - 1$ w układ o numerze i może być opisana przy pomocy złożenia

$$\mathbf{A}_{i-1}^i(q_i) = \mathbf{Rot}(Z, \theta_i) \mathbf{Trans}(Z, d_i) \mathbf{Trans}(X, a_i) \mathbf{Rot}(X, \alpha_i) \quad (2.41)$$

elementarnych obrotów i przesunięć

$$\mathbf{Rot}(\text{oś}, \text{kąt}) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(\text{oś}, \text{kąt}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Trans}(\text{oś}, \text{przesunięcie}) = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_3 & \text{przesunięcie} \cdot \text{oś} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}.$$

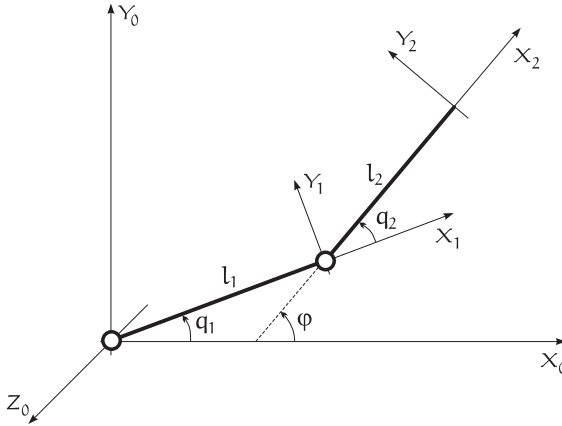
Dla przegubu obrotowego zmienna przegubowa $q_i = \theta_i$, zaś dla przegubu przesuwającego $q_i = d_i$. Parametry występujące w zależności (2.41) nazywamy *parametrami Denavita-Hartenberga* manipulatora. Parametry, które nie są zmiennymi przegubowymi charakteryzują geometrię ogniwa manipulatora i noszą nazwę *parametrów geometrycznych*. *Kinematyka manipulatora* określa położenie i orientację układu efektora względem układu podstawowego, i jest opisana złożeniem transformacji (2.41)

$$\mathbf{K}(\mathbf{q}) = \prod_{i=1}^n \mathbf{A}_{i-1}^i(q_i) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^n(\mathbf{q}) & \mathbf{T}_0^n(\mathbf{q}) \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.42)$$

Odwzorowanie (2.42) nazywamy *reprezentacją kinematyki manipulatora wg Denavita-Hartenberga*.

Poniżej wyprowadzimy modele matematyczne kinematyki kilku przykładowych manipulatorów. Pozwoli to Czytelnikowi na prześledzenie sposobu posługiwania się algorytmem Denavita-Hartenberga. Wyprowadzone modele zostaną wykorzystane w rozdziale 3 przy omawianiu algorytmów kinematyki odwrotnej.

* Jeżeli normalna nie jest wyznaczona jednoznacznie, początek układu $X_i Y_i Z_i$ umieszczamy w środku przegubu $(i + 1)$ -szego. Jeżeli osie Z_{i-1} , Z_i przecinają się, początek układu $X_i Y_i Z_i$ umieszczamy w punkcie przecięcia osi, a oś X_i orientujemy w kierunku $Z_{i-1} \times Z_i$.



Rysunek 2.4 Manipulator typu podwójne wahadło.

Przykład 2.3.1 (Manipulator typu podwójne wahadło)

Bardzo prostą konstrukcją manipulatora jest przedstawiony na rysunku 2.4 manipulator typu podwójne wahadło, zbudowany z dwóch ramion i dwóch przegubów obrotowych. Osie obrotu przegubów manipulatora są prostopadłe do płaszczyzny X_0Y_0 (równoległe do osi Z_0). Przy wyborze tego manipulatora jako pierwszego przykładu kierowaliśmy się nie tylko przesłankami natury ilustracyjnej, lecz także praktycznej: strukturę kinematyczną podwójnego wahadła posiada manipulator eksperymentalny *EDDA*, którego model wykorzystujemy do badania algorytmów sterowania, a także łańcuch kinematyczny utworzony przez pierwsze dwa ogniwa manipulatora przemysłowego typu *SCARA*. Przyjmijmy, że ruch w obu przegubach manipulatora jest nieograniczony, a długości ramion wynoszą l_1 i l_2 .

Rozpatrywany manipulator jest manipulatorem klasy $2R^\dagger$, a zatem jego rozmierność konfiguracyjna $\mathcal{Q}$ może być utożsamiona z dwuwymiarowym torusem $\mathbb{T}^2$, którego punkty są reprezentowane przez kąty obrotu w pierwszym i drugim przegubie, $\mathbf{q} = (q_1, q_2)^\top$. Zadanie kinematyki manipulatora będzie polegało na wyrażeniu położenia i orientacji efektor manipulatora w podstawowym układzie współrzędnych $X_0Y_0Z_0$ jako funkcji konfiguracji manipulatora $\mathbf{q}$, czyli na wyznaczeniu odwzorowania

$$\mathbf{K} : \mathbb{T}^2 \longrightarrow \text{SE}(3). \quad (2.43)$$

Zgodnie z algorytmem Denavita-Hartenberga, zaczynamy od zdefiniowania podstawowego układu współrzędnych (układu przestrzeni) oraz roz-

[†]Co oznacza, że posiada dwa przeguby typu obrotowego (R).

ogniwo	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	0	l_1	0
2	q_2	0	l_2	0

Tabela 2.1 Parametry Denavita-Hartenberga manipulatora typu podwójne wahadło.

mieszczenia lokalnych układów współrzędnych (układów ciał) związanych z ramionami manipulatora. Przy wyborze układu podstawowego $X_0Y_0Z_0$ musimy jedynie zadbać, by oś Z tego układu pokrywała się z osią obrotu pierwszego przegubu manipulatora. Lokalny układ współrzędnych $X_1Y_1Z_1$ [‡] związany z pierwszym ramieniem manipulatora umieszczamy tak, że oś Z tego układu pokrywa się z osią obrotu przegubu drugiego. Ponieważ w rozpatrywanym przypadku osie obrotu przegubów są do siebie równoległe (istnieje nieskończenie wiele normalnych do nich), początek układu $X_1Y_1Z_1$ wybieramy w środku przegubu drugiego. Początek następującego po nim układu $X_2Y_2Z_2$ związanego z efektem manipulatora umieszczamy na końcu drugiego ramienia, a sam układ orientujemy w taki sposób, aby oś Z_2 była równoległa do osi Z_1 .

Po określeniu układów współrzędnych wyznaczamy parametry Denavita-Hartenberga rozpatrywanego manipulatora. Jak już powiedzieliśmy, kąty obrotu θ_1 i θ_2 są równe odpowiednio zmiennym q_1 i q_2 parametryzującym rozmaitość przegubową. Przesunięcia a_1 i a_2 wzdłuż osi X lokalnych układów współrzędnych wynoszą odpowiednio l_1 i l_2 . Pozostałe parametry Denavita-Hartenberga, tzn. przesunięcia d_1 , d_2 razem z kątami α_1 i α_2 są równe zero. W tabeli 2.1 zebrano wszystkie wymienione parametry manipulatora.

Określimy teraz kinematykę manipulatora w postaci (2.43). W tym celu musimy znaleźć macierze transformacji między kolejnymi, lokalnymi układami współrzędnych. Macierz $\mathbf{A}_0^1(q_1) : X_0Y_0Z_0 \mapsto X_1Y_1Z_1$ jest złożeniem obrotu i przesunięcia

$$\mathbf{A}_0^1(q_1) = \mathbf{Rot}(Z, q_1)\mathbf{Trans}(X, l_1),$$

gdyż kąt skreślenia osi przegubów $\alpha_1 = 0$ i przesunięcie układu $d_1 = 0$. Po wprowadzeniu oznaczeń $\sin q_i = s_i$, $\cos q_i = c_i$, na podstawie wzoru (2.41),

[‡]Nie pokazana na rysunku oś Z_1 dopełnia układ X_1Y_1 do układu prawoskrętnego.

macierz $\mathbf{A}_0^1$ przyjmuje postać

$$\mathbf{A}_0^1(q_1) = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & l_1 c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & l_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.44)$$

Analogicznie, macierz $\mathbf{A}_1^2(q_2) : \mathcal{X}_1 \mathcal{Y}_1 \mathcal{Z}_1 \mapsto \mathcal{X}_2 \mathcal{Y}_2 \mathcal{Z}_2$ można wyznaczyć jako

$$\mathbf{A}_1^2(q_2) = \mathbf{Rot}(\mathcal{Z}, q_2) \mathbf{Trans}(\mathcal{X}, l_2) = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & l_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.45)$$

Mając wyliczone transformacje $\mathbf{A}_{i-1}^i(q_i)$ między sąsiednimi układami współrzędnych, definiujemy kinematykę manipulatora jako

$$\mathbf{K}(\mathbf{q}) = \mathbf{A}_0^1(q_1) \mathbf{A}_1^2(q_2) : \mathcal{X}_0 \mathcal{Y}_0 \mathcal{Z}_0 \mapsto \mathcal{X}_2 \mathcal{Y}_2 \mathcal{Z}_2,$$

czyli

$$\mathbf{K}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & l_1 s_1 + l_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.46)$$

przy oznaczeniach $s_{12} = \sin(q_1 + q_2)$ i $c_{12} = \cos(q_1 + q_2)$. ■

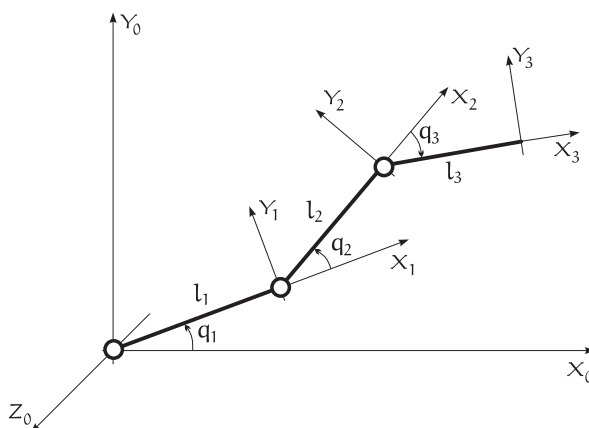
Przykład 2.3.2 (Manipulator typu potrójne wahadło)

Innym, prostym przykładem manipulatora jest manipulator typu potrójne wahadło, którego łańcuch kinematyczny pokazano schematycznie na rysunku 2.5, a parametry Denavita-Hartenberga zamieszczono w tabeli 2.2. Rozmaitość konfiguracyjna $\mathcal{Q}$ rozpatrywanego tu manipulatora ma postać trójwymiarowego torusa $\mathbb{T}^3$, którego punkty są reprezentowane przez wektor $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)^T$ kątów obrotu w przegubach.

Do określenia kinematyki

$$\mathbf{K} : \mathbb{T}^3 \longrightarrow \mathbf{SE}(3)$$

manipulatora zastosujemy algorytm Denavita-Hartenberga, dzięki czemu



Rysunek 2.5 Manipulator typu potrójne wahadło.

ogniwo	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	0	l_1	0
2	q_2	0	l_2	0
3	q_3	0	l_3	0

Tabela 2.2 Parametry Denavita-Hartenberga manipulatora typu potrójne wahadło.

otrzymamy wyrażenia

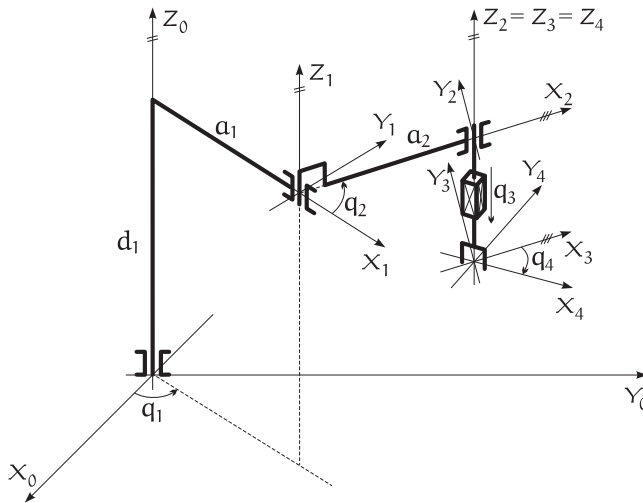
$$\mathbf{K}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & l_1 c_1 + l_2 c_{12} + l_3 c_{123} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & l_1 s_1 + l_2 s_{12} + l_3 s_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.47)$$

gdzie przez s_{12} , c_{12} oznaczono, odpowiednio, $\sin(q_1 + q_2)$ i $\cos(q_1 + q_2)$, a przez s_{123} , c_{123} — $\sin(q_1 + q_2 + q_3)$ i $\cos(q_1 + q_2 + q_3)$. ■

Przykład 2.3.3 (Manipulator typu SCARA)

Manipulator SCARA jest manipulatorem przemysłowym, którego schemat kinematyczny przedstawiono na rysunku 2.6[§]. Widzimy, że oprócz dwóch przegubów obrotowych tworzących łańcuch kinematyczny analogiczny do

[§] Manipulator SCARA znajduje się w Laboratorium Centrum Systemów Produkcyjnych Instytutu Technologii Maszyn i Automatyzacji Politechniki Wrocławskiej. Udostępnienie danych tego manipulatora zawdzięczamy uprzejmości dra inż. A. Kocęłucha.



Rysunek 2.6 Struktura kinematyczna manipulatora typu *SCARA*.

ogniwo	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	d_1	a_1	0
2	q_2	0	a_2	0
3	0	q_3	0	0
4	q_4	0	0	0

Tabela 2.3 Parametry Denavita-Hartenberga manipulatora typu *SCARA*.

podwójnego wahadła, manipulator posiada jeszcze dwa przeguby: przesuwny i obrotowy; ma zatem cztery stopnie swobody (jest manipulatorem klasy RRTR). Cechą charakterystyczną konstrukcji manipulatora typu *SCARA* jest równoległość osi obrotu/przesuwu przegubów. Mając przypisane układy współrzędnych zgodnie z algorytmem Denavita-Hartenberga, po określeniu parametrów manipulatora (zamieszczonych w tabeli 2.3), możemy przystąpić do wyznaczenia kinematyki

$$\mathbf{K}(\mathbf{q}) : \mathcal{Q} \cong \mathbb{T}^3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \text{SE}(3),$$

gdzie $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3, q_4)^T$. Przekształcenia $\mathbf{A}_{i-1}^i(q_i)$, $i = 1, \dots, 4$ między poszczególnymi układami współrzędnych są dane jako

$$\mathbf{A}_0^1(q_1) = \mathbf{Rot}(Z, q_1) \mathbf{Trans}(Z, d_1) \mathbf{Trans}(X, a_1),$$

$$\mathbf{A}_1^2(q_2) = \mathbf{Rot}(Z, q_2) \mathbf{Trans}(X, a_2),$$

ogniwo	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	0	q_1	0	$\pi/2$
2	q_2	d_1	0	$\pi/2$
3	q_3	0	a_2	0
4	$q_4 - q_3$	0	a_3	0
5	$q_5 - q_4$	0	0	$\pi/2$
6	q_6	d_6	0	$-\pi/2$

Tabela 2.4 Parametry Denavita-Hartenberga manipulatora IRb-6 zamontowanego na torze jezdny.

$$\mathbf{A}_2^3(q_3) = \mathbf{Trans}(Z, q_3),$$

$$\mathbf{A}_3^4(q_4) = \mathbf{Rot}(Z, q_4).$$

Zgodnie z zależnością (2.42), kinematyka manipulatora jest odwzorowaniem

$$\mathbf{K}(\mathbf{q}) = \mathbf{A}_0^1(q_1)\mathbf{A}_1^2(q_2)\mathbf{A}_2^3(q_3)\mathbf{A}_3^4(q_4) : \times_0 \times_0 Z_0 \mapsto \times_4 \times_4 Z_4,$$

czyli

$$\mathbf{K}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} c_{124} & -s_{124} & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ s_{124} & c_{124} & 0 & a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & d_1 + q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.48)$$

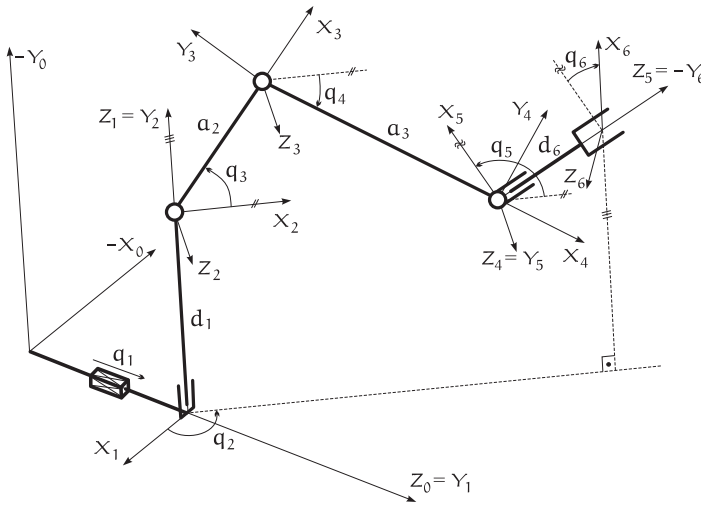
gdzie $s_{124} = \sin(q_1 + q_2 + q_4)$ i $c_{124} = \cos(q_1 + q_2 + q_4)$. Wartości liczbowe parametrów manipulatora *SCARA* są równe $d_1 = 0.8[\text{m}]$, $a_1 = 0.445[\text{m}]$, $a_2 = 0.355[\text{m}]$. ■

Przykład 2.3.4 (Manipulator IRb-6 na torze jezdny)

Jako ostatni przykład rozpatrzmy manipulator przemysłowy IRb-6 o pięciu stopniach swobody, zamontowany na torze jezdny[¶]. Taki układ tworzy manipulator klasy 1T5R^{||} posiadający sześć stopni swobody. Schemat kinematyczny manipulatora przedstawia rysunek 2.7, a jego parametry Denavita-Hartenberga zawiera tabela 2.4. Wartości liczbowe parametrów geo-

[¶]Manipulator IRb-6 zamontowany na torze jezdny znajduje się w Laboratorium Robotyki Instytutu Automatyki i Informatyki Stosowanej Politechniki Warszawskiej. Dane manipulatora udostępnił nam Prof. C. Zieliński.

^{||}Jeden przegub przesuwny (T), po którym następuje pięć przegubów obrotowych (R).



Rysunek 2.7 Struktura kinematyczna manipulatora IRb-6 zamontowanego na torze jezdny.

metrycznych manipulatora są następujące: $d_1 = 0.7[\text{m}]$, $a_2 = 0.45[\text{m}]$, $a_3 = 0.67[\text{m}]$ i $d_6 = 0.095[\text{m}]$. Należy zwrócić uwagę na postać parametrów θ_4 i θ_5 . Pojawiające się w nich różnice zmiennych przegubowych wynikają ze sposobu zdefiniowania tych parametrów przez producenta manipulatora, który każdą ze zmiennych q_i , $i = 3, 4, 5$, określił jako kąt między osią X_i układu współrzędnych związanego z i -tym ogniwnem manipulatora a osią X_2^{**} . Z tabeli 2.4 wynika, że dla rozpatrywanego manipulatora przekształcenia A_{i-1}^i , $i = 1, \dots, 6$, są zdefiniowane jako

$$\begin{aligned} A_0^1(q_1) &= \text{Trans}(Z, q_1) \text{Rot}\left(X, \frac{\pi}{2}\right), \\ A_1^2(q_2) &= \text{Rot}(Z, q_2) \text{Trans}(Z, d_1) \text{Rot}\left(X, \frac{\pi}{2}\right), \\ A_2^3(q_3) &= \text{Rot}(Z, q_3) \text{Trans}(X, a_2), \\ A_3^4(q_3, q_4) &= \text{Rot}(Z, q_4 - q_3) \text{Trans}(X, a_3), \\ A_4^5(q_4, q_5) &= \text{Rot}(Z, q_5 - q_4) \text{Rot}\left(X, \frac{\pi}{2}\right), \\ A_5^6(q_6) &= \text{Rot}(Z, q_6) \text{Trans}(Z, d_6) \text{Rot}\left(X, -\frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

W rezultacie, zgodnie z zależnością (2.42), kinematyka manipulatora jest

**Dotychczas i -tą zmienną przegubową dla przegubów obrotowych określaliśmy jako kąt między osią X_i związaną z danym ogniwnem a osią X_{i-1} .

odwzorowaniem

$$\mathbf{K}(\mathbf{q}) = \mathbf{A}_0^1 \mathbf{A}_1^2 \mathbf{A}_2^3 \mathbf{A}_3^4 \mathbf{A}_4^5 \mathbf{A}_5^6(\mathbf{q}) : X_0 Y_0 Z_0 \mapsto X_6 Y_6 Z_6$$

postaci

$$\mathbf{K}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} c_2 c_5 c_6 + s_2 s_6 & -c_2 s_5 & s_2 c_6 - c_2 c_5 s_6 \\ -s_5 c_6 & -c_5 & s_5 s_6 \\ s_2 c_5 c_6 - c_2 s_6 & -s_2 s_5 & -c_2 c_6 - s_2 c_5 s_6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2(a_2 c_3 + a_3 c_4 + d_6 s_5) \\ -d_1 + d_6 c_5 - a_2 s_3 - a_3 s_4 \\ q_1 + s_2(a_2 c_3 + a_3 c_4 + d_6 s_5) \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.49)$$

gdzie $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)^T$. ■

2.3.2 Reprezentacja wykładnicza

Opis kinematyki manipulatora (2.40), alternatywny w stosunku do reprezentacji Denavita-Hartenberga, można otrzymać stosując do każdej transformacji (2.41) parametryzację wykładniczą (2.28). Załóżmy najpierw, że i -ty przegub manipulatora jest obrotowy. Przy takim założeniu przekształcenie $\mathbf{A}_{i-1}^i$ przedstawimy w następujący sposób

$$\mathbf{A}_{i-1}^i(q_i) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(Z, q_i) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{P}_i, \quad (2.50)$$

gdzie

$$\mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_3 & d_i \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}(X, \alpha_i) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_3 & a_i \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(X, \alpha_i) & d_i \mathbf{e}_3 + a_i \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.51)$$

zaś symbolem $\mathbf{R}(\text{oś}, \text{kąt})$ oznaczamy macierz obrotu wokół ustalonej osi o zadany kąt. Nietrudno pokazać, że w parametryzacji wykładniczej

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}(Z, q_i) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \exp(\boldsymbol{\xi}_i q_i), \quad (2.52)$$

gdzie $\boldsymbol{\xi}_i = \begin{bmatrix} [\mathbf{e}_3] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}$. W rezultacie otrzymujemy zależność

$$\mathbf{A}_{i-1}^i(q_i) = \exp(\boldsymbol{\xi}_i q_i) \mathbf{P}_i. \quad (2.53)$$

W przypadku, gdy i -ty przegub jest przesuwny, należy wziąć

$$\xi_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{e}_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(Z, \theta_i) \mathbf{R}(X, \alpha_i) & \alpha_i \mathbf{R}(Z, \theta_i) \mathbf{1}_{kol} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.54)$$

Podstawiając wyrażenia (2.51) lub (2.54) do wzoru (2.53) i dalej do (2.42) dochodzimy do formuły

$$\mathbf{K}(\mathbf{q}) = \exp(\xi_1 q_1) \mathbf{P}_1 \exp(\xi_2 q_2) \mathbf{P}_2 \cdots \exp(\xi_n q_n) \mathbf{P}_n. \quad (2.55)$$

Dzięki znanej własności wykładniczej funkcji macierzowej

$$\mathbf{P} \exp(\mathbf{A}) \mathbf{P}^{-1} = \exp(\mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{P}^{-1}),$$

równanie (2.55) możemy przepisać w postaci

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\mathbf{q}) &= \exp(\xi_1 q_1) \exp(\mathbf{P}_1 \xi_2 \mathbf{P}_1^{-1} q_2) \cdots \\ &\cdots \exp((\mathbf{P}_1 \cdots \mathbf{P}_{n-1}) \xi_n (\mathbf{P}_1 \cdots \mathbf{P}_{n-1})^{-1} q_n) \mathbf{P}_1 \cdots \mathbf{P}_n, \end{aligned}$$

albo jako

$$\mathbf{K}(\mathbf{q}) = \exp(\zeta_1 q_1) \exp(\zeta_2 q_2) \cdots \exp(\zeta_n q_n) \mathbf{K}(\mathbf{0}). \quad (2.56)$$

W powyższej formule

$$\zeta_1 = \xi_1 \text{ oraz } \zeta_i = \left(\prod_{l=1}^{i-1} \mathbf{P}_l \right) \xi_i \left(\prod_{l=1}^{i-1} \mathbf{P}_l \right)^{-1} \text{ dla } i = 2, \dots, n, \quad (2.57)$$

natomiast $\mathbf{K}(\mathbf{0})$ oznacza kinematykę manipulatora w konfiguracji odniesienia, w której wszystkie zmienne przegubowe przyjmują wartość zero. Formułę (2.56) nazywamy *reprezentacją wykładniczą* kinematyki manipulatora. Macierze ζ_i występujące w reprezentacji wykładniczej należą do algebry Liego $\mathfrak{se}(3)$ grupy $\mathbb{SE}(3)$ i mają postać

$$\zeta_i = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{\omega}_i] & \mathbf{v}_i \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.58)$$

$\boldsymbol{\omega}_i, \mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^3$, przy czym $\mathbf{v}_i = -\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{p}_i$, gdzie $\mathbf{p}_i$ jest pewnym punktem położonym na osi obrotu i -tego przegubu. Wektor $(\mathbf{v}_i^T, \boldsymbol{\omega}_i^T)^T$ reprezentujący macierz (2.58) nosi nazwę *skretnika*.

Przykład 2.3.5 (Manipulator typu podwójne wahadło)

Dla zilustrowania sposobu tworzenia reprezentacji wykładniczej kinematyki manipulatora posłużymy się przykładem manipulatora typu podwójne wahadło. Kinematykę tego manipulatora wyliczyliśmy w przykładzie 2.3.1 otrzymując wyrażenie

$$\mathbf{K}(\mathbf{q}) = \mathbf{A}_0^1(q_1)\mathbf{A}_1^2(q_2), \quad (2.59)$$

z macierzami $\mathbf{A}_0^1, \mathbf{A}_1^2$ określonymi przy pomocy formuł (2.44), (2.45). Biorąc pod uwagę strukturę tych macierzy, kinematykę (2.59) zapisujemy w następującej postaci

$$\mathbf{K}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(Z, q_1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{P}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{R}(Z, q_2) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{P}_2,$$

gdzie

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_3 & l_1 \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_3 & l_2 \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}.$$

Następnie, zgodnie z wyrażeniem (2.52), znajdujemy parametryzację wykładniczą macierzy obrotu

$$\mathbf{Rot}(Z, q_i) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(Z, q_i) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \exp(\boldsymbol{\xi}_i q_i), \quad i = 1, 2,$$

przy oznaczeniach $\boldsymbol{\xi}_1 = \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{bmatrix} [\mathbf{e}_3] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}$. Postępując stosownie do reguł wynikających ze wzorów (2.55), (2.56), uzyskujemy reprezentację wykładniczą kinematyki (2.59)

$$\mathbf{K}(\mathbf{q}) = \exp(\boldsymbol{\zeta}_1 q_1) \exp(\boldsymbol{\zeta}_2 q_2) \mathbf{K}(\mathbf{0}), \quad (2.60)$$

scharakteryzowaną przez macierze

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\zeta}_1 &= \boldsymbol{\xi}_1, \\ \boldsymbol{\zeta}_2 &= \mathbf{P}_1 \boldsymbol{\xi}_2 \mathbf{P}_1^{-1} = \begin{bmatrix} [\mathbf{e}_3] & -l_1 \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{K}(\mathbf{0}) &= \begin{bmatrix} \mathbb{I}_3 & (l_1 + l_2) \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Nietrudno sprawdzić przez bezpośrednie obliczenie, że prawa strona (2.60) istotnie jest równa (2.46). ■

Przykład 2.3.6 (Manipulator typu SCARA)

W sposób podobny jak w poprzednim przykładzie skonstruujemy obecnie reprezentację wykładniczą kinematyki manipulatora typu SCARA, którego kinematyka

$$\mathbf{K}(\mathbf{q}) = \mathbf{A}_0^1(q_1)\mathbf{A}_1^2(q_2)\mathbf{A}_2^3(q_3)\mathbf{A}_3^4(q_4)$$

została wyznaczona w przykładzie 2.3.3. Korzystając z definicji przekształceń składowych $\mathbf{A}_{i-1}^i$ oraz z wyrażeń (2.52) i (2.54), wyliczymy najpierw reprezentacje wykładnicze

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0^1(q_1) &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}(Z, q_1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_3 & d_1 \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_3 & a_1 \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \exp(\boldsymbol{\xi}_1 q_1) \mathbf{P}_1, \\ \mathbf{A}_1^2(q_2) &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}(Z, q_2) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_3 & a_2 \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \exp(\boldsymbol{\xi}_2 q_2) \mathbf{P}_2, \\ \mathbf{A}_2^3(q_3) &= \begin{bmatrix} \mathbb{I}_3 & q_3 \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \exp(\boldsymbol{\xi}_3 q_3) \mathbf{P}_3, \\ \mathbf{A}_3^4(q_4) &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}(Z, q_4) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \exp(\boldsymbol{\xi}_4 q_4) \mathbf{P}_4, \end{aligned} \tag{2.62}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_1 = \boldsymbol{\xi}_2 = \boldsymbol{\xi}_4 &= \begin{bmatrix} [\mathbf{e}_3] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{P}_1 &= \begin{bmatrix} \mathbb{I}_3 & a_1 \mathbf{e}_1 + d_1 \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_3 & a_2 \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_4 = \mathbb{I}_4. \end{aligned}$$

Na podstawie formuł (2.56), (2.57) i po uwzględnieniu postaci reprezentacji (2.62), otrzymujemy ostatecznie

$$\mathbf{K}(\mathbf{q}) = \exp(\boldsymbol{\zeta}_1 q_1) \exp(\boldsymbol{\zeta}_2 q_2) \exp(\boldsymbol{\zeta}_3 q_3) \exp(\boldsymbol{\zeta}_4 q_4) \mathbf{K}(\mathbf{0}), \tag{2.63}$$

przy oznaczeniach

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\zeta}_1 &= \boldsymbol{\xi}_1, \quad \boldsymbol{\zeta}_2 = \mathbf{P}_1 \boldsymbol{\xi}_2 \mathbf{P}_1^{-1} = \begin{bmatrix} [\mathbf{e}_3] & -a_1 \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\zeta}_3 = (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2) \boldsymbol{\xi}_3 (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2)^{-1} = \boldsymbol{\xi}_3, \\ \boldsymbol{\zeta}_4 &= (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3) \boldsymbol{\xi}_4 (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3)^{-1} = \begin{bmatrix} [\mathbf{e}_3] & -(a_1 + a_2) \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{K}(\mathbf{0}) &= \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_4 = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_3 & (a_1 + a_2) \mathbf{e}_1 + d_1 \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{2.64}$$

■

2.3.3 Kinematyka we współrzędnych

Odwzorowanie (2.42) zostało określone między rozmaitościami: przegubową a zadaniową. Używając naturalnych współrzędnych $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{U}} : \mathbf{U} \subset \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}^n$ na rozmaitości przegubowej oraz wybierając pewną parametryzację $\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{V}} : \mathbf{V} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{Z}$ rozmaitości zadaniowej otrzymujemy *reprezentację kinematyki we współrzędnych*

$$\mathbf{k} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{y} = \mathbf{k}(\mathbf{x}) = (k_1(\mathbf{x}), \dots, k_m(\mathbf{x}))^T,$$

zapewniającą przemienność diagramu

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Q} & \xrightarrow{\mathbf{K}} & \mathcal{Z} \\ \cup & & \parallel \\ \mathbf{U} & \xrightarrow{\mathbf{K}|_{\mathbf{U}}} & \mathcal{Z} \\ \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{U}} \downarrow & & \uparrow \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{V}} \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\mathbf{k}} & \mathbf{V} \subset \mathbb{R}^m, \end{array}$$

a zatem spełniającą warunek

$$\mathbf{K}|_{\mathbf{U}} = \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{V}} \circ \mathbf{k} \circ \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{U}}. \quad (2.65)$$

Ze struktury diagramu wynika, że wyznaczenie reprezentacji kinematyki we współrzędnych sprowadza się do przeprowadzenia faktoryzacji kinematyki $\mathbf{K}|_{\mathbf{U}}$ i nadaniu jej formy złożenia trzech odwzorowań $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{U}}$, $\mathbf{k}$ i $\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{V}}$. Lokalnie, w obszarze odwracalności odwzorowań $\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{V}}$, $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{U}}$, reprezentację $\mathbf{k}$ można wyliczyć jako $\mathbf{k} = \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{V}}^{-1} \circ \mathbf{K}|_{\mathbf{U}} \circ \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{U}}^{-1}$. Współrzędne $\mathbf{x}$ nazywamy *konfiguracyjnymi* lub *przegubowymi*, współrzędne $\mathbf{y}$ — *zadaniowymi*. Przestrzeń $\mathbb{R}^n$ nazywa się *przestrzenią konfiguracyjną* lub *przestrzenią przegubową*, a przestrzeń $\mathbb{R}^m$ — *przestrzenią zadaniową*. Jeżeli liczba stopni swobody manipulatora jest większa od wymiaru jego przestrzeni zadaniowej, to manipulator nazywamy *redundantnym*, w przeciwnym przypadku manipulator nazywamy *nieredundantnym*. Nadmiar możliwości ruchowych, jakim dysponuje manipulator redundantny, pozwala sterować jakością wykonania zadań przez manipulator.

Przedstawimy teraz kilka przykładów wyliczania kinematyki manipulatora we współrzędnych.

Przykład 2.3.7 (Manipulator typu podwójne wahadło)

Zacznijmy od wyrażenia opisującego kinematykę manipulatora typu podwójne wahadło we współrzędnych. Jak wiemy, kąty obrotu w przegubach manipulatora x_1 i x_2 opisują jednoznacznie jego pozycję i tworzą dwuelementowy wektor współrzędnych przegubowych

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2.$$

Ponieważ pozycje efektora manipulatora odpowiadają punktom płaszczyzny X_0Y_0 , do opisu położenia i orientacji efektora użyjemy grupy euklidesowej $SE(2) \cong \mathbb{R}^2 \times S^1$, która stanowi rozmaitość zadaniową $\mathcal{Z}$. Jako współrzędne zadaniowe przyjmijmy, odpowiednio, położenie efektora wzdłuż osi X_0, Y_0 efektora oraz jego orientację φ mierzoną kątem obrotu wokół osi Z_0 (zobacz rysunek 2.4)

$$\begin{cases} y_1 = X_0 \\ y_2 = Y_0 \\ y_3 = \varphi. \end{cases}$$

Dla tak wybranych współrzędnych zdefiniujemy przekształcenie

$$\mathbf{Trans}(X, y_1)\mathbf{Trans}(Y, y_2)\mathbf{Rot}(Z, y_3) = \begin{bmatrix} \cos y_3 & -\sin y_3 & 0 & y_1 \\ \sin y_3 & \cos y_3 & 0 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.66)$$

Porównując wyrażenie (2.66) z kinematyką $\mathbf{K}$ daną równaniem (2.46), otrzymujemy reprezentację kinematyki we współrzędnych

$$\mathbf{k}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

w postaci układu równań

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \mathbf{k}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ l_1 s_1 + l_2 s_{12} \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}, \quad (2.67)$$

gdzie s_i, c_i, s_{ij} i c_{ij} oznaczają, odpowiednio, $\sin x_i, \cos x_i, \sin(x_i + x_j)$ oraz $\cos(x_i + x_j)$.

Ponieważ rozpatrywany manipulator jest wyposażony w dwa przeguby, jedynie dwie spośród wyliczonych trzech współrzędnych zadaniowych można

zmieniać niezależnie poprzez zmianę współrzędnych przegubowych*. Z tego powodu częstokroć definiuje się kinematykę manipulatora ograniczoną jedynie do dwóch współrzędnych — mówimy wtedy o kinematyce w *aspekcie* tych współrzędnych. I tak, wybierając z wyrażenia (2.67)[†] dwie pierwsze składowe otrzymujemy kinematykę manipulatora w aspekcie współrzędnych $x_0 y_0$

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \mathbf{k}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ l_1 s_1 + l_2 s_{12} \end{pmatrix}. \quad (2.68)$$

Podobnie jak poprzednio mamy $y_1 = x_0$ a $y_2 = y_0$. Oczywiście, taki wybór współrzędnych zadaniowych nie jest jedyny. Alternatywnie, można spośród współrzędnych zadaniowych wybrać np. ponownie współrzędną x_0 położenia efektora w podstawowym układzie współrzędnych $x_0 y_0 z_0$ oraz kąt φ określający orientację efektora względem osi Z_0 tego układu. W takim przypadku dostajemy kinematykę w aspekcie współrzędnych $x_0 \varphi$

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \mathbf{k}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}, \quad (2.69)$$

gdzie $y_1 = x_0$ oraz $y_2 = \varphi$. ■

Przykład 2.3.8 (Manipulator *EDDA*)

Jak zauważyliśmy wcześniej, kinematykę podwójnego wahadła posiada manipulator *EDDA* (Experimental Direct Drive Arm)[‡]. *EDDA* jest manipulatorem o bezpośrednim napędzie i nieograniczonych przegubach. Jej konstrukcję przedstawia rysunek 2.8. W zależności od wybranego aspektu kinematyka manipulatora *EDDA* jest opisana jednym z równań (2.67)–(2.69) z parametrami $l_1 = 0.3[\text{m}]$, $l_2 = 0.58[\text{m}]$. ■

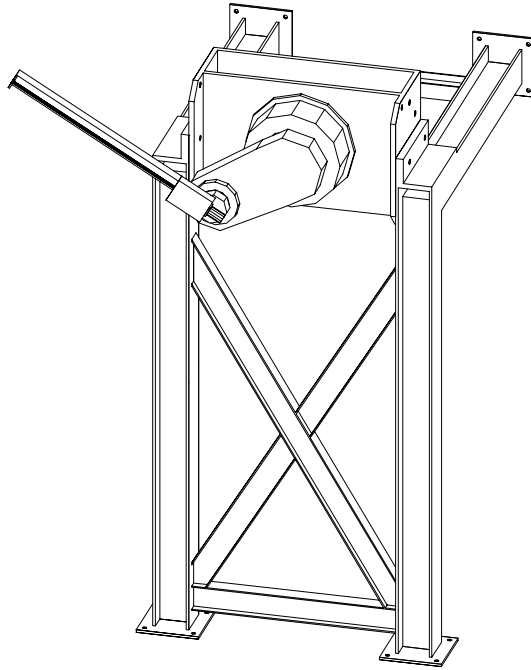
Przykład 2.3.9 (Manipulator typu potrójne wahadło)

Przyjmując $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ jako wektor współrzędnych na rozmaitości konfiguracyjnej $\mathcal{Q}$, gdzie x_i ($i = 1, 2, 3$) oznaczają kąty obrotu w kolejnych przegubach manipulatora, oraz wybierając położenie efektora wzdłuż osi x_0

* Jak się później okaże (zobacz podrozdział 2.3.5), manipulator z tak zdefiniowaną kinematyką pozostaje zawsze osobliwy.

[†] Które może być uważane za kinematykę w aspekcie współrzędnych $x_0 y_0 \varphi$.

[‡] Manipulator *EDDA* znajduje się w Instytucie Robotyki i Informatyki Uniwersytetu w Brunszwiku. Za jego udostępnienie jesteśmy wdzięczni Prof. F. Wahlowi.



Rysunek 2.8 Manipulator *EDDA*.

i γ_0 , i jego orientację φ mierzoną kątem obrotu wokół osi Z_0 jako parametryzację y_1 , y_2 i y_3 rozmaitości zadaniowej $\mathbb{SE}(2)$ [§], otrzymujemy kinematykę manipulatora typu potrójne wahadło w aspekcie wybranych współrzędnych

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \mathbf{k}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} l_1 c_1 + l_2 c_{12} + l_3 c_{123} \\ l_1 s_1 + l_2 s_{12} + l_3 s_{123} \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}. \quad (2.70)$$

Często manipulator typu potrójne wahadło jest traktowany jako manipulator redundantny z kinematyką wyrażoną w aspekcie współrzędnych $x_0 y_0$ postaci

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \mathbf{k}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} l_1 c_1 + l_2 c_{12} + l_3 c_{123} \\ l_1 s_1 + l_2 s_{12} + l_3 s_{123} \end{pmatrix}. \quad (2.71)$$

■

[§] Jak w przypadku manipulatora typu podwójne wahadło, nie ma potrzeby reprezentowania całej grupy $\mathbb{SE}(3)$.

Przykład 2.3.10 (Manipulator typu SCARA)

W celu wyrażania we współrzędnych kinematyki manipulatora typu *SCARA* wykorzystamy naturalne współrzędne przegubowe manipulatora. Ponieważ położenia przegubów manipulatora wpływają jedynie na położenie efektora w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ oraz na jedną składową jego orientacji wyrażoną kątem obrotu wokół osi Z_0 , wybierzemy cztery współrzędne zadaniowe manipulatora: współrzędne $(y_1, y_2 \text{ i } y_3)$ określające położenie efektora manipulatora względem podstawowego układu współrzędnych $X_0Y_0Z_0$ oraz współrzędną (y_4) w postaci kąta obrotu efektora manipulatora wokół osi Z_0 układu podstawowego. Przy tak wybranych współrzędnych otrzymujemy przekształcenie

$$\begin{aligned} \mathbf{Trans}(X, y_1)\mathbf{Trans}(Y, y_2)\mathbf{Trans}(Z, y_3)\mathbf{Rot}(Z, y_4) = \\ = \begin{bmatrix} \cos y_4 & -\sin y_4 & 0 & y_1 \\ \sin y_4 & \cos y_4 & 0 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 & y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

którego porównanie z kinematyką zdefiniowaną równaniem (2.48) pozwala uzyskać następującą reprezentację

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \mathbf{k}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} a_1c_1 + a_2c_{12} \\ a_1s_1 + a_2s_{12} \\ d_1 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_4 \end{pmatrix}. \quad (2.72)$$

W sytuacji, gdy do wykonania zadania potrzebna jest wyłącznie znajomość położenia efektora manipulatora *SCARA*, kinematykę

$$\mathbf{k} : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

manipulatora w aspekcie współrzędnych $X_0Y_0Z_0$ definiujemy jako

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \mathbf{k}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} a_1c_1 + a_2c_{12} \\ a_1s_1 + a_2s_{12} \\ d_1 + x_3 \end{pmatrix}. \quad (2.73)$$

Ponieważ pełna specyfikacja kinematyki manipulatora przemysłowego wymaga określenia zakresu dopuszczalnych ruchów w przegubach, na zakończenie dodajmy, że przestrzeń przegubowa manipulatora typu *SCARA*

jest ograniczona w następujący sposób:

$$\mathcal{X} = \{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_4)^T \in \mathbb{R}^4 \mid -\frac{1}{2}\pi \leq x_1 \leq \frac{1}{2}\pi, -\frac{3}{4}\pi \leq x_2 \leq \frac{3}{4}\pi, \\ 0.15[\text{m}] \leq x_3 \leq 0.39[\text{m}], -\pi \leq x_4 \leq \pi \}. \quad (2.74)$$

■

Przykład 2.3.11 (Manipulator IRb-6 na torze jezdny)

Aby wyrazić we współrzędnych kinematykę manipulatora IRb-6 zamontowanego na torze jezdny, rozmaitość zadaniową sparametryzujemy przy pomocy trzech współrzędnych położenia efektora manipulatora (y_1, y_2, y_3) oraz trzech kątów Eulera Y-Z-Y (y_4, y_5, y_6). Na rozmaitości konfiguracyjnej użyjemy naturalnego układu współrzędnych zadanego przez zmienne przegubowe manipulatora. Dla tak zdefiniowanych współrzędnych otrzymujemy przekształcenie

$$\text{Trans}(X, y_1) \text{Trans}(Y, y_2) \text{Trans}(Z, y_3) \text{Rot}(Y, y_4) \text{Rot}(Z, y_5) \text{Rot}(Y, y_6) = \\ = \begin{bmatrix} \check{c}_4 \check{c}_5 \check{c}_6 - \check{s}_4 \check{s}_6 & -\check{c}_4 \check{s}_5 & \check{s}_4 \check{c}_6 + \check{c}_4 \check{c}_5 \check{s}_6 & y_1 \\ \check{s}_5 \check{c}_6 & \check{c}_5 & \check{s}_5 \check{s}_6 & y_2 \\ -\check{s}_4 \check{c}_5 \check{c}_6 - \check{c}_4 \check{s}_6 & \check{s}_4 \check{s}_5 & \check{c}_4 \check{c}_6 - \check{s}_4 \check{c}_5 \check{s}_6 & y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.75)$$

gdzie przez $\check{s}_i$ i $\check{c}_i$ oznaczono $\sin y_i$ i $\cos y_i$. Porównując ze sobą macierze (2.49) i (2.75) otrzymujemy reprezentację kinematyki manipulatora we współrzędnych

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix} = \mathbf{k}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} c_2(a_2c_3 + a_3c_4 + d_6s_5) \\ -d_1 + d_6c_5 - a_2s_3 - a_3s_4 \\ x_1 + s_2(a_2c_3 + a_3c_4 + d_6s_5) \\ -x_2 \\ \pi - x_5 \\ \pi - x_6 \end{pmatrix}. \quad (2.76)$$

Dodajmy, że wybór współrzędnych do reprezentacji kinematyki ma istotny wpływ na złożoność równań kinematyki.

W dalszych przykładach będziemy niekiedy traktować manipulator IRb-6 na torze jezdny jako manipulator redundantny, którego kinematyka

$$\mathbf{k}: \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

opisuje położenie efektora manipulatora w aspekcie współrzędnych $X_0Y_0Z_0$ i jest postaci

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \mathbf{k}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} c_2(a_2c_3 + a_3c_4 + d_6s_5) \\ -d_1 + d_6c_5 - a_2s_3 - a_3s_4 \\ x_1 + s_2(a_2c_3 + a_3c_4 + d_6s_5) \end{pmatrix}. \quad (2.77)$$

W uzupełnieniu dodajmy, że przestrzeń przegubowa manipulatora IRb-6 zamontowanego na torze jezdny jest ograniczona przez jego konstrukcję mechaniczną w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \mathcal{X} = \{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_6)^T \in \mathbb{R}^6 \mid & 0[\text{m}] \leq x_1 \leq 1.5[\text{m}], \\ & -\frac{17}{18}\pi \leq x_2 \leq \frac{17}{18}\pi, \frac{5}{18}\pi \leq x_3 \leq \frac{13}{18}\pi, -\frac{2}{9}\pi \leq x_4 \leq \frac{5}{36}\pi, \\ & 0 \leq x_5 \leq \pi, -\pi \leq x_6 \leq \pi, \frac{5}{18}\pi \leq x_3 - x_4 \leq \frac{13}{18}\pi \}. \end{aligned} \quad (2.78)$$

■

2.3.4 Jakobiany

Macierz Jacobiego

$$\mathbf{J}^a(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}), \quad (2.79)$$

reprezentacji kinematyki manipulatora we współrzędnych

$$\mathbf{k}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{y} = \mathbf{k}(\mathbf{x}) = (k_1(\mathbf{x}), \dots, k_m(\mathbf{x}))^T,$$

nazywamy *jacobianem analitycznym* manipulatora. Jacobian analityczny można traktować jako przekształcenie prędkości zmian współrzędnych przegubowych w prędkość zmian współrzędnych zadaniowych, przy zadanej konfiguracji manipulatora,

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{J}^a(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}}. \quad (2.80)$$

Jest oczywiste, że postać jacobianu analitycznego zależy od wyboru układu współrzędnych (parametryzacji) dokonanego w celu zdefiniowania odwzorowania $\mathbf{k}$.

Przykład 2.3.12 (Manipulator typu podwójne wahadło)

Różniczkując równania kinematyki (2.67) otrzymujemy jacobian analityczny

$$\mathbf{J}^a(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.81)$$

gdzie s_i , c_i , s_{ij} i c_{ij} oznaczają, odpowiednio, $\sin x_i$, $\cos x_i$, $\sin(x_i + x_j)$ oraz $\cos(x_i + x_j)^*$. Podobnie jak w przypadku kinematyki wyrażonej we współrzędnych, możemy mówić o jacobianach analitycznych w aspekcie różnych współrzędnych. Wyliczony wyżej jacobian jest jacobianem analitycznym w aspekcie współrzędnych $x_0 y_0 \varphi$. Przez analogię, dla kinematyki zdefiniowanej wzorem (2.69) otrzymujemy jacobian analityczny w aspekcie współrzędnych $x_0 y_0$

$$\mathbf{J}^a(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \end{bmatrix}. \quad (2.82)$$

Jacobian analityczny w aspekcie współrzędnych $x_0 \varphi$ odpowiadający kinematyce (2.69) ma postać

$$\mathbf{J}^a(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.83)$$

■

Przykład 2.3.13 (Manipulator typu potrójne wahadło)

Bezpośrednie zróżniczkowanie kinematyki (2.70) potrójnego wahadła pozwala wyliczyć jacobian analityczny jako macierz

$$\mathbf{J}^a(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} - l_3 s_{123} & -l_2 s_{12} - l_3 s_{123} & -l_3 s_{123} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_3 c_{123} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.84)$$

W podobny sposób, dla kinematyki (2.71) otrzymujemy

$$\mathbf{J}^a(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} - l_3 s_{123} & -l_2 s_{12} - l_3 s_{123} & -l_3 s_{123} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_3 c_{123} \end{bmatrix}. \quad (2.85)$$

■

*Przyjmujemy oznaczenia funkcji trygonometrycznych zmiennych q_i i x_i takie same jak w formule kinematyki. Z kontekstu zawsze będzie jasno wynikało, o funkcjach których zmiennych mówimy — przez s_i , c_i rozumiemy odpowiednio $\sin x_i$ i $\cos x_i$ w przypadku jacobianów analitycznych, oraz $\sin q_i$ i $\cos q_i$ dla pozostałych typów jacobianów.

Przykład 2.3.14 (Manipulator typu SCARA)

Kinematyce (2.72) manipulatora typu SCARA odpowiada jacobian analityczny

$$\mathbf{J}^a(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & -a_2 s_{12} & 0 & 0 \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} & a_2 c_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.86)$$

Jest rzeczą jasną, że kinematyce (2.73) rozpatrywanej w aspekcie współrzędnych $X_0 Y_0 Z_0$ odpowiada jacobian analityczny uzyskany przez wykreślenie ostatniego wiersza macierzy (2.86). ■

Przykład 2.3.15 (Manipulator IRb-6 na torze jezdny)

Na podstawie równań we współrzędnych (2.76) kinematyki manipulatora IRb-6 zamontowanego na torze jezdny obliczamy jacobian analityczny

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^a(\mathbf{x}) &= \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -s_2(a_2 c_3 + a_3 c_4 + d_6 s_5) & -a_2 c_2 s_3 & -a_3 c_2 s_4 & d_6 c_2 c_5 & 0 \\ 0 & 0 & -a_2 c_3 & -a_3 c_4 & -d_6 s_5 & 0 \\ 1 & c_2(a_2 c_3 + a_3 c_4 + d_6 s_5) & -a_2 s_2 s_3 & -a_3 s_2 s_4 & d_6 s_2 c_5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.87)$$

Łatwo zauważyć, że kinematyce (2.77) odpowiada jacobian analityczny złożony z trzech pierwszych wierszy macierzy (2.87). ■

Jacobian manipulatora może być także zdefiniowany bez odwoływania się do układów współrzędnych. Wykorzystując fakt, że kinematyka manipulatora przyjmuje wartości w specjalnej grupie euklidesowej[†] $\mathbb{SE}(3)$, wprowadza się niezależne od współrzędnych pojęcie *jacobianu geometrycznego*, a dokładniej: jacobianu geometrycznego w układzie przestrzeni i jacobianu geometrycznego w układzie ciała, zwanych w skrócie jacobianami geometrycznymi w przestrzeni i w ciele. Jacobian geometryczny w przestrzeni jest rozumiany jako przekształcenie prędkości ruchu w przegubach w wektor prędkości efektora w przestrzeni

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_s \\ \boldsymbol{\omega}_s \end{pmatrix} = \mathbf{J}^s(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}. \quad (2.88)$$

[†]A więc w grupie Liego z dobrze określoną przestrzenią styczną w każdym punkcie.

Analogicznie, jacobian geometryczny w ciele stanowi przekształcenie prędkości ruchu przegubów w wektor prędkości efektora w ciele,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_b \\ \boldsymbol{\omega}_b \end{pmatrix} = \mathbf{J}^b(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}. \quad (2.89)$$

Przedstawimy teraz algorytm wyliczania jacobianu geometrycznego w przestrzeni. Niech

$$\mathbf{J}^s(\mathbf{q}) = [\mathbf{J}_1^s(\mathbf{q}) \quad \cdots \quad \mathbf{J}_i^s(\mathbf{q}) \quad \cdots \quad \mathbf{J}_n^s(\mathbf{q})].$$

W celu wyznaczenia i -tej kolumny jacobianu $\mathbf{J}^s(\mathbf{q})$ założmy, że wszystkie przeguby manipulatora, oprócz przegubu i -tego, zostały unieruchomione i przeanalizujemy ruch efektora będący rezultatem ruchu w przegubie o numerze i . Niech położenie efektora względem układu $X_{i-1}Y_{i-1}Z_{i-1}$ będzie opisane wektorem $\mathbf{T}_{i-1}^n$, a przegub i będzie typu obrotowego. Wówczas, z zależności (2.12) wynika, że prędkości efektora w układzie przestrzeni względem układu $(i-1)$ -szego wynoszą

$$\boldsymbol{\omega}_s^{i-1} = \mathbf{e}_3\dot{q}_i, \quad \mathbf{v}_s^{i-1} = \dot{\mathbf{T}}_{i-1}^n(q_i) - [\boldsymbol{\omega}_s^{i-1}] \mathbf{T}_{i-1}^n(q_i). \quad (2.90)$$

Zajmiemy się teraz wyliczeniem prędkości $\dot{\mathbf{T}}_{i-1}^n(q_i)$. Niech

$$\mathbf{A}_{i-1}^i(q_i) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{i-1}^i(q_i) & \mathbf{T}_{i-1}^i(q_i) \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

oznacza transformację układu $(i-1)$ -szego w układ i -ty, zdefiniowaną przy pomocy algorytmu Denavita-Hartenberga. Jeżeli położenie efektora względem układu i -tego oznaczmy przez $\mathbf{T}_i^n$, to

$$\mathbf{T}_{i-1}^n(q_i) = \mathbf{R}_{i-1}^i(q_i)\mathbf{T}_i^n + \mathbf{T}_{i-1}^i(q_i). \quad (2.91)$$

Zróżniczkowanie (2.91) względem czasu daje

$$\dot{\mathbf{T}}_{i-1}^n(q_i) = [\mathbf{e}_3]\mathbf{R}_{i-1}^i(q_i)\mathbf{T}_i^n\dot{q}_i + \dot{\mathbf{T}}_{i-1}^i(q_i). \quad (2.92)$$

Wektor $\mathbf{T}_{i-1}^i(q_i)$ wyliczamy korzystając z wyrażenia (2.51)

$$\mathbf{T}_{i-1}^i(q_i) = a_i\mathbf{R}(Z, q_i)\mathbf{e}_1 + d_i\mathbf{e}_3. \quad (2.93)$$

Biorąc pod uwagę (2.93) i pamiętając, że $[\mathbf{e}_3]\mathbf{e}_3 = 0$ obliczamy

$$\dot{\mathbf{T}}_{i-1}^i(q_i) = [\mathbf{e}_3]\dot{q}_ia_i\mathbf{R}(Z, q_i)\mathbf{e}_1 = [\mathbf{e}_3]\dot{q}_i\mathbf{T}_{i-1}^i(q_i). \quad (2.94)$$

W końcu, łącząc (2.94) i (2.92) oraz wykorzystując (2.91) zauważamy, że

$$\dot{\mathbf{T}}_{i-1}^n(\mathbf{q}_i) = [\mathbf{e}_3] \dot{q}_i (\mathbf{R}_{i-1}^i \mathbf{T}_i^n + \mathbf{T}_{i-1}^i) = [\boldsymbol{\omega}_s^{i-1}] \mathbf{T}_{i-1}^n(\mathbf{q}_i),$$

a zatem

$$\mathbf{v}_s^{i-1} = \mathbf{0}. \quad (2.95)$$

Po obliczeniu prędkości w przestrzeni względem układu $(i-1)$ -szego, wyliczamy prędkości w przestrzeni względem układu podstawowego korzystając z zależności

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_s \\ \boldsymbol{\omega}_s \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^{i-1} & [\mathbf{T}_0^{i-1}] \mathbf{R}_0^{i-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_0^{i-1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_s^{i-1} \\ \boldsymbol{\omega}_s^{i-1} \end{pmatrix}, \quad (2.96)$$

gdzie

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^{i-1}(\mathbf{q}^{i-1}) & \mathbf{T}_0^{i-1}(\mathbf{q}^{i-1}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} = \prod_{k=1}^{i-1} \mathbf{A}_{k-1}^k(\mathbf{q}_k), \quad (2.97)$$

przy oznaczeniu $\mathbf{q}^{i-1} = (q_1, \dots, q_{i-1})^T$, przedstawia transformację układu podstawowego w układ $(i-1)$ -szy. Dla $i=1$, w powyższym wzorze należy przyjąć $\mathbf{R}_0^0 = \mathbb{I}_3$, $\mathbf{T}_0^0 = \mathbf{0}$. Z zależności (2.90) i (2.95) otrzymujemy następującą postać i -tej kolumny jacobianu geometrycznego w przestrzeni odpowiadającej przegubowi obrotowemu manipulatora

$$\mathbf{J}_i^s(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_0^{i-1}(\mathbf{q}^{i-1}) \times \mathbf{R}_{0 \ 3\text{kol}}^{i-1}(\mathbf{q}^{i-1}) \\ \mathbf{R}_{0 \ 3\text{kol}}^{i-1}(\mathbf{q}^{i-1}) \end{pmatrix}. \quad (2.98)$$

W przypadku gdy i -ty przegub manipulatora jest przesuwany, podobne rozumowanie prowadzi do wniosku, że $\boldsymbol{\omega}_s^{i-1} = \mathbf{0}$, $\mathbf{v}_s^{i-1} = \mathbf{e}_3 \dot{q}_i$, a zatem

$$\mathbf{J}_i^s(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{0 \ 3\text{kol}}^{i-1}(\mathbf{q}^{i-1}) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (2.99)$$

We wzorach (2.98), (2.99) symbol $\mathbf{R}_{0 \ 3\text{kol}}^{i-1}(\mathbf{q}^{i-1})$ oznacza trzecią kolumnę macierzy $\mathbf{R}_0^{i-1}(\mathbf{q}^{i-1})$ występującej w transformacji (2.97).

Przykład 2.3.16 (Manipulator typu podwójne wahadło)

Obecnie wyznaczmy jacobian geometryczny w przestrzeni dla manipulatora typu podwójne wahadło. Ponieważ ten manipulator jest wyposażony wyłącznie w przeguby obrotowe, do wyznaczenia jacobianu posłużymy się

zależnością (2.98). Dla pierwszego przegubu manipulatora dostajemy od razu

$$\mathbf{J}_1^s = (0, 0, 0, 0, 0, 1)^T. \quad (2.100)$$

Do wyliczenia kolumny jacobianu geometrycznego w przestrzeni wykorzystamy macierz $\mathbf{A}_0^1$ daną zależnością (2.44). W rezultacie otrzymujemy

$$\mathbf{J}_2^s(q_1) = (l_1 \sin q_1, -l_1 \cos q_1, 0, 0, 0, 1)^T. \quad (2.101)$$

Jakobian geometryczny w przestrzeni manipulatora typu podwójne wahadło składa się z kolumn (2.100), (2.101)

$$\mathbf{J}^s(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ l_1 s_1 & -l_1 c_1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T. \quad (2.102)$$

■

Przykład 2.3.17 (Manipulator typu potrójne wahadło)

Dla manipulatora typu potrójne wahadło, na podstawie zależności (2.98), wyznaczamy jacobian geometryczny w przestrzeni w postaci

$$\mathbf{J}^s(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 & l_1 s_1 & l_1 s_1 + l_2 s_{12} \\ 0 & -l_1 c_1 & -l_1 c_1 - l_2 c_{12} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.103)$$

■

Przykład 2.3.18 (Manipulator typu SCARA)

Jakobian geometryczny w przestrzeni manipulatora typu SCARA znajdujemy przy wykorzystaniu zależności (2.98) i (2.99)[‡]. Ma on następującą postać

$$\mathbf{J}^s(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 & a_1 s_1 & 0 & a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ 0 & -a_1 c_1 & 0 & -a_1 c_1 - a_2 c_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.104)$$

■

[‡]Poszczególne kolumny tego jacobianu wylicza się, odpowiednio, na podstawie macierzy $\mathbf{A}_0^0 = \mathbb{I}_4$, $\mathbf{A}_0^1$, $\mathbf{A}_0^2$, $\mathbf{A}_0^3$.

Przykład 2.3.19 (Manipulator IRb-6 na torze jezdny)

Wyliczmy teraz jacobian geometryczny w przestrzeni $\mathbf{J}^s$ manipulatora IRb-6 zamontowanego na torze jezdny. Dla przegubu przesuwneego pierwsza kolumna jacobianu jest zawsze równa $\mathbf{J}_1^s(\mathbf{q}) = (0, 0, 1, 0, 0, 0)^T$. Zauważmy, że zależności (2.98) i (2.99) zostały wyprowadzone przy założeniu, że zmianie pojedynczej zmiennej przegubowej towarzyszy ruch w jednym przegubie manipulatora. Niestety, w naszym przykładzie tak nie jest, bowiem np. zmiana q_3 powoduje ruch trzeciego i czwartego przegubu manipulatora (zobacz tabela 2.1). W związku z tym, musimy najpierw dokonać zamiany współrzędnych przegubowych, tak by wspomniane założenie było spełnione. Można to osiągnąć przyjmując

$$\mathbf{q} = \boldsymbol{\varphi}(\tilde{\mathbf{q}}) = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3, \tilde{q}_3 + \tilde{q}_4, \tilde{q}_3 + \tilde{q}_4 + \tilde{q}_5, \tilde{q}_6)^T.$$

Teraz, wykorzystując poszczególne macierze $\mathbf{A}_0^i(\tilde{\mathbf{q}})$, $i = 1, \dots, 5$, oraz zależność (2.98), wyliczamy kolejne kolumny macierzy $\tilde{\mathbf{J}}^s(\tilde{\mathbf{q}})$ wyrażonej w nowych współrzędnych. Po powrocie do współrzędnych oryginalnych $\mathbf{q}$, zgodnie z zależnością

$$\mathbf{J}^s(\mathbf{q}) = \tilde{\mathbf{J}}^s(\boldsymbol{\varphi}^{-1}(\mathbf{q})) \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}^{-1}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}),$$

otrzymujemy macierz

$$\mathbf{J}^s(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 & q_1 & a_2 c_2 s_3 & a_3 c_2 s_4 & c_2(d_1 + a_2 s_3 + a_3 s_4) \\ 0 & 0 & -a_2 c_3 & -a_3 c_4 & q_1 s_2 + a_2 c_3 + a_3 c_4 \\ 1 & 0 & -a_2 s_2 s_3 & -a_3 s_2 s_4 & s_2(d_1 + a_2 s_3 + a_3 s_4) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_2 \\ & & & & -q_1 c_5 - s_2(d_1 s_5 + a_2 c_{3-5} + a_3 c_{4-5}) \\ & & & & q_1 c_2 s_5 \\ & & & & c_2(d_1 s_5 + a_2 c_{3-5} + a_3 c_{4-5}) \\ & & & & c_2 s_5 \\ & & & & c_5 \\ & & & & s_2 s_5 \end{bmatrix}, \quad (2.105)$$

w której c_{i-j} oznacza $\cos(q_i - q_j)$. ■

Zauważmy, że wyprowadzona przez nas postać ogólna jacobianu geometrycznego w przestrzeni różni się od postaci tzw. *jacobianu manipulatora*

podawanej w podręcznikach robotyki. Przyczyna różnicy tkwi w definicji tego obiektu. Mianowicie, jacobian manipulatora jest rozumiany jako macierz przekształcenia prędkości ruchu w przegubach w prędkość liniową i prędkość kątową w przestrzeni efektora względem układu podstawowego

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{T}}_0^n \\ \boldsymbol{\omega}_s \end{pmatrix} = \mathbf{J}^m(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}. \quad (2.106)$$

Dla i -tego przegubu obrotowego otrzymujemy przy takiej definicji jacobianu

$$\mathbf{J}_i^m(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{0\ 3\text{kol}}^{i-1}(\mathbf{q}^{i-1}) \times (\mathbf{T}_0^n(\mathbf{q}) - \mathbf{T}_0^{i-1}(\mathbf{q}^{i-1})) \\ \mathbf{R}_{0\ 3\text{kol}}^{i-1}(\mathbf{q}^{i-1}) \end{pmatrix}, \quad (2.107)$$

gdzie $\mathbf{q}^{i-1} = (q_1, \dots, q_{i-1})^T$. Kolumny jacobianu $\mathbf{J}^m(\mathbf{q})$ odpowiadające przegubom przesunym manipulatora są takie same, jak w przypadku jacobianu $\mathbf{J}^s(\mathbf{q})$. Korzystając z formuł (2.98) oraz (2.106) nietrudno pokazać, że istnieje następujący związek między jacobianem geometrycznym w przestrzeni a jacobianem manipulatora

$$\mathbf{J}^m(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_3 & -[\mathbf{T}_0^n(\mathbf{q})] \\ \mathbf{0} & \mathbb{I}_3 \end{bmatrix} \mathbf{J}^s(\mathbf{q}). \quad (2.108)$$

Przypominamy, że odwzorowanie [] zostało zdefiniowane formułą (2.10).

Przykład 2.3.20 (Manipulator typu podwójne wahadło)

Postępując analogicznie jak w przykładzie 2.3.16, na podstawie zależności (2.107), możemy wyznaczyć jacobian manipulatora typu podwójne wahadło

$$\mathbf{J}^m(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.109)$$

■

Przykład 2.3.21 (Manipulator typu potrójne wahadło)

Wykorzystanie zależności (2.107) pozwala otrzymać jacobian manipulatora typu potrójne wahadło

$$\mathbf{J}^m(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} - l_3 s_{123} & -l_2 s_{12} - l_3 s_{123} & -l_3 s_{123} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_2 c_{12} + l_3 c_{123} & l_3 c_{123} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.110)$$

■

Przykład 2.3.22 (Manipulator typu SCARA)

Na podstawie zależności (2.107) i (2.99) otrzymujemy jacobian manipulatora typu SCARA^s

$$\mathbf{J}^m(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & -a_2 s_{12} & 0 & 0 \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} & a_2 c_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.111)$$

■

W celu wyznaczenia jacobianu geometrycznego w ciele, wystarczy skorzystać z następującej relacji między prędkościami w ciele i w przestrzeni

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_b \\ \boldsymbol{\omega}_b \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T & -\mathbf{R}^T[\mathbf{T}] \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_s \\ \boldsymbol{\omega}_s \end{pmatrix},$$

łatwej do wyprowadzenia na podstawie wzorów (2.6), (2.9), (2.12). Zakładając, że $\mathbf{R}(\mathbf{q})$, $\mathbf{T}(\mathbf{q})$ są określone wyrażeniem (2.42), otrzymujemy

$$\mathbf{J}^b(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^{nT}(\mathbf{q}) & -\mathbf{R}_0^{nT}(\mathbf{q})[\mathbf{T}_0^n(\mathbf{q})] \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_0^{nT}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \mathbf{J}^s(\mathbf{q}). \quad (2.112)$$

Przypomnijmy, że dla wektora $\mathbf{T} = (T_1, T_2, T_3)^T$, $[\mathbf{T}]$ oznacza macierz skośnie symetryczną (2.10).

^sDo wyliczenia kolumn macierzy użyto tych samych macierzy, co w przypadku jacobianu $\mathbf{J}^s$.

W postaci jawnej jacobian geometryczny w ciele wygląda następująco. Jeżeli przegub o numerze i jest obrotowy, to i -ta kolumna macierzy $\mathbf{J}^b(\mathbf{q})$ wyraża się jako

$$\mathbf{J}_i^b(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} (\mathbf{R}_{i-1}^{nT})_{3kol}(\mathbf{q}_i) \times \mathbf{R}_{i-1}^{nT}(\mathbf{q}_i) \mathbf{T}_{i-1}^n(\mathbf{q}_i) \\ (\mathbf{R}_{i-1}^{nT})_{3kol}(\mathbf{q}_i) \end{pmatrix}, \quad (2.113)$$

gdzie $\mathbf{q}_i = (q_i, \dots, q_n)^T$. Gdy i -ty przegub jest przesuwny, to

$$\mathbf{J}_i^b(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} (\mathbf{R}_{i-1}^{nT})_{3kol}(\mathbf{q}_i) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (2.114)$$

We wzorach (2.113), (2.114) symbolem $(\mathbf{R}_{i-1}^{nT})_{3kol}$ oznaczyliśmy trzecią kolumnę macierzy $\mathbf{R}_{i-1}^{nT}(\mathbf{q}_i)$ zdefiniowanej, tak samo jak wektor $\mathbf{T}_{i-1}^n(\mathbf{q}_i)$, za pośrednictwem formuły

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{i-1}^n(\mathbf{q}_i) & \mathbf{T}_{i-1}^n(\mathbf{q}_i) \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \prod_{k=i}^n \mathbf{A}_{k-1}^k(q_k).$$

Przykład 2.3.23 (Manipulator typu podwójne wahadło)

Jacobian geometryczny w ciele manipulatora typu podwójne wahadło, wyliczony na podstawie zależności (2.113), przyjmuje następującą postać[¶]

$$\mathbf{J}^b(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} l_1 s_2 & 0 \\ l_2 + l_1 c_2 & l_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.115)$$

Pozostawiamy Czytelnikowi przyjemność sprawdzenia, że jacobiany geometryczne (2.102) i (2.115) manipulatora typu podwójne wahadło spełniają zależność (2.112). ■

[¶]Pierwszą kolumnę wyliczamy wykorzystując macierz kinematyki manipulatora $\mathbf{K}$ daną wzorem (2.46), drugą — na podstawie macierzy $\mathbf{A}_1^2$.

Przykład 2.3.24 (Manipulator typu SCARA)

Jakobian geometryczny w ciele manipulatora typu SCARA znajdujemy na podstawie zależności (2.113) i (2.114)^{||}

$$\mathbf{J}^b(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} a_2 s_4 + a_1 s_{24} & a_2 s_4 & 0 & 0 \\ a_2 c_4 + a_1 c_{24} & a_2 c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.116)$$

■

Związek pomiędzy jacobianem analitycznym a jacobianem geometrycznym wynika z relacji, jaka zachodzi między prędkością zmian współrzędnych zadaniowych a prędkością efektora w przestrzeni lub w ciele. Załóżmy, dla przykładu, że współrzędne zadaniowe mają postać $\mathbf{y} = (\text{współrzędne kartezjańskie położenia } \mathbf{T}, \text{ kąty Eulera Z-Y-Z } (\varphi, \theta, \psi))$. Związek między prędkością w przestrzeni $\boldsymbol{\omega}_s$ a pochodnymi kątów Eulera Z-Y-Z względem czasu uzyskuje się ze wzoru (2.24) w następujący sposób

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega}_s &= \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T = \dot{\mathbf{R}}(Z, \varphi)\mathbf{R}^T(Z, \varphi) + \mathbf{R}(Z, \varphi)\dot{\mathbf{R}}(\gamma, \theta)\mathbf{R}^T(\gamma, \theta)\mathbf{R}^T(Z, \varphi) + \\ &+ \mathbf{R}(Z, \varphi)\mathbf{R}(\gamma, \theta)\dot{\mathbf{R}}(Z, \psi)\mathbf{R}^T(Z, \psi)\mathbf{R}^T(\gamma, \theta)\mathbf{R}^T(Z, \varphi) = \\ &= [\mathbf{e}_3]\dot{\varphi} + [\mathbf{R}(Z, \varphi)\mathbf{e}_2]\dot{\theta} + [\mathbf{R}(Z, \varphi)\mathbf{R}(\gamma, \theta)\mathbf{e}_3]\dot{\psi}. \end{aligned}$$

Przechodząc do prędkości wektorowej w przestrzeni uzyskujemy zależność

$$\boldsymbol{\omega}_s = \mathbf{E}(\varphi, \theta, \psi) \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}, \quad (2.117)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\varphi, \theta, \psi) &= [\mathbf{e}_3, \mathbf{R}(Z, \varphi)\mathbf{e}_2, \mathbf{R}(Z, \varphi)\mathbf{R}(\gamma, \theta)\mathbf{e}_3] = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \sin \theta \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \sin \theta \\ 1 & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

^{||} Poszczególne kolumny tego jacobianu wylicza się, odpowiednio, na podstawie macierzy $\mathbf{A}_0^4 = \mathbf{K}$, $\mathbf{A}_1^4$, $\mathbf{A}_2^4$, $\mathbf{A}_3^4$.

Dla współrzędnych kartezjańskich położenia wyliczamy

$$\mathbf{v}_s = \dot{\mathbf{T}} - \boldsymbol{\Omega}_s \mathbf{T} = \dot{\mathbf{T}} + [\mathbf{T}] \boldsymbol{\omega}_s.$$

W rezultacie, transformacja prędkości przyjmuje następującą postać

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_s \\ \boldsymbol{\omega}_s \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_3 & [\mathbf{T}] \mathbf{E}(\varphi, \theta, \psi) \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}(\varphi, \theta, \psi) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{T}_1 \\ \dot{T}_2 \\ \dot{T}_3 \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}. \quad (2.118)$$

Po utożsamieniu współrzędnych przegubowych z położeniami przegubów manipulatora ($\mathbf{x} = \mathbf{q}$) znajdujemy następujący związek między jacobianem analitycznym $\mathbf{J}^a(\mathbf{x})$ odnoszącym się do współrzędnych (współrzędne kartezjańskie, kąty Eulera Z-Y-Z) w specjalnej grupie euklidesowej a jacobianem geometrycznym $\mathbf{J}^s(\mathbf{x})$ w przestrzeni

$$\mathbf{J}^s(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_3 & [\mathbf{T}] \mathbf{E}(\varphi, \theta, \psi) \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}(\varphi, \theta, \psi) \end{bmatrix} \mathbf{J}^a(\mathbf{x}). \quad (2.119)$$

Podobne relacje można wyprowadzić dla innych układów współrzędnych (parametryzacji) grupy $\mathbb{SE}(3)$ i jej podgrup. W przypadku parametryzacji kołysanie-kiwanie-myszkowanie, prędkość kątowa w przestrzeni wynosi

$$\boldsymbol{\omega}_s = \mathbf{KKM}(\varphi, \theta, \psi) \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \cos \theta \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \cos \theta \\ 1 & 0 & -\sin \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}. \quad (2.120)$$

Po wzięciu pod uwagę definicji prędkości liniowej w przestrzeni oraz zależności (2.120) otrzymujemy następującą transformację prędkości

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_s \\ \boldsymbol{\omega}_s \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_3 & [\mathbf{T}] \mathbf{KKM}(\varphi, \theta, \psi) \\ \mathbf{0} & \mathbf{KKM}(\varphi, \theta, \psi) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{T}_1 \\ \dot{T}_2 \\ \dot{T}_3 \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}. \quad (2.121)$$

Dla kompletności dodajmy transformację prędkości związaną z parametryzacją Cayleya. Dla prędkości kątowej w przestrzeni otrzymujemy związek

$$\boldsymbol{\omega}_s = \mathbf{C}(\mathbf{r})\dot{\mathbf{r}}, \quad (2.122)$$

w którym macierz $\mathbf{C}(\mathbf{r})$ wyraża się formułą

$$\mathbf{C}(\mathbf{r}) = 2 \begin{bmatrix} 1 + r_1^2 & r_1 r_2 + r_3 & r_1 r_3 - r_2 \\ r_1 r_2 - r_3 & 1 + r_2^2 & r_2 r_3 + r_1 \\ r_1 r_3 + r_2 & r_2 r_3 - r_1 & 1 + r_3^2 \end{bmatrix}^{-1}. \quad (2.123)$$

W rezultacie, transformacja prędkości w przypadku parametryzacji Cayleya posiada następującą reprezentację macierzową

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_s \\ \boldsymbol{\omega}_s \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_3 & [\mathbf{T}]\mathbf{C}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{T}_1 \\ \dot{T}_2 \\ \dot{T}_3 \\ \dot{r}_1 \\ \dot{r}_2 \\ \dot{r}_3 \end{pmatrix}. \quad (2.124)$$

Przykład 2.3.25 (Manipulator typu podwójne wahadło)

W tym przykładzie zajmiemy się wyprowadzeniem zależności analogicznej do (2.119), wiążącej jakobian analityczny $\mathbf{J}^a$ manipulatora typu podwójne wahadło, zdefiniowanego wzorem (2.81), z jego jakobianem geometrycznym w przestrzeni $\mathbf{J}^s$, określonym przez (2.102). Przed przystąpieniem do tego zauważmy, że jakobiany geometryczne (2.102) i (2.115) wyliczono z ogólnych zależności zakładających, że ruch odbywa się w grupie $\mathbb{SE}(3)$, natomiast jakobian analityczny (2.81) został wyliczony dla kinematyki wyrażonej we współrzędnych reprezentujących grupę $\mathbb{SE}(2)$. Uwzględnienie tego faktu spowoduje zmianę rozmiarów macierzy określającej związek między jakobianami w stosunku do macierzy (2.119).

Współrzędne zadaniowe $\mathbf{y}$ wybrane w grupie $\mathbb{SE}(2)$ odpowiadają w grupie $\mathbb{SE}(3)$ położeniu wzdłuż osi X i Y podstawowego układu współrzędnych $x_0 y_0 z_0$ oraz obrotowi wokół osi Z tego układu. Dlatego, dla tak wybranych współrzędnych

$$\mathbf{T}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}(\mathbf{y}) = \mathbf{R}(Z, y_3) = \begin{bmatrix} \cos y_3 & -\sin y_3 & 0 \\ \sin y_3 & \cos y_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jak pokazaliśmy, macierz prędkości kątowej w przestrzeni $\Omega_s = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T = [\omega_s]$ jest całkowicie określona przez wektor prędkości kątowej w przestrzeni $\omega_s = (\omega_{s1}, \omega_{s2}, \omega_{s3})^T$. W naszym przypadku

$$\Omega_s = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{y}_3 & 0 \\ \dot{y}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

co oznacza, że $\omega_s = \mathbf{e}_3\dot{y}_3$. Wiemy również, że wektor prędkości liniowej w przestrzeni jest równy $\mathbf{v}_s = \dot{\mathbf{T}} - \Omega_s\mathbf{T}$, co w analizowanym przykładzie sprowadza się do

$$\mathbf{v}_s = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 + y_2\dot{y}_3 \\ \dot{y}_2 - y_1\dot{y}_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & y_2 \\ 0 & 1 & -y_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix}.$$

Zestawiając otrzymane wyrażenia na ω_s i $\mathbf{v}_s$ uzyskujemy

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_s \\ \omega_s \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & y_2 \\ 0 & 1 & -y_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \mathbf{F}(\mathbf{y})\dot{\mathbf{y}}.$$

Po naturalnym utożsamieniu współrzędnych konfiguracyjnych $\mathbf{q}$ z położeniami przegubów manipulatora $\mathbf{x}$, określamy związek między jacobianem analitycznym $\mathbf{J}^a(\mathbf{x})$ odnoszącym się do wybranego układu współrzędnych a jacobianem geometrycznym $\mathbf{J}^s(\mathbf{x})$ w przestrzeni

$$\mathbf{J}^s(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{k}(\mathbf{x}))\mathbf{J}^a(\mathbf{x}), \quad (2.125)$$

gdzie $\mathbf{k}(\mathbf{x})$ oznacza kinematykę podwójnego wahadła wyrażoną we współrzędnych w postaci (2.67). Łatwo sprawdzić, że wyliczone wcześniej jacobiany (2.81) i (2.102) spełniają zależność (2.125).

Zależności typu (2.125) są ważne z obliczeniowego punktu widzenia. Pozwalają one bowiem wyliczyć jacobian analityczny w sytuacjach, gdy nie jesteśmy w stanie wyrazić kinematyki manipulatora we współrzędnych w sposób jawny. ■

Przykład 2.3.26 (Manipulator typu SCARA)

W celu wyznaczenia relacji wiążącej jacobian analityczny $\mathbf{J}^a$ manipulatora SCARA z jego jacobianem geometrycznym w przestrzeni $\mathbf{J}^s$ należy postąpić dokładnie w taki sam sposób, jak w przypadku manipulatora typu podwójne wahadło (przykład 2.3.25). Po wykonaniu niezbędnych przekształceń otrzymujemy związek postaci

$$\mathbf{J}^s(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ 0 & 1 & 0 & -a_1 c_1 - a_2 c_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{J}^a(\mathbf{x}). \quad (2.126)$$

■

Przykład 2.3.27 (Manipulator IRb-6 na torze jezdny)

Na zakończenie znajdziemy zależność wiążącą jacobian analityczny manipulatora IRb-6 zamontowanego na torze jezdny, zdefiniowany przez (2.87), z jego jacobianem geometrycznym w przestrzeni określonym przez (2.105). Dla wybranych współrzędnych kinematyki** otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{y}) &= (y_1, y_2, y_3)^T, \\ \mathbf{R}(\mathbf{y}) &= \mathbf{R}(\gamma, y_4) \mathbf{R}(Z, y_5) \mathbf{R}(\gamma, y_6) = \\ &= \begin{bmatrix} \check{c}_4 \check{c}_5 \check{c}_6 - \check{s}_4 \check{s}_6 & -\check{c}_4 \check{s}_5 & \check{s}_4 \check{c}_6 + \check{c}_4 \check{c}_5 \check{s}_6 \\ \check{s}_5 \check{c}_6 & \check{c}_5 & \check{s}_5 \check{s}_6 \\ -\check{s}_4 \check{c}_5 \check{c}_6 - \check{c}_4 \check{s}_6 & \check{s}_4 \check{s}_5 & \check{c}_4 \check{c}_6 - \check{s}_4 \check{c}_5 \check{s}_6 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

gdzie $\check{s}_i$ i $\check{c}_j$ oznaczają $\sin y_i$ i $\cos y_i$. Wyliczenie macierzy $\mathbf{\Omega}_s = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T$ pozwala na określenie wektora prędkości kątowej

$$\mathbf{\omega}_s = \begin{pmatrix} \check{s}_4 \dot{y}_5 - \check{c}_4 \check{s}_5 \dot{y}_6 \\ \dot{y}_4 \check{c}_5 \dot{y}_6 \\ \check{c}_4 \dot{y}_5 + \check{s}_4 \check{s}_5 \dot{y}_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \check{s}_4 & -\check{c}_4 \check{s}_5 \\ 1 & 0 & \check{c}_5 \\ 0 & \check{c}_4 & \check{s}_4 \check{s}_5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{y}_4 \\ \dot{y}_5 \\ \dot{y}_6 \end{pmatrix}.$$

Następnie, po znalezieniu wektora $\mathbf{v}_s = \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{\Omega}_s \mathbf{T}$ postaci

$$\mathbf{v}_s = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 - y_3 \dot{y}_4 + y_2 \check{c}_4 \dot{y}_5 + (y_2 \check{s}_4 \check{s}_5 - y_3 \check{c}_5) \dot{y}_6 \\ \dot{y}_2 + (y_3 \check{s}_4 - y_1 \check{c}_4) \dot{y}_5 - (y_1 \check{s}_4 \check{s}_5 + y_3 \check{c}_4 \check{s}_5) \dot{y}_6 \\ \dot{y}_3 + y_1 \dot{y}_4 - y_2 \check{s}_4 \dot{y}_5 + (y_1 \check{c}_5 + y_2 \check{c}_4 \check{s}_5) \dot{y}_6 \end{pmatrix},$$

**Są to współrzędne kartezjańskie położenia efektora wraz z kątami Eulera Y-Z-Y określającymi jego orientację.

otrzymujemy następujący związek między prędkościami w przestrzeni a prędkościami we współrzędnych zadaniowych

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_s \\ \boldsymbol{\omega}_s \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -y_3 & y_2\check{c}_4 & y_2\check{s}_4\check{s}_5 - y_3\check{c}_5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -y_1\check{c}_4 + y_3\check{s}_4 & y_1\check{s}_4\check{s}_5 + y_3\check{c}_4\check{s}_5 \\ 0 & 0 & 1 & y_1 & -y_2\check{s}_4 & y_1\check{c}_5 + y_2\check{c}_4\check{s}_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \check{s}_4 & -\check{c}_4\check{s}_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \check{c}_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \check{c}_4 & \check{s}_4\check{s}_5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \\ \dot{y}_5 \\ \dot{y}_6 \end{pmatrix}. \quad (2.127)$$

Na podstawie formuły (2.127), po utożsamieniu współrzędnych konfiguracyjnych $\mathbf{q}$ z położeniami przegubów manipulatora $\mathbf{x}$, otrzymujemy poszukiwany związek między jacobianem analitycznym $\mathbf{J}^a(\mathbf{x})$ odnoszącym się do wybranych współrzędnych zadaniowych a jacobianem geometrycznym $\mathbf{J}^s(\mathbf{x})$ w przestrzeni

$$\mathbf{J}^s(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_1 - s_2a_{23} & c_2(d_1 + a_2s_3 + a_3s_4 - d_6c_5) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -x_1s_2 - a_2c_3 - a_3c_4 - d_6s_5 \\ 0 & 0 & 1 & c_2a_{23} & -s_2(d_1 + a_2s_3 + a_3s_4 - d_6c_5) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1c_5 + s_2(d_1s_5 + a_2c_{3-5} + a_3c_{4-5}) \\ -x_1c_2s_5 \\ -c_2(d_1s_5 + a_2c_{3-5} + a_3c_{4-5}) \\ -c_2s_5 \\ -c_5 \\ -s_2s_5 \end{bmatrix} \mathbf{J}^a(\mathbf{x}), \quad (2.128)$$

przy oznaczeniach $a_{23} = a_2c_3 + a_3c_4 + d_6s_5$, $c_{i-j} = \cos(x_i - x_j)$. ■

Kończąc rozważania na temat kinematyki, zwróćmy uwagę na zalety wykładniczej reprezentacji kinematyki manipulatora ujawniające się przy obliczaniu jacobianu geometrycznego manipulatora w przestrzeni. Mianowicie, nietrudno pokazać, że formuła prędkości efektora w przestrzeni przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^s &= \dot{\mathbf{K}}(\mathbf{q})\mathbf{K}^{-1}(\mathbf{q}) = \\ &= \zeta_1\dot{q}_1 + \exp(\zeta_1q_1)\zeta_2\exp(-\zeta_1q_1)\dot{q}_2 + \cdots + \exp(\zeta_1q_1) \cdots \\ &\quad \cdots \exp(\zeta_{n-1}q_{n-1})\zeta_n\exp(-\zeta_{n-1}q_{n-1}) \cdots \exp(-\zeta_1q_1)\dot{q}_n. \end{aligned} \quad (2.129)$$

Dzięki zależności (2.58)

$$\exp(\zeta_i q_i) = \begin{bmatrix} \exp([\omega_i]q_i) & -(\omega_i \times p_i)q_i \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.130)$$

Macierze występujące we wzorze (2.129) po lewej stronie prędkości ruchu przegubów należą do algebry Liego $\mathfrak{se}(3)$ grupy $\mathbb{SE}(3)$ i są zdefiniowane przez wektory z przestrzeni $\mathbb{R}^6$ (skrętniki), które można potraktować bezpośrednio jako kolumny jacobianu geometrycznego w przestrzeni.

Przykład 2.3.28 (Manipulator typu podwójne wahadło)

Zgodnie z formułą (2.130), korzystając z reprezentacji wykładniczej kinematyki (2.60), (2.61) możemy obliczyć prędkość w przestrzeni efektora manipulatora typu podwójne wahadło

$$\mathbf{V}^s = \dot{\mathbf{K}}(\mathbf{q})\mathbf{K}^{-1}(\mathbf{q}) = \zeta_1 \dot{q}_1 + \exp(\zeta_1 q_1) \zeta_2 \exp(-\zeta_1 q_1) \dot{q}_2. \quad (2.131)$$

Macierze, przez które są mnożone prędkości w (2.131) należą do algebry Liego $\mathfrak{se}(3)$, a odpowiadające im skrętniki definiują kolumny jacobianu geometrycznego w przestrzeni. Jak łatwo zauważyć, macierz $\zeta_1 = \begin{bmatrix} [e_3] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}$ jest równoważna wektorowi $\mathbf{e}_6 \in \mathbb{R}^6$. Druga z macierzy

$$\begin{aligned} \exp(\zeta_1 q_1) \zeta_2 \exp(-\zeta_1 q_1) &= \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}(Z, q_1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [e_3] & -l_1 \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T(Z, q_1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [e_3] & -l_1 \mathbf{R}(Z, q_1) \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

ma skrętnik $(l_1 s_1, -l_1 c_1, 0, 0, 0, 1)^T$. W rezultacie, jacobian geometryczny w przestrzeni

$$\mathbf{J}^s(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 & l_1 s_1 \\ 0 & -l_1 c_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.132)$$

obliczony przy wykorzystaniu reprezentacji wykładniczej kinematyki podwójnego wahadła jest taki sam, jak otrzymany w przykładzie 2.3.16. ■

Przykład 2.3.29 (Manipulator typu SCARA)

Korzystając z reprezentacji wykładniczej (2.63), (2.64) kinematyki manipulatora *SCARA*, obliczamy prędkość efektora w przestrzeni

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^s = \mathbf{K}(\mathbf{q})\mathbf{K}^{-1}(\mathbf{q}) &= \zeta_1 \dot{q}_1 + \exp(\zeta_1 q_1) \dot{q}_2 + \\ &+ \exp(\zeta_1 q_1) \exp(\zeta_2 q_2) \zeta_3 \exp(-\zeta_2 q_2) \exp(-\zeta_1 q_1) \dot{q}_3 + \exp(\zeta_1 q_1) \exp(\zeta_2 q_2) \\ &\exp(\zeta_3 q_3) \zeta_4 \exp(-\zeta_3 q_3) \exp(-\zeta_2 q_2) \exp(-\zeta_1 q_1) \dot{q}_4. \end{aligned} \quad (2.133)$$

Jako kolumny jacobianu geometrycznego w przestrzeni manipulatora *SCARA* weźmiemy skrętniki odpowiadające macierzom, przez które są mnożone prędkości przegubów manipulatora we wzorze (2.133). Po wykonaniu elementarnych operacji algebraicznych otrzymujemy następujące wyniki:

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \begin{bmatrix} [\mathbf{e}_3] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \cong \mathbf{e}_6 \in \mathbb{R}^6, \\ \exp(\zeta_1 q_1) \zeta_2 \exp(-\zeta_1 q_1) &= \begin{bmatrix} [\mathbf{e}_3] & -a_1 \mathbf{R}(Z, q_1) \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \cong \begin{pmatrix} a_1 s_1 \\ -a_1 c_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6, \\ \exp(\zeta_1 q_1) \exp(\zeta_2 q_2) \zeta_3 \exp(-\zeta_2 q_2) \exp(-\zeta_1 q_1) &= \zeta_3 \cong \mathbf{e}_3 \in \mathbb{R}^6, \\ \exp(\zeta_1 q_1) \exp(\zeta_2 q_2) \exp(\zeta_3 q_3) \zeta_4 \exp(-\zeta_3 q_3) \exp(-\zeta_2 q_2) \exp(-\zeta_1 q_1) &= \\ = \begin{bmatrix} [\mathbf{e}_3] & -\mathbf{R}(Z, q_1) \begin{pmatrix} a_2 s_2 \\ -a_1 - a_2 c_2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} &\cong \begin{pmatrix} a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ -a_1 c_1 - a_2 c_{12} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6. \end{aligned}$$

W rezultacie, jacobian geometryczny w przestrzeni

$$\mathbf{J}^s(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 & a_1 s_1 & 0 & a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ 0 & -a_1 c_1 & 0 & -a_1 c_1 - a_2 c_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.134)$$

ma postać identyczną z (2.104). ■

2.3.5 Konfiguracje osobliwe

Konfiguracje, jakie przyjmuje manipulator w czasie ruchu dzielą się na dwie klasy: *konfiguracje regularne (nieosobliwe)* i *konfiguracje osobliwe*. Mówimy, że konfiguracja manipulatora jest regularna, jeżeli jacobian geometryczny (w przestrzeni lub w ciele) ma pełny rząd wierszowy, to znaczy rząd jacobianu jest równy wymiarowi rozmaitości zadaniowej. Zgodnie z powyższą definicją, w konfiguracji regularnej przekształcenie

$$\mathbf{J}^s(\mathbf{q}) : \dot{\mathbf{q}} \longmapsto \begin{pmatrix} \mathbf{v}_s \\ \boldsymbol{\omega}_s \end{pmatrix}$$

jest *suriekcją liniową*. Konfigurację $\mathbf{q}$ manipulatora, w której rząd jacobianu geometrycznego jest mniejszy od wymiaru rozmaitości zadaniowej,

$$\text{rank } \mathbf{J}^s(\mathbf{q}) < \dim \mathcal{Z},$$

nazywamy konfiguracją osobliwą. Zauważmy, że manipulator, którego liczba stopni swobody jest mniejsza od wymiaru rozmaitości zadaniowej, ma wyłącznie konfiguracje osobliwe. Z definicji jacobianu geometrycznego wynika, że w konfiguracji osobliwej istnieją takie wektory prędkości ruchu przegubów, które nie powodują ruchu efektora manipulatora. Oznacza to, że manipulator traci *zręczność* ruchu. Stopień utraty zręczności ruchu w konfiguracji osobliwej mierzy się liczbą zwaną *korzędem* tej konfiguracji

$$\text{corank } \mathbf{q} = \dim \mathcal{Z} - \text{rank } \mathbf{J}^s(\mathbf{q}). \quad (2.135)$$

Korząd konfiguracji osobliwej określa liczbę niezależnych kierunków ruchu w przestrzeni stycznej do rozmaitości zadaniowej w punkcie $\mathbf{K}(\mathbf{q})$, których nie można wygenerować przy pomocy ruchu przegubów w kierunkach dopuszczalnych w konfiguracji $\mathbf{q}$.

Niech będzie dana kinematyka $\mathbf{K} : \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{Z}$ manipulatora o n stopniach swobody, wraz z jacobianem geometrycznym $\mathbf{J}^s(\mathbf{q})$. Stosownie do podanej definicji, konfiguracje osobliwe manipulatora należą do zbioru

$$\mathbf{S} = \{\mathbf{q} \in \mathcal{Q} \mid \text{rank } \mathbf{J}^s(\mathbf{q}) < \dim \mathcal{Z}\}. \quad (2.136)$$

Utożsamiając konfiguracje ze współrzędnymi przegubowymi możemy zależność (2.136) przepisać w równoważnej postaci

$$\mathbf{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \text{rank } \mathbf{J}^s(\mathbf{x}) < \dim \mathcal{Z}\}.$$

Poświęćmy nieco uwagi zbadaniu podstawowych własności zbioru S . Jak łatwo zauważyć, wyznaczenie zbioru konfiguracji osobliwych wymaga rozwiązania pewnego układu równań nieliniowych, zatem konfiguracje osobliwe mogą nie być możliwe do wyznaczenia w sposób jawny (symboliczny). Z ciągłości jacobianu geometrycznego jako funkcji konfiguracji wynika, że zbiór S jest domknięty. Co więcej, ponieważ kinematyka manipulatora jest funkcją analityczną, zbiór S jest tzw. *zbiorem analitycznym*, to znaczy miejscem zerowym pewnej liczby funkcji analitycznych. Jako zbiór analityczny zbiór konfiguracji osobliwych jest nigdziegęsty w przestrzeni przegubowej (o ile tylko manipulator posiada konfiguracje regularne), a więc jest zbiorem topologicznie małym*. Generalnie, zbiór S nie jest podrozmaitością przestrzeni przegubowej, jest jednak sumą podrozmaitości (warstw) ułożonych względem siebie w pewien regularny sposób†. Wymiar zbioru S definiuje się jako największy wymiar podrozmaitości składających się na ten zbiór. Załóżmy, że wymiar rozmaitości zadaniowej wynosi m . Niech S_k oznacza zbiór konfiguracji osobliwych korzędu k . Jest oczywiste, że

$$S = \bigcup_{k=1}^m S_k.$$

Jeżeli zbiór konfiguracji osobliwych korzędu k jest podrozmaitością przestrzeni przegubowej, to jego *kwowymiar*

$$\text{codim } S_k = k(n - m + k).$$

Często w celu wyznaczenia konfiguracji osobliwych manipulatora używamy reprezentacji jego kinematyki we współrzędnych oraz jacobianu analitycznego. Uzyskane w ten sposób wyniki będą takie same, jak w przypadku wykorzystywania jacobianu geometrycznego, pod warunkiem że macierze przekształcające jacobian analityczny w geometryczny‡ są nieosobliwe. Osobliwości tych macierzy są źródłem tzw. *osobliwości reprezentacji* kinematyki manipulatora.

Przykład 2.3.30 (Manipulator typu podwójne wahadło)

Wyznamy zbiór konfiguracji osobliwych dla manipulatora typu podwójne wahadło. Z definicji konfiguracji osobliwej wynika, że ten manipulator,

*Tzw. zbiorem I kategorii.

†Zwany stratyfikacją Whitneya.

‡Patrz formuła (2.119).

opisany kinematyką $\mathbf{K}(\mathbf{q})$ postaci (2.46) z jacobianem geometrycznym $\mathbf{J}^s(\mathbf{q})$ danym zależnością (2.102), ma wyłącznie konfiguracje osobliwe^s. Podobna sytuacja ma miejsce przy ograniczeniu rozmaitości zadaniowej manipulatora do grupy $\mathbb{SE}(2)$. Jej wymiar wciąż jest większy od maksymalnego rzędu jacobianu manipulatora.

Konfiguracje regularne w przestrzeni przegubowej rozpatrywanego manipulatora pojawiają się dopiero po redukcji wymiaru przestrzeni zadaniowej do dwóch. Z taką sytuacją mamy do czynienia, gdy manipulator jest opisany kinematyką (2.68) z odpowiadającym jej jacobianem (2.82), bądź kinematyką (2.69) z jacobianem (2.83). W pierwszym przypadku, wyliczając wyznacznik jacobianu $\mathbf{J}^a(\mathbf{x})$ otrzymujemy

$$\det \mathbf{J}^a(\mathbf{x}) = l_1 l_2 \sin x_2.$$

Oznacza to, że dla manipulatora typu podwójne wahadło, opisanego kinematyką (2.68), zbiór konfiguracji osobliwych

$$\mathbf{S} = \{ \mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \mid \sin x_2 = 0 \}. \quad (2.137)$$

Analogicznie, przy kinematyce (2.69) otrzymujemy zbiór konfiguracji osobliwych

$$\mathbf{S} = \{ \mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \mid \sin x_1 = 0 \}. \quad (2.138)$$

■

Przykład 2.3.31 (Manipulator typu potrójne wahadło)

Podobnie jak w poprzednim przykładzie, manipulator typu potrójne wahadło z kinematyką (2.47) przyjmującą wartości na rozmaitości zadaniowej $\mathbb{SE}(3)$ jest zawsze osobliwy. Policzenie wyznacznika jacobianu analitycznego $\mathbf{J}^a(\mathbf{x})$ danego przez (2.84), odpowiadającego kinematyce (2.70), prowadzi do wyznaczenia zbioru konfiguracji osobliwych

$$\mathbf{S} = \{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid \sin x_2 = 0 \}. \quad (2.139)$$

W celu znalezienia zbioru konfiguracji osobliwych manipulatora typu potrójne wahadło z kinematyką (2.71), należy określić zestaw

$$\mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} l_1(l_2 s_2 + l_3 s_{23}) \\ l_3(l_2 s_3 + l_1 s_{23}) \\ l_2 l_3 s_3 \end{pmatrix}$$

^sWymiar rozmaitości zadaniowej $\mathbb{SE}(3)$ wynosi 6; rząd macierzy $\mathbf{J}^s(\mathbf{q})$ — co najwyżej 2.

minorów stopnia 2 jacobianu $\mathbf{J}^a(\mathbf{x})$ danego zależnością (2.85). Jak widać, wszystkie minory macierzy (2.85) będą równe zero jedynie wtedy, gdy $s_2 = s_3 = 0$. Poszukiwany zbiór konfiguracji osobliwych można więc zapisać jako

$$\mathbf{S} = \{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid \sin x_2 = \sin x_3 = 0 \}. \quad (2.140)$$

■

Przykład 2.3.32 (Manipulator typu SCARA)

Ponieważ manipulator typu SCARA opisany kinematyką (2.48) ma mniej niż 6 stopni swobody, przyjmuje on wyłącznie konfiguracje osobliwe. Przy kinematyce (2.72) i ograniczeniach (2.74) konfiguracje osobliwe manipulatora tworzą zbiór

$$\mathbf{S} = \{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathcal{X} \mid \sin x_2 = 0 \}, \quad (2.141)$$

co wynika z postaci wyznacznika jacobianu analitycznego (2.86). Wyliczenie minorów macierzy (2.86), z usuniętym ostatnim wierszem, prowadzi do wniosku, że zbiór konfiguracji manipulatora SCARA opisanego kinematyką (2.73) jest taki sam jak (2.141). ■

Przykład 2.3.33 (Manipulator IRb-6 na torze jezdny)

Manipulator IRb-6 zamontowany na torze jezdny z kinematyką zdefiniowaną wzorem (2.49) jest jedynym wśród analizowanych przez nas przykładów manipulatorów o rozmaitości zadaniowej $\mathbb{SE}(3)$, którego rozmaitość przegubowa nie składa się wyłącznie z konfiguracji osobliwych. Wyznacznik jacobianu geometrycznego w przestrzeni $\mathbf{J}^s(\mathbf{q})$, danego wzorem (2.105), jest równy[¶]

$$\det \mathbf{J}^s(\mathbf{x}) = -a_2 a_3 c_2 s_3 - 4s_5.$$

Biorąc pod uwagę ograniczenia ruchu w przegubach manipulatora wynikające z jego konstrukcji mechanicznej (2.78), zbiór konfiguracji osobliwych możemy zapisać jako

$$\mathbf{S}^* = \{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_6)^T \in \mathcal{X} \mid x_2 = \pm \frac{\pi}{2} \vee x_5 = 0 \vee x_5 = \pi \}. \quad (2.142)$$

Wyznacznik jacobianu $\mathbf{J}^a(\mathbf{x})$ postaci (2.87) wynosi

$$\det \mathbf{J}^a(\mathbf{x}) = -a_2 a_3 c_2 s_3 - 4. \quad (2.143)$$

[¶]Po utożsamieniu zmiennych $\mathbf{q}$ ze zmiennymi $\mathbf{x}$.

Prowadzi to, ponownie po uwzględnieniu ograniczeń konstrukcyjnych manipulatora, do zdefiniowania zbioru konfiguracji osobliwych formułą

$$\mathbf{S} = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_6)^T \in \mathcal{X} \mid x_2 = \pm \frac{\pi}{2}\}. \quad (2.144)$$

Inkluzja $\mathbf{S} \subset \mathbf{S}^*$, świadczy o tym, że $\mathbf{S}^*$ zawiera nie tylko osobliwości manipulatora, lecz także osobliwości reprezentacji.

Wyznamy jeszcze osobliwości manipulatora IRb-6 zamontowanego na torze jezdny, traktowanego jako manipulator redundantny z kinematyką (2.77). Po obliczeniu minorów rzędu trzeciego jacobianu analitycznego tego manipulatora stwierdzamy, że znajduje się wśród nich minor postaci $a_2 a_3 s_{3-4}(a_2 c_3 + a_3 c_4 + d_6 s_5)$, który w całej przestrzeni przegubowej manipulatora $\mathcal{X}$ jest różny od zera. Oznacza to, że redundantny manipulator IRb-6 zamontowany na torze jezdny nie ma w ogóle konfiguracji osobliwych. ■

2.4 Kinematyka robota mobilnego

Po zdefiniowaniu kinematyki manipulatora, będącego układem holonomicznym, zajmiemy się teraz kinematyką układu robotycznego opisanego w uniwersum fazowym $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ za pośrednictwem l niezależnych ograniczeń nieholonomicznych. Załóżmy, że układ nie podlega ograniczeniom konfiguracyjnym ($k = 0$, a więc liczba stopni swobody $n = N$). Tak określony układ robotyczny będziemy nazywać *nieholonomicznym robotem mobilnym* lub, po prostu, *robotem mobilnym*^{||}. Zadanie, jakie ma realizować robot mobilny, polega na poruszaniu się w pewnym otoczeniu. Z formalnego punktu widzenia, kinematyka robota mobilnego jest scharakteryzowana przez układ sterowania, liniowy z uwagi na sterowanie, postaci (2.33)

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{G}(\mathbf{q})\mathbf{u} = \sum_{i=1}^m \mathbf{g}_i(\mathbf{q})u_i, \quad (2.145)$$

w którym $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, $m = n - l$. Pola wektorowe sterujące $\mathbf{g}_1(\mathbf{q}), \dots, \mathbf{g}_m(\mathbf{q})$ są gładkie (a nawet analityczne). Będziemy zakładać, że sterowania układu (2.145) należą do *przestrzeni Hilberta* $\mathbb{L}_m^2[0, T]$ funkcji całkownych z kwadratem, określonych na pewnym przedziale czasu $[0, T]$

^{||}W tej książce terminy: robot nieholonomiczny i robot mobilny są traktowane jako synonimy. Nie znaczy to, że negujemy istnienie holonomicznych robotów mobilnych.

i przyjmujących wartości w $\mathbb{R}^m$ (praktycznie, często będziemy mieć na myśli sterowania odcinkami ciągłe lub odcinkami stałe, o skończonej liczbie punktów nieciągłości).

Założmy, że dla każdego stanu początkowego $\mathbf{q}_0$ i zadanego sterowania $\mathbf{u}(\cdot)$ istnieje trajektoria $\mathbf{q}(t)$ układu (2.145) określona na przedziale $[0, T]$. Zdefiniujemy odwzorowanie przejścia stanów układu (2.145)

$$\mathbf{q}(t) = \boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{q}_0, \mathbf{u}(\cdot)), \quad (2.146)$$

które stanowi początkowemu układowi $\mathbf{q}_0$ i sterowaniu $\mathbf{u}(\cdot)$ przyporządkowuje stan układu w chwili $t \in [0, T]$. Oczywiście, dla $t = 0$ mamy zawsze $\boldsymbol{\varphi}_0(\mathbf{q}_0, \mathbf{u}(\cdot)) = \mathbf{q}_0$. Przy ustalonym stanie początkowym $\mathbf{q}_0$ i zmieniającym się sterowaniu $\mathbf{u}(\cdot)$ odwzorowanie (2.146) opisuje stany osiągalne w układzie sterowania (2.145) ze stanu $\mathbf{q}_0$ w chwili t . Jeżeli dla każdego $\mathbf{q}_0$ zbiór stanów osiągalnych w chwili t obejmuje całą przestrzeń stanu $\mathbb{R}^n$, układ (2.145) nazywamy *sterowalnym* w chwili t^{**} . Układ sterowalny w dowolnie małej chwili czasu $t > 0$ nazywamy sterowalnym w krótkim czasie. Okazuje się, że nieholonomiczność układu (2.145) jest warunkiem wystarczającym sterowalności w krótkim czasie przy pomocy odcinkami stałych sterowań. Oznacza to, że dla robota nieholonomicznego odwzorowanie $\boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{q}_0, \cdot)$ jest suriekcją przy każdym $\mathbf{q}_0$ i $t > 0$.

Niech zadanie realizowane przez robota mobilnego polega na osiągnięciu zadanego stanu $\mathbf{q}_d$ w określonej chwili $t \in [0, T]$ przy ustalonym stanie $\mathbf{q}_0$ w chwili 0. Traktując stan $\mathbf{q}_0$ jako ustalony, możemy zamiast (2.146) rozważać odwzorowanie

$$\mathbf{k}_{\mathbf{q}_0, t} : \mathbb{L}_m^2[0, t] \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{k}_{\mathbf{q}_0, t}(\mathbf{u}(\cdot)) = \boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{q}_0, \mathbf{u}(\cdot)), \quad (2.147)$$

które nazwiemy kinematyką robota mobilnego w chwili $t \in [0, T]$. Dla odróżnienia, odwzorowanie $\mathbf{k}_{\mathbf{q}_0, T}$ zdefiniowane przy pomocy formuły (2.147) dla $t = T$ będziemy nazywać *kinematyką robota mobilnego*. Kinematyka $\mathbf{k}_{\mathbf{q}_0, T}$ odwzorowuje ∞ -wymiarową przestrzeń sterowań w przestrzeń stanu układu. Odpowiednikiem jakobianu analitycznego manipulatora jest w tym przypadku różniczka odwzorowania $\mathbf{k}_{\mathbf{q}_0, T}$. W celu jej obliczenia skorzystamy z kinematyki robota mobilnego w chwili $t \in [0, T]$. Różniczką^{††} $D \mathbf{k}_{\mathbf{q}_0, t}(\mathbf{u}(\cdot))$, w punkcie $\mathbf{u}(\cdot) \in \mathbb{L}_m^2[0, t]$, jest przekształceniem liniowym

$$D \mathbf{k}_{\mathbf{q}_0, t}(\mathbf{u}(\cdot)) : \mathbb{L}_m^2[0, t] \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

^{**}Ścisłej, osiągalnym, ale dla układów postaci (2.145) sterowalność jest równoważna osiągalności.

^{††}Różniczka Gâteaux.

określonym formułą

$$D \mathbf{k}_{\mathbf{q}_0, t}(\mathbf{u}(\cdot))\mathbf{v}(\cdot) = \left. \frac{d}{d\gamma} \right|_{\gamma=0} \mathbf{k}_{\mathbf{q}_0, t}(\mathbf{u}(\cdot) + \gamma\mathbf{v}(\cdot)). \quad (2.148)$$

Nietrudno zauważyć, że dla $t = 0$ różniczka znika, tzn. $D \mathbf{k}_{\mathbf{q}_0, 0}(\mathbf{u}(\cdot))\mathbf{v}(\cdot) = \mathbf{0}$. Aby wyliczyć $D \mathbf{k}_{\mathbf{q}_0, t}(\mathbf{u}(\cdot))$, zróżniczkujemy obie strony (2.148) względem czasu

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} D \mathbf{k}_{\mathbf{q}_0, t}(\mathbf{u}(\cdot))\mathbf{v}(\cdot) &= \\ &= \left. \frac{d}{dt} \frac{d}{d\gamma} \right|_{\gamma=0} \mathbf{k}_{\mathbf{q}_0, t}(\mathbf{u}(\cdot) + \gamma\mathbf{v}(\cdot)) = \left. \frac{d}{d\gamma} \right|_{\gamma=0} \frac{d}{dt} \mathbf{k}_{\mathbf{q}_0, t}(\mathbf{u}(\cdot) + \gamma\mathbf{v}(\cdot)) = \\ &= \left. \frac{d}{d\gamma} \right|_{\gamma=0} \frac{d}{dt} \boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{q}_0, \mathbf{u}(\cdot) + \gamma\mathbf{v}(\cdot)) = \\ &= \left. \frac{d}{d\gamma} \right|_{\gamma=0} \mathbf{G}(\boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{q}_0, \mathbf{u}(\cdot) + \gamma\mathbf{v}(\cdot)))(\mathbf{u}(\cdot) + \gamma\mathbf{v}(\cdot))(t) = \\ &= \frac{\partial(\mathbf{G}(\mathbf{q}(t))\mathbf{u}(t))}{\partial \mathbf{q}} D \mathbf{k}_{\mathbf{q}_0, t}(\mathbf{u}(\cdot))\mathbf{v}(\cdot) + \mathbf{G}(\mathbf{q}(t))\mathbf{v}(t). \end{aligned}$$

Jak widać, różniczka $D \mathbf{k}_{\mathbf{q}_0, t}(\mathbf{u}(\cdot))\mathbf{v}(\cdot)$ kinematyki $\mathbf{k}_{\mathbf{q}_0, t}$ jest rozwiązaniem w chwili t tzw. równania wariacyjnego stowarzyszonego z układem (2.145). Równanie to przedstawia przybliżenie liniowe układu (2.145) wzdłuż pary (*sterowanie, trajektoria*) = $(\mathbf{u}(t), \mathbf{q}(t))$ przy założeniu, że sterowanie uległo małej zmianie (wariacji) w kierunku $\mathbf{v}(\cdot)$. Przy oznaczeniach

$$\mathbf{A}(t) = \frac{\partial(\mathbf{G}(\mathbf{q}(t))\mathbf{u}(t))}{\partial \mathbf{q}}, \quad \mathbf{B}(t) = \mathbf{G}(\mathbf{q}(t)), \quad (2.149)$$

możemy je zapisać w następujący sposób

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{G}(\mathbf{q}(t))\mathbf{u}(t) \\ \frac{d}{dt} D \mathbf{k}_{\mathbf{q}_0, t}(\mathbf{u}(\cdot))\mathbf{v}(\cdot) = \mathbf{A}(t) D \mathbf{k}_{\mathbf{q}_0, t}(\mathbf{u}(\cdot))\mathbf{v}(\cdot) + \mathbf{B}(t)\mathbf{v}(t), \end{cases} \quad (2.150)$$

z warunkiem początkowym $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0$ oraz $D \mathbf{k}_{\mathbf{q}_0, t}(\mathbf{u}(\cdot))\mathbf{v}(\cdot)|_{t=0} = \mathbf{0}$. Korzystając z układu równań (2.150) wyliczamy różniczkę $D \mathbf{k}_{\mathbf{q}_0, T}(\mathbf{u}(\cdot))\mathbf{v}(\cdot)$ kinematyki w chwili T

$$D \mathbf{k}_{\mathbf{q}_0, T}(\mathbf{u}(\cdot))\mathbf{v}(\cdot) = \int_0^T \boldsymbol{\Phi}(T, s) \mathbf{B}(s) \mathbf{v}(s) ds, \quad (2.151)$$

którą będziemy nazywać *jacobianem analitycznym* robota mobilnego. Macierz fundamentalna $\Phi(t, s)$ występująca w formule (2.151) spełnia równanie

$$\frac{d}{dt}\Phi(t, s) = \mathbf{A}(t)\Phi(t, s)$$

przy warunku $\Phi(s, s) = \mathbb{I}_n$. Mówimy, że różniczka $D\mathbf{k}_{\mathbf{q}_0, T}(\mathbf{u}(\cdot))$ ma pełny rząd w punkcie $\mathbf{u}(\cdot)$, jeżeli $D\mathbf{k}_{\mathbf{q}_0, T}(\mathbf{u}(\cdot))$ jest suriekcją liniową^{††}. Własność „ $D\mathbf{k}_{\mathbf{q}_0, T}(\mathbf{u}(\cdot))$ ma pełny rząd” oznacza, że jeżeli za pośrednictwem sterowania $\mathbf{u}(\cdot)$ osiągamy stan $\mathbf{q}$, to każdy stan $\mathbf{q}'$ z pewnego otoczenia $\mathbf{q}$ możemy osiągnąć biorąc pewne sterowanie $\mathbf{u}'(\cdot)$ bliskie $\mathbf{u}(\cdot)$. Sterowania $\mathbf{u}(\cdot)$, dla których rząd $D\mathbf{k}_{\mathbf{q}_0, T}(\mathbf{u}(\cdot))$ nie jest pełny, będziemy nazywać *sterowaniami osobliwymi*.

Sterowania osobliwe robota mobilnego będziemy nazywać *osobliwościami* kinematyki robota mobilnego. Analizę osobliwości kinematyki zaczniemy od bardzo prostego przykładu. Niech $\mathbf{u}(\cdot) \equiv \mathbf{0}$. Trajektoria układu (2.145) odpowiadająca temu sterowaniu jest, oczywiście, trajektorią stałą, $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0$. Z definicji (2.150) wynika, że macierz $\mathbf{A}(t) \equiv \mathbf{0}$, natomiast macierz $\mathbf{B}(t) = \mathbf{G}(\mathbf{q}_0)$ jest stała. Oznacza to, że macierz fundamentalna $\Phi(t, s) = \mathbb{I}_n$, zaś jacobian analityczny

$$D\mathbf{k}_{\mathbf{q}_0, T}(\mathbf{0})\mathbf{v}(\cdot) = \mathbf{G}(\mathbf{q}_0) \int_0^T \mathbf{v}(s) ds = \mathbf{G}(\mathbf{q}_0)\mathbf{w}$$

dla pewnego $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$. Łatwo zauważyć, że jeżeli $m < n$, to

$$\dim D\mathbf{k}_{\mathbf{q}_0, T}(\mathbf{0}) (\mathbb{L}_m^2[0, T]) \leq m < n,$$

a zatem sterowanie zerowe jest osobliwe w sposób trywialny.

W ogólnym przypadku warunki konieczne, jakie musi spełniać sterowanie osobliwe, otrzymujemy z warunków osobliwości sterowania w pewnym zadaniu sterowania optymalnego. Niech będzie dane zadanie sterowania optymalnego układu (2.145) z lagranżianem $L(\mathbf{q}, \mathbf{u})$. Zgodnie z wymaganiami Zasady Maksimum Pontriagina utwórzmy hamiltonian

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, p_0, \mathbf{u}) = \mathbf{p}^T \mathbf{G}(\mathbf{q})\mathbf{u} - p_0 L(\mathbf{q}, \mathbf{u}), \quad (2.152)$$

w którym współczynnik p_0 może być równy zero. Sterowanie optymalne $\mathbf{u}(t)$ nazywamy osobliwym, jeżeli p_0 oraz odpowiadająca mu ekstremala

^{††}Tzn. wymiar obrazu $\dim D\mathbf{k}_{\mathbf{q}_0, T}(\mathbf{u}(\cdot))(\mathbb{L}_m^2[0, T]) = n$.

jest *osobliwa*[†]. W tym celu, dla $i = 1, 2, \dots, m$, muszą być spełnione warunki

$$\mathbf{p}^T \mathbf{g}_i(\mathbf{q}) = 0. \quad (2.153)$$

Przypominamy, że zmienna dołączona nie znika, tzn. $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$. Aby uzyskać warunki konieczne, jakie musi spełniać ekstremala osobliwa (a więc, a fortiori, także sterowanie osobliwe), zróżniczkujemy warunek (2.153) względem czasu

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p}^T \mathbf{g}_i(\mathbf{q}) = \mathbf{p}^T \sum_{j=1}^m [\mathbf{g}_j, \mathbf{g}_i](\mathbf{q}) \mathbf{u}_j = \mathbf{p}^T [\mathbf{X}_{\mathbf{u}}, \mathbf{g}_i](\mathbf{q}) = 0, \quad (2.154)$$

gdzie symbolem $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ oznaczyliśmy nawias Liego pól wektorowych, natomiast pole wektorowe $\mathbf{X}_{\mathbf{u}}(\mathbf{q}) = \mathbf{G}(\mathbf{q})\mathbf{u}$. Biorąc równania (2.154) dla $i = 1, 2, \dots, m$, otrzymujemy zależność

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}, \mathbf{p})\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (2.155)$$

w której macierz $\mathbf{M}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ o elementach $m_{ij}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{p}^T [\mathbf{g}_j, \mathbf{g}_i](\mathbf{q})$ jest skośnie symetryczna. Jeżeli ta macierz jest nieosobliwa, jedynym sterowaniem osobliwym jest sterowanie zerowe $\mathbf{u}(\cdot) \equiv \mathbf{0}$. W przeciwnym wypadku, poprzez wytrwałe różniczkowanie zależności (2.154) wyprowadzamy kolejny warunek konieczny

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}, \mathbf{p})\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{N}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{u}),$$

w którym i -ta składowa wektora $\mathbf{N}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{u})$ wyraża się wzorem

$$N_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{u}) = \sum_{j,k} \mathbf{p}^T [\mathbf{g}_k, [\mathbf{g}_j, \mathbf{g}_i]](\mathbf{q}) u_j u_k.$$

Kontynuując różniczkowanie, można wyprowadzić warunki konieczne wyższych rzędów na sterowanie osobliwe. Do tematu sterowań osobliwych wrócimy jeszcze raz w podrozdziale 4.1.

Na zakończenie wywodów formalnych przedstawimy prosty przykład wyznaczenia sterowań osobliwych przy pomocy wyprowadzonych powyżej warunków koniecznych.

[†]Zobacz dodatek A.5.

Przykład 2.4.1 (Sterowanie osobiwe)

Niech będzie dany układ sterowania

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{G}(\mathbf{q})\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -q_2 u_1 \\ u_2 \\ u_1 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q_2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_3, \quad (2.156)$$

gdzie $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^4$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. Z warunku (2.153) wynika, że

$$p_3 - p_1 q_2 = 0 \quad \text{oraz} \quad p_2 = p_4 = 0. \quad (2.157)$$

Nietrudno wyliczyć macierz

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 0 & -p_1 & 0 \\ p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = p_1 [\mathbf{e}_3],$$

co pozwala napisać równania (2.155)

$$p_1 u_2 = 0 \quad \text{i} \quad p_1 u_1 = 0. \quad (2.158)$$

Zauważmy, że ze względu na nieznikanie zmiennej dołączonej, z zależności (2.157) wynika $p_1 \neq 0$, co w połączeniu z (2.158) daje $u_1 = u_2 = 0$. W konsekwencji, warunki konieczne są spełnione przez sterowanie osobiwe $\mathbf{u}(t) = (0, 0, u_3(t))^T$ przy dowolnym $u_3(t)$. ■

2.5 Komentarze i uwagi bibliograficzne

Podstawowe pojęcia kinematyki punktu materialnego i ciała sztywnego można znaleźć we wstępnych rozdziałach podręczników do mechaniki analitycznej [Gut71, Wit77, RK95] lub robotyki [Pau81, AS86, Cra93, Lat93, MLS94, Duf96, SS96, SV97]. Konsekwentne, geometryczne ujęcie kinematyki ciała sztywnego w języku teorii grup i algebr Liego zawiera monografia [MLS94]. Podstawowe pojęcia geometryczne stosowane w robotyce zostały wyłożone w sposób wyczerpujący w pracy [Sel96]. Parametryzacje i układy współrzędnych w specjalnej grupie obrotów oraz w specjalnej grupie euklidesowej należą do klasycznego materiału podręcznikowego [GR84, Cra93, Lat93, MLS94, SV97, Ang97]. Oceny różnych parametryzacji z punktu widzenia dokładności śledzenia trajektorii dokonano

ostatnio w pracy [C⁺98]. Formułę definiującą współrzędne wykładnicze w $SE(3)$ zaczerpnęliśmy z pracy [TD94]. Termin „więzy nieholonomiczne” został wprowadzony przez Hertza, [AKN88]. Postać ograniczeń fazowych zwana postacią Pfaffa wywodzi się z teorii równań różniczkowych cząstkowych [Zhi92]. Dynamiki układów nieholonomicznych dotyczą prace [NF71] oraz [VG94]. Pojęcia różniczkowej, dystrybucji oraz nawiasu Liego należą do geometrii różniczkowej [Gan87, Spi79]. Narzędzia geometrii różniczkowej w zakresie używanym do opisu i analizy kinematyki układów nieholonomicznych zostały rozwinięte w obrębie geometrycznej teorii sterowania [Isi89, NS90]. Warunek wystarczający nieholonomiczności więzów przedstawiony w twierdzeniu 2.2.1 oznacza, że ruch układu nie może być ograniczony do żadnej właściwej podrozmaitości uniwersum konfiguracyjnego i jest równoważny warunkowi sterowalności układu (2.33), znanemu jako twierdzenie Chow [Cho39, Isi89, NS90]. Warunek holonomiczności ograniczeń fazowych wynika z twierdzenia Frobeniusa [Spi79] i orzeka, że ruch układu jest ograniczony do pewnej podrozmaitości uniwersum konfiguracyjnego. W przypadku częściowej holonomiczności kowymiar tej podrozmaitości może być mniejszy niż liczba ograniczeń fazowych. Więzy nazywane przez nas nieholonomicznymi bywają w literaturze określane mianem całkowicie nieholonomicznych [MLS94]. Punkty, w których otoczeniu stopień nieholonomiczności dystrybucji ulega zmianie, nazywają się osobliwościami dystrybucji. Klasyfikację osobliwości dystrybucji robota mobilnego złożonego z ciągnika i przyczep podaje praca [Jea96]. Ze względu na to, że kinematyka manipulatora jest odwzorowaniem różniczkowym, staramy się stosować terminy „różniczkowa przegubowa” i „różniczkowa zadaniowa”, w odróżnieniu od przestrzeni przegubowej i przestrzeni zadaniowej, które pojawiają się po zdefiniowaniu na tych różniczkowościach układów współrzędnych lub parametryzacji. Reprezentacja Denavita-Hartenberga należy do znanych, standardowych narzędzi analizy kinematyki manipulatorów [DH55, Pau81, SV97, Ang97, CD98]. Reprezentacja używana przez nas nosi nazwę standardowej; alternatywą jest tzw. reprezentacja zmodyfikowana. Idea reprezentacji wykładniczej kinematyki manipulatora pochodzi od Brocketta [Bro84]; została ona następnie rozwinięta w książce [MLS94]. Przykładem reprezentacji algebraicznej kinematyki manipulatora jest reprezentacja kwaternionowa (lub bikwaternionowa) wykorzystująca własność nakrycia grupy $SO(3)$ przez kwaterniony jednostkowe [Sel96, Sic98]. Pojęcie skrętnika należy do teorii śrub, której podstawy można znaleźć w pracach [WN92, MLS94]. Termin „jakobian geometryczny” pochodzi od Si-

ciliano [SS96] i oznacza transformację prędkości manipulatora, której wyliczenie nie wymaga wykorzystania układów współrzędnych przegubowych ani zadaniowych. Przez odwołanie się do formuły prędkości efektora w układzie przestrzeni i w układzie ciała zdefiniowaliśmy jacobian geometryczny w przestrzeni i jacobian geometryczny w ciele. Obiekt geometryczny zwany w literaturze jacobianem manipulatora, [Pau81, SV97], nie jest żadnym z wymienionych jacobianów geometrycznych. Związki między jacobianami analitycznymi a geometrycznymi są konsekwencją formuły transformacji prędkości (2.119). Formuła ta może również posłużyć do analizy osobliwości reprezentacji manipulatora. O osobliwościach reprezentacji traktuje praca [Dul96]. Zastosowanie reprezentacji wykładniczej kinematyki do obliczania jacobianu geometrycznego wydaje się przekonujące. Do najciekawszych aspektów analizy kinematyki manipulatorów należy zadanie wyznaczenia konfiguracji osobliwych [Cra93, MLS94, SV97]. Badania konfiguracji osobliwych manipulatorów zainicjował Whitney [Whi72]. Problematyka osobliwości kinematycznych jest uprawiana przez autorów tej książki od wielu lat [Tch90, Tch91, TU92, TD93, Tch95, Mus96, MT96, TM97, TM98, Tch98]. Opis kinematyki robota mobilnego jako odwzorowania osiągalności stanów pewnego układu sterowania pochodzi z prac Wena i współpracowników [DW94, PW96, DW97a, DW97b, DSW98], i pozwala uzyskać reprezentację kinematyki robota mobilnego formalnie analogiczną do reprezentacji kinematyki manipulatora. Wymieniona analogia rozciąga się na pojęcia jacobianu analitycznego oraz osobliwości kinematyki. Przy wyprowadzeniu formuły jacobianu analitycznego (2.151) można skorzystać z wyników przedstawionych w książce Sontaga [Son90]. Zadanie sterowania optymalnego (2.152) było rozważane w pracy [Mon92] i monografii [MLS94]; tam też wyprowadzono warunek (2.155). Więcej informacji na temat sterowań osobliwych w kontekście Zasady Maksimum Pontriagina można znaleźć w książce [VG97]. Przykładowy układ sterowania (2.156) został zdefiniowany za pośrednictwem tzw. struktury quasi-kontaktowej w $\mathbb{R}^4$.

Literatura

- [AKN88] V. I. Arnold, V. V. Kozlov i A. I. Neishtadt, *Mathematical aspects of classical and celestial mechanics*. W: V. I. Arnold, (red.), *Dynamical Systems III*. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [Ang97] J. Angeles, *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems. Theory, Methods, and Algorithms*. Springer-Verlag, New York, 1997.

- [AS86] H. Asada i J. J. E. Slotine, *Robot Analysis and Control*. J. Wiley and Sons, New York, 1986.
- [Bro84] R. W. Brockett, Robotic manipulators and the product of exponentials formula. W: *Mathematical Theory of Networks and Systems*, strony 120–129. Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [C⁺98] F. Caccavale et al., Resolved-acceleration control of robot manipulators: A critical review with experiments. *Robotica*, **16**:565–573, 1998.
- [CD98] C. D. Crane III i J. Duffy, *Kinematic Analysis of Robot Manipulators*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [Cho39] W. L. Chow, Über Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. *Math. Ann.*, **117**(1):98–105, 1939.
- [Cra93] J. J. Craig, *Wprowadzenie do robotyki*. WNT, Warszawa, 1993.
- [DH55] J. Denavit i R. S. Hartenberg, A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices. *ASME Trans. J. Applied Mechanics*, **77**(2):215–221, 1955.
- [DSW98] A. W. Divilbiss, S. Seereeram i J. T. Wen, Kinematic path planning for robots with holonomic and nonholonomic constraints. W: J. Bailleul, S. S. Sastry i H. J. Sussmann, (red.), *Essays on Mathematical Robotics*, strony 127–150. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [Duf96] J. Duffy, *Statics and Kinematics with Application to Robotics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [Dul96] I. Dulęba, O unkianiu osobliwości reprezentacji. W: *Symp. Symul. Proc. Dynam.*, strony 345–350, Polana Chochołowska, 1996.
- [DW94] A. W. Divilbiss i J. T. Wen, Nonholonomic path planning with inequality constraints. W: *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics Automat.*, vol. **1**, strony 52–57, San Diego, 1994.
- [DW97a] A. W. Divilbiss i J. T. Wen, A path space approach to nonholonomic motion planning in the presence of obstacles. *IEEE Trans. Robotics Automat.*, **13**(3):443–451, 1997.
- [DW97b] A. W. Divilbiss i J. T. Wen, Trajectory tracking control for a car-trailer system. *IEEE Trans. Control Syst. Technology*, **5**(3):269–278, 1997.
- [Gan87] J. Gancarzewicz, *Geometria różniczkowa*. PWN, Warszawa, 1987.
- [GR84] B. Gorla i M. Renaud, *Modèles des robots manipulateurs*. Capadues Publishers, Toulouse, 1984.
- [Gut71] R. Gutowski, *Mechanika analityczna*. PWN, Warszawa, 1971.

- [Isi89] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [Jea96] F. Jean, The car with n-trailers: Characterisation of the singular configurations. *Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 1:241–266, 1996.
- [Lat93] J. C. Latombe, *Robot Motion Planning*. Kluwer, Boston, 1993.
- [MLS94] R. M. Murray, Z. Li i S. S. Sastry, *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. CRC Press, Boca Raton, 1994.
- [Mon92] R. Montgomery, Abnormal optimal controls and open problems in non-holonomic steering. W: *Proc. NOLCOS Symposium*, vol. 1, strony 373–378, Bordeaux, 1992.
- [MT96] R. Muszyński i K. Tchoń, Normal forms of non-redundant singular robot kinematics: Three DOF worked examples. *J. Robotic Systems*, 13(12):765–791, 1996.
- [Mus96] R. Muszyński, *Modele i algorytmy sterowania manipulatorów z osobliwościami kinematycznymi*. Rozprawa doktorska, Instytut Cybernetyki Technicznej, Politechnika Wrocławska, 1996.
- [NF71] J. Nejmark i N. Fufajew, *Dynamika układów nieholonomicznych*. PWN, Warszawa, 1971.
- [NS90] H. Nijmeijer i A. J. van der Schaft, *Nonlinear Dynamic Control Systems*. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [Pau81] R. P. Paul, *Robot Manipulators: Mathematics, Programming and Control*. MIT Press, Cambridge, 1981.
- [PW96] D. O. Popa i J. T. Wen, Nonholonomic path-planning with obstacle avoidance: A path-space approach. W: *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics Automat.*, vol. 4, strony 2662–2667, Minneapolis, 1996.
- [RK95] W. Rubinowicz i W. Królikowski, *Mechanika teoretyczna*. PWN, Warszawa, 1995.
- [Sel96] J. M. Selig, *Geometrical Methods in Robotics*. Springer-Verlag, New York, 1996.
- [Sic98] B. Siciliano, On the use of quaternions for robot interaction control tasks. W: *Proc. MMAR Symposium*, vol. 3, strony 739–746, Międzyzdroje, 1998.
- [Son90] E. D. Sontag, *Mathematical Control Theory*. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [Spi79] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. Publish or Perish, Berkeley, 1979.

- [SS96] L. Sciavicco i B. Siciliano, *Modeling and Control of Robot Manipulators*. The McGraw-Hill, New York, 1996.
- [SV97] M. Spong i M. Vidyasagar, *Dynamika i sterowanie robotów*. WNT, Warszawa, 1997.
- [Tch90] K. Tchoń, Towards a differential topological classification of robot manipulators. W: *Robust Control of Linear Systems and Nonlinear Control*, strony 565–574. Birkhäuser, Boston, 1990.
- [Tch91] K. Tchoń, Differential topology of the inverse kinematic problem for redundant robot manipulators. *Int. J. Robotics Research*, **10**(5):492–504, 1991.
- [Tch95] K. Tchoń, A normal form of singular kinematics of robot manipulators with smallest degeneracy. *IEEE Trans. Robotics Automat.*, **11**(3):401–404, 1995.
- [Tch98] K. Tchoń, Quadratic normal forms of redundant robot kinematics with application to singularity avoidance. *IEEE Trans. Robotics Automat.*, **14**(5):834–837, 1998.
- [TD93] K. Tchoń i I. Dulęba, On inverting singular kinematics and geodesic trajectory generation for robot manipulators. *J. Intelligent Robotic Systems*, **8**:325–359, 1993.
- [TD94] K. Tchoń i I. Dulęba, Definition of a kinematic metric for robot manipulators. *J. Robotic Systems*, **11**(3):211–222, 1994.
- [TM97] K. Tchoń i R. Muszyński, Singularities of non-redundant robot kinematics. *Int. J. Robotics Research*, **16**(1):60–76, 1997.
- [TM98] K. Tchoń i R. Muszyński, Singular inverse kinematic problem for robotic manipulators: A normal form approach. *IEEE Trans. Robotics Automat.*, **14**(1):93–104, 1998.
- [TU92] K. Tchoń i P. Urban, Classification of kinematic singularities in planar robot manipulators. *Systems & Contr. Lett.*, **19**(3):293–302, 1992.
- [VG94] A. M. Vershik i V. Ya. Gershkovich, Nonholonomic dynamical systems, geometry of distribution and variational problems. W: V. I. Arnold, (red.), *Dynamical Systems VII*, strony 1–81. Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [VG97] T. L. Vincent i W. J. Grantham, *Nonlinear and Optimal Control Systems*. J. Wiley and Sons, New York, 1997.
- [Whi72] D. E. Whitney, The mathematics of coordinated control of prosthetic arms and manipulators. *J. Dyn. Syst. Meas. Contr.*, **94** G(4):303–309, 1972.

- [Wit77] J. Wittenburg, *Dynamics of Systems of Rigid Bodies*. Teuber, Stuttgart, 1977.
- [WN92] J. Wojnarowski i A. Nowak, *Mechanika manipulatorów-robotów w opisie motorów*. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice, 1992.
- [Zhi92] M. Zhitomirski, *Typical Singularities of Differential 1-Forms and Pfaffian Equations*. AMS, Providence, 1992.

Rozdział 3

Algorytmy kinematyki odwrotnej manipulatora

Niech będzie dany manipulator o n stopniach swobody, z rozmaitością przegubową $\mathcal{Q}$ i rozmaitością zadaniową $\mathcal{Z} \subset \text{SE}(3)$. Zadanie polegające na wyznaczeniu kinematyki

$$\mathbf{K} : \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{Z} \subset \text{SE}(3).$$

manipulatora, w postaci reprezentacji Denavita-Hartenberga lub reprezentacji wykładniczej, nazywa się *prostym (bezpośrednim) zadaniem kinematyki*. W wyniku jego rozwiązania otrzymujemy zależność położenia i orientacji efektora manipulatora od konfiguracji jego przegubów. Prostemu zadaniu kinematyki poświęciliśmy wiele miejsca w poprzednim rozdziale. Z punktu widzenia sterowania manipulatora ważniejsze jest jednak inne zadanie, polegające na wyznaczeniu ruchu przegubów manipulatora zapewniającego wykonanie określonego ruchu efektora na rozmaitości zadaniowej. To ostatnie zadanie nazywa się *odwrotnym zadaniem kinematyki* i formułuje w następujący sposób:

Mając daną trajektorię ruchu $\mathbf{z}_d : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{Z}$ na rozmaitości zadaniowej, określoną na pewnym przedziale czasu $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$, wyznaczyć odpowiadającą jej trajektorię ruchu przegubów $\mathbf{q}_d : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{Q}$, taką że dla $t \in \mathcal{I}$

$$\mathbf{K}(\mathbf{q}_d(t)) = \mathbf{z}_d(t). \quad (3.1)$$

Sformułowane przez nas odwrotne zadanie kinematyki nazywa się *zadaniem ciągłym*. W szczególnym przypadku, zadanie manipulatora może polegać

na osiągnięciu jednego, określonego położenia i orientacji efektora $\mathbf{z}_d \in \mathcal{Z}$. Takie zadanie odwrotne nazywamy *punktowym*. Rozwiązaniem zadania punktowego jest położenie przegubów $\mathbf{q}_d$, takie że $\mathbf{K}(\mathbf{q}_d) = \mathbf{z}_d$.

Zadanie odwrotne może być w naturalny sposób sformułowane we współrzędnych zadaniowych i przegubowych. Przy sformułowaniu we współrzędnych, mając daną trajektorię $\mathbf{y}_d(t)$ w przestrzeni zadaniowej i kinematykę $\mathbf{k}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, należy wyznaczyć trajektorię $\mathbf{x}_d(t)$ w przestrzeni przegubowej, taką że dla $t \in \mathcal{I}$

$$\mathbf{y}_d(t) = \mathbf{k}(\mathbf{x}_d(t)). \quad (3.2)$$

Z matematycznego punktu widzenia, odwrotne zadanie kinematyki polega na rozwiązaniu układu równań nieliniowych (3.2) ze względu na wektor współrzędnych przegubowych $\mathbf{x}_d(t)$ w każdej chwili $t \in \mathcal{I}$. Oczwistym warunkiem koniecznym istnienia rozwiązania jest żądanie, by trajektoria przeznaczona do realizacji w przestrzeni zadaniowej była zawarta w zbiorze wartości odwzorowania $\mathbf{k}$. Zbiór ten będziemy nazywać *przestrzenią roboczą* manipulatora, $\mathcal{W} = \mathbf{k}(\mathbb{R}^n)^*$. Jeżeli występują ograniczenia ruchu przegubów, przestrzeń robocza jest obrazem dopuszczalnych położań przegubów. Zauważmy, że w przypadku gdy wymiar m przestrzeni zadaniowej jest większy od liczby stopni swobody manipulatora, przestrzeń robocza będzie stanowić „mały” podzbiór przestrzeni zadaniowej, a zatem tylko bardzo szczególne trajektorie zadaniowe znajdują się w przestrzeni roboczej manipulatora i uzyskują atrybut realizowalności. Założmy, że zadana trajektoria $\mathbf{y}_d(t) \in \mathcal{W}$ jest gładką funkcją czasu. Wówczas odwrotne zadanie kinematyki posiada rozwiązanie dla każdej chwili $t \in \mathcal{I}$, ale rozwiązanie to ani nie musi być jednoznaczne, ani nie musi zależeć w sposób gładki od czasu. Jeżeli manipulator jest nieredundantny, liczba rozwiązań zadania odwrotnego może być skończona lub nieskończona, zależnie od typu konfiguracji osobliwych manipulatora. Dla manipulatora redundantnego zbiór rozwiązań zadania odwrotnego jest z reguły mocy continuum.

Zgodnie z klasyfikacją przeprowadzoną w podrozdziale 2.3.5, wszystkie konfiguracje, jakie może przyjąć manipulator w trakcie ruchu, dzielą się na regularne i osobliwe. Analogiczny podział można wprowadzić w obrębie odwrotnych zadań kinematyki. Powiemy, że odwrotne zadanie kinematyki

*Nasza definicja przestrzeni roboczej jest szersza od definicji podręcznikowej, w myśl której przestrzeń robocza składa się wyłącznie z osiągalnych położań (nie orientacji) efektorów.

jest regularne, jeśli realizacja trajektorii ruchu efektora nie wymaga wprowadzenia manipulatora w konfiguracje osobliwe. W przeciwnym wypadku odwrotne zadanie kinematyki będziemy nazywali osobliwym.

3.1 Regularne odwrotne zadanie kinematyki

Przedstawimy teraz metody rozwiązania regularnego odwrotnego zadania kinematyki. Możliwe strategie rozwiązania tego zadania są dwojakie: symboliczne (dające rozwiązanie w postaci jawnej) i numeryczne. Rozwiązanie zadania w postaci jawnej uzyskujemy dzięki analizie struktury manipulatora i opisujących go równań kinematyki, prowadzącej do wyrażenia kinematyki odwrotnej manipulatora w postaci symbolicznej

$$\mathbf{q} \in \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{z}) \quad (3.3)$$

dla kinematyki opisanej przez (2.40), lub jako

$$\mathbf{x} \in \mathbf{k}^{-1}(\mathbf{y}) \quad (3.4)$$

dla kinematyki postaci (2.65)[†]. Wyznaczenie jednego z powyższych wyrażeń wzdłuż zadanej trajektorii ruchu w przestrzeni zadaniowej pozwala na znalezienie odpowiadającej jej trajektorii ruchu przegubów. Rozwiązanie odwrotnego zadania kinematyki w postaci numerycznej wymaga wprowadzenia układów współrzędnych zadaniowych i przegubowych, i polega na przedstawieniu zależności między prędkościami ruchu w przestrzeni zadaniowej i przegubowej manipulatora w postaci układu równań różniczkowych. Przykładowo, dla manipulatora nieredundantnego będzie to układ równań

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{J}^a)^{-1}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{y}}, \quad (3.5)$$

gdzie $\mathbf{J}^a(\mathbf{x})$ oznacza jacobian analityczny manipulatora. Wynikową trajektorię przegubową wyliczamy przez scałkowanie układu (3.5) dla konkretnej trajektorii zadanej zawartej w przestrzeni roboczej. W podobny sposób można uzyskać rozwiązanie odwrotnego zadania kinematyki z wykorzystaniem innych niż analityczny jacobianów manipulatora.

Rozwiązania w postaci symbolicznej, aczkolwiek zazwyczaj trudne do znalezienia, mają tę przewagę nad rozwiązaniami numerycznymi, że nie wymagają wielokrotnego powtarzania obliczeń. Do ich znalezienia wystarcza

[†]Zapisy (3.3), (3.4) oznaczają, że otrzymany układ równań kinematyki odwrotnej może mieć wiele rozwiązań i należy dokonać wyboru jednego z nich.

bowiem jednorazowe określenie odpowiednich wyrażeń symbolicznych wyliczanych następnie wzdłuż różnych trajektorii zadanych. W przeciwieństwie do tego, rozwiązanie w postaci numerycznej wymaga całkowania układu równań różniczkowych (3.5) dla każdej z zadanych trajektorii, przy użyciu numerycznych metod iteracyjnych.

W dalszym ciągu, w dwóch kolejnych podrozdziałach, przedstawimy metody rozwiązywania regularnego odwrotnego zadania kinematyki manipulatora, zaliczane do klasy metod symbolicznych. Trzeci podrozdział poświęcimy opisowi kilku metod jakobianowych pozwalających na numeryczne rozwiązanie zadania odwrotnego.

3.1.1 Bezpośrednie podejście algebraiczne

Rozwiązanie odwrotnego zadania kinematyki przy zastosowaniu bezpośredniego podejścia algebraicznego polega na formalnym przekształceniu równań kinematyki manipulatora do postaci zależności opisujących odwzorowanie odwrotne do kinematyki. Ze względu na nieliniowość równań oraz zazwyczaj nieuniknioną niejednoznaczność rozwiązań, realizacja takiego podejścia często napotyka na trudności. Zastosowanie bezpośredniego podejścia algebraicznego zilustrujemy na przykładach.

Przykład 3.1.1 (Manipulator typu podwójne wahadło)

Rozważmy kinematykę (2.68) manipulatora typu podwójne wahadło. Podniesienie do kwadratu składowych wektora $\mathbf{y}$ i ich dodanie prowadzi do równania

$$y_1^2 + y_2^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2c_2,$$

z którego otrzymujemy

$$c_2 = \frac{y_1^2 + y_2^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2}. \quad (3.6)$$

Widzimy, że rozwiązanie zadania istnieje tylko wtedy, gdy prawa strona równości (3.6) przyjmuje wartości w przedziale $[-1, 1]$; w przeciwnym przypadku punkt docelowy leżałby poza przestrzenią roboczą manipulatora. Gdy punkt ten znajduje się wewnątrz przestrzeni roboczej, możemy skorzystać z tożsamości

$$s_2 = \pm \sqrt{1 - c_2^2} \quad (3.7)$$

i wyliczyć kąt α_2^*

$$\alpha_2 = \text{atan2}(s_2, c_2). \quad (3.8)$$

W zależności od wyboru znaku we wzorze (3.7) otrzymujemy dwa rozwiązania. Przedstawiony schemat postępowania (znalezienie sinusa i cosinusa kąta, a następnie wyliczenie kąta przy użyciu funkcji atan2) jest często wykorzystywany przy wyznaczaniu symbolicznej postaci odwzorowania opisującego kinematykę odwrotną.

Zajmiemy się teraz wyliczeniem składowej α_1 wektora α . Wykorzystując wzory na sinus i cosinus sumy kątów i oznaczając $\bar{l}_1 = l_1 + l_2 c_2$, $\bar{l}_2 = l_2 s_2$, przekształcamy równania kinematyki (2.68) do postaci

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \bar{l}_1 c_1 - \bar{l}_2 s_1 \\ \bar{l}_1 s_1 + \bar{l}_2 c_1 \end{pmatrix},$$

przy oznaczeniach $r = \sqrt{\bar{l}_1^2 + \bar{l}_2^2}$ i $\gamma = \text{atan2}(\bar{l}_2, \bar{l}_1)$, $\bar{l}_1 = r \cos \gamma$, $\bar{l}_2 = r \sin \gamma$. Korzystając z tego otrzymujemy

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} r \cos \gamma c_1 - r \sin \gamma s_1 \\ r \cos \gamma s_1 + r \sin \gamma c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\gamma + \alpha_1) \\ r \sin(\gamma + \alpha_1) \end{pmatrix},$$

co w dalszym ciągu pozwala na wyliczenie kąta $\gamma + \alpha_1$ w postaci

$$\gamma + \alpha_1 = \text{atan2}\left(\frac{y_2}{r}, \frac{y_1}{r}\right) = \text{atan2}(y_2, y_1),$$

a stąd

$$\alpha_1 = \text{atan2}(y_2, y_1) - \text{atan2}(\bar{l}_2, \bar{l}_1). \quad (3.9)$$

Zauważmy, że wybór znaku w (3.7) wpływa za pośrednictwem $\bar{l}_1$ i $\bar{l}_2$ na wyliczoną wartość α_1 . Zestawiając razem wyrażenia (3.9) i (3.8) otrzymamy symboliczne równania kinematyki odwrotnej manipulatora typu podwójne wahadło w aspekcie współrzędnych $X_0 Y_0$, w postaci

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \text{atan2}(y_2, y_1) - \text{atan2}(l_2 s_2, l_1 + l_2 c_2) \\ \text{atan2}(s_2, c_2) \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

gdzie $c_2 = \frac{y_1^2 + y_2^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2}$, a $s_2 = \pm \sqrt{1 - c_2^2}$.

*Funkcja $\text{atan2}(x, y)$ wylicza $\arctg x/y$ z uwzględnieniem znaków przy x i y w celu wyznaczenia ćwiartki, w której leży wyliczany kąt: przy x, y dodatnich jest to pierwsza ćwiartka, przy x ujemnym, y dodatnim — druga ćwiartka, przy x, y ujemnych — trzecia, a przy x dodatnim, y ujemnym — czwarta.

Dla kinematyki manipulatora typu podwójne wahadło określonej w aspekcie współrzędnych $\times_0\varphi$ równaniami (2.69), znalezienie wyrażeń symbolicznych opisujących kinematykę odwrotną jest znacznie prostsze. Po podstawieniu drugiego równania kinematyki do równania pierwszego dostajemy

$$y_1 = l_1 c_1 + l_2 \cos y_2,$$

skąd obliczamy $c_1 = \frac{y_1 - l_2 \cos y_2}{l_1}$. Następnie, biorąc $s_1 = \pm \sqrt{1 - c_1^2}$ otrzymujemy

$$x_1 = \text{atan2}(s_1, c_1).$$

Wykorzystanie drugiej składowej kinematyki (2.69) pozwala zapisać równania kinematyki odwrotnej manipulatora w aspekcie współrzędnych $\times_0\varphi$ jako

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \text{atan2}(s_1, c_1) \\ y_2 - \text{atan2}(s_1, c_1) \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

z funkcjami s_1 i c_1 zdefiniowanymi jak wyżej. ■

Przykład 3.1.2 (Manipulator IRb-6 na torze jezdny)

Rozpatrzmy kinematykę manipulatora IRb-6 opisaną równaniami (2.76). Rozwiązanie trzech ostatnich równań ze względu na składowe wektora $\mathbf{x}$ jest natychmiastowe

$$\begin{cases} x_2 = -y_4 \\ x_5 = \pi - y_5 \\ x_6 = \pi - y_6. \end{cases} \quad (3.12)$$

Pozostałe trzy równania kinematyki (2.76) mogą zostać przedstawione w postaci

$$\begin{cases} a_2 c_3 + a_3 c_4 = \frac{y_1}{\cos y_4} - d_6 \sin y_5 \\ a_2 s_3 + a_3 s_4 = -d_6 \cos y_5 - d_1 - y_2 \\ x_1 = y_3 + \sin y_4 (a_2 c_3 + a_3 c_4 + d_6 \sin y_5). \end{cases} \quad (3.13)$$

Przy oznaczeniu wyrażeń niezależnych od zmiennych przegubowych jako $w_1 = \frac{y_1}{\cos y_4} - d_6 \sin y_5$ oraz $w_2 = -d_6 \cos y_5 - d_1 - y_2$, łatwo zauważyć, że pierwsze dwa równania układu (3.13) opisują kinematykę manipulatora typu

podwójne wahadło w aspekcie współrzędnych położenia, ze współrzędnymi przegubowymi ($x_3, x_4 - x_3$) i zadaniowymi (w_1, w_2)[†]. Dla takiej kinematyki równania kinematyki odwrotnej są dane przez[‡]

$$\begin{cases} x_3 = \text{atan2}(w_2, w_1) - \text{atan2}(a_3 s_{4-3}, a_2 + a_3 c_{4-3}) \\ x_4 = \text{atan2}(s_{4-3}, c_{4-3}) + x_3, \end{cases} \quad (3.14)$$

gdzie $c_{4-3} = \frac{w_1^2 + w_2^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2 a_3}$, $s_{4-3} = \pm \sqrt{1 - c_{4-3}^2}$. Równania (3.12), (3.13) i (3.14) dają łącznie następujące wyrażenie symboliczne dla kinematyki odwrotnej manipulatora IRb-6 zamontowanego na torze jezdny

$$\mathbf{x} = \mathbf{r}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} y_3 + y_1 \tan y_4 \\ -y_4 \\ \text{atan2}(w_2, w_1) - \text{atan2}(a_3 s_{4-3}, a_2 + a_3 c_{4-3}) \\ \text{atan2}(s_{4-3}, c_{4-3}) + x_3 \\ \pi - y_5 \\ \pi - y_6 \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

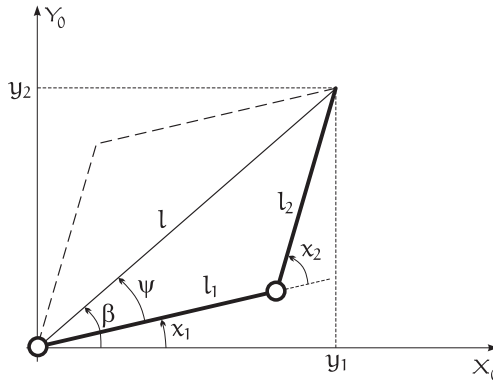
przy oznaczeniach c_{4-3} , s_{4-3} , w_1 i w_2 objaśnionych powyżej. Ze względu na ograniczenia zakresu ruchu w przegubach manipulatora, z dwóch możliwych rozwiązań (dostępnych ze względu na znak $\pm$ w wyrażeniu na s_{4-3}) należy wybrać rozwiązanie ze znakiem minus. Rozwiązanie (3.15) jest dobrze określone w całej przestrzeni roboczej manipulatora, poza położeniami dla których $\cos y_4 = 0$, co ma miejsce, gdy manipulator przyjmuje konfiguracje osobliwe. Sposób rozwiązania zadania odwrotnego w przypadku osobliwym objaśnimy w przykładzie 3.2.6. ■

3.1.2 Podejście geometryczne

Przykładem odmiennego od bezpośredniego podejścia algebraicznego sposobu podejścia do odwrotnego zadania kinematyki manipulatora jest podejście geometryczne. Cechę wyróżniającą podejście geometryczne stanowi dekompozycja przestrzennej geometrii manipulatora na szereg figur geometrii płaskiej. Dla zilustrowania podejścia geometrycznego posłużymy się dwoma przykładami.

[†]Porównaj z (2.68).

[‡]Zobacz przykład 3.1.1.



Rysunek 3.1 Płaskie zależności geometryczne w manipulatorze typu podwójne wahadło.

Przykład 3.1.3 (Manipulator typu podwójne wahadło)

Rozważmy najpierw manipulator typu podwójne wahadło z kinematyką opisaną wzorem (2.68). Na rysunku 3.1 pokazano trójkąt utworzony przez ramiona wahadła o długościach l_1 i l_2 oraz odcinek o długości l łączący początek układu podstawowego z efektem manipulatora. Linia przerywaną zaznaczono inną możliwą konfigurację manipulatora prowadzącą do tego samego położenia efektora. Korzystając z równości $l^2 = y_1^2 + y_2^2$ oraz $\cos(\pi - x_2) = -\cos x_2$, z twierdzenia cosinusów obliczamy

$$c_2 = \frac{y_1^2 + y_2^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2}. \quad (3.16)$$

Zauważmy, że rozwiązanie równania (3.16) istnieje tylko wtedy, gdy jego prawa strona ma wartość z przedziału $[-1, 1]$. Ponieważ $s_2 = \pm\sqrt{1 - c_2^2}$, obliczamy

$$x_2 = \text{atan2}(s_2, c_2). \quad (3.17)$$

Ze wzoru (3.17) otrzymujemy obie wartości kąta x_2 stanowiące rozwiązanie zadania.

W celu wyznaczenia kąta x_1 wykorzystamy kąty ψ i β , zaznaczone na rysunku 3.1. Przy danym położeniu efektor manipulatora (y_1, y_2) , wyliczamy natychmiast

$$\beta = \text{atan2}(y_2, y_1).$$

Kąt ψ znajdujemy stosując ponownie twierdzenie cosinusów, które po podstawieniu $l^2 = y_1^2 + y_2^2$ prowadzi do równania

$$\cos \psi = \frac{y_1^2 + y_2^2 + l_1^2 - l_2^2}{2l_1 \sqrt{y_1^2 + y_2^2}}.$$

Po wyznaczeniu kątów β i ψ , kąt x_1 obliczamy jako

$$x_1 = \beta \pm \psi, \quad (3.18)$$

gdzie znak plus dotyczy przypadku $x_2 \leq 0$ (dokładniej $0 \leq |x_2| \bmod 2\pi < \pi$), a znak minus odnosi się do przypadku $x_2 > 0$ ($\pi \leq |x_2| \bmod 2\pi < 2\pi$). Zależności (3.18) i (3.17) są rozwiązaniem odwrotnego zadania kinematyki dla manipulatora typu podwójne wahadło. ■

Przykład 3.1.4 (Manipulator typu SCARA)

Obecnie zastosujemy podejście geometryczne do rozwiązania odwrotnego zadania kinematyki dla manipulatora przemysłowego SCARA traktowanego jako manipulator redundantny z kinematyką opisaną wzorem (2.73).

Zauważmy, że po zrzutowaniu szkieletu manipulatora SCARA na płaszczyznę X_0Y_0 , jego geometria w pełni odpowiada podwójnemu wahadłu pokazanemu na rysunku 3.1. W związku z tym, dwie pierwsze zmienne przegubowe (x_1 i x_2) mogą zostać wyliczone w sposób analogiczny jak w poprzednim przykładzie.

Z kolei, analiza możliwości ruchowych manipulatora wzdłuż osi Z_0 prowadzi do wykrycia zależności

$$d_1 + x_3 = y_3,$$

z której można wyliczyć zmienną przegubową x_3 . Ponieważ zmienna przegubowa x_4 nie wpływa na położenie efektora manipulatora, a jedynie na jego orientację, jej wartość może być dowolna. ■

3.1.3 Metody jacobianowe

Metoda jacobianu odwrotnego

Załóżmy, że ciągle zadanie odwrotne kinematyki we współrzędnych posiada rozwiązanie $x_d(t)$. Wówczas, poprzez różniczkowanie względem czasu obu stron zależności (3.2), otrzymujemy układ równań różniczkowych

$$\dot{y}_d = \frac{\partial k}{\partial x}(x_d) \dot{x}_d = J^a(x_d) \dot{x}_d. \quad (3.19)$$

Przyjmijmy, że wymiar przestrzeni przegubowej jest równy wymiarowi przestrzeni zadaniowej ($= n$) i niech wzdłuż trajektorii $\mathbf{x}_d(t)$ jacobian analityczny $\mathbf{J}^a(\mathbf{x}_d)$ będzie nieosobliwy. Algorytm *metody jacobianu odwrotnego* rozwiązywania odwrotnego zadania kinematyki polega na scałkowaniu układu nieautonomicznych równań różniczkowych

$$\dot{\mathbf{x}}_d = (\mathbf{J}^a)^{-1}(\mathbf{x}_d)\dot{\mathbf{y}}_d, \quad (3.20)$$

którego rozwiązanie $\mathbf{x}_d(t)$ jest poszukiwaną trajektorią w przestrzeni przegubowej. Do wyznaczenia tej trajektorii potrzebna jest znajomość warunku początkowego $\mathbf{x}_0$, który wyliczamy rozwiązując punktowe zadanie odwrotne $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}_d(0) = \mathbf{k}(\mathbf{x}_0)$. Zadanie punktowe można rozwiązać korzystając z *algorytmu Newtona* pozwalającego wyznaczyć $\mathbf{x}_0$ jako granicę $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{\xi}(t)$ trajektorii układu

$$\dot{\mathbf{\xi}} = -\alpha(\mathbf{J}^a)^{-1}(\mathbf{\xi})(\mathbf{k}(\mathbf{\xi}) - \mathbf{y}_0) \quad (3.21)$$

zainicjowanego w dowolnym stanie początkowym $\mathbf{\xi}_0 \in \mathbb{R}^n$, z parametrem $\alpha > 0$ określającym szybkość zbieżności algorytmu. Z połączenia algorytmów (3.20) i (3.21) można otrzymać *asymptotyczny algorytm kinematyki odwrotnej*

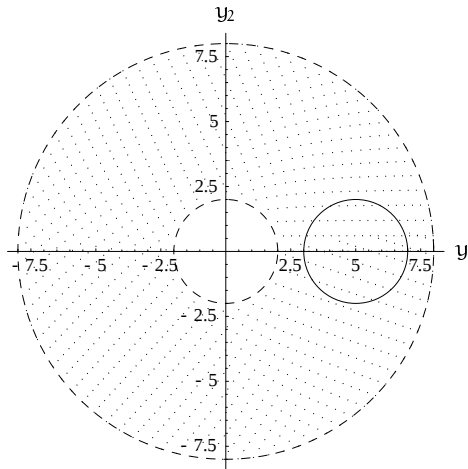
$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{J}^a)^{-1}(\mathbf{x})(\dot{\mathbf{y}}_d - \alpha(\mathbf{k}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_d)). \quad (3.22)$$

Przy dowolnym warunku początkowym trajektoria układu (3.22) dąży asymptotycznie do $\mathbf{x}_d(t)$.

Obecnie przejdziemy do zilustrowania metody jacobianu odwrotnego dwoma przykładami odwrotnego zadania kinematyki dla manipulatorów nieredundantnych.

Przykład 3.1.5 (Manipulator typu podwójne wahadło)

Dla manipulatora typu podwójne wahadło, w przykładach 2.3.7 i 2.3.12, wyprowadziliśmy równania kinematyki we współrzędnych i jacobian analityczny w dwóch aspektach: współrzędnych $\times_0 \vee_0 \varphi$ oraz współrzędnych $\times_0 \vee_0$. Ponieważ w pierwszym przypadku manipulator jest zawsze osobliwy, zajmujemy się rozwiązaniem odwrotnego zadania kinematyki dla przypadku drugiego, tzn. dla manipulatora z kinematyką opisaną równaniem (2.68) i jacobianem analitycznym danym zależnością (2.82). W obliczeniach przyjmujemy $l_1 = 5$, $l_2 = 3$.



Rysunek 3.2 Ścieżka ruchu zadana w przestrzeni roboczej manipulatora typu podwójne wahadło.

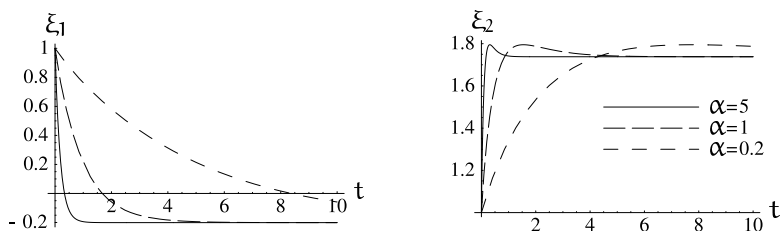
Założmy, że efektor manipulatora ma podążać wzdłuż trajektorii zadaniowej mającej postać okręgu

$$\mathbf{y}_d(t) = \begin{pmatrix} y_{d1}(t) \\ y_{d2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + 2 \sin(\frac{\pi}{5}t) \\ 2 \cos(\frac{\pi}{5}t) \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

w przedziale czasu $\mathcal{I} = [0, 10]$. Rysunek 3.2 przedstawia ścieżkę w przestrzeni roboczej manipulatora odpowiadającą zadanej trajektorii. Interesuje nas znalezienie trajektorii przegubowej manipulatora pozwalającej na realizację trajektorii (3.23).

Rozpoczynamy od rozwiązania punkтового zadania odwrotnego dla położenia $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}_d(0) = (5, 2)^T$. W tym celu posłużymy się algorytmem Newtona opisanym przez równanie różniczkowe (3.21), z jacobianem $\mathbf{J}^a(\mathbf{x})$ i kinematyką $\mathbf{k}(\mathbf{x})$ danymi odpowiednio przez (2.82) i (2.68). Układ równań (3.21) został zainicjowany w stanie początkowym $\xi_0 = (1, 1)^T$. Na rysunku 3.3 przedstawiono przebieg uzyskanych trajektorii dla różnych wartości parametru α algorytmu. Jak widać, im większa wartość parametru α , tym szybciej trajektoria układu dąży do wartości ustalonej, która jest warunkiem początkowym, pozwalającym na rozwiązanie odwrotnego zadania kinematyki przy pomocy algorytmu jacobianu odwrotnego. Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że warunek początkowy $\mathbf{x}_0 = (-0.201, 1.74)^T$ *

*Zauważmy, że jest to jedno z dwóch możliwych rozwiązań zadania punkтового. Drugim rozwiązaniem jest $(0.962, -1.74)^T$. To, które z rozwiązań otrzymamy, zależy od warunku początkowego w algorytmie Newtona.

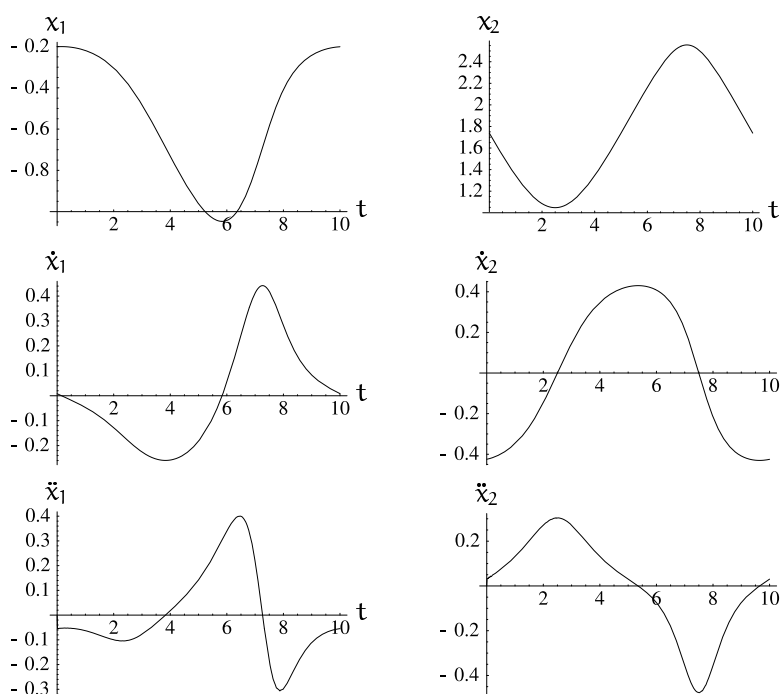


Rysunek 3.3 Rozwiązanie punkowego zadania odwrotnego uzyskane przy pomocy algorytmu Newtona.

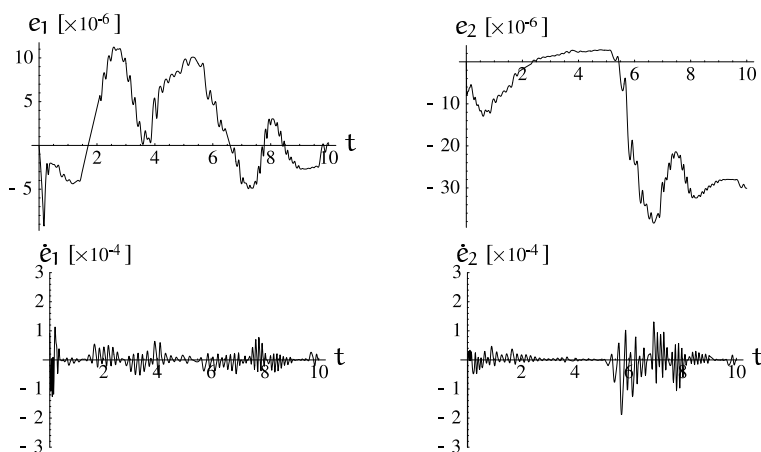
Aby rozwiązać zadanie odwrotne, całkujemy układ równań (3.20) poczynając od $\mathbf{x}_0$. Rysunek 3.4 przedstawia położenia, prędkości i przyspieszenia w przestrzeni przegubowej pozwalające na zrealizowanie trajektorii (3.23). Zauważmy, że po zakończeniu realizacji trajektorii, w chwili $t = 10$, manipulator wraca do stanu początkowego, co oznacza, że znaleziona trajektoria przegubowa może być wielokrotnie powtarzana. Jednak przy interpretacji wyników uzyskanych przy pomocy metod numerycznych powinniśmy zachować należyłą ostrożność. Bowiem, jeśli przyjrzymy się dokładnie przebiegowi błędów towarzyszących metodzie (zobacz rysunek 3.5, błędy zdefiniowano jako $\mathbf{e}(t) = \mathbf{y}_d(t) - \mathbf{k}(\mathbf{x}(t))$, $\dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{y}}_d(t) - \mathbf{J}^a(\mathbf{x}(t))\dot{\mathbf{x}}(t)$, gdzie $\mathbf{x}(t)$ i $\dot{\mathbf{x}}(t)$ oznaczają położenia i prędkości w przegubach manipulatora uzyskane jako rozwiązanie) zauważymy, że po jednokrotnej realizacji trajektorii pojawił się błąd położenia efektor manipulatora. Jest to spowodowane niedokładnością metod numerycznych zastosowanych do rozwiązania równań różniczkowych[†]. Przy powtarzaniu trajektorii powstające błędy mogą się kumulować.

Użyjemy teraz do rozwiązania zadania odwrotnego asymptotycznego algorytmu kinematyki odwrotnej opisanego zależnością (3.22). Podobnie jak w przypadku algorytmu Newtona, układ (3.22) został zainicjowany w punkcie $\mathbf{x}_0 = (1, 1)^T$. Rysunek 3.6 przedstawia trajektorie uzyskane przy pomocy algorytmu asymptotycznego z parametrem $\alpha = 1$. Błędy położenia i prędkości efektor, zdefiniowane jak poprzednio, zostały pokazane na rysunku 3.7. Jak widać, błędy, których głównym źródłem w tym przypadku jest metoda, maleją asymptotycznie do zera. Widać także, że praktycznie od chwili $t = 4$ uzyskana trajektoria pokrywa się z trajektorią wy-

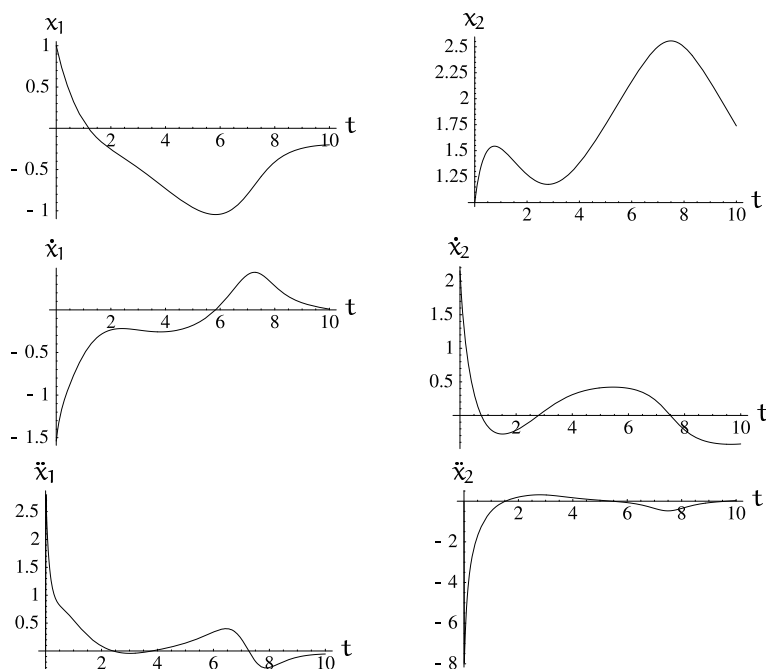
[†]W przykładach prezentowanych w tym rozdziale symulacje wykonano w środowisku MATHEMATICA[®], a do numerycznego rozwiązywania równań różniczkowych zastosowano metodę Rungego-Kutty czwartego lub piątego rzędu.



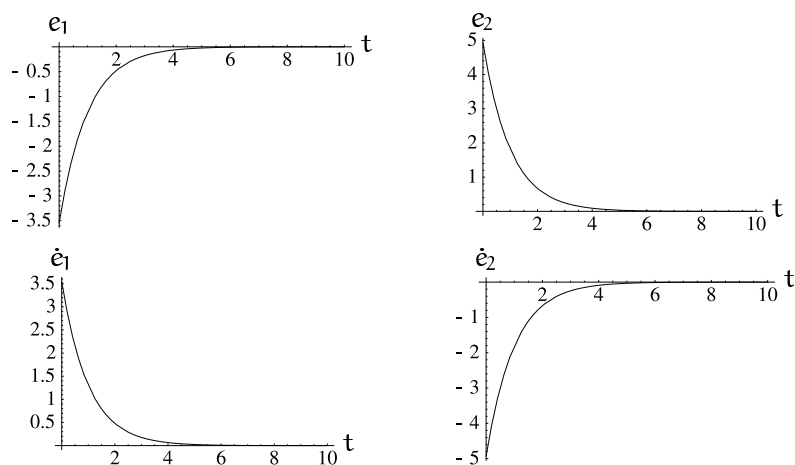
Rysunek 3.4 Rozwiązanie zadania odwrotnego dla podwójnego wahadła uzyskane przy pomocy algorytmu jacobianu odwrotnego.



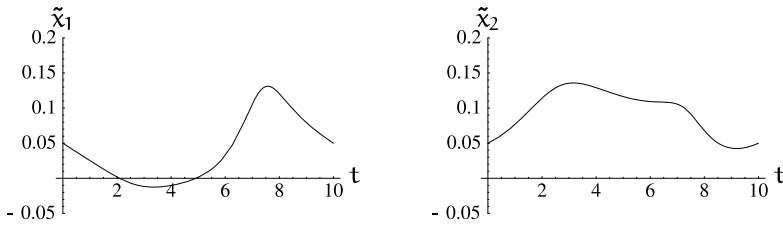
Rysunek 3.5 Błędy położenia i prędkości efektora przy algorytmie jacobianu odwrotnego.



Rysunek 3.6 Rozwiązanie zadania odwrotnego dla podwójnego wahadła uzyskane przy zastosowaniu asymptotycznego algorytmu kinematyki odwrotnej.



Rysunek 3.7 Błędy położenia i prędkości efektora przy asymptotycznym algorytmie kinematyki odwrotnej.



Rysunek 3.8 Błędy położenia przegubów manipulatora wynikające z zastosowania algorytmu jacobianu odwrotnego przy niedokładności wyznaczenia stanu początkowego $(\tilde{x}_1(0), \tilde{x}_2(0)) = (0.05, 0.05)$.

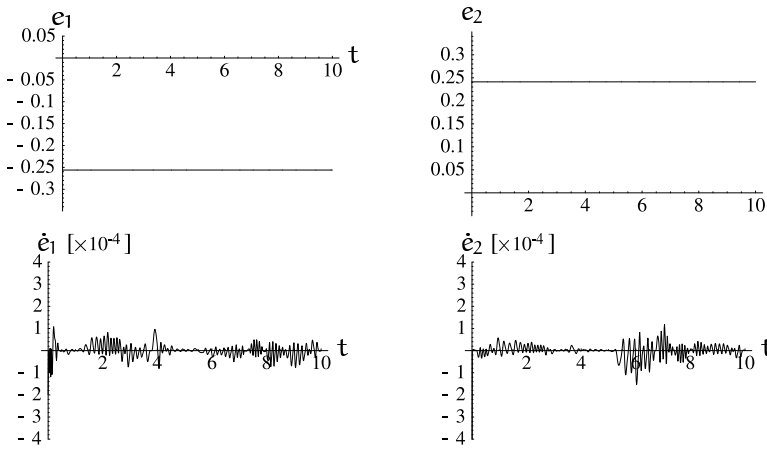
znaną za pośrednictwem algorytmu jacobianu odwrotnego, przedstawioną na rysunku 3.4. Oczywiście, i tym razem pojawiają się błędy numeryczne, ale wielokrotnie mniejsze od błędów metody. Szybkość zbieżności błędu zależy od wartości parametru α , jednakże dużym wartościom α , dla których błędy szybko dążą do zera, towarzyszą duże prędkości i przyspieszenia w początkowym okresie realizacji trajektorii.

Na zakończenie zbadamy wpływ dokładności wyznaczenia warunku początkowego na przebieg trajektorii uzyskanej jako rozwiązanie odwrotnego zadania kinematyki przy użyciu algorytmu jacobianu odwrotnego. Przyjmijmy, że przy wyznaczaniu stanu początkowego każdego z przegubów popełniono błąd o wartości 0.05. Rysunek 3.8 pokazuje, jak błąd stanu początkowego wpływa na odchylenie $\tilde{\mathbf{x}}$ przebiegu trajektorii od trajektorii pokazanej na rysunku 3.4. Rysunek 3.9 przedstawia błędy położenia i prędkości efektor manipulatora towarzyszące takiemu odchyleniu. Z rysunku wynika, że dla rozwiązania uzyskanego w wyniku zastosowania algorytmu jacobianu odwrotnego błąd prędkości efektor manipulatora nie zależy od dokładności wyznaczenia warunków początkowych, występuje natomiast błąd położenia efektor zależny od niedokładności wyznaczenia tych warunków. ■

Przykład 3.1.6 (Manipulator IRb-6 na torze jezdny)

Założmy, że manipulator IRb-6 zamontowany na torze jezdny, z kinematyką zdefiniowaną wzorem (2.76), ma za zadanie przemieszczać efektor wzdłuż linii śrubowej

$$\begin{pmatrix} y_{d1}(t) \\ y_{d2}(t) \\ y_{d3}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 + 0.2 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \\ -0.7 - 0.01t \\ 0.7 + 0.2 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \end{pmatrix}, \quad (3.24)$$

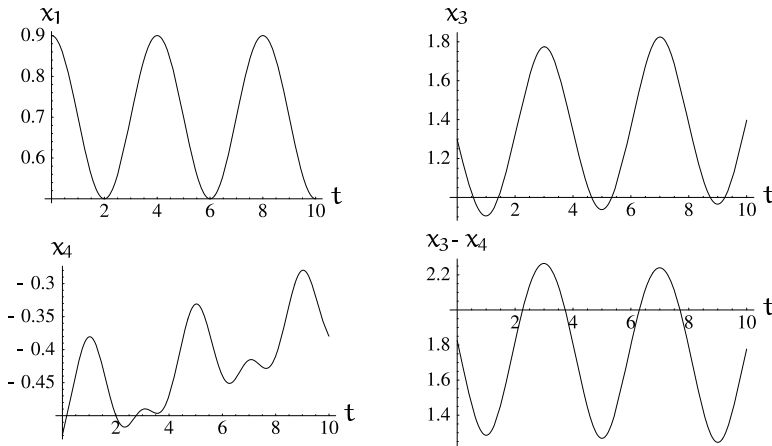


Rysunek 3.9 Błędy położenia i prędkości efektora powstałe przy zastosowaniu algorytmu jacobianu odwrotnego przy niedokładności wyznaczenia stanu początkowego $(\tilde{x}_1(0), \tilde{x}_2(0)) = (0.05, 0.05)$.

przy niezmienniej orientacji efektora danej przez

$$\begin{pmatrix} y_{d4}(t) \\ y_{d5}(t) \\ y_{d6}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \\ \pi \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

w przedziale $\mathcal{I} = [0, 10][s]$. W celu określenia przebiegu trajektorii przegubowej manipulatora rozwiązaliśmy układ równań różniczkowych (3.20) z jacobianem analitycznym $\mathbf{J}^a(\mathbf{x})$ postaci (2.87), zainicjowany w punkcie początkowym $\mathbf{x}(0) = (0.9, 0., 1.29, -0.529, 0., 0.)^T$ (wartość uzyskana przy użyciu algorytmu Newtona (3.21)). Rysunek 3.10 przedstawia przebiegi czasowe zmiennych przegubowych x_1 , x_3 , x_4 oraz $x_3 - x_4$ uzyskane w wyniku obliczeń. Zmienne x_2 , x_5 i x_6 , nie pokazane na rysunku, miały stałe wartości równe 0. Jak widać, uzyskana trajektoria znajduje się w zbiorze konfiguracji dopuszczalnych $\mathcal{X}$ określonym przez (2.78), co oznacza, że może zostać zrealizowana. Chcemy zwrócić uwagę Czytelnika na fakt, że częstokroć takie wyznaczenie trajektorii zadanej w przestrzeni zadaniowej manipulatora, aby znalazła się ona wewnątrz jego przestrzeni roboczej, a tym samym, by zachodziła wymieniona własność, jest trudne. Główną tego przyczyną są problemy z analitycznym określeniem granic przestrzeni roboczej manipulatora, zwłaszcza gdy współrzędne zadaniowe zawierają część określającą orientację efektora. Zadanie można uprościć przez zmniejszenie wymiaru przestrzeni zadaniowej manipulatora i potraktowanie go jako redundantny.



Rysunek 3.10 Rozwiązanie zadania odwrotnego dla manipulatora IRb-6 zamontowanego na torze jezdny uzyskane przy pomocy algorytmu jacobianu odwrotnego.

W przytoczonym przykładzie można np. zrezygnować z określenia orientacji efektora manipulatora i przyjąć, że manipulator IRb-6 zamontowany na torze jezdny jest manipulatorem redundantnym z kinematyką opisaną równaniami (2.77)[‡]. ■

Metoda jacobianu pseudoodwrotnego

Weźmy teraz pod uwagę odwrotne zadanie kinematyki dla manipulatora redundantnego, którego kinematyka jest opisana formułą $\mathbf{y} = \mathbf{k}(\mathbf{x})$ przy warunku $\dim \mathbf{x} = n > \dim \mathbf{y} = m$. Jeżeli istnieje rozwiązanie $\mathbf{x}_d(t)$ zadania, równanie (3.19) obowiązuje. Niech jacobian analityczny $\mathbf{J}^a(\mathbf{x})$ ma wzdłuż trajektorii $\mathbf{x}_d(t)$ pełny rząd ($= m$). Ponieważ zwykła odwrotność macierzy $\mathbf{J}^a(\mathbf{x})$ nie istnieje, w układzie (3.20) trzeba użyć (prawostronnej) pseudoodwrotności jacobianu analitycznego[§]. Przypominamy, że pseudoodwrotność macierzy $\mathbf{A}$ opisuje rozwiązanie układu równań liniowych

$$\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{v}$$

spełniające warunek minimalizacji formy kwadratowej

$$V(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{W} \mathbf{v}$$

[‡]Zobacz przykłady 3.1.8–3.1.11.

[§]Zobacz dodatek A.1.

z symetryczną, dodatnio określoną macierzą $\mathbf{W}$. Wyznaczenie pseudoodwrotności sprowadza się zatem do rozwiązywania zadania optymalizacji kwadratowej z ograniczeniami równościowymi. Po rozwiązaniu tego zadania dla $\mathbf{A} = \mathbf{J}^a(\mathbf{x})$ otrzymujemy następującą zależność

$$\mathbf{J}_W^{a\#}(\mathbf{x}) = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{J}^{aT}(\mathbf{x}) (\mathbf{J}^a(\mathbf{x}) \mathbf{W}^{-1} \mathbf{J}^{aT}(\mathbf{x}))^{-1}. \quad (3.26)$$

Macierz (3.26), zwana *pseudoodwrotnością* jakobianu analitycznego jest macierzą rozmiaru $n \times m$ o tej własności, że

$$\mathbf{J}^a(\mathbf{x}) \mathbf{J}_W^{a\#}(\mathbf{x}) = \mathbb{I}_m. \quad (3.27)$$

Pseudoodwrotność jakobianu jest podstawowym składnikiem *metody jakobianu pseudoodwrotnego*, według której rozwiązanie zadania odwrotnego otrzymuje się przez scałkowanie (nieautonomicznego) układu równań różniczkowych

$$\dot{\mathbf{x}}_d = \mathbf{J}_W^{a\#}(\mathbf{x}_d) \dot{\mathbf{y}}_d, \quad (3.28)$$

zainicjowanego w punkcie $\mathbf{x}_0$, takim że $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}_d(0) = \mathbf{k}(\mathbf{x}_0)$. Analogicznie do zależności (3.21), warunek początkowy $\mathbf{x}_0$ można obliczyć przy pomocy algorytmu Newtona, biorąc granicę $\lim_{t \rightarrow +\infty} \xi(t)$ trajektorii układu

$$\dot{\xi} = -\alpha \mathbf{J}_W^{a\#}(\xi) (\mathbf{k}(\xi) - \mathbf{y}_0). \quad (3.29)$$

Odpowiednikiem algorytmu (3.22) jest w przypadku redundantnym następujący *algorytm asymptotyczny*

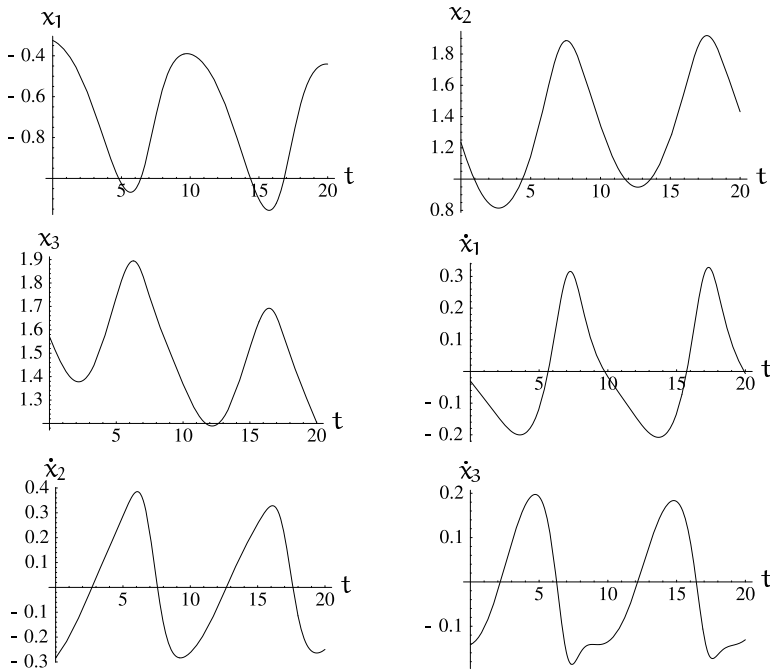
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}_W^{a\#}(\mathbf{x}) (\dot{\mathbf{y}}_d - \alpha (\mathbf{k}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_d)). \quad (3.30)$$

Poniżej, na przykładach manipulatora typu potrójne wahadło i manipulatora IRb-6 zamontowanego na torze jezdny, przedstawimy rozwiązanie odwrotnego zadania kinematyki przy zastosowaniu pseudoodwrotności jakobianu $\mathbf{J}_W^{a\#}(\mathbf{x})$ z macierzą $\mathbf{W} = \mathbb{I}_n$.

Przykład 3.1.7 (Manipulator typu potrójne wahadło)

Rozpatrzmy manipulator redundantny typu potrójne wahadło z kinematyką opisaną wzorem (2.71) i jakobianem analitycznym (2.85). Przyjmijmy długości ramion manipulatora równe $l_1 = 5$, $l_2 = 3$, $l_3 = 2$. Zadaniem manipulatora jest wykonanie ruchu wzdłuż trajektorii w postaci okręgu o równaniach

$$\mathbf{y}_d(t) = \begin{pmatrix} y_{d1}(t) \\ y_{d2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + 2 \sin(\frac{\pi}{5}t) \\ 2 \cos(\frac{\pi}{5}t) \end{pmatrix}, \quad (3.31)$$

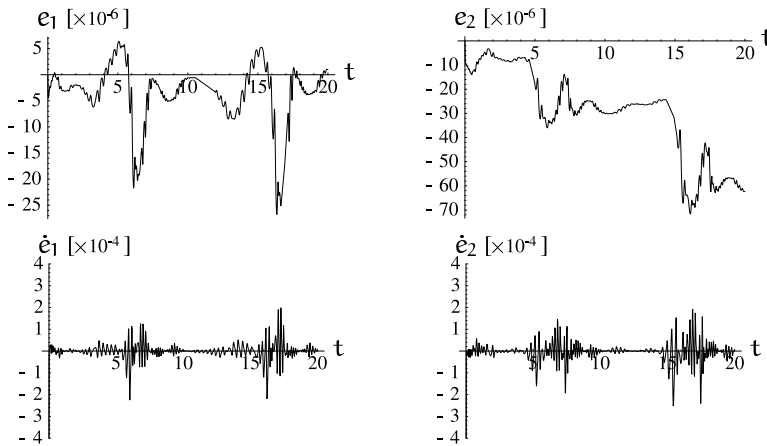


Rysunek 3.11 Rozwiązanie zadania odwrotnego dla potrójnego wahadła uzyskane przy pomocy algorytmu jakobianu pseudoodwrotnego.

w przedziale czasu $\mathcal{I} = [0, 20]$. Zwróćmy uwagę na fakt, że podczas realizacji trajektorii efektor manipulatora powinien wykonać dwa obiegi okręgu w przestrzeni roboczej.

Po scałkowaniu układu równań różniczkowych (3.29), zainicjowanego w punkcie $\xi = (1, 1, 1)^T$, otrzymujemy rozwiązanie $\mathbf{x}_0 = (-0.325, 1.23, 1.57)^T$ punktowego zadania odwrotnego dla $\mathbf{y}_{d0} = \mathbf{y}_d(0) = (5, 2)^T$ [¶]. Punkt $\mathbf{x}_0$ posłuży jako warunek początkowy przy rozwiązaniu układu równań (3.28), pozwalających na znalezienie rozwiązania postawionego zadania. Trajektorja uzyskana przez scałkowanie układu (3.28) została przedstawiona na rysunku 3.11. Zauważmy, że kolejnym obiegiem efektora po okręgu towarzyszą różne sekwencje położeń przegubów manipulatora. Przy wielokrotnym powtarzaniu trajektorii daje się zauważyć tendencja do poruszania przede wszystkim początkowymi przegubami manipulatora. Analiza przebiegu błędów położenia i prędkości efektora pokazanych na rysunku 3.12 wskazuje, że, podobnie jak w przypadku metody jakobianu odwrotnego (zo-

[¶]Zobacz przykład 3.1.12.



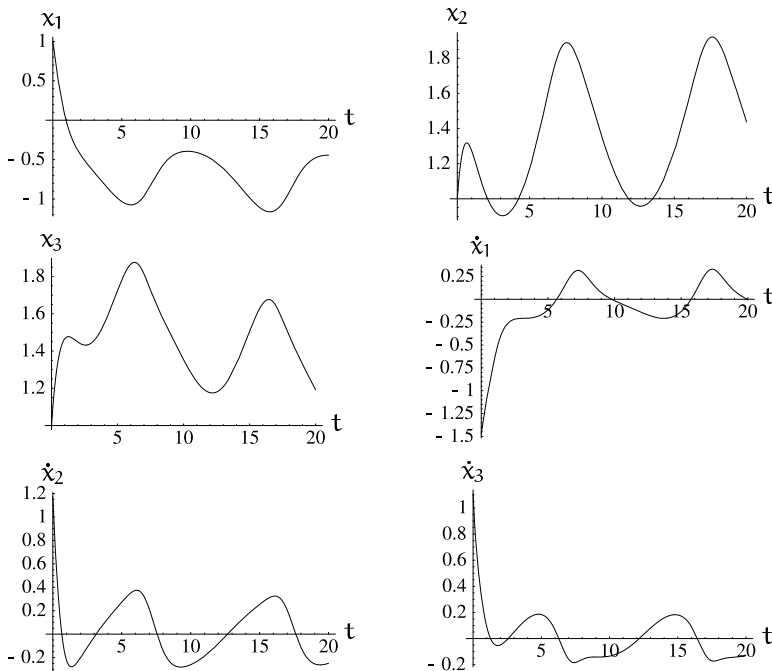
Rysunek 3.12 Błędy położenia i prędkości efektora przy algorytmie jacobianu pseudoodwrotnego.

bacz rysunek 3.5), są to błędy numeryczne.

Obecnie, do rozwiązania zadania użyjemy algorytmu asymptotycznego (3.30), wynikającego z połączenia algorytmu jacobianu pseudoodwrotnego i algorytmu Newtona. Rozwiązanie otrzymane w wyniku scałkowania równań (3.30) przy parametrze $\alpha = 5$ przedstawia rysunek 3.13. Podobnie jak w poprzednim przypadku, układ równań został zainicjowany w punkcie $\mathbf{x} = (1, 1, 1)^T$. Z rysunku widać, że uzyskane rozwiązanie dąży asymptotycznie do rozwiązania uzyskanego przy użyciu algorytmu jacobianu pseudoodwrotnego (zobacz rysunek 3.11), czemu w początkowej fazie ruchu towarzyszą duże prędkości w przegubach. Oczywiście, tak samo jak w przypadku nierzadnym, prędkości te zależą od wartości parametru α . ■

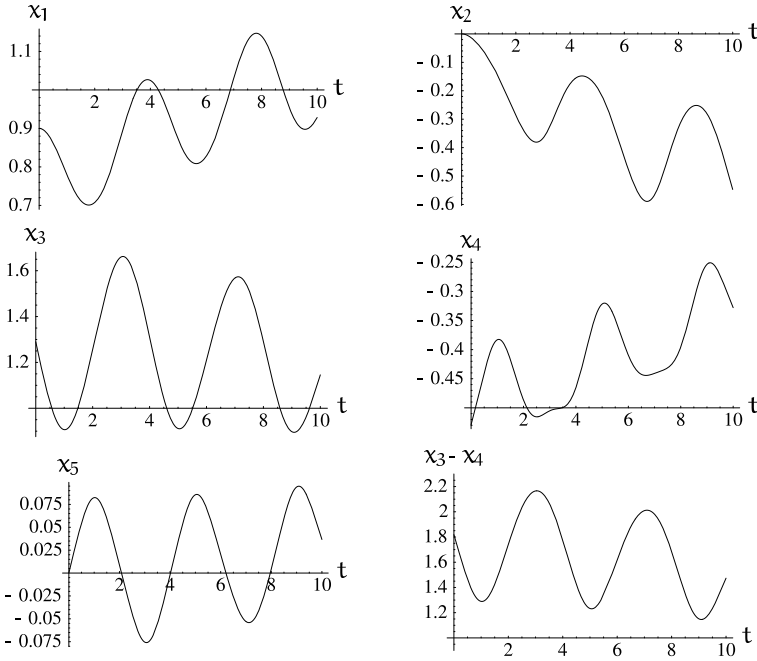
Przykład 3.1.8 (Manipulator IRb-6 na torze jezdny)

W tym przykładzie manipulator IRb-6 zamontowany na torze jezdny potraktujemy jako manipulator redundantny z kinematyką (2.77). Żądamy, aby effektor manipulatora poruszał się wzdłuż trajektorii $\mathbf{y}_d(t)$ postaci (3.24) dla czasu $t \in \mathcal{I} = [0, 10][s]$. Jak widać, w tym przykładzie określiliśmy jedynie sposób zmian położenia efektora manipulatora, nie precyzując jak ma się zmieniać jego orientacja. Ponieważ rozpatrywany manipulator jest redundantny, do rozwiązania odwrotnego zadania kinematyki użyjemy metody jacobianu pseudoodwrotnego zdefiniowanej wzorem (3.28). Przebieg trajektorii przegubowej manipulatora dla konfiguracji początkowej $\mathbf{x}(0) = (0.9, 0., 1.29, -0.529, 0., 0.)^T$ (wartość uzyskana za pomocą algorytmu New-



Rysunek 3.13 Rozwiązanie zadania odwrotnego dla potrójnego wahadła uzyskane przy pomocy algorytmu asymptotycznego z pseudoodwrotnością jacobianu.

tona (3.29)) przedstawia rysunek 3.14. Nie pokazany na rysunku kąt x_6 przyjmował stałe wartość 0. Dokonajmy krótkiego porównania tej trajektorii z trajektorią uzyskaną w przykładzie 3.1.6 w wyniku zastosowania metody jacobianu odwrotnego, pokazaną na rysunku 3.10. Oczywiście, również ta ostatnia trajektoria jest jednym z rozwiązań zadania odwrotnego. Jednakże, w przypadku nieredundantnym ustalenie orientacji, z jaką miał zostać wykonany ruch po linii śrubowej spowodowało, że ruch efektora został zrealizowany przez poruszanie jedynie pierwszego, trzeciego i czwartego przegubu manipulatora. W rozwiązaniu uzyskanym metodą jacobianu pseudoodwrotnego nie porusza się jedynie szósty przegub manipulatora. Dopiero po wielokrotnym powtórzeniu ruchu po linii śrubowej otrzymujemy tą metodą rozwiązanie, w którym ruch jest praktycznie efektem poruszania jedynie dwóch pierwszych przegubów manipulatora. Przykład takiego rozwiązania przedstawiono na rysunku 3.15. Rozwiązanie to uzyskano przez scałkowanie układu równań różniczkowych (3.28) zainicjowanych w punkcie $\mathbf{x}(0) = (1.8, -0.91, 0.091, 0.076, 0.27, 0)^T$ wyliczonym przy pomocy algorytmu (3.29). Zauważmy, że otrzymana trajektoria nie leży w granicach



Rysunek 3.14 Rozwiązanie zadania odwrotnego dla manipulatora IRb-6 zamontowanego na torze jezdny uzyskane przy pomocy algorytmu jakobianu pseudo-odwrotnego.

przestrzeni przegubowej manipulatora opisanej zależnością (2.78), przez co jej realizacja nie jest możliwa. Uniknięcie takich sytuacji umożliwi przedstawiona niżej modyfikacja metody jakobianu pseudoodwrotnego, zilustrowana przykładem 3.1.9. ■

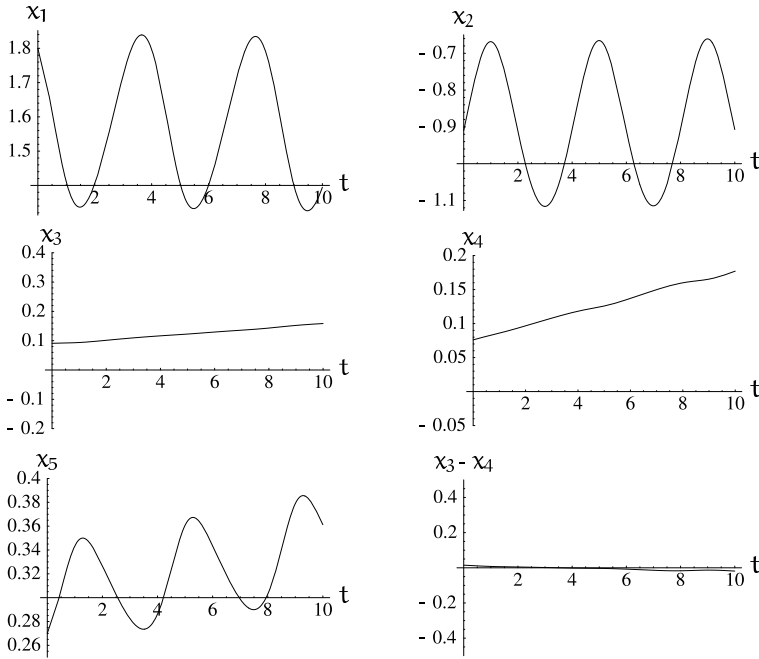
Okazuje się, że trajektoria $\mathbf{x}_d(t)$ spełniająca układ równań (3.28) stanowi szczególne rozwiązanie odwrotnego zadania kinematyki dla manipulatora redundantnego. Jak bowiem łatwo zauważyć, zależność (3.27) prowadzi do spostrzeżenia

$$\mathbf{J}^a(\mathbf{x}) \left(\mathbb{I}_n - \mathbf{J}_W^{a\#}(\mathbf{x}) \mathbf{J}^a(\mathbf{x}) \right) = \mathbf{0},$$

z którego wynika, że odwzorowanie

$$\mathbf{v} \mapsto \left(\mathbb{I}_n - \mathbf{J}_W^{a\#}(\mathbf{x}) \mathbf{J}^a(\mathbf{x}) \right) \mathbf{v} \quad (3.32)$$

stanowi projekcję przestrzeni $\mathbb{R}^n$ na przestrzeń zerową $\text{Ker } \mathbf{J}^a(\mathbf{x})$ jakobianu



Rysunek 3.15 Alternatywne rozwiązanie zadania odwrotnego dla manipulatora IRB-6 zamontowanego na torze jezdny uzyskane przy pomocy algorytmu jakobianu pseudoodwrotnego.

analitycznego. Korzystając z tej własności, możemy do prawej strony układu równań (3.28) dodać dowolny wektor należący do $\text{Ker } \mathbf{J}^a(\mathbf{x})$, będący obrazem pewnego wektora $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ przez odwzorowanie (3.32). W efekcie, otrzymujemy *metodę jakobianu pseudoodwrotnego z projekcją*, zgodnie z którą rozwiązanie ogólne zadania odwrotnego dla manipulatora redundantnego spełnia następujący układ równań różniczkowych

$$\dot{\mathbf{x}}_d = \mathbf{J}_W^{a\#}(\mathbf{x}_d)\dot{\mathbf{y}}_d + \left(\mathbb{I}_n - \mathbf{J}_W^{a\#}(\mathbf{x}_d)\mathbf{J}^a(\mathbf{x}_d)\right)\mathbf{v}, \quad (3.33)$$

$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, z warunkiem początkowym $\mathbf{x}_0$ wyliczonym przy pomocy *algorytmu Newtona z projekcją*

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = -\alpha \mathbf{J}_W^{a\#}(\boldsymbol{\xi})(\mathbf{k}(\boldsymbol{\xi}) - \mathbf{y}_0) + \left(\mathbb{I}_n - \mathbf{J}_W^{a\#}(\boldsymbol{\xi})\mathbf{J}^a(\boldsymbol{\xi})\right)\mathbf{v}. \quad (3.34)$$

Oba algorytmy (3.34), (3.33) można połączyć w jeden *algorytm asymptotyczny kinematyki odwrotnej*, dla którego warunek początkowy $\mathbf{x}_0$ może

być wybrany w sposób arbitralny,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}_{\mathbf{W}}^{\alpha\#}(\mathbf{x})(\dot{\mathbf{y}}_d - \alpha(\mathbf{k}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_d)) + (\mathbb{I}_n - \mathbf{J}_{\mathbf{W}}^{\alpha\#}(\mathbf{x})\mathbf{J}^{\alpha}(\mathbf{x}))\mathbf{v}. \quad (3.35)$$

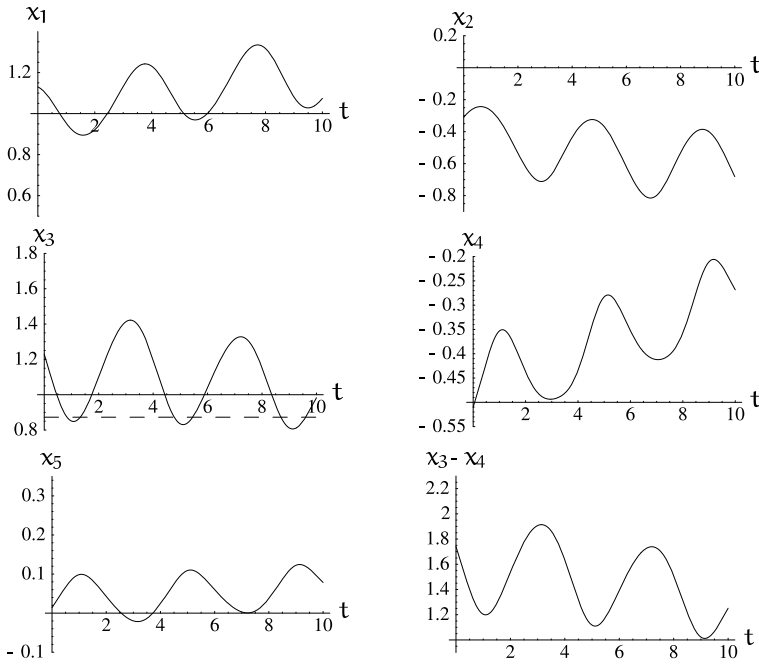
Przy $t \rightarrow +\infty$ rozwiązanie układu (3.35) dąży do trajektorii układu (3.28). Wybór wektora $\mathbf{v}$ zależy od dodatkowych kryteriów, jakie powinna spełniać trajektoria przegubowa $\mathbf{x}(t)$. Jeżeli przeguby manipulatora są ograniczone, naturalnym kryterium jest wymaganie, by położenia przyjmowane przez przeguby były możliwie bliskie środka zakresu ruchu przegubów (dalekie od mechanicznych ograniczeń ruchu przegubów). Funkcja odległości może mieć postać

$$d(\mathbf{x}) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \bar{x}_i}{x_{iM} - x_{im}} \right)^2, \quad (3.36)$$

gdzie $\bar{x}_i$, x_{iM} , x_{im} oznaczają, odpowiednio, współrzędne środka zakresu ruchu oraz górnego i dolnego ograniczenia ruchu w i -tym przegubie manipulatora. Aby uzyskać rozwiązanie odwrotnego zadania kinematyki respektujące wymaganie unikania granicznych położeń przegubów manipulatora, w algorytmie (3.33) lub (3.35) należy zdefiniować wektor $\mathbf{v} = -\beta \frac{\partial d(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$, $\beta > 0$. Inne wybory wektora $\mathbf{v}$ mogą mieć na celu maksymalizację manipulowalności manipulatora. Przedstawimy je w podrozdziale 3.1.5.

Przykład 3.1.9 (Manipulator IRb-6 na torze jezdny)

Założmy, że efektor manipulatora IRb-6 zamontowanego na torze jezdny, opisanego kinematyką (2.77), ma wykonywać ruch wzdłuż trajektorii $\mathbf{y}_d(t)$ opisanej wzorem (3.24) dla chwil czasu $t \in \mathcal{I} = [0, 10][s]$. Interesuje nas znalezienie trajektorii przegubowej manipulatora odpowiadającej trajektorii określonej w przestrzeni zadaniowej. Jedno z rozwiązań takiego zadania, uzyskane w wyniku scałkowania układu (3.28) z macierzą $\mathbf{W} = \mathbb{I}_6$, przedstawiono na rysunku 3.16 (dwa inne rozwiązania można znaleźć w przykładzie 3.1.8). W przedstawionym przypadku jako punkt startowy wybraliśmy punkt $\mathbf{x}(0) = (1.13, -0.31, 1.23, -0.51, 0.014, 0.)^T$ znaleziony w wyniku rozwiązania równań (3.29). Wartość nie pokazanego na rysunku 3.16 kąta x_6 jest stale równa 0. Jak widać z rysunku, otrzymane rozwiązanie nie leży w dopuszczalnym zakresie zmian zmiennych przegubowych określonym przez (2.78) (linią przerywaną pokazano minimalną wartość kąta x_3). Aby zapobiec tej sytuacji, należy w miejsce algorytmu (3.28) zastosować algorytm (3.33) z wektorem $\mathbf{v}$ wybranym jako antygradient odległości (3.36). Rozwiązanie uzyskane w ten sposób (z macierzą $\mathbf{W} = \mathbb{I}_6$) przedstawia rysunek 3.17. ■



Rysunek 3.16 Rozwiązanie zadania odwrotnego dla manipulatora IRb-6 zamontowanego na torze jezdnyim uzyskane przy pomocy algorytmu jacobianu pseudo-odwrotnego.

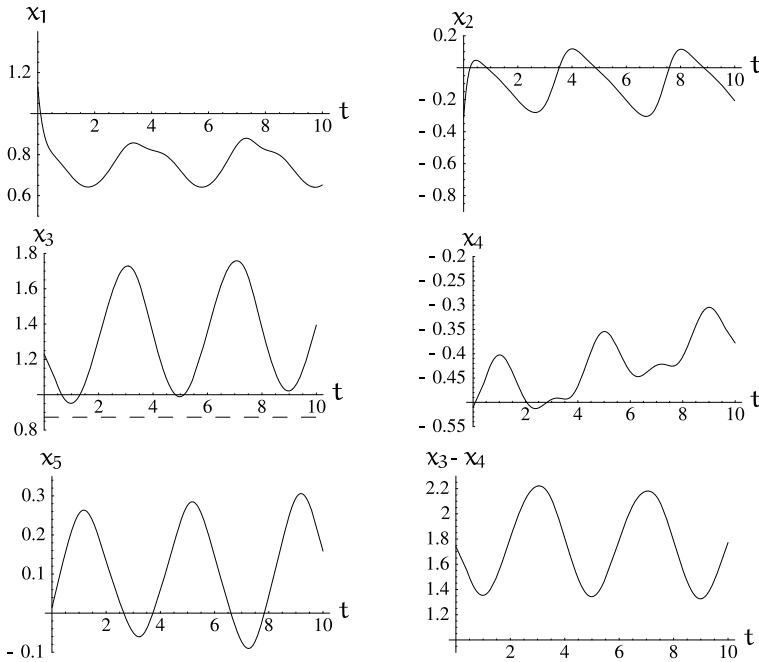
Metoda jacobianu rozszerzonego

Problem, jaki się pojawia przy przejściu od układu (3.19) do układu (3.20) przy rozpatrywaniu kinematyki manipulatorów redundantnych, bywa rozwiązywany inaczej niż poprzez zastosowanie pseudoodwrotności jacobianu. Naturalną alternatywę stanowi wprowadzenie tzw. *rozszerzonego jacobianu analitycznego*, będącego macierzą kwadratową i nieosobliwą. Załóżmy, że dany jest jacobian analityczny $\mathbf{J}^a(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x})$ rozmiaru $m \times n$. Wybierzmy zestaw $n - m$ gładkich (analitycznych) funkcji $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_{n-m})^T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ i wprowadźmy $n - m$ ograniczeń równościowych (typu ograniczeń konfiguracyjnych)

$$f_1(\mathbf{x}) = f_2(\mathbf{x}) = \dots = f_{n-m}(\mathbf{x}) = 0. \quad (3.37)$$

Żądamy, by dodatkowe ograniczenia były niezależne,

$$\text{rank} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = n - m,$$



Rysunek 3.17 Rozwiązanie zadania odwrotnego dla manipulatora IRb-6 zamontowanego na torze jezdny uzyskane przy pomocy algorytmu jakobianu pseudo-odwrotnego z projekcją.

i tworzymy rozszerzony jakobian analityczny

$$\mathbf{J}^{ae}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix}(\mathbf{x}), \quad (3.38)$$

który jest macierzą kwadratową. Ograniczenia $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ muszą być dobrane w taki sposób, by rozszerzony jakobian był nieosobliwy, przynajmniej wzdłuż poszukiwanej trajektorii $\mathbf{x}_d(t)$. Zakładając, że rozwiązanie zadania odwrotnego przy ograniczeniach (3.37) istnieje, zróżniczkujemy zależność

$$\begin{cases} \mathbf{y} = \mathbf{k}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \end{cases}$$

względem czasu otrzymując

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{y}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \mathbf{J}^{ae}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}}. \quad (3.39)$$

Stosownie do *metody jacobianu rozszerzonego*, rozwiązanie odwrotnego zadania kinematyki uzyskujemy przez scałkowanie układu równań różniczkowych

$$\dot{\mathbf{x}}_d = (\mathbf{J}^{ae})^{-1}(\mathbf{x}_d) \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{y}}_d \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (3.40)$$

przy warunku początkowym $\mathbf{x}_0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \boldsymbol{\xi}(t)$, gdzie $\boldsymbol{\xi}(t)$ jest trajektorią układu

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = -\alpha(\mathbf{J}^{ae})^{-1}(\boldsymbol{\xi}) \begin{pmatrix} \mathbf{k}(\boldsymbol{\xi}) - \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (3.41)$$

Połączenie wyrażeń (3.40) i (3.41) daje *asymptotyczny algorytm kinematyki odwrotnej*

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{J}^{ae})^{-1}(\mathbf{x}) \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{y}}_d - \alpha(\mathbf{k}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_d) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (3.42)$$

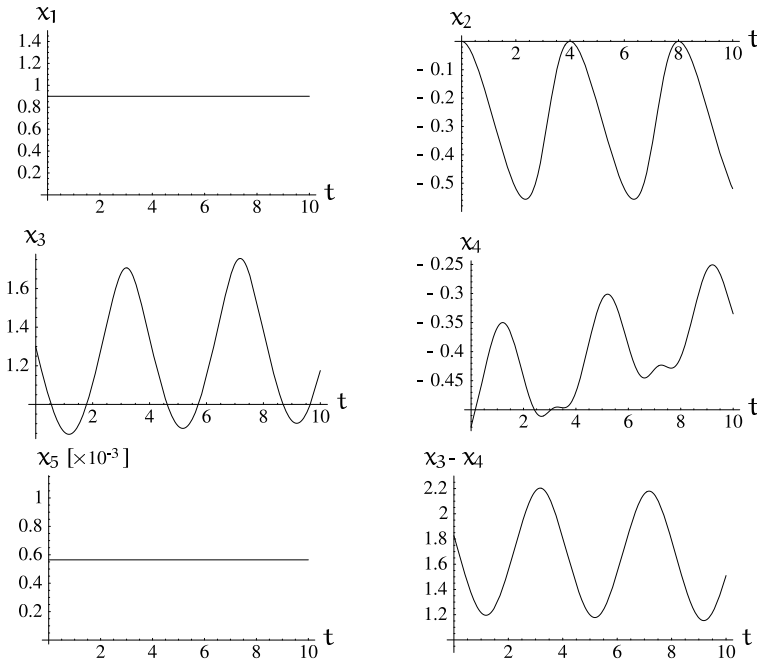
zbieżny do rozwiązania zadania odwrotnego przy $t \rightarrow +\infty$.

Przykład 3.1.10 (Manipulator IRb-6 na torze jezdny)

Przyjmijmy ponownie, że zadanie manipulatora IRb-6 zamontowanego na torze jezdny polega na wykonaniu ruchu efektora wzdłuż trajektorii $\mathbf{y}_d(t)$ zadanej wzorem (3.24) dla chwil czasu $t \in \mathcal{I} = [0, 10][s]$. Dodatkowo zażądajmy, aby ruch ten został zrealizowany bez poruszania pierwszym, piątym i szóstym przegubem manipulatora, co można zapisać w formie ograniczeń konfiguracyjnych (3.37) jako

$$x_1 = x_{10}, \quad x_5 = x_{50}, \quad x_6 = x_{60},$$

gdzie x_{i0} oznacza i -tą składową konfiguracji początkowej manipulatora. Dołączając powyższe równania do równań kinematyki manipulatora (2.77) i różniczkując całość otrzymujemy jacobian rozszerzony manipulatora $\mathbf{J}^{ae}(\mathbf{x})$ odpowiadający wybranym ograniczeniom. Rozwiązanie układu równań różniczkowych (3.40), z tak wyliczonym jacobianem, zainicjowanego w punkcie początkowym $\mathbf{x}(0) = (0.9, 0., 1.29, -0.529, 0., 0.)^T$, przedstawiono na rysunku 3.18 (nie pokazany kąt x_6 był stale równy 0). Jak widać z rysunku, otrzymana trajektoria spełnia nałożone ograniczenia. ■



Rysunek 3.18 Rozwiązanie zadania odwrotnego dla manipulatora IRb-6 zamontowanego na torze jezdny uzyskane przy wykorzystaniu algorytmu jacobianu rozszerzonego.

Metoda jacobianu transponowanego

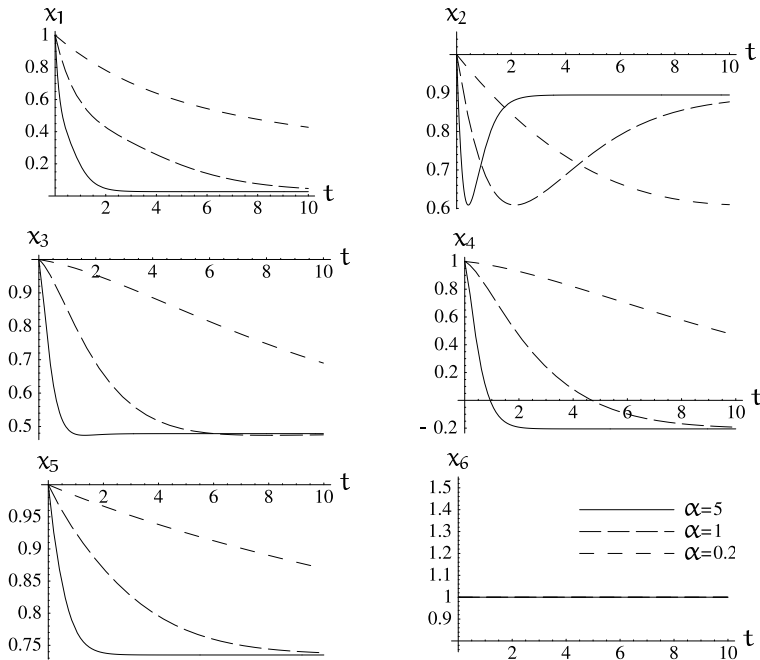
Niech teraz będzie dane punktowe zadanie odwrotne, polegające na obliczeniu konfiguracji przegubów $\mathbf{x}_d$ odpowiadającej umieszczeniu efektora w określonym punkcie $\mathbf{y}_d$ przestrzeni zadaniowej. Zauważmy, że do osiągnięcia tego celu dobrze nadają się algorytmy (3.21), (3.29) i (3.41) zainicjowane przy dowolnym $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$. Co więcej, przy założeniu, że jacobian analityczny jest pełnego rzędu, tzn. $\text{rank } \mathbf{J}^a(\mathbf{x}) = m$, algorytm

$$\dot{\mathbf{x}} = -\alpha \mathbf{J}^{aT}(\mathbf{x})(\mathbf{k}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_d), \quad (3.43)$$

przy $\alpha > 0$, jest algorytmem *najszybszego spadku* zapewniającym ruch w przestrzeni przegubowej w kierunku przeciwnym do gradientu funkcji kwadratu błędu

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{k}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_d)^T(\mathbf{k}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_d).$$

Algorytm (3.43) jest algorytmem *metody jacobianu transponowanego*. Trajektoria układu (3.43) zmierza w kierunku punktów równowagi speł-



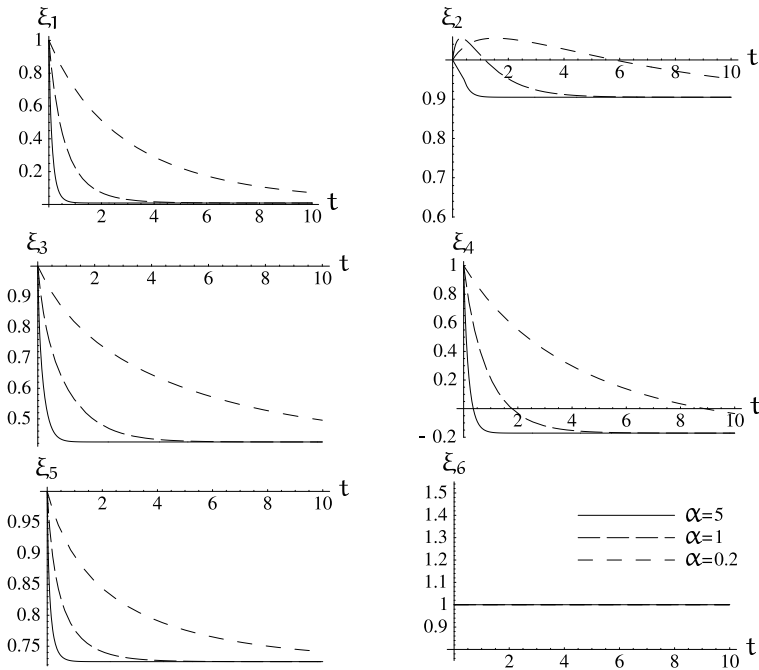
Rysunek 3.19 Rozwiązanie punktowego zadania odwrotnego dla manipulatora IRb-6 zamontowanego na torze jezdny uzyskane przy wykorzystaniu algorytmu jakobianu transponowanego.

niających zależność $\mathbf{J}^{\alpha T}(\mathbf{x})(\mathbf{k}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_d) = \mathbf{0}$. Łatwo zauważyć, że o ile tylko $\text{rank } \mathbf{J}^{\alpha}(\mathbf{x}) = m$, punktami $\mathbf{x}$ równowagi układu (3.43) są rozwiązania zadania odwrotnego $\mathbf{k}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_d$. Jest rzeczą oczywistą, że z obliczeniowego punktu widzenia algorytm najszybszego spadku (3.43) jest znacznie mniej złożony niż algorytm (3.29).

Przykład 3.1.11 (Manipulator IRb-6 na torze jezdny)

W celu zilustrowania działania algorytmu (3.43) założmy, że naszym zadaniem jest znalezienie punktu startowego $\mathbf{x}_0$ dla trajektorii (3.24) (tzn. takiego $\mathbf{x}_0$, że $\mathbf{k}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}(0)$ przy kinematyce $\mathbf{k}(\mathbf{x})$ opisanej równaniem (2.77)). W tym celu rozwiązaliśmy układ równań różniczkowych (3.43) zainicjowany w punkcie $\mathbf{x}(0) = (1, 1, 1, 1, 1, 1)^T$. Wyniki, przy różnych wartościach parametru α , przedstawia rysunek 3.19.

Analogicznych obliczeń dokonaliśmy posługując się algorytmem (3.29) wykorzystującym pseudoodwrotność jakobianu analitycznego manipulatora (macierz $\mathbf{W} = \mathbb{I}_6$). Rezultat jest pokazany na rysunku 3.20. Po porównaniu



Rysunek 3.20 Rozwiązanie punktowego zadania odwrotnego dla manipulatora IRb-6 zamontowanego na torze jezdny uzyskane przy wykorzystaniu pseudoodwrotności jacobianu.

obu rysunków łatwo zauważyć, że algorytm z pseudoodwrotnością jacobianu charakteryzuje się szybszą zbieżnością. Ceną, jaką trzeba za to zapłacić, jest czas obliczeń. Czas znajdowania rozwiązania z użyciem jacobianu transponowanego był prawie o trzy rzędy krótszy od czasu potrzebnego na uzyskanie rozwiązania przy pomocy algorytmu (3.29) przy takich samych wartościach parametrów. ■

Geometryczne metody jacobianowe

Algorytmy kinematyki odwrotnej we współrzędnych, przedstawione formułami (3.20), (3.28), (3.33) i (3.40), można zaadaptować do rozwiązania zadania odwrotnego postawionego w sposób ogólny, bez odwołania do układów współrzędnych. W tym celu założymy, że jest dana trajektoria $\mathbf{z}_d(t) \in \mathcal{Z} \subset \text{SE}(3)$ na rozmaitości zadaniowej, określona w chwilach $t \in \mathcal{I} \subset \mathbb{R}$. Aby znaleźć odpowiednią trajektorię ruchu przegubów $\mathbf{q}_d(t)$, wyliczamy

prędkość w układzie przestrzeni

$$\mathbf{v}_d^s = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{\omega}_{sd}] & \mathbf{v}_{sd} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{z}}_d(t) \mathbf{z}_d^{-1}(t)$$

i wyznaczamy wektory $\boldsymbol{\omega}_{sd}$, $\mathbf{v}_{sd}$. Związek między prędkością $\dot{\mathbf{q}}$ ruchu przegubów a wektorem prędkości $(\mathbf{v}_s^T, \boldsymbol{\omega}_s^T)^T$ jest określony przez jacobian geometryczny w przestrzeni

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_s \\ \boldsymbol{\omega}_s \end{pmatrix} = \mathbf{J}^s(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}. \quad (3.44)$$

Odpowiednikiem algorytmu (3.33) jest w tym przypadku algorytm

$$\dot{\mathbf{q}}_d = \mathbf{J}_W^{s\#}(\mathbf{q}_d) \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{sd} \\ \boldsymbol{\omega}_{sd} \end{pmatrix} + (\mathbb{I}_n - \mathbf{J}_W^{s\#}(\mathbf{q}_d) \mathbf{J}^s(\mathbf{q}_d)) \mathbf{v}. \quad (3.45)$$

Analogicznie, dodając do kinematyki $\mathbf{K}(\mathbf{q})$ manipulatora $n-m$ niezależnych ograniczeń, jak w formule (3.37), otrzymujemy rozszerzony jacobian geometryczny w przestrzeni

$$\mathbf{J}^{se}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}^s(\mathbf{q}) \\ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

i formułujemy odpowiednik algorytmu (3.40) w postaci

$$\dot{\mathbf{q}}_d = (\mathbf{J}^{se})^{-1}(\mathbf{q}_d) \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{sd} \\ \boldsymbol{\omega}_{sd} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (3.47)$$

3.1.4 Metoda mnożników Lagrange’a

Rozważmy kinematykę manipulatora redundantnego wyrażoną we współrzędnych

$$\mathbf{y} = \mathbf{k}(\mathbf{x}),$$

gdzie $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, $m < n$, i założmy, że punktowe zadanie odwrotne polega na znalezieniu konfiguracji przegubów odpowiadającej osiągnięciu przez

efektor ustalonych współrzędnych zadaniowych $\mathbf{y}_d$. Metoda mnożników Lagrange'a polega na wprowadzeniu pewnej funkcji oceny jakości zachowania manipulatora $H(\mathbf{x})$, określonej na przestrzeni przegubowej, i sprowadzeniu zadania odwrotnego do zadania optymalizacji warunkowej funkcji $H(\mathbf{x})$ przy ograniczeniu równościowym

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{k}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_d = \mathbf{0}. \quad (3.48)$$

Standardowa metoda rozwiązywania takiego zadania wymaga zdefiniowania lagranżianu

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = H(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

zawierającego wektor mnożników Lagrange'a $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$. Warunki konieczne optymalności mają postać

$$\mathbf{J}^a T(\mathbf{x}) \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{h}(\mathbf{x}), \quad (3.49)$$

przy oznaczeniach $\mathbf{J}^a(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x})$, $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x})$. Załóżmy, że pierwsze m kolumn jacobianu analitycznego $\mathbf{J}^a(\mathbf{x})$ jest niezależnych. W celu wyeliminowania z układu równań (3.49) wektora $\boldsymbol{\lambda}$ podzielimy te równania na dwie grupy złożone, odpowiednio, z m pierwszych równań oraz z pozostałych $n - m$ równań, w następujący sposób

$$\mathbf{J}^a T(\mathbf{x}) \boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_m(\mathbf{x}) \\ \mathbf{J}_{n-m}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} \mathbf{h}_m(\mathbf{x}) \\ \mathbf{h}_{n-m}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Do wyliczenia mnożników Lagrange'a wykorzystamy pierwszą grupę równań otrzymując

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{J}_m^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{h}_m(\mathbf{x}). \quad (3.50)$$

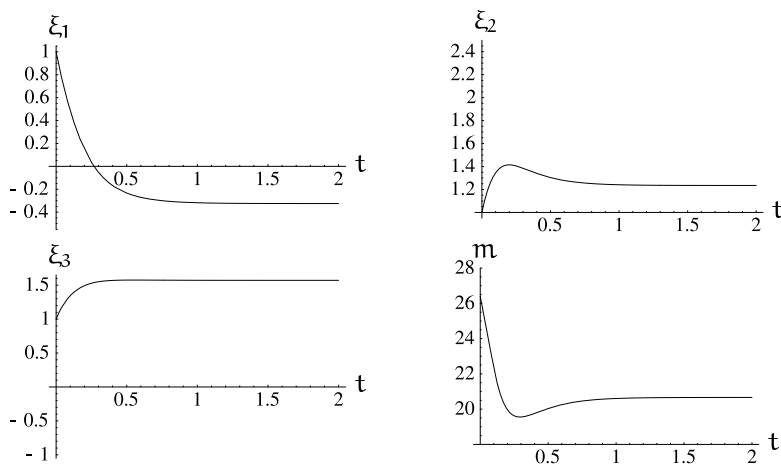
Podstawienie (3.50) do drugiej grupy równań pozwala uzyskać następującą zależność

$$[-\mathbf{J}_{n-m}(\mathbf{x}) \mathbf{J}_m^{-1}(\mathbf{x}) \quad \mathbb{I}_{n-m}] \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \quad (3.51)$$

Rozwiązanie odwrotnego zadania kinematyki jest teraz równoważne rozwiązaniu układu n równań złożonego z (3.48) oraz (3.51).

Przykład 3.1.12 (Potrójne wahadło)

Szukamy rozwiązania $\mathbf{x}_0$ punktowego zadania odwrotnego dla potrójnego wahadła z przykładu 3.1.7, dla punktu $\mathbf{y}_{d0} = (5, 2)^T$, który jest punktem

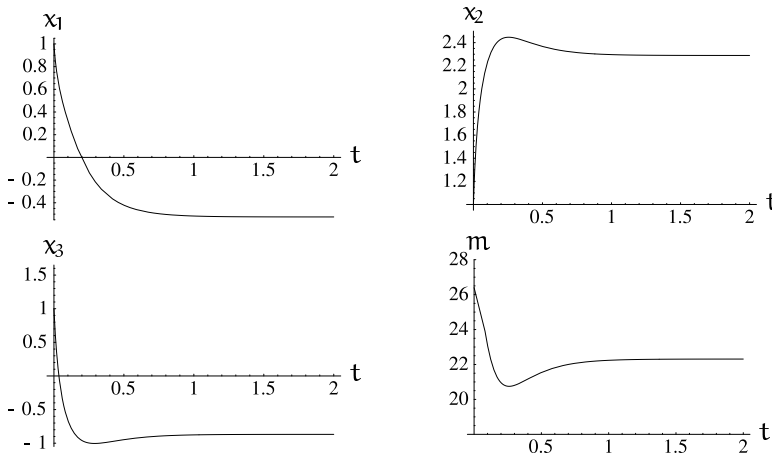


Rysunek 3.21 Rozwiązanie punktowego zadania odwrotnego dla potrójnego wadła uzyskane przy wykorzystaniu pseudoodwrotności jacobianu.

startowym trajektorii (3.31). Zadanie to można rozwiązać tak samo jak w przykładzie 3.1.7, wykorzystując układ równań różniczkowych (3.29). Przebieg trajektorii układu (3.29) dla $\alpha = 5$, $\mathbf{W} = \mathbb{I}_3$ oraz warunku początkowego $\boldsymbol{\xi} = (1, 1, 1)^\top$ przedstawia rysunek 3.21. Na rysunku pokazaliśmy także przebieg funkcji manipulowalności manipulatora $m(\mathbf{x}(t))^*$ wzdłuż otrzymanej trajektorii. Jako rozwiązanie zadania punktowego otrzymujemy w ten sposób konfigurację $\mathbf{x}_0 = (-0.325, 1.23, 1.57)^\top$, dla której manipulowalność wynosi $m(\mathbf{x}_0) = 20.7$.

Podany wyżej sposób pozwala na znalezienie jednego z wielu rozwiązań zadania odwrotnego. Jeżeli interesuje nas rozwiązanie spełniające dodatkowe kryteria, do jego określenia możemy posłużyć się metodą mnożników Lagrange'a z odpowiednio dobraną funkcją oceny jakości zachowania manipulatora $H(\mathbf{x})$. Załóżmy, że zależy nam na znalezieniu rozwiązania położonego możliwie daleko od konfiguracji osobliwych. W tym celu funkcję $H(\mathbf{x})$ przyjmijmy w postaci kwadratu funkcji manipulowalności $m(\mathbf{x})$. Po dokonaniu takiego wyboru, w wyniku rozwiązania układu równań (3.48), (3.51) za pomocą algorytmu Newtona otrzymujemy przebiegi położenia przegubów manipulatora i manipulowalności przedstawione na rysunku 3.22. Rozwiązaniem zadania punktowego jest wektor położenia przegubów manipulatora $\mathbf{x}_0 = (-0.525, 2.29, -0.869)^\top$, dla którego manipulowalność osiąga wartość $m(\mathbf{x}_0) = 22.3$. ■

*Zdefiniowanej w następnym podrozdziale.



Rysunek 3.22 Rozwiązanie punktowego zadania odwrotnego dla potrójnego wadła uzyskane metodą mnożników Lagrange'a.

3.1.5 Elipsoida manipulowalności

Z definicji jacobianu analitycznego lub geometrycznego manipulatora wynika, że obydwa typy jacobianów można traktować jako zależne od bieżącej konfiguracji przekształcenia liniowe prędkości ruchu w przegubach w prędkość ruchu efektora. Dla ustalenia uwagi rozważmy jacobian analityczny $J^a(\mathbf{x})$ jako przekształcenie prędkości

$$\dot{\mathbf{y}} = J^a(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}}.$$

Zdefiniujmy sferę jednostkową w przestrzeni prędkości przegubowych

$$S = \{\dot{\mathbf{x}} \mid \|\dot{\mathbf{x}}\|^2 = 1\}$$

i wyznaczmy jej obraz w przestrzeni prędkości zadaniowych korzystając z zależności (3.28) przy założeniu, że macierz $\mathbf{W} = \mathbb{I}_n$. W wyniku otrzymujemy elipsoidę

$$\mathbf{E}_m(\mathbf{x}) = \left\{ \dot{\mathbf{y}} \mid \dot{\mathbf{y}}^T (J^a(\mathbf{x})J^{aT}(\mathbf{x}))^{-1} \dot{\mathbf{y}} = 1 \right\}, \quad (3.52)$$

zwaną *elipsoidą manipulowalności*. Macierz

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = J^a(\mathbf{x})J^{aT}(\mathbf{x})$$

rozmiaru $m \times m$ nazywamy *macierzą manipulowalności*. Z definicji ma-

cierzy manipulowalności i twierdzenia Rayleigha-Ritza* wynika następujące oszacowanie

$$\underline{\lambda}_{\mathbf{M}(\mathbf{x})} \|\mathbf{v}\|^2 \leq \mathbf{v}^T \mathbf{M}(\mathbf{x}) \mathbf{v} \leq \bar{\lambda}_{\mathbf{M}(\mathbf{x})} \|\mathbf{v}\|^2,$$

gdzie $\underline{\lambda}_{\mathbf{M}(\mathbf{x})}$, $\bar{\lambda}_{\mathbf{M}(\mathbf{x})}$ oznaczają, odpowiednio, najmniejszą i największą wartość własną macierzy $\mathbf{M}(\mathbf{x})$. W konsekwencji, elipsoida (3.52) zawiera się w pierścieniu sferycznym ograniczonym dwiema sferami

$$\|\dot{\mathbf{y}}\|^2 = \underline{\lambda}_{\mathbf{M}(\mathbf{x})} \quad \text{oraz} \quad \|\dot{\mathbf{y}}\|^2 = \bar{\lambda}_{\mathbf{M}(\mathbf{x})}$$

o promieniach $\sqrt{\underline{\lambda}_{\mathbf{M}(\mathbf{x})}}$, $\sqrt{\bar{\lambda}_{\mathbf{M}(\mathbf{x})}}$. Elipsoida manipulowalności obrazuje zdolności manipulacyjne manipulatora zwane zręcznością manipulatora; w szczególności to, na ile elipsoida odbiega od sfery wskazuje na *stopień anizotropii* działania manipulatora w danej konfiguracji. W konfiguracji izotropowej, tzn. gdy $\underline{\lambda}_{\mathbf{M}(\mathbf{x})} = \bar{\lambda}_{\mathbf{M}(\mathbf{x})}$, elipsoida manipulowalności staje się sferą. Miarą liczbową manipulowalności w danej konfiguracji jest objętość elipsoidy manipulowalności[†]

$$m(\mathbf{x}) = \sqrt{\det \mathbf{M}(\mathbf{x})}, \quad (3.53)$$

która w przypadku manipulatora nieredundantnego jest równa

$$m(\mathbf{x}) = |\det \mathbf{J}^a(\mathbf{x})|. \quad (3.54)$$

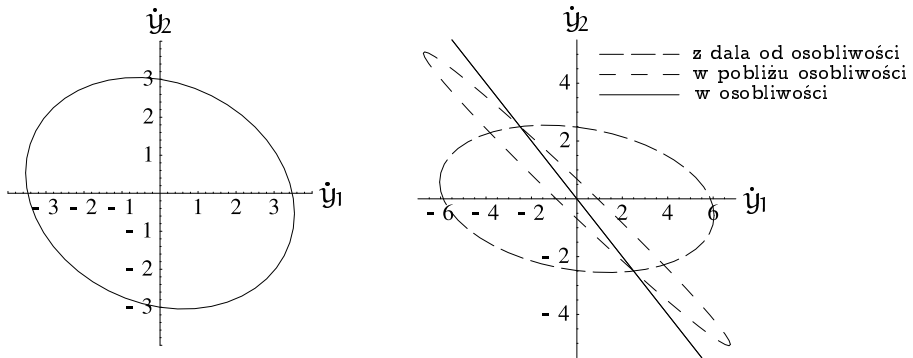
Funkcja $m(\mathbf{x})$ nazywa się *funkcją manipulowalności* manipulatora. Jak wynika z definicji (3.53), manipulowalność w konfiguracji $\mathbf{x}$ jest równa pierwiastkowi kwadratowemu z iloczynu wartości własnych macierzy manipulowalności,

$$m(\mathbf{x}) = \sqrt{\prod_{i=1}^m \lambda_{\mathbf{M}(\mathbf{x}) i}}. \quad (3.55)$$

Zgodnie z oczekiwaniem, manipulowalność maleje do zera w konfiguracjach osobliwych.

*Zobacz dodatek A.1.

[†]Ściśle, objętość elipsoidy manipulowalności $= m(\mathbf{x})V(\mathbb{S}^{m-1})$, gdzie $V(\mathbb{S}^{m-1})$ oznacza objętość sfery jednostkowej w $\mathbb{R}^m$.



Rysunek 3.23 Przykładowa elipsoida manipulowalności dla manipulatora typu podwójne wahadło oraz wpływ odległości od konfiguracji osobliwej na kształt elipsoidy.

Wartości własne macierzy manipulowalności mogą posłużyć do zdefiniowania innych miar zręczności manipulatora. Do ważniejszych miar należy tzw. *stopień uwarunkowania* konfiguracji $\mathbf{x}$,

$$\kappa(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{\bar{\lambda}_{\mathbf{M}(\mathbf{x})}}{\underline{\lambda}_{\mathbf{M}(\mathbf{x})}}}, \quad (3.56)$$

którego duże wartości wskazują na znaczny stopień anizotropii konfiguracji $\mathbf{x}$. Dla konfiguracji bliskich osobliwym stopień uwarunkowania rośnie nieograniczenie. Funkcje $m(\mathbf{x})$, $\kappa(\mathbf{x})$ mogą być wykorzystywane w algorytmach kinematyki odwrotnej typu (3.33) do uzyskania trajektorii $\mathbf{x}(t)$ zapewniającej dużą manipulowalność lub izotropowość manipulatora. W tym celu za wektor $\mathbf{v}$ w wyrażeniu (3.33) należy podstawić odpowiednio

$$\mathbf{v} = \beta \frac{\partial m(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \quad \text{lub} \quad \mathbf{v} = -\beta \frac{\partial \kappa(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}, \quad \beta > 0.$$

Przykład 3.1.13 (Manipulator typu podwójne wahadło)

Rysunek 3.23 przedstawia przykładową elipsoidę[‡] manipulowalności dla manipulatora typu podwójne wahadło (wykres po lewej stronie), oraz wpływ odległości od konfiguracji osobliwej na kształt tej elipsoidy (wykres po prawej stronie). Jak widać, w miarę zbliżania się do osobliwości, powierzchnia ograniczona elipsą maleje, by w konfiguracji osobliwej spaść do zera (elipsa degeneruje się do odcinka). ■

[‡]W istocie — elipsę.

3.2 Osobliwe odwrotne zadanie kinematyki

We wszystkich rozważanych dotąd algorytmach kinematyki odwrotnej wymagana była nieosobliwość jacobianu manipulatora, czyli pełny rząd wierszowy macierzy $\mathbf{J}^a(\mathbf{x})$, $\mathbf{J}^s(\mathbf{q})$, $\mathbf{J}^b(\mathbf{q})$, $\mathbf{J}^m(\mathbf{q})$. Występowanie konfiguracji osobliwych manipulatora ma wpływ na istnienie i jednoznaczność rozwiązania odwrotnego zadania kinematyki. Ze względu na złe uwarunkowanie operacji wyznaczania odwrotności (pseudoodwrotności) jacobianu manipulatora w pobliżu konfiguracji osobliwych, co może prowadzić do nieograniczonego wzrostu prędkości ruchu przegubów manipulatora, osobliwe zadanie odwrotne kinematyki wymaga zastosowania specjalnych algorytmów.

3.2.1 Unikanie osobliwości

Pojęcia podstawowe

Istnienie konfiguracji osobliwych manipulatorów posiadających nieograniczone przeguby obrotowe ma źródło w odmiennej geometrii rozmaitości konfiguracyjnej i rozmaitości zadaniowej manipulatora. Ta przyczyna osobliwości kinematyki ma charakter fundamentalny i nie może być usunięta poprzez przekonstruowanie manipulatora (z wyjątkiem mechanicznego ograniczenia zakresu ruchu w przegubach obrotowych). W szczególności, zwiększenie liczby stopni swobody manipulatora (wprowadzenie redundancji) nie eliminuje konfiguracji osobliwych, chociaż powoduje, że ich obecność staje się mniej uciążliwa. Okazuje się bowiem, że redundancja manipulatora może zostać wykorzystana do uniknięcia pewnych konfiguracji osobliwych przy realizacji zadania manipulatora. Aby przedstawić zagadnienie unikania konfiguracji osobliwych w sposób precyzyjny, załóżmy, że jest dana reprezentacja kinematyki manipulatora redundantnego ($n > m$) we współrzędnych (2.65),

$$\mathbf{k} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{y} = \mathbf{k}(\mathbf{x}). \quad (3.57)$$

Konfiguracje osobliwe kinematyki, traktowanej jako odwzorowanie, należą do zbioru

$$\mathbf{S} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \left| \text{rank} \left(\mathbf{J}^a(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \right) < m \right. \right\}.$$

Powiadamy, że konfiguracja osobliwa $\mathbf{x} \in \mathbf{S}$ jest *możliwa do uniknięcia*, jeżeli istnieje nieosobliwa konfiguracja $\mathbf{x}'$ manipulatora, taka że $\mathbf{k}(\mathbf{x}) = \mathbf{k}(\mathbf{x}')$.

W przeciwnym razie, konfiguracja $\mathbf{x}$ jest *niemożliwa do uniknięcia*. Własność „możliwa do uniknięcia” oznacza, że położenie i orientacja efektora w przestrzeni zadaniowej, osiągalne w konfiguracji osobliwej, mogą być zrealizowane w innej, nieosobliwej konfiguracji manipulatora. Jeżeli ta konfiguracja nieosobliwa leży w pewnym (małym) otoczeniu konfiguracji osobliwej $\mathbf{x}$, mówimy że konfiguracja $\mathbf{x}$ jest *lokalnie możliwa do uniknięcia*. Jak łatwo zauważyć, własność „lokalnie możliwa do uniknięcia” jest mocniejsza od własności „możliwa do uniknięcia”. Jeżeli w pewnym otoczeniu konfiguracji $\mathbf{x}$ nie ma nieosobliwej konfiguracji $\mathbf{x}'$, takiej że $\mathbf{k}(\mathbf{x}) = \mathbf{k}(\mathbf{x}')$, to $\mathbf{x}$ nazywamy konfiguracją *lokalnie niemożliwą do uniknięcia*. Ta ostatnia własność jest w oczywisty sposób słabsza od własności „niemożliwa do uniknięcia”.

Kinematyka o stopniu redundancji 1

Kryteria własności „konfiguracja osobliwa możliwa do uniknięcia” przedstawimy najpierw przy założeniu, że stopień redundancji kinematyki (3.57) wynosi 1, tzn. gdy $n = m + 1$. W tym celu stowarzyszymy z kinematyką pewien układ dynamiczny

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}), \quad (3.58)$$

zwany *układem dynamicznym ruchu własnego*, w którym poszczególne składowe pola wektorowego $\mathbf{X}(\mathbf{x}) = (X_1(\mathbf{x}), \dots, X_n(\mathbf{x}))^T$ definiuje się formułą

$$X_i(\mathbf{x}) = (-1)^{i+1} \det \mathbf{J}^{ai}(\mathbf{x}), \quad (3.59)$$

a symbol $\mathbf{J}^{ai}(\mathbf{x})$ oznacza jacobian analityczny $\mathbf{J}^a(\mathbf{x})$ z usuniętą i -tą kolumną.

Można pokazać, że układ dynamiczny ruchu własnego został zdefiniowany w taki sposób, że $\mathbf{X}(\mathbf{x}) \in \text{Ker } \mathbf{J}^a(\mathbf{x})$, pole $\mathbf{X}$ ma zerową dywergencję,

$$\text{div } \mathbf{X}(\mathbf{x}) = \text{tr } \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = 0,$$

a jego punkty równowagi $\mathbf{X}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ znajdują się w konfiguracjach osobliwych. Wynika stąd, że trajektoria układu (3.58), różna od punktu równowagi, składa się z konfiguracji nieosobliwych. Co więcej, wzdłuż trajektorii tego układu kinematyka $\mathbf{k}(\mathbf{x})$ przyjmuje stałą wartość. Oznacza to, że trajektorie leżą na tzw. *rozmaitości ruchu własnego* kinematyki. Jeżeli pewna trajektoria zbliża się asymptotycznie przy $t \rightarrow \pm\infty$ do punktu równowagi układu

dynamicznego ruchu własnego, oznacza to, że wartości współrzędnych zadaniowych przyjmowane przez kinematykę manipulatora w punkcie równowagi i na trajektorii są takie same. W konsekwencji, konfiguracja osobliwa odpowiadająca punktowi równowagi układu dynamicznego ruchu własnego jest możliwa do uniknięcia. Jeżeli natomiast punkt równowagi nie posiada dążących do/od niego trajektorii układu (3.58), to odpowiadająca mu konfiguracja osobliwa jest niemożliwa do uniknięcia. Wyrażając to spostrzeżenie w sposób formalny powiemy, że konfiguracja osobliwa $\mathbf{x}$ jest możliwa do uniknięcia, jeżeli punkt $\mathbf{x}$ jest asymptotycznie stabilnym lub niestabilnym punktem równowagi układu (3.58). Konfiguracja $\mathbf{x}$ jest niemożliwa do uniknięcia, jeżeli $\mathbf{x}$ jest punktem równowagi układu (3.58), stabilnym w sensie Lapunowa. Dzięki takiemu sformułowaniu, rozstrzyganie czy dana konfiguracja osobliwa manipulatora jest możliwa czy niemożliwa do uniknięcia zostało sprowadzone do badania stabilności układu dynamicznego ruchu własnego. Elementarnym warunkiem wystarczającym na to, aby konfiguracja osobliwa $\mathbf{x}$ była lokalnie możliwa do uniknięcia (a więc możliwa do uniknięcia) jest, by macierz przybliżenia liniowego układu (3.58) w punkcie równowagi posiadała wartość własną o różnej od zera części rzeczywistej.

Badanie stabilności układu (3.58) upraszcza się znacznie przy odpowiednim wyborze współrzędnych przegubowych. Niech $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, \dots, x_{0m-1}, x_{0m}, x_{0n})^T$ oznacza konfigurację osobliwą kinematyki (3.57) korzędu 1, co oznacza, że jacobian analityczny $\mathbf{J}^a(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0)$ ma rząd $m-1$. Bez utraty ogólności możemy założyć, że w konfiguracji $\mathbf{x}_0$ jacobian analityczny spełnia następujący warunek

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \frac{\partial k_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial k_1}{\partial x_{m-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial k_{m-1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial k_{m-1}}{\partial x_{m-1}} \end{bmatrix}(\mathbf{x}_0) = m-1. \quad (3.60)$$

Korzystając z własności (3.60) zdefiniujemy w pewnym otoczeniu $\mathbf{x}_0$ nowy układ współrzędnych

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = (k_1(\mathbf{x}), \dots, k_{m-1}(\mathbf{x}), x_m, x_n)^T. \quad (3.61)$$

Nietrudno sprawdzić, że $\text{rank} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) = n$, zatem, na mocy twierdzenia o funkcji odwrotnej*, (3.61) jest odwzorowaniem lokalnie wzajemnie jednoznaczny i gładkim (tzn. lokalnym dyfeomorfizmem). W nowych współ-

*Zobacz dodatek A.2.

rzędnych kinematyka $y = \mathbf{k}(\mathbf{x})$ przyjmuje postać

$$\mathbf{y} = \mathbf{k} \circ \boldsymbol{\varphi}^{-1}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{h}(\boldsymbol{\xi}) = (\xi_1, \dots, \xi_{m-1}, h_m(\boldsymbol{\xi}))^T,$$

w której funkcja h_m spełnia warunek $h_m \circ \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = k_m(\mathbf{x})$. Układ dynamiczny ruchu własnego upraszcza się w nowych współrzędnych do postaci ($n = m + 1$)

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = 0 & \dots & \dot{\xi}_{m-1} = 0 \\ \dot{\xi}_m = (-1)^{m+1} \frac{\partial h_m(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_n} \\ \dot{\xi}_n = (-1)^{m+2} \frac{\partial h_m(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_m}. \end{cases} \quad (3.62)$$

Co więcej, ponieważ współrzędne $\xi_1 = k_1(\mathbf{x}_0), \dots, \xi_{m-1} = k_{m-1}(\mathbf{x}_0)$ są stałe na trajektoriach układu, dynamika układu (3.62) redukuje się do dynamiki układu hamiltonowskiego w $\mathbb{R}^2$

$$\dot{q} = \frac{\partial H(q, p)}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q}, \quad (3.63)$$

z hamiltonianem $H(q, p) = (-1)^{m+1} h_m(k_1(\mathbf{x}_0), \dots, k_{m-1}(\mathbf{x}_0), q, p)^\dagger$.

Punktem równowagi układu (3.63) jest $q_0 = x_{0m}, p_0 = x_{0n}$. Ze względu na to, że punkty równowagi układu hamiltonowskiego są punktami krytycznymi hamiltonianu $H(q, p)$, stabilne w sensie Lapunowa będą te punkty, w których hamiltonian osiąga minimum bądź maksimum, natomiast niestabilne są punkty, w których hamiltonian ma punkt siodłowy. Wynika stąd następujące kryterium.

Twierdzenie 3.2.1 *Niech $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, \dots, x_{0m}, x_{0n})^T \in \mathbb{R}^n$ oznacza konfigurację osobliwą korzędu 1 kinematyki $\mathbf{k}(\mathbf{x}) = (k_1(\mathbf{x}), k_2(\mathbf{x}), \dots, k_m(\mathbf{x}))^T$ o stopniu redundancji 1 spełniającej warunek (3.60). Zdefiniujmy wyróżnik Δ konfiguracji osobliwej*

$$\Delta(\mathbf{x}_0) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial q^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} & \frac{\partial^2 H}{\partial p^2} \end{bmatrix} (x_{0m}, x_{0n}).$$

Wówczas, jeżeli wyróżnik

$$\Delta(\mathbf{x}_0) > 0,$$

[†]Zobacz dodatek A.3.

to konfiguracja $\mathbf{x}_0$ jest lokalnie niemożliwa do uniknięcia. W przypadku, gdy wyróżnik

$$\Delta(\mathbf{x}_0) < 0,$$

konfiguracja $\mathbf{x}_0$ jest lokalnie możliwa do uniknięcia. W oryginalnych współrzędnych w przestrzeni przegubowej

$$\Delta(\mathbf{x}_0) = AB - C^2,$$

przy czym wyrażenia A , B , C są określone przez następujące zależności:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial^2 k_m}{\partial x_m^2} - \left(\frac{\partial \mathbf{k}^{m-1}}{\partial x_m} \right)^T \mathbf{P} \frac{\partial \mathbf{k}^{m-1}}{\partial x_m} - 2\mathbf{R} \frac{\partial \mathbf{k}^{m-1}}{\partial x_m} - \mathbf{T} \frac{\partial^2 \mathbf{k}^{m-1}}{\partial x_m^2}, \\ B &= \frac{\partial^2 k_m}{\partial x_n^2} - \left(\frac{\partial \mathbf{k}^{m-1}}{\partial x_n} \right)^T \mathbf{P} \frac{\partial \mathbf{k}^{m-1}}{\partial x_n} - 2\mathbf{S} \frac{\partial \mathbf{k}^{m-1}}{\partial x_n} - \mathbf{T} \frac{\partial^2 \mathbf{k}^{m-1}}{\partial x_n^2}, \\ C &= \frac{\partial^2 k_m}{\partial x_m \partial x_n} - \left(\frac{\partial \mathbf{k}^{m-1}}{\partial x_n} \right)^T \mathbf{P} \frac{\partial \mathbf{k}^{m-1}}{\partial x_m} - \mathbf{S} \frac{\partial \mathbf{k}^{m-1}}{\partial x_m} + \\ &\quad - \mathbf{R} \frac{\partial \mathbf{k}^{m-1}}{\partial x_n} - \mathbf{T} \frac{\partial^2 \mathbf{k}^{m-1}}{\partial x_m \partial x_n}, \end{aligned}$$

natomiast macierz $\mathbf{P}$ i wektory wierszowe $\mathbf{R}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{T}$ spełniają równania

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \frac{\partial \mathbf{k}^{m-1}}{\partial \mathbf{x}^{m-1}} &= \frac{\partial k_m}{\partial \mathbf{x}^{m-1}}, \\ \left(\frac{\partial \mathbf{k}^{m-1}}{\partial \mathbf{x}^{m-1}} \right)^T \mathbf{P} \frac{\partial \mathbf{k}^{m-1}}{\partial \mathbf{x}^{m-1}} + \begin{bmatrix} \mathbf{T} \frac{\partial^2 \mathbf{k}^{m-1}}{\partial x_1 \partial \mathbf{x}^{m-1}} \\ \vdots \\ \mathbf{T} \frac{\partial^2 \mathbf{k}^{m-1}}{\partial x_{m-1} \partial \mathbf{x}^{m-1}} \end{bmatrix} &= \frac{\partial^2 k_m}{\partial \mathbf{x}^{m-1} \partial \mathbf{x}^{m-1}}, \\ \mathbf{R} \frac{\partial \mathbf{k}^{m-1}}{\partial \mathbf{x}^{m-1}} + \mathbf{T} \frac{\partial^2 \mathbf{k}^{m-1}}{\partial x_m \partial \mathbf{x}^{m-1}} + \left(\frac{\partial \mathbf{k}^{m-1}}{\partial x_m} \right)^T \mathbf{P} \frac{\partial \mathbf{k}^{m-1}}{\partial \mathbf{x}^{m-1}} &= \frac{\partial^2 k_m}{\partial x_m \partial \mathbf{x}^{m-1}}, \\ \mathbf{S} \frac{\partial \mathbf{k}^{m-1}}{\partial \mathbf{x}^{m-1}} + \mathbf{T} \frac{\partial^2 \mathbf{k}^{m-1}}{\partial x_n \partial \mathbf{x}^{m-1}} + \left(\frac{\partial \mathbf{k}^{m-1}}{\partial x_n} \right)^T \mathbf{P} \frac{\partial \mathbf{k}^{m-1}}{\partial \mathbf{x}^{m-1}} &= \frac{\partial^2 k_m}{\partial x_n \partial \mathbf{x}^{m-1}}. \end{aligned}$$

W powyższych wzorach $\mathbf{k}^{m-1} = (k_1, \dots, k_{m-1})^T$, $\mathbf{x}^{m-1} = (x_1, \dots, x_{m-1})^T$, $n = m + 1$, a wszystkie pochodne cząstkowe należy obliczyć w konfiguracji osobliwej $\mathbf{x}_0$.

Kinematyka o stopniu redundancji ≥ 1

Obecnie zajmujemy się kinematyką $\mathbf{y} = \mathbf{k}(\mathbf{x})$ o dowolnym stopniu redundancji $r = n - m \geq 1$. Niech $\mathbf{x}_0$ oznacza, jak poprzednio, konfigurację osobiłwą. Jakobian analityczny $\mathbf{J}^a(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x})$ ma obecnie rozmiar $m \times n$. Ustalmy zbiór wskaźników $1 \leq i_1 < \dots < i_{m+1} \leq n$ i zdefiniujmy układ dynamiczny

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}_{i_1 \dots i_{m+1}}(\mathbf{x}), \quad (3.64)$$

którego pole wektorowe $\mathbf{X}_{i_1 \dots i_{m+1}}(\mathbf{x}) = (X_{i_1 \dots i_{m+1} 1}(\mathbf{x}), \dots, X_{i_1 \dots i_{m+1} n}(\mathbf{x}))^T$ ma składowe

$$\begin{aligned} X_{i_1 \dots i_{m+1} k}(\mathbf{x}) &= \\ &= \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } k \neq i_1, \dots, i_{m+1}, \\ (-1)^{r+1} \det \mathbf{J}_{i_1 \dots i_{m+1}}^{ak}(\mathbf{x}), & \text{jeżeli } k = i_r \text{ dla pewnego } r. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.65)$$

W wyrażeniu (3.65) $\mathbf{J}_{i_1 \dots i_{m+1}}^{ak}(\mathbf{x})$ oznacza macierz rozmiaru $m \times m$ złożoną z kolumn jakobianu analitycznego $\mathbf{J}^a(\mathbf{x})$ o numerach $i_1, \dots, i_{m+1}$, z usuniętą kolumną numer k . Biorąc wszystkie kombinacje wskaźników $i_1, \dots, i_{m+1}$ uzyskujemy rodzinę układów dynamicznych postaci (3.64), zwanych *układami hamiltonowskimi* stowarzyszonymi z kinematyką $\mathbf{k}$. Pola $\mathbf{X}_{i_1 \dots i_{m+1}}$ noszą nazwę hamiltonowskich. Podobnie, jak w przypadku stopnia redundancji $r = 1$, pola hamiltonowskie $\mathbf{X}_{i_1 \dots i_{m+1}}(\mathbf{x}) \in \text{Ker } \mathbf{J}^a(\mathbf{x})^\dagger$, ich dywergencja $\text{div } \mathbf{X}_{i_1 \dots i_{m+1}}(\mathbf{x}) = 0$, a konfiguracja osobiłwa $\mathbf{x}_0$ jest punktem równowagi każdego układu hamiltonowskiego. Możliwość lub niemożliwość uniknięcia konfiguracji $\mathbf{x}_0$ będzie zależna od przebiegu trajektorii układów hamiltonowskich w pobliżu punktu równowagi. Pociąga to za sobą następujący warunek wystarczający na to, aby konfiguracja osobiłwa była możliwa do uniknięcia: jest tak, jeżeli istnieje taki układ hamiltonowski $\mathbf{X}_{i_1 \dots i_{m+1}}(\mathbf{x})$, którego macierz przybliżenia liniowego w punkcie $\mathbf{x}_0$ posiada wartość własną o niezerowej części rzeczywistej.

Skoncentrujemy teraz naszą uwagę na konfiguracjach osobiłwych korzędu 1. Dla każdej konfiguracji korzędu 1 istnieją takie współrzędne w przestrzeni przegubowej, określone w pewnym otoczeniu konfiguracji osobiłwej, że układy hamiltonowskie (3.64) przyjmują szczególnie prostą postać.

[†]Zauważmy, że pola hamiltonowskie należą do dystrybucji rozpiętej przez kolumny macierzy $\mathbf{J}_w^{a\#} \mathbf{J}^a - \mathbb{I}_n$.

Założmy, że w konfiguracji osobliwej $\mathbf{x}_0$ jacobian analityczny manipulatora $\mathbf{J}^a(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0)$ spełnia warunek

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \frac{\partial k_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial k_1}{\partial x_{m-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial k_{m-1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial k_{m-1}}{\partial x_{m-1}} \end{bmatrix}(\mathbf{x}_0) = m - 1. \quad (3.66)$$

Korzystając z (3.66), zdefiniujemy wokół $\mathbf{x}_0$ układ współrzędnych

$$\boldsymbol{\xi} = (k_1(\mathbf{x}), \dots, k_{m-1}(\mathbf{x}), x_m, \dots, x_n)^T.$$

Kinematykę $\mathbf{y} = \mathbf{k}(\mathbf{x})$ w nowych współrzędnych można zapisać jako

$$\mathbf{y} = \mathbf{k} \circ \boldsymbol{\varphi}^{-1}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{h}(\boldsymbol{\xi}) = (\xi_1, \dots, \xi_{m-1}, h_m(\boldsymbol{\xi}))^T,$$

przy czym funkcja $h_m(\boldsymbol{\xi})$ spełnia warunek $h_m \circ \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = k_m(\mathbf{x})$. W nowych współrzędnych tylko pola $\mathbf{X}_{12\dots m \mp i}(\boldsymbol{\xi})$, $i = 1, 2, \dots, n - m$, nie są tożsamościowo równe zeru, przy czym

$$\begin{cases} X_{12\dots m \mp i, m}(\boldsymbol{\xi}) = (-1)^{m+1} \frac{\partial h_m(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_{m+i}} \\ X_{12\dots m \mp i, m+i}(\boldsymbol{\xi}) = (-1)^{m+2} \frac{\partial h_m(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_m}, \end{cases} \quad (3.67)$$

natomiast pozostałe składowe pola $\mathbf{X}_{12\dots m \mp i}(\boldsymbol{\xi})$ znikają. Z definicji (3.67) wynika istnienie zbioru niezmienniczego

$$\mathbf{M} = \{ \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T \in \mathbb{R}^n \mid \xi_j = k_j(\mathbf{x}_0), j = 1, \dots, m - 1 \},$$

wspólnego dla wszystkich pól hamiltonowskich. Oznaczmy współrzędne na zbiorze $\mathbf{M} \cong \mathbb{R}^{n-m+1}$ jako $\boldsymbol{\theta} = (\theta_0, \dots, \theta_{n-m})^T$ i niech $\mathbf{X}_{12\dots m \mp i}^{\mathbf{M}}$ będzie ograniczeniem pola $\mathbf{X}_{12\dots m \mp i}$, $i = 1, 2, \dots, n - m$, do zbioru niezmienniczego $\mathbf{M}$. Zdefiniujmy funkcję

$$H(\boldsymbol{\theta}) = h_m(k_1(\mathbf{x}_0), \dots, k_{m-1}(\mathbf{x}_0), \theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{n-m}). \quad (3.68)$$

Nietrudno pokazać, że

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{12\dots m \mp i, 0}^{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\theta}) &= (-1)^{m+1} \frac{\partial H(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i}, \\ \mathbf{X}_{12\dots m \mp i, i}^{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\theta}) &= (-1)^{m+2} \frac{\partial H(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_0}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Co więcej, funkcja $H(\boldsymbol{\theta})$ jest całką pierwszą (stałą ruchu)[§] każdego z pól wektorowych (3.69), co oznacza, że

$$dH\mathbf{X}_{12\dots m\ m-i}^{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\theta}) = 0.$$

Bezpośrednią konsekwencją istnienia stałej ruchu jest następujący rezultat.

Twierdzenie 3.2.2 *Niech $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0m-1}, x_{0m}, \dots, x_{0n})^T \in \mathbb{R}^n$ będzie konfiguracją osobliwą korzędu 1 kinematyki manipulatora $\mathbf{k}(\mathbf{x}) = (k_1(\mathbf{x}), k_2(\mathbf{x}), \dots, k_m(\mathbf{x}))^T$ o stopniu redundancji ≥ 1 spełniającej warunek (3.66). Załóżmy, że macierz Hessego stałej ruchu*

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial^2 H}{\partial \boldsymbol{\theta}^2}(x_{0m}, x_{0m+1}, \dots, x_{0n}) \quad (3.70)$$

ma niezerowe wartości własne i określmy indeks $\Gamma(\mathbf{x}_0)$ macierzy $\mathbf{H}(\mathbf{x}_0)$ jako liczbę ujemnych wartości własnych $\mathbf{H}(\mathbf{x}_0)$. Wówczas, jeżeli

$$\Gamma(\mathbf{x}_0) = 0 \quad \text{lub} \quad \Gamma(\mathbf{x}_0) = n - m + 1,$$

to $\mathbf{x}_0$ jest konfiguracją lokalnie niemożliwą do uniknięcia. Jeżeli

$$1 \leq \Gamma(\mathbf{x}_0) \leq n - m,$$

to konfiguracja $\mathbf{x}_0$ jest lokalnie możliwa do uniknięcia. W oryginalnych współrzędnych w przestrzeni przegubowej, macierz (3.70) można wyrazić w następującej formie

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{x}_0) = & -\mathbf{M}^T(\mathbf{X} - \mathbf{P})\mathbf{M} - \left(\mathbf{M}^T(\mathbf{Y} - \mathbf{Q}) + \right. \\ & \left. + (\mathbf{M}^T(\mathbf{Y} - \mathbf{Q}))^T \right) + (\mathbf{W} - \mathbf{S}), \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \left(\frac{\partial \mathbf{k}^{m-1}}{\partial \mathbf{x}^{m-1}} \right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{k}^{m-1}}{\partial \mathbf{x}_m}, & \mathbf{X} &= \frac{\partial^2 \mathbf{k}_m}{\partial (\mathbf{x}^{m-1})^2}, \\ \mathbf{Y} &= \frac{\partial^2 \mathbf{k}_m}{\partial \mathbf{x}^{m-1} \partial \mathbf{x}_m}, & \mathbf{W} &= \frac{\partial^2 \mathbf{k}_m}{\partial \mathbf{x}_m^2}, \\ P_{ij} &= \frac{\partial k_m}{\partial \mathbf{x}^{m-1}} \left(\frac{\partial \mathbf{k}^{m-1}}{\partial \mathbf{x}^{m-1}} \right)^{-1} \frac{\partial^2 \mathbf{k}^{m-1}}{\partial x_i \partial x_j}, & i, j &\leq m-1, \end{aligned}$$

[§] Zobacz dodatek A.3.

$$Q_{ij} = \frac{\partial k_m}{\partial \mathbf{x}^{m-1}} \left(\frac{\partial \mathbf{k}^{m-1}}{\partial \mathbf{x}^{m-1}} \right)^{-1} \frac{\partial^2 \mathbf{k}^{m-1}}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i \leq m-1, \quad m \leq j \leq n,$$

$$S_{ij} = \frac{\partial k_m}{\partial \mathbf{x}^{m-1}} \left(\frac{\partial \mathbf{k}^{m-1}}{\partial \mathbf{x}^{m-1}} \right)^{-1} \frac{\partial^2 \mathbf{k}^{m-1}}{\partial x_i \partial x_j}, \quad m \leq i, \quad j \leq n,$$

przy oznaczeniach $\mathbf{x}^{m-1} = (x_1, \dots, x_{m-1})^T$, $\mathbf{x}_m = (x_m, \dots, x_n)^T$, $\mathbf{k}^{m-1} = (k_1, \dots, k_{m-1})^T$ oraz przy założeniu, że wszystkie pochodne cząstkowe zostały obliczone w konfiguracji osobliwej $\mathbf{x}_0$ [¶].

Przykład 3.2.1 (Manipulator IRb-6 na torze jezdny)

Dla ilustracji warunków unikania konfiguracji osobliwych podanych w twierdzeniu 3.2.2 rozważymy kinematykę manipulatora IRb-6 zamontowanego na torze jezdny w aspekcie współrzędnych położenia,

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \mathbf{k}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} c_2 r + e(c_2 c_5 c_6 + s_2 s_6) \\ x_1 + s_2 r + e(s_2 c_5 c_6 - c_2 s_6) \\ -d_1 + d_6 c_5 - a_2 s_3 - a_3 s_4 - e c_6 s_5 \end{pmatrix}, \quad (3.71)$$

z efektem przesuniętym o pewną odległość e . W równaniu (3.71) parametr $r = a_2 c_3 + a_3 c_4 + d_6 s_5$. Współrzędne przegubowe i zadaniowe zostały ponumerowane w taki sposób, żeby był spełniony warunek (3.66). Wybierzmy konfigurację osobliwą $\mathbf{x}_0 = (x_1, x_2, \pi/2, \pi/2, 0, \pi/2)^T$. Po wykonaniu odpowiednich obliczeń stwierdzamy, że macierz $\mathbf{H}(\mathbf{x}_0)$ w tej konfiguracji ma postać

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d_6 & e \\ 0 & 0 & e & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.72)$$

Łatwo sprawdzić, że macierz $\mathbf{H}(\mathbf{x}_0)$ ma jedną ujemną wartość własną, zatem jej indeks $\Gamma(\mathbf{x}_0) = 1$. Wynika stąd, na mocy twierdzenia 3.2.2, że wybrana konfiguracja osobliwa jest możliwa do uniknięcia. ■

[¶]W przypadku, gdy stopień redundancji $r = 1$, wyznacznik macierzy $\mathbf{H}(\mathbf{x}_0)$ jest równy wyróżnikowi $\Delta(\mathbf{x}_0)$. Wyróżnik $\Delta(\mathbf{x}_0) > 0$ oznacza, że $\mathbf{H}(\mathbf{x}_0)$ ma obie wartości własne jednakowego znaku, $\Delta(\mathbf{x}_0) < 0$ — że wartości własne są przeciwnych znaków. W rezultacie, twierdzenie 3.2.1 staje się szczególnym przypadkiem twierdzenia 3.2.2.

3.2.2 Metoda postaci normalnych

Pojęcia podstawowe

Zasada unikania konfiguracji osobliwych przy rozwiązywaniu odwrotnego zadania kinematyki może być zastosowana do manipulatorów redundantnych wyłącznie w odniesieniu do tych konfiguracji osobliwych, które są możliwe do uniknięcia. Wszelako jednak, dla manipulatorów nieredundantnych lub dla niemożliwych do uniknięcia konfiguracji osobliwych manipulatorów redundantnych, potrzebne są specjalne algorytmy kinematyki odwrotnej, zdolne do wyznaczenia trajektorii ruchu przegubów przechodzących przez konfiguracje osobliwe. Takie algorytmy będziemy nazywać *algorytmami osobliwej kinematyki odwrotnej*. Przypomnijmy sformułowanie odwrotnego zadania kinematyki manipulatora we współrzędnych:

Mając daną kinematykę manipulatora $\mathbf{y} = \mathbf{k}(\mathbf{x})$ i trajektorię zadaniową $\mathbf{y}_d(t)$, $t \in \mathcal{I}$, wyznaczyć trajektorię przegubową $\mathbf{x}_d(t)$, taką że $\mathbf{y}_d(t) = \mathbf{k}(\mathbf{x}_d(t))$.

Przy rozwiązywaniu osobliwego odwrotnego zadania kinematyki dopuszczamy, aby trajektoria przegubowa przechodziła przez lub w pobliżu konfiguracji osobliwych manipulatora. Do metod pozwalających na uzyskanie rozwiązania tego zadania w postaci jawnej należy metoda postaci normalnych. Jej główna idea polega na przekształceniu odwrotnego zadania kinematyki dla kinematyki oryginalnej do zadania dla reprezentującej ją równoważnej postaci normalnej, rozwiązaniu zadania dla postaci normalnej i przekształceniu uzyskanego rozwiązania z powrotem do współrzędnych kinematyki oryginalnej.

Zdefiniowanie postaci normalnej kinematyki wymaga wprowadzenia pojęcia równoważności odwzorowań, zgodnie z którym dwa odwzorowania są *równoważne*, jeżeli stają się identyczne w odpowiednio dobranych układach współrzędnych. Bardziej formalnie, gładkie odwzorowania $\mathbf{f}, \mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ nazywamy równoważnymi, jeżeli istnieją układy współrzędnych (dyfeomorfizmy) $\boldsymbol{\varphi} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ i $\boldsymbol{\psi} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, takie że diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\mathbf{f}} & \mathbb{R}^m \\ \boldsymbol{\varphi} \downarrow & & \downarrow \boldsymbol{\psi} \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\mathbf{g}} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

jest przemienny, tzn. $\boldsymbol{\psi} \circ \mathbf{f} = \mathbf{g} \circ \boldsymbol{\varphi}$. Równoważność odwzorowań jest lo-

kalna, jeżeli układy współrzędnych $\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{\psi}$ są określone lokalnie. Używana przez nas równoważność wywodzi się z teorii osobliwości odwzorowań i nosi nazwę *RL-równoważności* (right-left). Klasa odwzorowań równoważnych danemu odwzorowaniu $\mathbf{f}$ może być reprezentowana przez odpowiednio wybranego przedstawiciela tej klasy, nazywanego *postacią normalną* odwzorowania $\mathbf{f}$. Zwykle wymaga się, aby postać normalna była „prosta” z estetycznego punktu widzenia*. W zagadnieniach kinematyki manipulatorów postać normalna powinna przede wszystkim umożliwiać rozwiązanie odwrotnego zadania kinematyki.

Niech $\mathbf{k} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y} = \mathbf{k}(\mathbf{x})$, $n \geq m$ oznacza kinematykę manipulatora. Załóżmy, że $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ jest konfiguracją regularną, tzn. taką że $\text{rank } \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) = m$. Zdefiniujmy lokalne układy współrzędnych

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi} &= \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = (\mathbf{k}(\mathbf{x}) - \mathbf{k}(\mathbf{x}_0), x_{m+1}, \dots, x_n)^T, \\ \boldsymbol{\eta} &= \boldsymbol{\psi}(\mathbf{y}) = \mathbf{y} - \mathbf{k}(\mathbf{x}_0).\end{aligned}\tag{3.73}$$

Zgodnie z twierdzeniem o funkcji odwrotnej, odwzorowanie $\boldsymbol{\varphi}$ jest lokalnym dyfeomorfizmem przekształcającym pewne otoczenie konfiguracji $\mathbf{x}_0$ na pewne otoczenie $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$. Analogicznie, $\boldsymbol{\psi}$ jest lokalnym dyfeomorfizmem odwzorowującym otoczenie $\mathbf{y}_0 = \mathbf{k}(\mathbf{x}_0)$ na otoczenie $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$. Łatwo zauważyć, że dyfeomorfizmy (3.73) przekształcają kinematykę $\mathbf{k}(\mathbf{x})$ do postaci

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{k}_0(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\psi} \circ \mathbf{k} \circ \boldsymbol{\varphi}^{-1}(\boldsymbol{\xi}) = (\xi_1, \dots, \xi_m).\tag{3.74}$$

Jak widzimy, przy użyciu dyfeomorfizmów (3.73) jesteśmy w stanie sprowadzić kinematykę nieosobliwą do postaci liniowej projekcji $\mathbb{R}^n$ na $\mathbb{R}^m$ [†] będącej *postacią normalną* kinematyki nieosobliwej. Ponieważ powyższa elementarna obserwacja jest istotna z punktu widzenia odwrotnego zadania kinematyki i zadania śledzenia trajektorii, sformułujemy ją formalnie.

Wniosek 3.2.1 *Założmy, że $\mathbf{x}_0$ jest konfiguracją regularną kinematyki $\mathbf{k} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y} = \mathbf{k}(\mathbf{x})$. Wówczas, kinematyka ta jest lokalnie*

* Jak zaznaczyliśmy we *Wprowadzeniu*, za patrona metody postaci normalnych obieramy W. Ockhama.

[†] W rozumieniu teorii osobliwości kinematyka $\mathbf{k}(\mathbf{x})$ jest lokalnie RL-równoważna postaci (3.74). W dalszej części niniejszego podrozdziału będziemy mówić, że kinematyka jest lokalnie równoważna pewnej postaci normalnej lub że można ją przekształcić do pewnej postaci normalnej.

równoważna liniowej projekcji

$$\mathbf{k}_0(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)^T. \quad (3.75)$$

Używając języka postaci normalnych powiemy, że algorytmy kinematyki odwrotnej manipulatorów opisane w podrozdziale 3.1 mogą być stosowane jedynie do kinematyki mającej postać normalną typu liniowej projekcji. W tym miejscu pojawia się pytanie: W jaki sposób rozwiązać odwrotne zadanie kinematyki w przypadku kinematyki, która nie jest równoważna postaci (3.75)?

Algorytm

Metodą pozwalającą na rozwiązanie tak postawionego zadania jest *metoda postaci normalnych*. Zgodnie z przesłaniem metody, rozwiązanie odwrotnego zadania kinematyki sformułowanego dla kinematyki oryginalnej sprowadzone zostaje do rozwiązania odwrotnego zadania kinematyki dla postaci normalnej kinematyki. Przy założeniu, że trajektoria zadana przecina osobliwości w dyskretnych chwilach czasu, dyrektywy postępowania wynikające z metody postaci normalnych można sformułować w postaci następującej procedury.

- Krok 1.** Dla kinematyki określonej we współrzędnych $\mathbf{k} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y} = \mathbf{k}(\mathbf{x})$ i trajektorii zadanej $\mathbf{y}_d(t)$, $t \in \mathcal{I} = [t_p, t_k]$ znaleźć zbiór konfiguracji osobliwych $\mathbf{S}$ i wyznaczyć uporządkowany zbiór chwil $\{t_{si}\} = \mathbf{T}$, $i > 0$, w których trajektoria $\mathbf{y}_d(t)$ przecina zbiór wartości osobliwych $\mathbf{k}(\mathbf{S})$ kinematyki $\mathbf{k}$. Przyjając $t_0 = t_p$, $i = 1$. Jeśli chwila t_0 należy do otoczenia t_{s1} przejść do kroku 3.
- Krok 2.** Zastosować do rozwiązania zadania kinematyki odwrotnej dla czasów $t \in [t_{i-1}, t_{si} - \varepsilon_i]$, przy wybranym $\varepsilon_i > 0$, jedną z metod pozwalających na rozwiązanie regularnego odwrotnego zadania kinematyki, opisanych w podrozdziale 3.1, z warunkiem początkowym $\mathbf{x}_d(t_{i-1})$, takim że $\mathbf{y}_d(t_{i-1}) = \mathbf{k}(\mathbf{x}_d(t_{i-1}))$.
- Krok 3.** Określić konfigurację osobliwą $\mathbf{x}_{si} = \mathbf{x}(t_{si})$, wyznaczyć postać normalną $\mathbf{k}_0$ kinematyki $\mathbf{k}$ w otoczeniu tej konfiguracji oraz znaleźć układy współrzędnych $\boldsymbol{\varphi} : \mathbf{U} \rightarrow \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{U})$, $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$ i $\boldsymbol{\psi} : \mathbf{V} \rightarrow \boldsymbol{\psi}(\mathbf{V})$, $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{y})$ określone na otwartych otoczeniach $\mathbf{U} \ni \mathbf{x}_{si}$ i $\mathbf{V} \ni \mathbf{k}(\mathbf{x}_{si})$, takie że

$$\mathbf{k}_0 \circ \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\psi} \circ \mathbf{k}(\mathbf{x}). \quad (3.76)$$

Krok 4. Wyrazić trajektorię zadaną $\mathbf{y}_d(t) \in \mathbf{V}$ (dla $t \in [t_{si} - \varepsilon_i, t_{si} + \varepsilon_i]$) we współrzędnych $\boldsymbol{\eta}$, zgodnie z zależnością

$$\boldsymbol{\eta}_d(t) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{y}_d(t)).$$

Krok 5. Rozwiązać odwrotne zadanie kinematyki dla postaci normalnej $\mathbf{k}_0$ i trajektorii zadanej $\boldsymbol{\eta}_d(t)$, tzn. znaleźć $\boldsymbol{\xi}_d(t) \in \varphi(\mathbf{U})$, które spełnia równanie

$$\boldsymbol{\eta}_d(t) = \mathbf{k}_0(\boldsymbol{\xi}_d(t)).$$

Krok 6. Przekształcić uzyskane rozwiązanie $\boldsymbol{\xi}_d(t)$ z powrotem do oryginalnych współrzędnych przegubowych obliczając

$$\mathbf{x}_d(t) = \boldsymbol{\varphi}^{-1}(\boldsymbol{\xi}_d(t)) \in \mathbf{U}.$$

Krok 7. Przyjąć $t_i = t_{si} + \varepsilon_i$, a następnie $i \leftarrow i + 1$. Jeśli $t_{si} \in \mathbf{T}$ powtórzyć kroki 2–6. W przeciwnym razie, jeśli $t_{i-1} < t_k$, wykonać krok 2 dla chwil czasu $t \in [t_{i-1}, t_k]$. W wyniku połączenia rozwiązania regularnego (otrzymanego w kroku 2) i osobliwego (z kroku 6) uzyskujemy kompletne rozwiązanie odwrotnego zadania kinematyki w postaci trajektorii $\mathbf{x}_d(t)$, $t \in [t_p, t_k]$ określonej w przestrzeni przegubowej manipulatora.

Jak widać, algorytm metody postaci normalnych składa się z dwóch zasadniczych części: pierwszej, pozwalającej na wyznaczenie odcinków trajektorii przebiegających w otoczeniu konfiguracji regularnych (krok 2), i drugiej, w której są określane odcinki trajektorii położone w otoczeniu konfiguracji osobliwych (kroki 3–6). Rozwiązanie osobliwego odwrotnego zadania kinematyki polega więc na sukcesywnym wyznaczaniu nieosobliwych i osobliwych fragmentów trajektorii przegubowej, a następnie ich połączeniu w fazie końcowej (krok 7). O długości fragmentów osobliwych, określonej parametrami ε_i , a co za tym idzie o doborze wartości tych parametrów, decydują możliwości metody rozwiązania regularnego zadania kinematyki odwrotnej, zastosowanej w kroku 2 algorytmu, oraz wielkość dziedziny dyfeomorfizmów $\boldsymbol{\varphi}$ i $\boldsymbol{\psi}$ wyznaczonych w kroku 3. W skrajnych przypadkach, cała poszukiwana trajektoria może być wyznaczona wyłącznie z wykorzystaniem albo osobliwej (patrz przykład 3.2.3), albo nieosobliwej (patrz przykłady 3.2.4 i 3.2.6) części algorytmu.

Analiza algorytmu metody postaci normalnych prowadzi do wniosku, że najtrudniejsze do realizacji są kroki 3 i 5. W kroku 3 musimy określić postać normalną kinematyki w konfiguracji osobliwej oraz znaleźć postacie dyfeomorfizmów transformujących kinematykę do postaci normalnej. Praktyczny sposób znajdowania dyfeomorfizmów zostanie przedstawiony nieco dalej, na przykładzie manipulatora typu podwójne wahadło (przykład 3.2.3)[‡]. Drugim trudnym do przejścia etapem algorytmu jest krok 5. Postać normalna kinematyki musi być wystarczająco prosta, aby było dla niej możliwe rozwiązanie odwrotnego zadania kinematyki. Dyskusją tego zagadnienia zajmiemy się w dalszej części niniejszego podrozdziału, po wyznaczeniu typowych postaci normalnych kinematyki.

Obecnie przedstawimy sposoby określania postaci normalnych kinematyki. Zgodnie z rozważaniami przeprowadzonymi w rozdziale 2.3.5, konfiguracje korzędu 1, należące do zbioru S_1 , tworzą największy podzbiór konfiguracji osobliwych, często niemożliwych do uniknięcia podczas planowania i śledzenia trajektorii. Z tego względu skupimy uwagę na analizie kinematyki manipulatorów w otoczeniu konfiguracji należących do S_1 . Naszym celem będzie podanie warunków, które pozwolą na zdefiniowanie postaci normalnych kinematyki w otoczeniu konfiguracji osobliwych korzędu 1.

Postacie normalne

Rozpatrzmy reprezentację kinematyki we współrzędnych, w formie odwzorowania analitycznego

$$\mathbf{k}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{y} = \mathbf{k}(\mathbf{x}) = (k_1(\mathbf{x}), \dots, k_m(\mathbf{x}))^T. \quad (3.77)$$

Oznaczmy przez $\mathbf{x}_0 \in S_1$ konfigurację osobliwą korzędu 1 kinematyki. Dla $\mathbf{x}_0$ mamy

$$\text{rank } \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) = \text{rank } \mathbf{J}^a(\mathbf{x}_0) = m - 1, \quad (3.78)$$

gdzie $\mathbf{J}^a(\mathbf{x})$ oznacza jakobian analityczny manipulatora. Zauważmy, że dla kinematyki $\mathbf{y} = \mathbf{k}(\mathbf{x})$ i konfiguracji osobliwej $\mathbf{x}_0 \in S_1$, po zastosowaniu odpowiedniej permutacji współrzędnych $(x_1, \dots, x_n)$ i $(y_1, \dots, y_m)$, warun-

[‡]Pokrótkce, wykorzystuje się w tym celu własność, że dyfeomorfizmy φ i ψ są analityczne, mogą więc być reprezentowane przez ich rozwinięcia w szereg Taylora. Jesteśmy w ten sposób w stanie wyznaczyć je z dowolnie dużą dokładnością.

kowi (3.78) można nadać postać

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \frac{\partial k_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial k_1}{\partial x_{m-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial k_{m-1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial k_{m-1}}{\partial x_{m-1}} \end{bmatrix} (\mathbf{x}_0) = m - 1. \quad (3.79)$$

Zdefiniujmy dla macierzy $\mathbf{J}^a(\mathbf{x})$ zbiór $n - m + 1$ podmacierzy $\mathbf{J}^{ai}(\mathbf{x})$, $i = m, m+1, \dots, n$ rozmiaru $m \times m$ złożonych z $m-1$ pierwszych kolumn $\mathbf{J}^a(\mathbf{x})$ oraz kolumny i -tej tej macierzy. Oznaczmy przez $\mathbf{v}_m, \mathbf{v}_{m+1}, \dots, \mathbf{v}_n$ bazę przestrzeni $\text{Ker } \mathbf{J}^a(\mathbf{x}_0)$. Warunek równoważności kinematyki kwadratowej postaci normalnej przedstawia następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.2.3 *Niech $\mathbf{x}_0$ będzie konfiguracją osobliwą korzędu 1 kinematyki $\mathbf{k}(\mathbf{x})$ spełniającej warunek (3.79). Wówczas, jeżeli*

$$\text{rank} \begin{bmatrix} d(\det \mathbf{J}^{am}) \\ d(\det \mathbf{J}^{am+1}) \\ \vdots \\ d(\det \mathbf{J}^{an}) \end{bmatrix} (\mathbf{x}_0) [\mathbf{v}_m \cdots \mathbf{v}_n] = n - m + 1, \quad (3.80)$$

to w pewnym otoczeniu konfiguracji $\mathbf{x}_0$ kinematyka $\mathbf{k}(\mathbf{x})$ jest równoważna kwadratowej postaci normalnej

$$\mathbf{k}_0(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, q(x_m, \dots, x_n))^T, \quad (3.81)$$

gdzie $q(x_m, \dots, x_n) = -x_m^2 - \dots - x_{m-1+s}^2 + x_{m+s}^2 + \dots + x_n^2$, dla pewnego $s = 0, \dots, n - m + 1$.

Nietrudno sprawdzić, że warunek rzędu (3.80) nie zależy od przyjętych układów współrzędnych przegubowych i zadaniowych.

Dla kinematyki nieredundantnej, z podanego twierdzenia można wyciągnąć następujący wniosek.

Wniosek 3.2.2 *Niech $\mathbf{x}_0$ będzie konfiguracją osobliwą korzędu 1 kinematyki nieredundantnej $\mathbf{k} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ spełniającej warunek (3.79) przy $m = n$. Jeżeli*

$$d(\det \mathbf{J}^a)(\mathbf{x}_0) \mathbf{v} \neq 0, \quad (3.82)$$

gdzie wektor $\mathbf{v}$ jest rozwiązaniem równania $\mathbf{J}^a(\mathbf{x}_0) \mathbf{v} = 0$, to w pewnym

otoczeniu konfiguracji $\mathbf{x}_0$ kinematyka $\mathbf{k}(\mathbf{x})$ jest równoważna kwadratowej (parabolicznej) postaci normalnej

$$\mathbf{k}_0(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^2)^T. \quad (3.83)$$

Przeprowadzone dotąd badania konfiguracji osobliwych kinematyki manipulatorów wykazują, że kwadratowa postać normalna jest najpowszechniejszą postacią normalną kinematyki w otoczeniu konfiguracji osobliwych korzędu 1. Mniej rozpowszechnionym typem postaci normalnej jest *hiperboliczna postać normalna*. W celu określenia warunków jej występowania, dla kinematyki (3.77) spełniającej warunek (3.79) zdefiniujemy w otoczeniu konfiguracji osobliwej $\mathbf{x}_0$ lokalny układ współrzędnych

$$\xi = \varphi(\mathbf{x}) = (k_1(\mathbf{x}), \dots, k_{m-1}(\mathbf{x}), x_m, \dots, x_n)^T, \quad (3.84)$$

przekształcający otoczenie $\mathbf{U}$ punktu $\mathbf{x}_0$ w otoczenie $\mathbf{V}$ punktu $\xi_0 = \varphi(\mathbf{x}_0)$. Nazwijmy przekrojem otoczenia $\mathbf{V}$ zbiór

$$\mathbf{V}_{l_1 \dots l_r} = \{ \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T \in \mathbf{V} \mid \begin{aligned} \xi_{l_1} &= \xi_{0l_1}, \\ \xi_{l_2} &= \xi_{0l_2}, \dots, \xi_{l_r} = \xi_{0l_r} \end{aligned} \}.$$

Utwórzmy zbiór $n - m + 1$ podmacierzy $\mathbf{J}^{a_i}(\mathbf{x})$, $i = m, m + 1, \dots, n$, określonych tak samo, jak poprzednim twierdzeniu. Warunki istnienia hiperbolicznej postaci normalnej kinematyki podaje następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.2.4 *Niech $\mathbf{x}_0$ będzie konfiguracją osobliwą korzędu 1 kinematyki $\mathbf{k}(\mathbf{x})$ spełniającej warunek (3.79) i niech $\varphi(\mathbf{x})$ będzie zdefiniowane przez (3.84). Jeżeli istnieją wskaźniki $i_1, \dots, i_r \in \{m, m + 1, \dots, n\}$, $r = n - m + 1$, wraz z odpowiadającymi im wskaźnikami $j_1, \dots, j_r \in \{1, 2, \dots, m - 1\}$, takie że*

$$\left\{ \begin{aligned} \det \mathbf{J}^{a_{i_1}} \circ \varphi^{-1} \Big|_{\mathbf{V}} &= \det \mathbf{J}^{a_{i_1}} \Big|_{\mathbf{U}} \neq 0 \quad \wedge \quad \det \mathbf{J}^{a_{i_1}} \circ \varphi^{-1} \Big|_{\mathbf{V}_{j_1}} \equiv 0 \\ \det \mathbf{J}^{a_{i_2}} \circ \varphi^{-1} \Big|_{\mathbf{V}_{i_1}} &\neq 0 \quad \wedge \quad \det \mathbf{J}^{a_{i_2}} \circ \varphi^{-1} \Big|_{\mathbf{V}_{i_1 j_2}} \equiv 0 \\ &\vdots \\ \det \mathbf{J}^{a_{i_r}} \circ \varphi^{-1} \Big|_{\mathbf{V}_{i_1 \dots i_{r-1}}} &\neq 0 \quad \wedge \quad \det \mathbf{J}^{a_{i_r}} \circ \varphi^{-1} \Big|_{\mathbf{V}_{i_1 \dots i_{r-1} j_r}} \equiv 0, \end{aligned} \right.$$

oraz dla $s = 1, 2, \dots, r$

$$d(\det \mathbf{J}^{a_{is}})(\mathbf{x}_0) \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) \right)_{j_s \text{ kol}}^{-1} \neq 0,$$

to w pewnym otoczeniu konfiguracji $\mathbf{x}_0$ kinematyka $\mathbf{k}(\mathbf{x})$ jest równoważna hiperbolicznej postaci normalnej

$$\mathbf{k}_0(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_{i_1} x_{j_1} + \dots + x_{i_r} x_{j_r})^T. \quad (3.85)$$

Podobnie jak w przypadku kwadratowej postaci normalnej, na podstawie powyższego twierdzenia jesteśmy w stanie sformułować wniosek dotyczący występowania hiperbolicznej postaci normalnej kinematyki nieredundantnej.

Wniosek 3.2.3 Niech $\mathbf{x}_0$ będzie konfiguracją osobliwą korzędu 1 kinematyki nieredundantnej $\mathbf{k} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, spełniającej warunek (3.79) przy $m = n$, i niech $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$ będzie zdefiniowane wzorem (3.84) również dla $m = n$. Oznaczmy przez S_1 zbiór konfiguracji osobliwych korzędu 1 kinematyki $\mathbf{k}(\mathbf{x})$. Załóżmy, że

$$\det \mathbf{J}^a|_{\mathbf{u}} = \det \mathbf{J}^a \circ \boldsymbol{\varphi}^{-1}|_{\mathbf{v}} \neq 0.$$

Jeżeli istnieje wskaźnik $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, taki że

$$\boldsymbol{\varphi}^{-1}(\mathbf{V}_j) \subset S_1 \cap \mathbf{u} \quad (3.86)$$

oraz

$$d(\det \mathbf{J}^a)(\mathbf{x}_0) \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) \right)_{j \text{ kol}}^{-1} \neq 0, \quad (3.87)$$

to w pewnym otoczeniu konfiguracji $\mathbf{x}_0$ kinematyka $\mathbf{k}(\mathbf{x})$ jest równoważna hiperbolicznej postaci normalnej

$$\mathbf{k}_0(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_j x_n)^T. \quad (3.88)$$

Przed pokazaniem przykładów zastosowania metody postaci normalnych przedyskutujemy rozwiązanie odwrotnego zadania kinematyki dla parabolicznej i hiperbolicznej postaci normalnej kinematyki nieredundantnej[§]. W przypadku pierwszej z nich, zdefiniowanej jako

$$\mathbf{y} = \mathbf{k}_0(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^2)^T,$$

[§] Zasygnalizowane w kroku 5 algorytmu przedstawionego na stronie 142.

dla trajektorii zadaniowej $\mathbf{y}_d(t) = (y_{d1}(t), \dots, y_{dn}(t))^T$ zależnej w sposób gładki od czasu i przechodzącej w chwili t_s przez konfigurację osobliwą (tzn. takiej, że $y_{dn}(t_s) = 0$), otrzymujemy następujące cztery rozwiązania odwrotnego zadania kinematyki

$$\mathbf{x}_d(t) = \left(y_{d1}(t), \dots, y_{dn-1}(t), \pm \sqrt{y_{dn}(t)} \right)^T, \quad (3.89)$$

$$\mathbf{x}_d(t) = \left(y_{d1}(t), \dots, y_{dn-1}(t), \pm \operatorname{sgn}(t - t_s) \sqrt{y_{dn}(t)} \right)^T, \quad (3.90)$$

z których jedynie dwa ostatnie są zawsze gładkie. Widzimy, że warunkiem koniecznym istnienia rozwiązania jest spełnienie nierówności $y_{dn}(t) \geq 0$.

Dla hiperbolicznej postaci normalnej

$$\mathbf{y} = \mathbf{k}_0(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_j x_n)^T,$$

$j = 1, \dots, n-1$, przy założeniu gładkiej trajektorii zadaniowej $\mathbf{y}_d(t) = (y_{d1}(t), \dots, y_{dn}(t))^T$ przechodzącej przez konfigurację osobliwą w chwili t_s [¶], otrzymujemy rozwiązanie odwrotnego zadania kinematyki

$$\mathbf{x}_d(t) = \mathbf{r}_0(\mathbf{y}_d(t)) = (y_{d1}(t), \dots, y_{dn-1}(t), r_0(t))^T, \quad (3.91)$$

gdzie $r_0(t) = \frac{y_{dn}(t)}{y_{dj}(t)}$ dla $t \neq t_s$ oraz $r_0(t)$ jest nieokreślone dla $t = t_s$. Zaważmy, że warunkiem koniecznym istnienia rozwiązania zadania odwrotnego jest $y_{dn}(t_s) = 0$. Aby uzyskana wówczas trajektoria $\mathbf{x}_d(t)$ była ciągłą, spośród możliwych wartości $r_0(t_s)$ należy wybrać $r_0(t_s) = \lim_{\tau \rightarrow t_s} \frac{y_{dn}(\tau)}{y_{dj}(\tau)}$.

Obecnie zilustrujemy na przykładach sposób określenia postaci normalnych kinematyki w otoczeniu konfiguracji osobliwych oraz zastosowanie metody postaci normalnych do rozwiązania osobliwego odwrotnego zadania kinematyki.

Przykład 3.2.2 (Manipulator typu podwójne wahadło)

Manipulator typu podwójne wahadło może zostać opisany kinematyką postaci (2.68), ze zbiorem konfiguracji osobliwych (2.137). Określmy postacie normalne kinematyki podwójnego wahadła. Oczywiście, w otoczeniu konfiguracji regularnych kinematyka jest równoważna liniowej postaci normalnej

$$\mathbf{k}_0(\mathbf{x}) = (x_1, x_2)^T,$$

[¶]Tzn. takiej, że $y_{dj}(t_s) = 0$.

na mocy wniosku 3.2.1. Manipulator przyjmuje konfigurację osobliwą, gdy jego drugie ramię jest w pełni wyprostowane ($x_2 \bmod 2\pi = 0$) lub całkowicie złożone ($x_2 \bmod 2\pi = \pi$). Na podstawie analizy jacobianu analitycznego manipulatora (2.82) łatwo zauważyć, że wszystkie konfiguracje osobliwe kinematyki (2.68) są korzędu 1. Zmiana kolejności współrzędnych przegubowych zgodnie z zależnością

$$(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (x_2, x_1),$$

proceedzi do zdefiniowania kinematyki

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \mathbf{k}(\bar{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} l_1 \cos \bar{x}_2 + l_2 \cos(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) \\ l_1 \sin \bar{x}_2 + l_2 \sin(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) \end{pmatrix}, \quad (3.92)$$

której jacobian analityczny

$$\mathbf{J}^a(\bar{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} -l_2 \sin(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) & -l_1 \sin \bar{x}_2 - l_2 \sin(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) \\ l_2 \cos(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) & l_1 \cos \bar{x}_2 + l_2 \cos(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) \end{bmatrix},$$

a zbiór konfiguracji osobliwych $\mathbf{S}_1 = \{\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)^T \in \mathbb{R}^2 \mid \sin \bar{x}_1 = 0\}$. Kinematyka (3.92) spełnia warunek (3.79), jeśli $\sin \bar{x}_{02} \neq 0$. Rozwiązanie równania $\mathbf{J}^a(\bar{\mathbf{x}}_0)\mathbf{v} = 0$ dla $\bar{\mathbf{x}}_0 = (\bar{x}_{01}, \bar{x}_{02})^T \in \mathbf{S}_1$ można wybrać jako

$$\mathbf{v} = \begin{cases} (l_1 + l_2, -l_2)^T, & \text{dla } \bar{x}_{01} \bmod 2\pi = 0, \\ (l_1 - l_2, l_2)^T, & \text{dla } \bar{x}_{01} \bmod 2\pi = \pi. \end{cases}$$

Różniczka wyznacznika jacobianu analitycznego ma postać

$$d(\det \mathbf{J}^a)(\bar{\mathbf{x}}_0) = \begin{cases} (l_1 l_2, 0), & \text{dla } \bar{x}_{01} \bmod 2\pi = 0, \\ (-l_1 l_2, 0), & \text{dla } \bar{x}_{01} \bmod 2\pi = \pi. \end{cases}$$

W konsekwencji, lewa strona nierówności (3.82) jest równa

$$\begin{cases} l_1 l_2 (l_1 + l_2), & \text{dla } \bar{x}_{01} \bmod 2\pi = 0, \\ l_1 l_2 (l_2 - l_1), & \text{dla } \bar{x}_{01} \bmod 2\pi = \pi, \end{cases}$$

i dla $\bar{x}_{01} \bmod 2\pi = 0$ jest zawsze różna od zera^{||}, a dla $\bar{x}_{01} \bmod 2\pi = \pi$ jest niezerowa wtedy i tylko wtedy, gdy $l_1 \neq l_2$. Przeprowadzenie podobnej analizy po dodatkowej zmianie kolejności współrzędnych zadaniowych kinematyki (wówczas warunek (3.79) jest spełniony, jeśli $\cos \bar{x}_{02} \neq 0$) prowadzi na podstawie wniosku 3.2.2 do następującego stwierdzenia.

^{||} Przyjmujemy, że $l_1, l_2 > 0$.

Wniosek 3.2.4 *Kinematyka manipulatora typu podwójne wahadło posiada paraboliczną postać normalną*

$$\mathbf{k}_0(\mathbf{x}) = (x_1, x_2^2)^T,$$

w otoczeniu konfiguracji osobliwych $x_{02} \bmod 2\pi = 0$, a przy $l_1 \neq l_2$ także w otoczeniu konfiguracji osobliwych $x_{02} \bmod 2\pi = \pi$.

Widzimy, że jedynymi konfiguracjami manipulatora, dla których nie określiliśmy dotychczas postaci normalnej są konfiguracje osobliwe $x_{02} \bmod 2\pi = \pi$ przy $l_1 = l_2$. Przyjmijmy $x_{02} = \pi$, co przy kinematyce (3.92) odpowiada konfiguracji osobliwej $\bar{\mathbf{x}}_0 = (\pi, \bar{x}_{02})^T$. Do określenia postaci normalnej w tej sytuacji posłużymy się wnioskiem 3.2.3. Zgodnie z zależnością (3.84), zdefiniujmy w otoczeniu tej konfiguracji osobliwej układ współrzędnych

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\varphi}(\bar{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} l_1 \cos \bar{x}_2 + l_2 \cos(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}. \quad (3.93)$$

Odwzorowanie (3.93) jest wzajemnie jednoznaczne dla otoczenia punktu osobliwego $\bar{\mathbf{x}}_0 = (\bar{x}_{01}, \bar{x}_{02})^T$ postaci

$$\mathbf{U}_\alpha = \left(\frac{\pi}{2} + \alpha, \frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \times \left(\frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{2} + \alpha\right)$$

przy $0 < \alpha < \pi/2$. Dla takiego otoczenia $\mathbf{U}_\alpha \cap \mathbf{S}_1 = \{\pi\} \times \left(\frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{2} + \alpha\right)$, a zatem

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{U}_\alpha \cap \mathbf{S}_1) &= \{(l_1 \cos \bar{x}_2 + l_2 \cos(\bar{x}_1 + \bar{x}_2), \bar{x}_2)^T \mid \bar{x}_1 = \pi, \frac{\pi}{2} - \alpha < \\ &< \bar{x}_2 < \frac{\pi}{2} + \alpha\} = \{((l_1 - l_2) \cos \xi_2, \xi_2)^T \mid \frac{\pi}{2} - \alpha < \xi_2 < \frac{\pi}{2} + \alpha\}. \end{aligned}$$

Z drugiej strony, otoczenie $\mathbf{V}_\alpha$ punktu $\xi_0 = \boldsymbol{\varphi}(\bar{\mathbf{x}}_0) = ((l_1 - l_2) \cos \bar{x}_{02}, \bar{x}_{02})^T$ przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_\alpha = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{U}_\alpha) &= \{(\xi_1, \xi_2)^T \mid \xi_1 = l_1 \cos \bar{x}_2 + l_2 \cos(\bar{x}_1 + \bar{x}_2), \\ &\xi_2 = \bar{x}_2, (\bar{x}_1, \bar{x}_2)^T \in \mathbf{U}_\alpha\}, \end{aligned}$$

skąd otrzymujemy

$$\mathbf{V}_{\alpha 1} = \{((l_1 - l_2) \cos \bar{x}_{02}, \xi_2)^T \mid \frac{\pi}{2} - \alpha < \xi_2 < \frac{\pi}{2} + \alpha\}.$$

Widać więc, że dla $l_1 = l_2$ jest prawdziwa zależność $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{U}_\alpha \cap \mathbf{S}_1) = \mathbf{V}_{\alpha 1}$, co oznacza spełnienie warunku (3.86).

Dla długości ramion $l_1 = l_2$ różniczka wyznacznika jacobianu analitycznego w punkcie $\bar{\mathbf{x}}_0 = (\pi, \bar{x}_{02})^T$ ma postać

$$d(\det \mathbf{J}^a)(\bar{\mathbf{x}}_0) = (-l_1^2, 0),$$

a macierz

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \bar{\mathbf{x}}}(\bar{\mathbf{x}}_0) \right)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{l_1 \sin x_{02}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Widać stąd, że warunek (3.87) jest spełniony, gdyż

$$d(\det \mathbf{J}^a)(\bar{\mathbf{x}}_0) \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \bar{\mathbf{x}}}(\bar{\mathbf{x}}_0) \right)^{-1}_{\text{kol}} = \frac{-l_1}{\sin \bar{x}_{02}} \neq 0.$$

W ten sposób ustaliliśmy postać normalną kinematyki manipulatora typu podwójne wahadło dla konfiguracji osobliwej $x_{02} = \pi$, przy $l_1 = l_2$ i $\sin x_{01} \neq 0$. Po przeprowadzeniu podobnej analizy, przy dodatkowej zamianie miejscami współrzędnych zadaniowych y_1 i y_2 kinematyki, dochodzimy do następującej konkluzji.

Wniosek 3.2.5 *W otoczeniu konfiguracji osobliwych $x_{02} \bmod 2\pi = \pi$ kinematyka manipulatora typu podwójne wahadło, którego ramiona mają jednakowe długości ($l_1 = l_2$), jest równoważna hiperbolicznej postaci normalnej*

$$\mathbf{k}_0(\mathbf{x}) = (x_1, x_1 x_2)^T.$$

■

Przykład 3.2.3 (Manipulator typu podwójne wahadło)

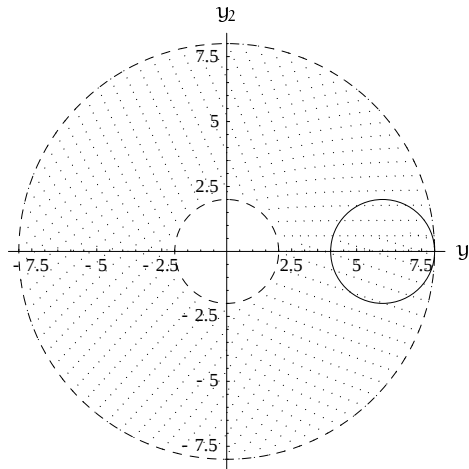
W tym przykładzie opiszemy pierwszy, przybliżony sposób rozwiązania odwrotnego zadania kinematyki z wykorzystaniem metody postaci normalnych. Drugi sposób, w którym korzystamy z rozwiązania regularnego odwrotnego zadania kinematyki w postaci jawnej (przykład 3.1.1) i wniosków płynących z metody postaci normalnych, przedstawia przykład następny. W obliczeniach przyjmujemy $l_1 = 5$, $l_2 = 3$.

Niech zadaniem manipulatora będzie przemieszczenie efektora wzdłuż trajektorii zadaniowej mającej postać okręgu

$$\mathbf{y}_d(t) = \begin{pmatrix} y_{d1}(t) \\ y_{d2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 + 2 \sin(\frac{\pi}{5}t) \\ 2 \cos(\frac{\pi}{5}t) \end{pmatrix}, \quad (3.94)$$

w przedziale czasu $\mathcal{I} = [0, 10]**$. Rysunek 3.24 przedstawia ścieżkę w prze-

**Porównaj z trajektorią z przykładu 3.1.5.



Rysunek 3.24 Ścieżka zadana w przestrzeni roboczej manipulatora typu podwójne wahadło.

strzeni roboczej manipulatora (obszar zakropkowany) odpowiadającą zadanej trajektorii. Naszym celem jest znalezienie trajektorii przegubowej manipulatora pozwalającej na realizację trajektorii (3.94). Zauważmy, że trajektoria ta została tak dobrana, aby jej realizacja wymagała wprowadzenia manipulatora w konfigurację osobliwą, co powoduje, że próba rozwiązania zadania metodą jacobianu odwrotnego kończy się niepowodzeniem.

Zgodnie z pierwszym krokiem algorytmu metody postaci normalnych, musimy wyznaczyć zbiór chwil, w których trajektoria (3.94) przecina obraz zbioru konfiguracji osobliwych $\mathbf{k}(S)$ przy S zdefiniowanym wzorem (2.137). Łatwo pokazać, że dla manipulatora typu podwójne wahadło dzieje się tak wtedy i tylko wtedy, gdy

$$y_{d1}^2(t) + y_{d2}^2(t) = (l_1 \pm l_2)^2,$$

co w analizowanym przykładzie sprowadza się do jednego z dwóch warunków: $40 + 24\sin(\pi/5t) = 64$, albo $40 + 24\sin(\pi/5t) = 4$. Pierwszy warunek jest spełniony dla $t_{s1} = 2.5$, gdy manipulator osiąga konfigurację $\mathbf{x}_s = (0, 0)^T$. Zbliżanie się trajektorii przegubowej do konfiguracji osobliwej potwierdza próba rozwiązania zadania odwrotnego metodą jacobianu odwrotnego; podczas numerycznego rozwiązywania układu równań (3.20) otrzymujemy komunikat o złym uwarunkowaniu układu spowodowanym wystąpieniem osobliwości, co uniemożliwia jego rozwiązanie (w przeprowadzonych symulacjach komunikat taki otrzymaliśmy w chwili $t = 2.496$).

Zajmiemy się obecnie wyznaczeniem osobliwego fragmentu poszukiwa-

nej trajektorii, zgodnie z algorytmem metody postaci normalnych. Krok 3 algorytmu wymaga wyznaczenia postaci normalnej kinematyki. Na podstawie wniosku 3.2.4 wiemy, że w konfiguracji osobliwej $\mathbf{x}_s = (0, 0)^T$ kinematyka badanego manipulatora jest równoważna parabolicznej postaci normalnej. Naszym zadaniem jest zatem znalezienie układów współrzędnych $\xi = \varphi(\mathbf{x})$, $\eta = \psi(\mathbf{y})$, w których będzie spełniona zależność (3.76). Odwzorowań φ , ψ będziemy szukać w postaci rozwinięć w szereg Taylora. Całą operację przeprowadzimy w dwóch etapach. W pierwszym etapie znajdziemy układy współrzędnych $\bar{\mathbf{x}} = \bar{\varphi}(\mathbf{x})$, $\bar{\mathbf{y}} = \bar{\psi}(\mathbf{y})$, które sprowadzają rozpatrywaną kinematykę do postaci $\bar{\mathbf{k}}(\bar{\mathbf{x}}) = (\bar{x}_1, r(\bar{\mathbf{x}}))^T$, w drugim — układy współrzędnych $\xi = \hat{\varphi}(\bar{\mathbf{x}})$, $\eta = \hat{\psi}(\bar{\mathbf{y}})$ redukujące kinematykę $\bar{\mathbf{k}}(\bar{\mathbf{x}})$ do parabolicznej postaci normalnej $\mathbf{k}_0(\xi) = (\xi_1, \xi_2^2)^T$. Odwzorowania $\varphi(\mathbf{x})$, $\psi(\mathbf{y})$ znajdziemy jako złożenia

$$\begin{cases} \xi = \varphi(\mathbf{x}) = \hat{\varphi} \circ \bar{\varphi}(\mathbf{x}) \\ \eta = \psi(\mathbf{y}) = \hat{\psi} \circ \bar{\psi}(\mathbf{y}). \end{cases} \quad (3.95)$$

Po zmianie kolejności współrzędnych zadaniowych kinematyki (2.68) mającej na celu spełnienie warunku (3.79), kinematyka manipulatora przyjmuje postać

$$\mathbf{y} = \mathbf{k}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 5s_1 + 3s_{12} \\ 5c_1 + 3c_{12} \end{pmatrix}. \quad (3.96)$$

Po rozwinięciu kinematyki (3.96) w szereg Taylora w otoczeniu punktu osobliwego $\mathbf{x}_s = (x_{s1}, x_{s2})^T = (0, 0)^T$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathbf{y} = \mathbf{k}(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} k_1(\mathbf{x}) \\ k_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 8x_1 - \frac{4}{3}x_1^3 + 3x_2 - \frac{3}{2}x_1^2x_2 - \frac{3}{2}x_1x_2^2 - \frac{1}{2}x_2^3 + o^4(\mathbf{x}) \\ 8 - 4x_1^2 - 3x_1x_2 - \frac{3}{2}x_2^2 + o^4(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

gdzie $o^n(\mathbf{x})$ oznacza małą funkcję rzędu n -tego ze względu na składowe wektora $\mathbf{x}^{\dagger\dagger}$. Wybór odwzorowań $\bar{\varphi}(\mathbf{x})$ i $\bar{\psi}(\mathbf{y})$ w postaci

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{x}} = \bar{\varphi}(\mathbf{x}) = (k_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s), x_2 - x_{s2})^T \\ \bar{\mathbf{y}} = \bar{\psi}(\mathbf{y}) = \mathbf{y} - \mathbf{k}(\mathbf{x}_s), \end{cases}$$

^{††}W ogólności, dla kinematyki nieredundantnej o liczbie stopni swobody n , do postaci $\bar{\mathbf{k}}(\bar{\mathbf{x}}) = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}, r(\bar{\mathbf{x}}))^T$, zwanej *prenormalną*.

^{‡‡}Tzn. w rozwinięciu Taylora $o^n(\mathbf{x})$ najniższa potęga $\mathbf{x}$ wynosi n .

czyli

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 8x_1 - \frac{4}{3}x_1^3 + 3x_2 - \frac{3}{2}x_1^2x_2 - \frac{3}{2}x_1x_2^2 - \frac{1}{2}x_2^3 + o^4(\mathbf{x}) \\ x_2 \end{pmatrix} \\ \bar{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 - 8 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

proceedzi do uzyskania kinematyki $\bar{\mathbf{k}}(\bar{\mathbf{x}})$ opisanej wyrażeniem

$$\bar{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{k}}(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\boldsymbol{\psi}} \circ \mathbf{k} \circ \bar{\boldsymbol{\phi}}^{-1}(\bar{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ -\frac{1}{16}\bar{x}_1^2 - \frac{15}{16}\bar{x}_2^2 + o^4(\bar{\mathbf{x}}) \end{pmatrix}, \quad (3.97)$$

gdzie

$$\bar{\boldsymbol{\phi}}^{-1}(\bar{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}\bar{x}_1 + \frac{1}{3072}\bar{x}_1^3 - \frac{3}{8}\bar{x}_2 + \frac{15}{1024}\bar{x}_1\bar{x}_2^2 + \frac{5}{512}\bar{x}_2^3 + o^4(\bar{\mathbf{x}}) \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}.$$

Będziemy teraz szukać pary odwzorowań $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\phi}(\bar{\mathbf{x}}) = (\hat{\phi}_1(\bar{\mathbf{x}}), \hat{\phi}_2(\bar{\mathbf{x}}))^T$ i $\boldsymbol{\eta} = \hat{\boldsymbol{\psi}}(\bar{\mathbf{y}}) = (\hat{\psi}_1(\bar{\mathbf{y}}), \hat{\psi}_2(\bar{\mathbf{y}}))^T$ spełniających równanie (3.76) dla $\mathbf{k}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{k}}(\mathbf{x})$ i parabolicznej postaci normalnej $\mathbf{k}_0(\boldsymbol{\xi}) = (\xi_1, \xi_2^2)^T$. Na wstępie zauważmy, że dla pierwszych współrzędnych poszukiwanych przekształceń mamy $\xi_1 = \hat{\phi}_1(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{x}_1$, $\eta_1 = \hat{\psi}_1(\bar{\mathbf{y}}) = \bar{y}_1$. Aby znaleźć $\hat{\phi}_2(\bar{\mathbf{x}})$ i $\hat{\psi}_2(\bar{\mathbf{y}})$, założmy że rozwinięcie w szereg Taylora odwzorowania $\hat{\boldsymbol{\phi}}(\bar{\mathbf{x}})$ ma postać

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \hat{\boldsymbol{\phi}}(\bar{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \hat{\phi}_2(\bar{\mathbf{x}}) \end{pmatrix},$$

gdzie $\hat{\phi}_2(\bar{\mathbf{x}}) = a_1\bar{x}_1 + a_2\bar{x}_2 + a_3\bar{x}_1^2 + a_4\bar{x}_1\bar{x}_2 + a_5\bar{x}_2^2 + o^3(\bar{\mathbf{x}})$, $a_1 \div a_5$ — parametry rozwinięcia. Wówczas, złożenie kinematyki $\mathbf{k}_0(\boldsymbol{\xi})$ z $\hat{\boldsymbol{\phi}}(\bar{\mathbf{x}})$ prowadzi do wyrażenia

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \mathbf{k}_0 \circ \hat{\boldsymbol{\phi}}(\bar{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \hat{\phi}_2^2(\bar{\mathbf{x}}) \end{pmatrix}, \quad (3.98)$$

gdzie $\hat{\phi}_2^2(\bar{\mathbf{x}}) = a_1^2\bar{x}_1^2 + 2a_1a_2\bar{x}_1\bar{x}_2 + a_2^2\bar{x}_2^2 + 2a_1a_3\bar{x}_1^3 + 2(a_2a_3 + a_1a_4)\bar{x}_1^2\bar{x}_2 + 2(a_2a_4 + a_1a_5)\bar{x}_1\bar{x}_2^2 + 2a_2a_5\bar{x}_2^3 + o^4(\bar{\mathbf{x}})$. Z drugiej strony, rozwinięcie w szereg Taylora odwzorowania $\hat{\boldsymbol{\psi}}(\bar{\mathbf{y}})$ postaci

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \hat{\boldsymbol{\psi}}(\bar{\mathbf{y}}) = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \hat{\psi}_2(\bar{\mathbf{y}}) \end{pmatrix},$$

gdzie $\hat{\psi}_2(\bar{\mathbf{y}}) = b_1\bar{y}_2 + b_2\bar{y}_1 + b_3\bar{y}_1^2 + b_4\bar{y}_1^3 + o^4(\bar{\mathbf{y}}_1)$ zawiera współczynnik $b_1 = \pm 1$ i nieznane parametry b_2 – $b_4^\dagger$, po złożeniu z $\bar{\mathbf{k}}(\bar{\mathbf{x}})$ daje

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \hat{\boldsymbol{\psi}} \circ \bar{\mathbf{k}}(\bar{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \psi_2(\bar{\mathbf{k}}(\bar{\mathbf{x}})) \end{pmatrix}, \quad (3.99)$$

gdzie $\psi_2(\bar{\mathbf{k}}(\bar{\mathbf{x}})) = b_2\bar{x}_1 - \frac{1}{16}b_1\bar{x}_1^2 + b_3\bar{x}_1^2 + b_4\bar{x}_1^3 - \frac{15}{16}b_1\bar{x}_2^2 + o^4(\bar{\mathbf{x}})$. Porównanie współczynników przy odpowiednich potęgach w (3.98) i (3.99) pozwala stwierdzić, że kinematyka (3.97) przyjmuje paraboliczną postać normalną we współrzędnych

$$\begin{cases} \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\varphi}(\bar{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \frac{\sqrt{15}}{4}\bar{x}_2 + o^3(\bar{\mathbf{x}}) \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{\eta} = \hat{\boldsymbol{\psi}}(\bar{\mathbf{y}}) = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ -\bar{y}_2 - \frac{1}{16}\bar{y}_1^2 + o^4(\bar{\mathbf{y}}_1) \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Analogicznie, na podstawie zależności (3.95), możemy stwierdzić to samo o kinematyce (2.68) wyrażonej we współrzędnych

$$\begin{cases} \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 8x_1 + 3x_2 + o^3(\mathbf{x}) \\ \frac{\sqrt{15}}{4}x_2 + o^3(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} y_2 \\ 8 - y_1 - \frac{1}{16}y_2^2 + o^4(y_2) \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Jak wynika z kroku 6 algorytmu metody postaci normalnych, do rozwiązania zadania odwrotnego będziemy potrzebować odwzorowania $\boldsymbol{\varphi}^{-1}$, które ma postać

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}^{-1}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}\xi_1 - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{20}}\xi_2 + o^3(\boldsymbol{\xi}) \\ \frac{4}{\sqrt{15}}\xi_2 + o^3(\boldsymbol{\xi}) \end{pmatrix}. \quad (3.100)$$

Wyliczone przekształcenia umożliwiają rozwiązanie zadania w otoczeniu konfiguracji osobliwych. Analiza przebiegu trajektorii zadanej pozwala przyjąć, że cała trajektoria leży w tym otoczeniu, dzięki czemu rozwiązanie zadania będzie się składać jedynie z części osobliwej. Zgodnie z krokiem 4 algorytmu metody postaci normalnych, nałożenie odwzorowania $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{y})$ danego

[†]Szczegółowa analiza dyfeomorfizmu $\hat{\boldsymbol{\psi}}(\bar{\mathbf{y}})$ prowadzi do wniosku, że dla dowolnego n jest on dany jako $\hat{\boldsymbol{\psi}}(\bar{\mathbf{y}}) = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{n-1}, \pm\bar{y}_n + f(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{n-1}))^T$, gdzie $f(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{n-1})$ jest pewną funkcją analityczną, taką że $f(\mathbf{0}) = 0$.

przez (3.2.3) na trajektorię zadaną (3.94) pozwala na wyliczenie trajektorii zadaniowej $\eta_d(t)$ dla parabolicznej postaci normalnej. Rozwiązanie osobliwego odwrotnego zadania kinematyki dla tej postaci normalnej według zależności (3.90) (krok 5 algorytmu), a następnie wyliczenie odwzorowania (3.100) wzdłuż otrzymanego rozwiązania (krok 6), prowadzi do trajektorii pokazanych na rysunku 3.25. Przedstawione rozwiązanie uzyskano przy rozwinięciu odwzorowań (3.2.3) w szereg Taylora z dokładnością do wyrazów rzędu siódmego. W wyrażeniu (3.90) przyjęto znak plus. Błędy położenia i prędkości efektora manipulatora przy tak uzyskanej trajektorii ilustruje rysunek 3.26. Rysunek 3.27 pokazuje ścieżkę rzeczywistą (linia ciągła) w przestrzeni roboczej uzyskaną w wyniku rozwiązania zadania, przedstawioną na tle ścieżki zadanej (linia przerywana). Moduł błędu położenia efektora osiąga maksymalną wartość 0.122 dla chwili $t = 7.88$. Dodajmy, że dla czasów $t \in [1, 4]$ maksymalna wartość błędu spada do poziomu 4×10^{-5} (dla czasów $t \in [2, 3]$ [‡] jest to już tylko 2×10^{-9} , to znaczy dużo poniżej poziomu błędów numerycznych towarzyszących metodom jakobianowym). W celu zmniejszenia błędów należałoby wykorzystać jedynie fragment przedstawionego rozwiązania osobliwego, a pozostałą część trajektorii znaleźć zgodnie z krokiem 2 algorytmu metody postaci normalnych lub określić dyfeomorfizmy φ, ψ z większą dokładnością. Można też skorzystać z metody postaci normalnych w sposób zilustrowany następnym przykładem. ■

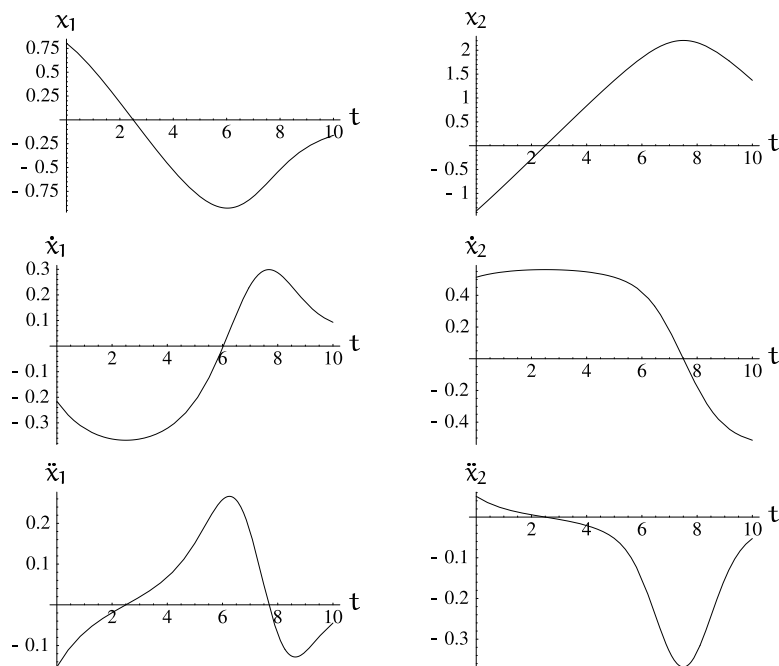
Przykład 3.2.4 (Manipulator typu podwójne wahadło)

W tym przykładzie przedstawimy rozwiązanie osobliwego odwrotnego zadania kinematyki otrzymane metodą postaci normalnych połączoną z bezpośrednią metodą algebraiczną[§].

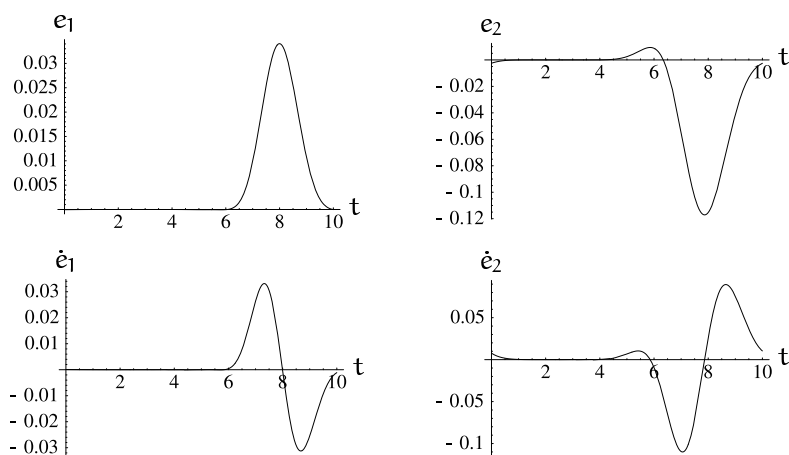
Jak wynika z wyrażeń (3.89), (3.90) opisujących rozwiązania osobliwego odwrotnego zadania kinematyki dla parabolicznej postaci normalnej, w otoczeniu konfiguracji osobliwych tego typu możliwe są cztery różne trajektorie przegubowe realizujące zadany ruch. Krótka analiza rozwiązania odwrotnego zadania kinematyki dla manipulatora typu podwójne wahadło przy użyciu bezpośredniego podejścia algebraicznego, opisanego za pomocą wzoru (3.10), prowadzi do wniosku, że w otoczeniu konfiguracji osobliwych rozwiązanie to opisuje jedynie dwie trajektorie realizujące zadany ruch. Są to trajektorie typu (3.89). Aby uzyskać w postaci jawnej dwa pozostałe rozwiązania (typu (3.90)), należy zmodyfikować postać funkcji s_2

[‡]Więc wciąż w dużej odległości od konfiguracji osobliwej.

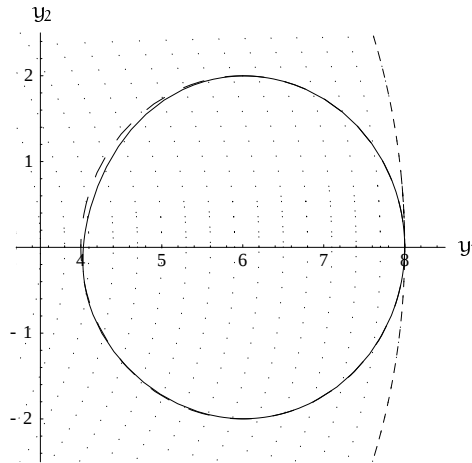
[§]Zobacz przykład 3.1.1.



Rysunek 3.25 Przybliżone rozwiązanie osobliwego zadania odwrotnego dla podwójnego wahadła uzyskane metodą postaci normalnych.



Rysunek 3.26 Błędy położenia i prędkości efektora przy metodzie postaci normalnych w wersji przybliżonej.



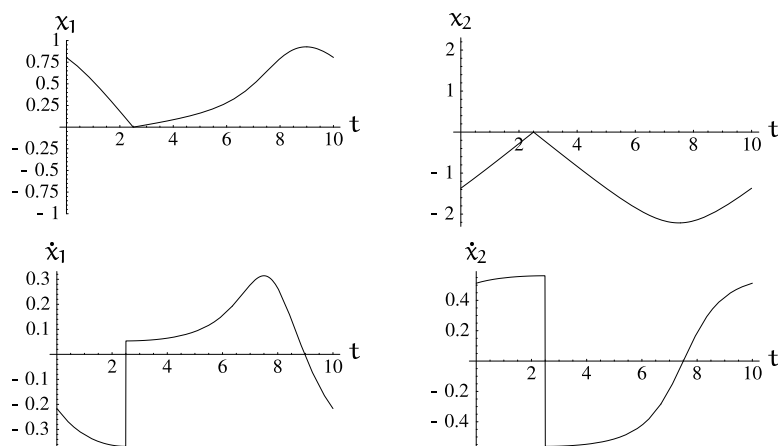
Rysunek 3.27 Ścieżka zadana i ścieżka rzeczywista efektora manipulatora typu podwójne wahadło.

występującej w równaniach (3.10) definiując ją jako

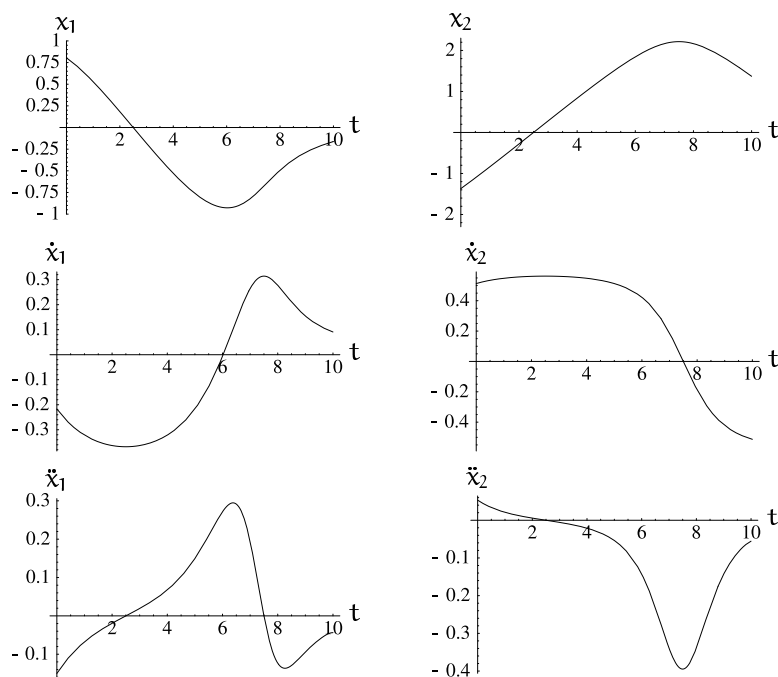
$$s_2 = \pm \prod_{t_{si} \in T} \operatorname{sgn}(t - t_{si}) \sqrt{1 - c_2^2},$$

gdzie T jest zbiorem chwil opisanym w kroku 1 algorytmu na stronie 142. Jeśli trajektoria zadaniowa wymaga jednokrotnego wprowadzenia manipulatora w konfigurację osobliwą, wówczas funkcja $s_2 = \pm \operatorname{sgn}(t - t_s) \sqrt{1 - c_2^2}$, gdzie t_s oznacza chwilę osiągnięcia przez manipulator konfiguracji osobliwej.

Założmy, że zadaniem manipulatora jest ponownie realizacja trajektorii zadanej wyrażeniem (3.94). Rozwiązanie tego zadania bezpośrednią metodą algebraiczną (zależność (3.10) z funkcją s_2 daną przez (3.7)) przedstawiliśmy na rysunku 3.28. Rozwiązanie uzyskane po uwzględnieniu omówionych wyżej modyfikacji przedstawiono na rysunku 3.29. Porównanie tych rozwiązań wykazuje, że, w przeciwieństwie do pierwszego, drugie z nich jest gładkie w całej swojej dziedzinie. W chwili $t_s = 2.5$, gdy manipulator osiąga konfigurację osobliwą, pojawia się skok prędkości trajektorii przegubowej (któremu teoretycznie towarzyszą nieskończone przyspieszenia w przegubach), powodujący szarpnięcie przegubów manipulatora. Na zakończenie dodajmy, że obu przedstawionym rozwiązaniom towarzyszyły błędy położenia efektora na poziomie dokładności prowadzonych obliczeń (10^{-16}). ■



Rysunek 3.28 Rozwiązanie osobliwego zadania odwrotnego dla podwójnego wahadła uzyskane bezpośrednią metodą algebraiczną.



Rysunek 3.29 Dokładne rozwiązanie osobliwego zadania odwrotnego dla podwójnego wahadła uzyskane metodą postaci normalnych.

Przykład 3.2.5 (Manipulator IRb-6 na torze jezdny)

Rozpatrzmy manipulator IRb-6 zamontowany na torze jezdny, opisany kinematyką (2.76), którego zbiór konfiguracji osobliwych jest zdefiniowany przez (2.144). Po zmianie kolejności współrzędnych

$$\begin{cases} (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5, \bar{x}_6) = (x_6, x_2, x_3, x_4, x_5, x_1) \\ (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3, \bar{y}_4, \bar{y}_5, \bar{y}_6) = (y_6, y_2, y_3, y_4, y_5, y_1) \end{cases}$$

otrzymujemy kinematykę manipulatora w postaci

$$\bar{y} = \bar{k}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \pi - \bar{x}_1 \\ -d_1 + d_6 c_5 - a_2 s_3 - a_3 s_4 \\ \bar{x}_6 + s_2(a_2 c_3 + a_3 c_4 + d_6 s_5) \\ -\bar{x}_2 \\ \pi - \bar{x}_5 \\ c_2(a_2 c_3 + a_3 c_4 + d_6 s_5) \end{pmatrix},$$

gdzie s_i, c_i oznacza odpowiednio $\sin \bar{x}_i$ i $\cos \bar{x}_i$. Zauważmy, że dokonana zmiana współrzędnych nie zmienia zbioru konfiguracji osobliwych (2.144), złożonego jedynie z osobliwości korzędu 1. Dla tak określonej kinematyki lewa strona warunku (3.79) przyjmuje wartość $a_2 a_3 \sin \bar{x}_2 \sin(\bar{x}_3 - \bar{x}_4)$, która, po uwzględnieniu ograniczeń konstrukcyjnych manipulatora, w konfiguracjach osobliwych jest zawsze różna od zera. W otoczeniu

$$\begin{aligned} \mathbf{U} = \{(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5, \bar{x}_6)^T \mid & -\pi \leq \bar{x}_1 \leq \pi, 0 < \bar{x}_2 \leq \frac{17}{18}\pi, \\ & \frac{5}{18}\pi \leq \bar{x}_3 \leq \frac{13}{18}\pi, -\frac{2}{9}\pi \leq \bar{x}_4 \leq \frac{5}{36}, \frac{5}{18}\pi \leq \bar{x}_3 - \bar{x}_4 \leq \frac{13}{18}\pi, \\ & 0 \leq \bar{x}_5 \leq \frac{1}{2}\pi, 0 \leq \bar{x}_6 \leq 1.5\} \end{aligned}$$

punktu osobliwego $\bar{x}_0 = (\bar{x}_1, \pi/2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5, \bar{x}_6)^T$ zdefiniujemy, zgodnie z równaniem (3.84), lokalny układ współrzędnych

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_6 \end{pmatrix} = \varphi(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \pi - \bar{x}_1 \\ -d_1 + d_6 c_5 - a_2 s_3 - a_3 s_4 \\ \bar{x}_6 + s_2(a_2 c_3 + a_3 c_4 + d_6 s_5) \\ -\bar{x}_2 \\ \pi - \bar{x}_5 \\ \bar{x}_6 \end{pmatrix}.$$

W nowych współrzędnych $\xi_0 = \varphi(\bar{x}_0) = (\pi - \bar{x}_{01}, -d_1 + d_6 c_{05} - a_2 s_{03} - a_3 s_{04}, \bar{x}_{06} + a_2 c_{03} + a_3 c_{04} + d_6 s_{05}, -\pi/2, \pi - \bar{x}_{05}, \bar{x}_{06})^T$, gdzie s_{0i}, c_{0i} oznacza

$\sin \bar{x}_{0i}$ i $\cos \bar{x}_{0i}$. Otoczenie $\mathbf{V} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{U})$ punktu ξ_0 jest równe

$$\mathbf{V} = \left\{ (\pi - \bar{x}_1, -d_1 + d_6 c_5 - a_2 s_3 - a_3 s_4, \bar{x}_6 + s_2(a_2 c_3 + a_3 c_4 + d_6 s_5), \right. \\ \left. -x_2, \pi - \bar{x}_5, \bar{x}_6)^T \mid -\pi \leq \bar{x}_1 \leq \pi, 0 < \bar{x}_2 \leq \frac{17}{18}\pi, \frac{5}{18}\pi \leq \bar{x}_3 \leq \frac{13}{18}\pi, \right. \\ \left. -\frac{2}{9}\pi \leq \bar{x}_4 \leq \frac{5}{36}, \frac{5}{18}\pi \leq \bar{x}_3 - \bar{x}_4 \leq \frac{13}{18}\pi, 0 \leq \bar{x}_5 \leq \frac{1}{2}\pi, 0 \leq \bar{x}_6 \leq 1.5 \right\}.$$

Wybierając zbiór $\mathbf{V}_4 = \mathbf{V}_{43} \times \{-\pi/2\} \times \mathbf{V}_{42}^{\mathfrak{I}}$ otrzymujemy $\boldsymbol{\varphi}^{-1}(\mathbf{V}_4) = \mathbf{V}_{41} \times \{\pi/2\} \times \mathbf{V}_{44}$ i stwierdzamy, że $\boldsymbol{\varphi}^{-1}(\mathbf{V}_4) \subset \mathbf{S}_1 \cap \mathbf{U}$ co oznacza, że jest spełniony warunek (3.86) z wniosku 3.2.3. Różniczka wyznacznika jacobianu analitycznego (2.143) wynosi

$$d(\det \mathbf{J}^a)(\bar{\mathbf{x}}_0) = (0, a_2 a_3 \sin(x_{03} - x_{04}), 0, 0, 0, 0).$$

Ponieważ element $(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0))_{24}^{-1}$ jest równy -1 , warunek (3.87) jest także spełniony. W rezultacie, z wniosku 3.2.3 wynika następująca konkluzja.

Wniosek 3.2.6 *W otoczeniu konfiguracji osobliwych kinematyka manipulatora IRb-6 zamontowanego na torze jezdny jest równoważna hiperbolicznej postaci normalnej*

$$\mathbf{k}_0(\mathbf{x}) = (x_1, \dots, x_5, x_6 x_4)^T. \quad (3.101)$$

■

Przykład 3.2.6 (Manipulator IRb-6 na torze jezdny)

Założmy, że zadaniem manipulatora IRb-6 zamontowanego na torze jezdny jest przemieszczenie efektora wzdłuż trajektorii zadaniowej, określonej w aspekcie współrzędnych $x_0 y_0 z_0 \varphi \theta \psi$, gdzie φ , θ i ψ są kątami Eulera Y-Z-Y, wyrażeniem

$$\mathbf{y}_d(t) = \begin{pmatrix} y_{d1}(t) \\ \vdots \\ y_{d6}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 \sin(\frac{\pi}{2}t) \\ -0.7 - 0.01t \\ 1 + 0.2 \cos(\frac{\pi}{2}t) \\ -\frac{\pi}{2} + 0.3 \sin(\frac{\pi}{2}t) \\ \pi \\ \pi \end{pmatrix}, \quad (3.102)$$

dla przedziału czasu $t \in \mathcal{I} = [0, 10][s]$. Analiza kinematyki manipulatora, określonej w aspekcie tych współrzędnych zależnością (2.76), prowadzi do

$\mathfrak{I}\mathbf{V}_{4i} \in \mathbb{R}^i$ — zbiory otwarte.

wniosku, że realizacja trajektorii zadanej wymaga wprowadzenia manipulatora w konfigurację osobliwą wtedy i tylko wtedy, gdy

$$y_{d1}(t_s) = 0,$$

w chwili t_s , takiej że $y_{d4}(t_s) = \pm\pi/2^{\parallel}$. Dla trajektorii (3.102) warunek ten jest spełniony dla $t_s \in \mathbf{T} = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}[s]$ i powoduje, że zadanie nie może zostać rozwiązane ani korzystając z regularnych metod jacobianowych, ani przy użyciu podejścia algebraicznego**.

Widać, że zgodnie z algorytmem metody postaci normalnych powinniśmy powtórzyć jego kroki 2–6 sześć razy, otrzymując tym samym trajektorie przegubową złożoną z jedenastu fragmentów, począwszy od fragmentu osobliwego. Zgodnie z wcześniejszą zapowiedzią postąpimy jednak inaczej. Jak pokazano w poprzednim przykładzie, w konfiguracjach osobliwych rozpatrywana kinematyka jest równoważna hiperbolicznej postaci normalnej (3.101). Aby przy takiej postaci normalnej uzyskane rozwiązanie było ciągłe, należy do jego określenia skorzystać z zależności (3.91), co oznacza, że w konfiguracjach osobliwych rozwiązanie będzie miało postać

$$\mathbf{x}_d(t_s) = \boldsymbol{\varphi}^{-1}\left(\lim_{\tau \rightarrow t_s} \mathbf{r}_0(\boldsymbol{\psi}(\mathbf{y}_d(\tau)))\right). \quad (3.103)$$

Ze względu na gładkość odwzorowania $\boldsymbol{\varphi}^{-1}(\boldsymbol{\xi})$, wyrażenie (3.103) można przekształcić do postaci

$$\mathbf{x}_d(t_s) = \lim_{\tau \rightarrow t_s} \boldsymbol{\varphi}^{-1}(\mathbf{r}_0(\boldsymbol{\psi}(\mathbf{y}_d(\tau)))).$$

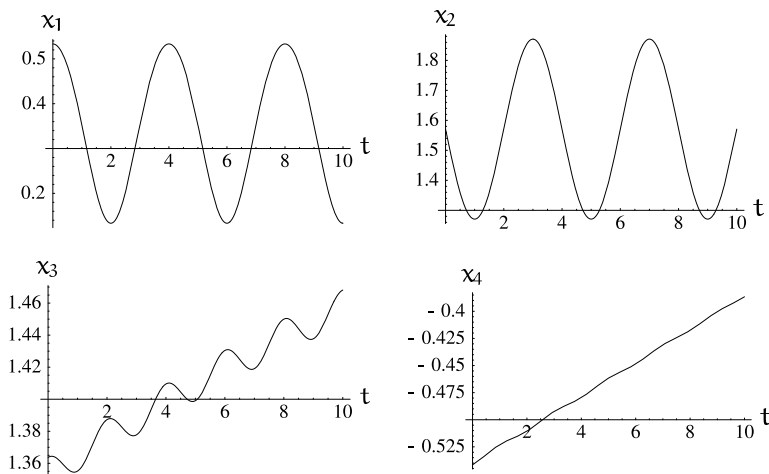
Ponieważ $\boldsymbol{\varphi}^{-1}(\mathbf{r}_0(\boldsymbol{\psi}(\mathbf{y}_d(\tau))))$ jest rozwiązaniem odwrotnego zadania kinematyki uzyskanym przy użyciu bezpośredniego podejścia algebraicznego, dochodzimy do konkluzji, że w przypadku osobliwym rozwiązanie odwrotnego zadania kinematyki może być określone jako

$$\mathbf{x}_d(t_s) = \lim_{\tau \rightarrow t_s} \mathbf{r}(\mathbf{y}_d(\tau)), \quad (3.104)$$

gdzie $\mathbf{r}(\mathbf{y})$ jest dane przez (3.15). Trajektorie przegubowe uzyskane przy użyciu formuły (3.104), odpowiadające trajektorii zadaniowej (3.102), przedstawia rysunek 3.30. Nie pokazane na rysunku składowe trajektorie są

^{||} Jeśli dla takiego t_s składowa $y_{d1}(t_s)$ trajektorii nie jest równa 0 to znaczy, że trajektoria leży poza przestrzenią roboczą manipulatora.

**W tym drugim przypadku, w wyrażeniach opisujących kinematykę odwrotną w osobliwościach pojawia się dzielenie przez zero.



Rysunek 3.30 Rozwiązanie zadania odwrotnego dla manipulatora IRb-6 zamontowanego na torze jezdnyim uzyskane metodą postaci normalnych.

stałe równe 0. Błędy popełnione podczas obliczeń zawierały się w granicach dokładności prowadzonych obliczeń numerycznych (10^{-16}). ■

3.2.3 Metoda jacobianu dołączonego

W przypadku punktowego zadania odwrotnego algorytm osobliwej kinematyki odwrotnej powinien być w stanie wyznaczyć konfiguracje osobliwe realizujące określone położenie i orientację w przestrzeni zadaniowej. W tym celu rozważymy najpierw punktowe zadanie odwrotne przy określonym $\mathbf{y}_d$, dla kinematyki nieredundantnej $\mathbf{y} = \mathbf{k}(\mathbf{x})$ o n stopniach swobody. Przy braku konfiguracji osobliwych do rozwiązania tego zadania stosowaliśmy algorytm Newtona (3.21). Obecnie przedstawimy pewne uogólnienie algorytmu Newtona, zwane *algorytmem Newtona-Smale'a*. Wybierzmy konfigurację początkową $\mathbf{x}_0$. Jeżeli $\mathbf{k}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_d$, to zadanie odwrotne jest rozwiązane. W przeciwnym wypadku założmy, że w każdej konfiguracji jest spełniony *warunek transversalności*

$$\text{rank} [\mathbf{J}^a(\mathbf{x}) \quad \mathbf{k}(\mathbf{x}_0) - \mathbf{y}_d] = n. \quad (3.105)$$

Warunek ten jest w oczywisty sposób spełniony w konfiguracjach regularnych. Natomiast, jeżeli $\mathbf{x}$ oznacza konfigurację osobliwą, to warunek transversalności wymaga, by wektor $\mathbf{k}(\mathbf{x}_0) - \mathbf{y}_d$ uzupełniał przestrzeń generowaną przez kolumny jacobianu analitycznego $\mathbf{J}^a(\mathbf{x})$ do przestrzeni zadanio-

wej $\mathbb{R}^n$, zatem był transwersalny do podprzestrzeni rozpiętej przez kolumny tej macierzy w konfiguracji $\mathbf{x}$. W konfiguracji osobliwej spełnienie warunku transwersalności pociąga za sobą wymaganie, aby korząd konfiguracji był równy 1. Dla takich konfiguracji warunek transwersalności jest możliwy do spełnienia dzięki odpowiedniemu doborowi konfiguracji początkowej lub docelowych współrzędnych zadaniowych. Przy spełnionym warunku (3.105) algorytm Newtona-Smale'a jest zdefiniowany za pośrednictwem układu równań różniczkowych

$$\dot{\mathbf{x}} = -\alpha \operatorname{adj} \mathbf{J}^a(\mathbf{x})(\mathbf{k}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_d), \quad (3.106)$$

z warunkiem początkowym $\mathbf{x}_0$, w którym $\operatorname{adj} \mathbf{J}^a(\mathbf{x})$ oznacza macierz dołączoną jakobianu analitycznego $\mathbf{J}^a(\mathbf{x})^*$. Przypominamy, że macierz dołączona posiada następującą własność

$$(\operatorname{adj} \mathbf{J}^a) \mathbf{J}^a = \mathbf{J}^a \operatorname{adj} \mathbf{J}^a = \det \mathbf{J}^a \mathbb{I}_n.$$

Znak współczynnika α w algorytmie (3.106) jest taki jak znak wyznacznika jakobianu w punkcie startowym algorytmu, $\operatorname{sgn} \alpha = \operatorname{sgn} \det \mathbf{J}^a(\mathbf{x}_0)$. Algorytm Newtona-Smale'a zapewnia asymptotyczne rozwiązanie punktowego zadania odwrotnego w tym sensie, że $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_d$ oraz $\mathbf{y}_d = \mathbf{k}(\mathbf{x}_d)$. Algorytm ten można rozszerzyć na punktowe zadanie odwrotne dla kinematyki redundantnej $\mathbf{y} = \mathbf{k}(\mathbf{x})$, $m > n$. Wybierzmy konfigurację początkową $\mathbf{x}_0$ i niech $\mathbf{y}_d$ oznacza docelowe współrzędne zadaniowe. Przyjmijmy warunek transwersalności postaci

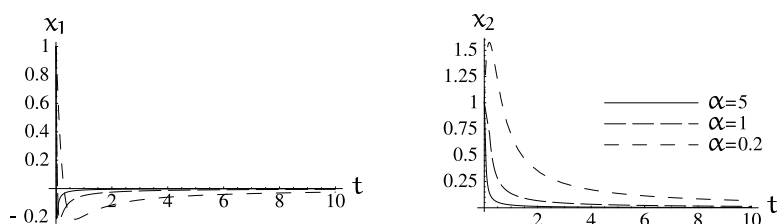
$$\operatorname{rank} [\mathbf{J}^a(\mathbf{x}) \mathbf{J}^{aT}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{k}(\mathbf{x}_0) - \mathbf{y}_d] = m. \quad (3.107)$$

Biorąc to pod uwagę, rozwiązanie zadania odwrotnego otrzymuje się jako granicę przy $t \rightarrow +\infty$ trajektorii $\mathbf{x}(t)$ układu

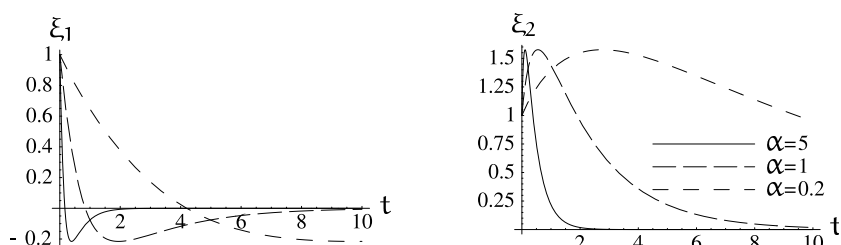
$$\dot{\mathbf{x}} = -\alpha \mathbf{J}^{aT}(\mathbf{x}) \operatorname{adj} (\mathbf{J}^a(\mathbf{x}) \mathbf{J}^{aT}(\mathbf{x})) (\mathbf{k}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_d), \quad (3.108)$$

zainicjowanego w $\mathbf{x}_0$. We wzorze (3.108) adj ponownie oznacza macierz dołączoną, natomiast znak współczynnika α jest taki jak $\operatorname{sgn} \det (\mathbf{J}^a(\mathbf{x}_0) \mathbf{J}^{aT}(\mathbf{x}_0))$. Analiza działania algorytmu Newtona-Smale'a pokazuje, że w wyniku realizacji trajektorii będącej rozwiązaniem układu (3.106) lub (3.108), ruch w przestrzeni zadaniowej odbywa się wzdłuż linii prostej $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0 + s(\mathbf{y}_d - \mathbf{y}_0)$, przy czym rozwiązanie zadania odwrotnego odpowiada wartości parametru $s = 1$. W efekcie, w przestrzeni zadaniowej zostaje zdefiniowany pewien

*Zobacz dodatek A.1.



Rysunek 3.31 Trajektorie przegubowe uzyskane przy zastosowaniu algorytmu Newtona-Smale'a.



Rysunek 3.32 Trajektorie przegubowe uzyskane przy zastosowaniu algorytmu Newtona.

prostoliniowy tor (ścieżka) ruchu, a celem algorytmu kinematyki odwrotnej jest zapewnienie ruchu wzdłuż tego toru. Dynamika ruchu wzdłuż toru ma znaczenie drugorzędne.

Przykład 3.2.7 (Manipulator typu podwójne wahadło)

Rozpatrzmy manipulator typu podwójne wahadło, którego ramiona mają długość $l_1 = 5$, $l_2 = 3$, opisany kinematyką (2.68). Niech naszym zadaniem będzie określenie konfiguracji manipulatora, przy której jego efektor osiąga punkt $\mathbf{y}_d = (8, 0)^T$ trajektorii (3.94) dla $t = 2.5$. Jak wiemy z poprzednich przykładów, w tym celu manipulator musi przyjąć konfigurację osobliwą. Efekt zastosowania algorytmu Newtona-Smale'a (3.106) zainicjowanego w punkcie $\mathbf{x}_0 = (1, 1)^T$, przy różnych wartościach parametru α , przedstawia rysunek 3.31.

Nieco zaskakującym wydaje się spostrzeżenie, że postawione wyżej zadanie można także rozwiązać stosując algorytm Newtona (3.21), pomimo źle uwarunkowanego układu równań opisujących ten algorytm (osobliwa macierz $\mathbf{J}^a(\boldsymbol{\xi})$). Komplet wyników analogicznych do przedstawionych na rysunku 3.31, uzyskany przy pomocy algorytmu Newtona, pokazuje rysunek 3.32. ■

3.2.4 Metoda przestrzeni zerowej

Gdyby pójść dalej za tokiem rozumowania przedstawionym w poprzednim podrozdziale i dopuścić jako rozwiązanie odwrotnego zadania kinematyki każdy ruch w przestrzeni zadaniowej wzdłuż zadanego toru $\mathbf{y}_d(s)$, bez określania dynamiki tego ruchu, to możliwości rozwiązania osobliwego zadania odwrotnego wzrosną. Niech zatem będzie dany manipulator nieredundantny z kinematyką $\mathbf{y} = \mathbf{k}(\mathbf{x})$. Sformułujmy odwrotne zadanie kinematyki w następujący sposób:

Dana jest krzywa $\mathbf{y}_d(s)$ w przestrzeni zadaniowej, znaleźć trajektorię ruchu przegubów $\mathbf{x}_d(t)$ i dobrać dynamikę ruchu wzdłuż krzywej $\mathbf{y}_d(s)$ (tzn. zależność parametru od czasu), tak aby

$$\mathbf{y}_d(s(t)) = \mathbf{k}(\mathbf{x}_d(t)). \quad (3.109)$$

Aby rozwiązać tak rozszerzone zadanie, potraktujemy s jako dodatkową współrzędną przegubową i zdefiniujemy odwzorowanie

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, s) = \mathbf{k}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_d(s). \quad (3.110)$$

Zakładając, że istnieje rozwiązanie $(\mathbf{x}_d(t), s(t))$ zadania odwrotnego, obliczamy pochodną lewej strony wyrażenia (3.110) względem czasu. Na mocy zależności (3.109)

$$\left[\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}, s)}{\partial \mathbf{x}} \quad \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}, s)}{\partial s} \right] \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{s} \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

skąd wynika, że trajektoria $(\mathbf{x}_d(t), s(t))$ stanowi krzywą całkową układu dynamicznego ruchu własnego dla kinematyki (3.110)

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_d \\ \dot{s} \end{pmatrix} = \mathbf{X}(\mathbf{x}_d, s). \quad (3.111)$$

Pole wektorowe ruchu własnego $\mathbf{X}(\mathbf{x}, s) \in \text{Ker} \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \quad \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial s} \right]$ definiuje się w sposób kanoniczny formułą (3.59), a zatem

$$\mathbf{X}_i(\mathbf{x}, s) = (-1)^{i+1} \det \left[\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}, s)}{\partial \mathbf{x}} \quad \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}, s)}{\partial s} \right]^i, \quad (3.112)$$

gdzie wyznacznik jest obliczany po usunięciu i -tej kolumny z macierzy Jacobiego odwzorowania $F(\mathbf{x}, s)$. Zauważmy, że ostatnia składowa pola wektorowego ruchu własnego, $\mathbf{X}_{n+1}(\mathbf{x}, s) = \det \mathbf{J}^a(\mathbf{x})$, co oznacza, że dynamika ruchu wzdłuż krzywej $\mathbf{y}_d(s)$ jest zdefiniowana przez układ

$$\dot{s} = \det \mathbf{J}^a(\mathbf{x}_d). \quad (3.113)$$

Widzimy, że efektor zatrzymuje się w obrazach konfiguracji osobliwych. Jeżeli dodatkowo przyjąć warunek transversalności

$$\text{rank} \left[\mathbf{J}^a(\mathbf{x}) \quad \frac{d\mathbf{y}_d(s)}{ds} \right] = n, \quad (3.114)$$

to w każdym punkcie $\mathbf{X}(\mathbf{x}, s) \neq 0$, a zatem trajektoria w przestrzeni przegubowej przechodzi przez konfiguracje osobliwe bez zatrzymania.

Przykład 3.2.8 (Manipulator typu podwójne wahadło)

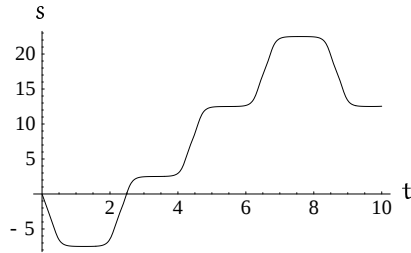
Jak wiemy, metoda przestrzeni zerowej pozwala na rozwiązanie osobliwego odwrotnego zadania kinematyki przy danej ścieżce w przestrzeni zadaniowej. Przyjmijmy więc, że zadanie manipulatora polega na wykonaniu ruchu efektora wzdłuż ścieżki w kształcie okręgu*

$$\mathbf{y}_d(s) = \begin{pmatrix} y_{d1}(s) \\ y_{d2}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 + 2 \sin\left(\frac{\pi}{5}s\right) \\ 2 \cos\left(\frac{\pi}{5}s\right) \end{pmatrix}. \quad (3.115)$$

Ponownie, ścieżkę dobrano tak, aby zawierała konfiguracje osobliwe (tutaj dla $s \bmod 10 = 2.5$). W rezultacie zastosowania metody przestrzeni zerowej otrzymujemy parametryzację czasową $s(t)$ zadanej ścieżki oraz trajektorię przegubową $\mathbf{x}_d(t)$ odpowiadającą trajektorii zadaniowej $\mathbf{y}_d(s(t))$. Przebiegi te, wynikające z rozwiązania układu równań (3.111) zainicjowanych w punkcie $\mathbf{x}_0 = (0.805, -1.37)^T$, $s_0 = 0$, przedstawiają rysunki 3.33 i 3.34.

Jak widać z rysunków, w przedziale czasu $\mathcal{I} = [0, 10]$ efektor manipulatora wykonał niemal pięć obrotów. Każdorazowo, gdy manipulator zbliżał się do konfiguracji osobliwej, zatrzymywał się. Symulacje pokazują, że w metodzie nie mamy wpływu ani na to, czy manipulator przejdzie przez konfigurację osobliwą (czemu na skutek zmiany wyznacznika jacobianu manipulatora zawsze towarzyszy zmiana kierunku realizacji ścieżki — zobacz równanie (3.113)), czy tylko ulegnie odbiciu od niej, ani na to, w którą stronę zachodzi ruch (funkcja $s(t)$ nie musi być monotoniczna). W przedstawionym

*Której odpowiada między innymi trajektoria (3.94).



Rysunek 3.33 Parametryzacja czasowa ścieżki uzyskana metodą przestrzeni zerowej.

przypadku trajektoria przegubowa najpierw przechodzi przez osobliwość w chwili $t = 1.24$, następnie doznaje odbicia (w dwóch chwilach $t = 3.35$, $t = 5.47$) i przechodzi ponownie (przy $t = 7.60$). Zauważmy, że z dala od konfiguracji osobliwych uzyskane rozwiązania charakteryzują się dużymi prędkościami i bardzo dużymi przyspieszeniami (porównaj rozwiązania metodą postaci normalnych — przykłady 3.2.3 i 3.2.4, oraz metodą jacobianu odpornego — przykład 3.2.9). Błędy towarzyszące rozwiązaniu metodą przestrzeni zerowej pokazuje rysunek 3.35. ■

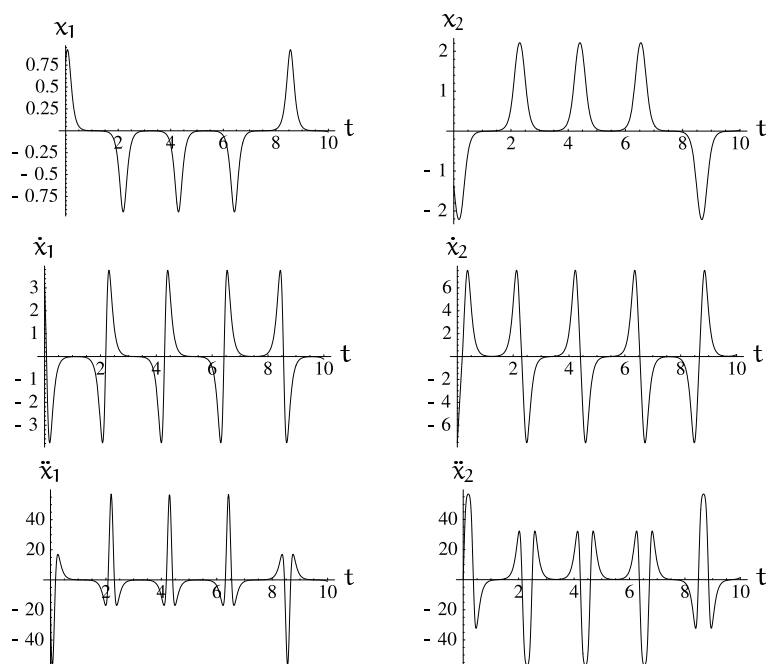
3.2.5 Metoda jacobianu odpornego

W praktyce często wystarczające jest uzyskanie przybliżonego rozwiązania zadania odwrotnego. Dominującą metodą przybliżoną jest metoda najmniejszych kwadratów pozwalająca na otrzymanie algorytmów analogicznych do (3.20), (3.28), (3.33), dobrze określonych także w pobliżu konfiguracji osobliwych. Istotą metody najmniejszych kwadratów jest zastąpienie odwrotności lub pseudoodwrotności jacobianu analitycznego, źle uwarunkowanego w konfiguracjach osobliwych, odwrotnością przybliżoną, lecz uodpornioną na obecność osobliwości. *Odwrotność przybliżoną* wyznacza się przez minimalizację kwadratowej funkcji jakości

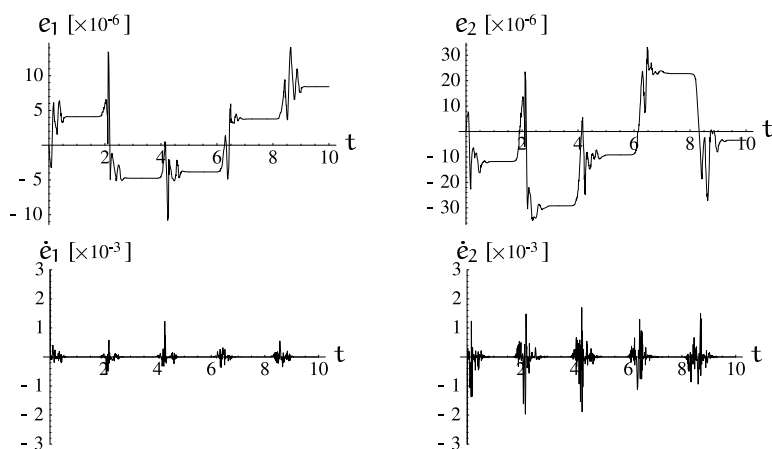
$$V(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \lambda \mathbf{v}^T \mathbf{v} + \frac{1}{2} (\mathbf{w} - \mathbf{J}^a(\mathbf{x}) \mathbf{v})^T (\mathbf{w} - \mathbf{J}^a(\mathbf{x}) \mathbf{v}),$$

będącej sumą ważoną energii ruchu w przegubach oraz kwadratu błędu prędkości, w której $\lambda > 0$ jest wagą składnika energii. Po wykonaniu odpowiednich przekształceń wyliczamy

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^{a\lambda}(\mathbf{x}) &= (\lambda \mathbb{I}_n + \mathbf{J}^{aT}(\mathbf{x}) \mathbf{J}^a(\mathbf{x}))^{-1} \mathbf{J}^{aT}(\mathbf{x}) = \\ &= \mathbf{J}^{aT}(\mathbf{x}) (\lambda \mathbb{I}_m + \mathbf{J}^a(\mathbf{x}) \mathbf{J}^{aT}(\mathbf{x}))^{-1}. \end{aligned} \quad (3.116)$$



Rysunek 3.34 Trajektorie położenia, prędkości i przyspieszenia przegubów uzyskane przy zastosowaniu metody przestrzeni zerowej.



Rysunek 3.35 Błędy położenia i prędkości efektora przy metodzie przestrzeni zerowej.

Zauważmy, że druga z formuł w wyrażeniu (3.116) przy $\lambda = 0$ staje się prawostronną pseudoodwrotnością $\mathbf{J}^{a\#}(\mathbf{x})$ jacobianu analitycznego (zdefiniowanego dla macierzy $\mathbf{W} = \mathbb{I}_n$). W ogólności, rola parametru λ polega na zapewnieniu istnienia macierzy odwrotnych definiujących $\mathbf{J}^{a\lambda}(\mathbf{x})$ w konfiguracjach osobiwych manipulatora. Ponieważ przy $\lambda > 0$

$$\mathbf{J}^a(\mathbf{x})\mathbf{J}^{a\lambda}(\mathbf{x}) \neq \mathbb{I}_m \quad \text{oraz} \quad \mathbf{J}^{a\lambda}(\mathbf{x})\mathbf{J}^a(\mathbf{x}) \neq \mathbb{I}_n,$$

rozwiązanie zadania odwrotnego przy zastosowaniu odwrotności $\mathbf{J}^{a\lambda}(\mathbf{x})$ jest przybliżone. Zastępując w formułach (3.20), (3.28) $(\mathbf{J}^a)^{-1}(\mathbf{x})$ lub $\mathbf{J}^{a\#}(\mathbf{x})$ przez $\mathbf{J}^{a\lambda}(\mathbf{x})$ otrzymujemy następujący *algorytm jacobianu odpornego*

$$\dot{\mathbf{x}}_d = \mathbf{J}^{a\lambda}(\mathbf{x}_d)\dot{\mathbf{y}}_d. \quad (3.117)$$

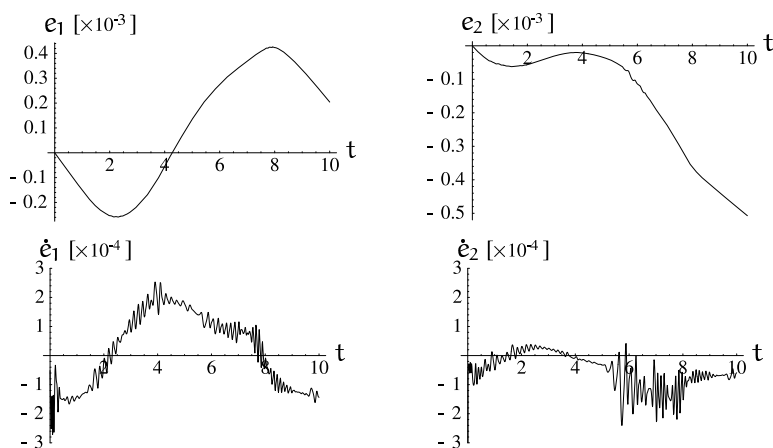
Przy założeniu, że konfiguracja początkowa $\mathbf{x}_0$ tego algorytmu jest nieosobliwa, możemy do jej wyznaczenia posłużyć się algorytmem (3.21) lub (3.29). Uodporniona na osobliwości wersja algorytmu (3.33) ma postać

$$\dot{\mathbf{x}}_d = \mathbf{J}^{a\lambda}(\mathbf{x}_d)\dot{\mathbf{y}}_d + (\mathbb{I}_n - \mathbf{J}^{a\lambda}(\mathbf{x}_d)\mathbf{J}^a(\mathbf{x}_d))\mathbf{v}. \quad (3.118)$$

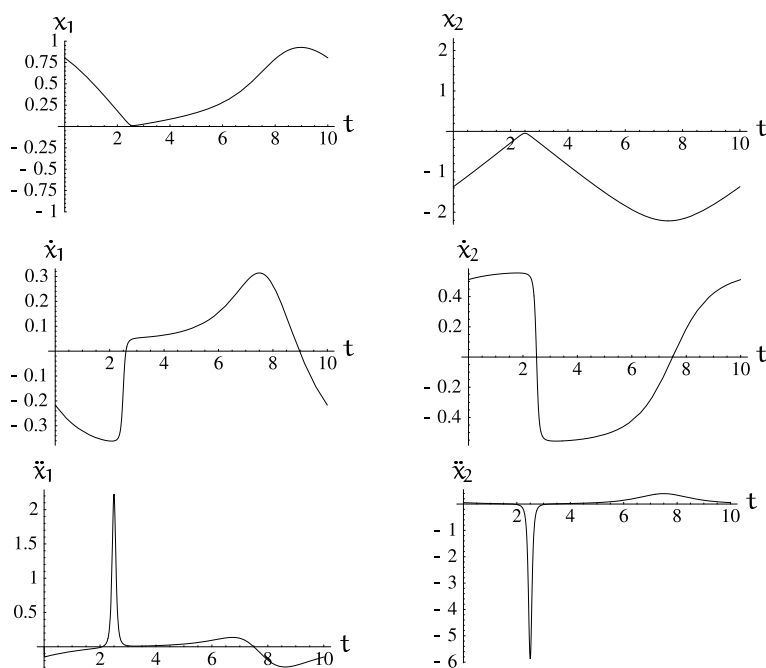
Przykład 3.2.9 (Manipulator typu podwójne wahadło)

Aby przekonać się, jakie są skutki uodpornienia na osobliwości metody jacobianu odwrotnego, rozwiążemy najpierw metodą jacobianu odpornego zadanie postawione w przykładzie 3.1.5. Niech efektor manipulatora ma podążać wzdłuż trajektorii zadaniowej (3.23). Rozwiązanie tak postawionego zadania uzyskane po scałkowaniu równań (3.117) z parametrem $\lambda = 0.001$, zainicjowanych w punkcie $\mathbf{x}_0 = (-0.201, 1.74)^T$, wygląda podobnie do rozwiązania przedstawionego na rysunku 3.4. Różnica pojawia się natomiast w przebiegach błędów położenia i prędkości efektora. W tym przypadku, oprócz błędów numerycznych, występują błędy metody, co wyraźnie widać na rysunku 3.36 (porównaj z rysunkiem 3.5). Prowadzi to do zwiększenia sumarycznych błędów o ponad jeden rząd wielkości. Dodajmy, że czas obliczeń wzrósł w podobnym stosunku.

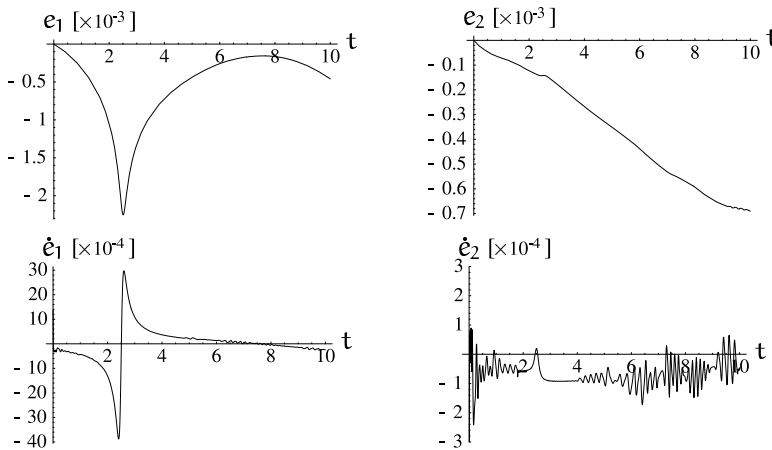
Przejdźmy teraz do rozwiązywania odwrotnego zadania kinematyki metodą jacobianu odpornego w sytuacji, gdy trajektoria zadana wymaga osiągnięcia konfiguracji osobiwej. W tym celu zażądajmy, aby efektor manipulatora podążał wzdłuż trajektorii zadaniowej (3.94). Rozwiązując to zadanie z wykorzystaniem równań (3.117) z parametrem $\lambda = 0.001$, zainicjowanych w punkcie $\mathbf{x}_0 = (0.805, -1.37)^T$, otrzymujemy trajektorie przedstawione na rysunku 3.37. Porównanie tych trajektorii z rozwiązaniami zadania uzyska-



Rysunek 3.36 Błędy położenia i prędkości efektora towarzyszące trajektorii regularnej przy algorytmie jakobianu odpornego.



Rysunek 3.37 Rozwiązanie osobliwego zadania odwrotnego dla podwójnego wahadła uzyskane przy pomocy algorytmu jakobianu odpornego.

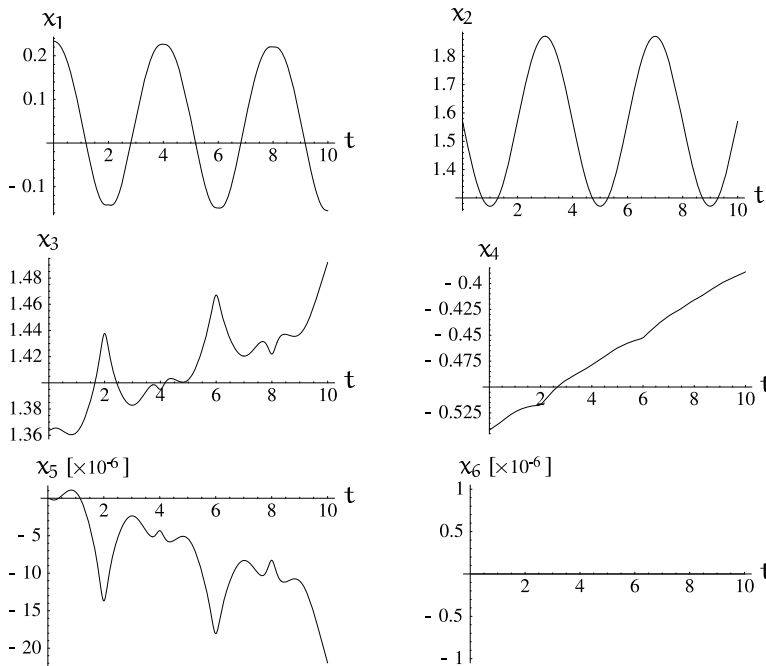


Rysunek 3.38 Błędy położenia i prędkości efektora towarzyszące trajektorii osobliwej przy algorytmie jacobianu odpornego.

nymi dotychczas (zobacz rysunki 3.28 i 3.29) prowadzi do wniosku, że są one podobne do rozwiązania otrzymanego bezpośrednią metodą algebraiczną. Różnice między tymi rozwiązaniami dotyczą wartości przyspieszeń w przegubach manipulatora i wielkości błędów. Dzięki zastosowaniu metody jacobianu odpornego, przyspieszenia zostały zredukowane z wartości teoretycznie nieskończonej do poziomu pojedynczych rad/s^2 (jest to nadal znaczna wartość w porównaniu z przyspieszeniami wzdłuż analogicznych trajektorii wynikającymi z metody postaci normalnych). Redukcja ta została okupiona wielkością powstałych błędów, przedstawionych na rysunku 3.38, które w tym przypadku przyjmują znaczące wartości (o dwa rzędy większe od błędów podstawowej metody jacobianowej). Cechą charakterystyczną uzyskanego rozwiązania jest to, że maksymalne wartości błędów pojawiają się w chwilach, gdy trajektoria zadana osiąga konfiguracje osobliwe. Oczywiście, błędy te można zmniejszyć przez zmniejszenie wartości parametru λ , ale towarzyszyć temu będzie wzrost przyspieszeń w przegubach manipulatora w pobliżu konfiguracji osobliwych. ■

Przykład 3.2.10 (Manipulator IRb-6 na torze jezdny)

W tym przykładzie ponownie przyjmujemy, że zadaniem manipulatora IRb-6 zamontowanego na torze jezdny jest przemieszczenie efektora wzdłuż trajektorii (3.102). Rozwiązanie tego zadania metodą jacobianu odpornego przedstawia rysunek 3.39. Uzyskane rozwiązanie jest bardzo podobne do rozwiązania możliwego do osiągnięcia metodą postaci normalnych. Różnice



Rysunek 3.39 Rozwiązanie zadania odwrotnego dla manipulatora IRb-6 zamontowanego na torze jezdnym uzyskane przy pomocy algorytmu jacobianu odpornego.

dotyczą dwóch szczegółów. Po pierwsze, błędy metody jacobianu odpornego kształtują się na poziomie 10^{-3} , podczas gdy metodzie postaci normalnych towarzyszą jedynie błędy numeryczne rzędu 10^{-16} . Po drugie, znalezienie rozwiązania metodą jacobianu odpornego było ponad 1000-krotnie bardziej czasochłonne niż rozwiązanie zadania metodą postaci normalnych. Na domiar złego, przy wielokrotnym powtarzaniu trajektorii zadanej błędy w metodzie jacobianu odpornego kumulują się. ■

3.3 Komentarze i uwagi bibliograficzne

Klasykzną definicję przestrzeni roboczej manipulatora podają na przykład prace [Lat93, SS96]. Odwrotne zadanie kinematyki manipulatora należy do podstawowych zadań robotyki [MLS94, SV97, SS96, Ang97, CD98]. Z regularnym zadaniem odwrotnym mamy do czynienia wtedy, gdy w celu jego rozwiązania nie ma potrzeby wprowadzania manipulatora w konfiguracje osobliwe. Jak zaznaczyliśmy, występowanie konfiguracji osobliwych jest konsekwencją odmiennej geometrii rozmaitości przegubowej i rozma-

itości zadaniowej [Got86, BW88]. Systematyczną technikę rozwiązania odwrotnego zadania kinematyki w postaci jawnej, bazującą na wykładniczej reprezentacji kinematyki, stanowi dekompozycja zadania odwrotnego na tzw. podproblemy Padena-Kahana, [MLS94]. Przy omawianiu algorytmów kinematyki odwrotnej kładziemy szczególny nacisk na metody jacobiano-we [MLS94, SV97, SS96]. Wykorzystanie pseudoodwrotności jacobianu analitycznego do rozwiązywania zadania odwrotnego w przypadku kinematyki redundantnej omówiono szczegółowo w monografii [Nak91]. Koncepcję wykorzystania formuły (3.33) do kształtowania przebiegu trajektorii przegubów stosownie do założonych kryteriów sformułował Liégeois [Lié77]. Funkcja odległości przedstawiona wzorem (3.36) została zaczerpnięta z książki [SS96]. Algorytm kinematyki odwrotnej wykorzystujący pojęcie jacobianu rozszerzonego podał Bailleul [Bai85]. Algorytm (3.43) pochodzi od Siciliano [SS96]. Wadą algorytmów redundantnej kinematyki odwrotnej wykorzystujących pseudoodwrotność jacobianu jest brak *powtarzalności* [KH83], która polega na tym, że zamkniętym trajektoriom (torom) w przestrzeni zadaniowej odpowiadają zamknięte trajektorie (tory) w przestrzeni przegubowej. Kryteria powtarzalności zostały sformułowane przez Brocketta [Bro84], a następnie rozwinięte przez Shamira i Yomdina [SY88]. Powtarzalnymi algorytmami kinematyki odwrotnej zajmował się Maciejewski [RM94]. Od wady braku powtarzalności jest wolny algorytm kinematyki odwrotnej oparty na zastosowaniu mnożników Lagrange'a, zaproponowany przez Changa [Cha87]. Elipsoida manipulowalności i miara manipulowalności (3.53) są autorstwa Yoshikawy [Yos84, Yos91]. Manipulowalność należy do podstawowych miar zręczności manipulatora. Zagadnieniu miar zręczności i fundamentom projektowania zręcznych manipulatorów poświęcono prace [KB87, PB94, SB96]. Na możliwość unikania konfiguracji osobliwych przy sterowaniu ruchem manipulatorów redundantnych zwrócili uwagę Bailleul, Hollerbach i Brockett [BHB84]. Zagadnienia unikania osobliwości dotyczą prace [Bed91, BF91] i [Sha90, Bei97, SOC97]. Własności „konfiguracja lokalnie możliwa do uniknięcia” i „konfiguracja lokalnie niemożliwa do uniknięcia” wraz z kryteriami tych własności zakorzenionymi w teorii hamiltonowskich układów dynamicznych i w postaciach normalnych kinematyki zostały wprowadzone w pracach [TM95, Tch95b, Tch97, Tch98]. Twierdzenie 3.2.1 pochodzi z pracy [TM95]. Pojęcie rozmaitości ruchu własnego zostało wprowadzone przez Burdicka [Bur89, Bur91]. Hamiltonowskie pola wektorowe zdefiniowano w książce [AGLV93]. Twierdzenie 3.2.2 zostało wykazane w artykule [Tch95b]. Do automatycznej analizy osobliwości kinematyki według

kryteriów przedstawionych w podrozdziale 3.2.1 służy program KOSMA, opisany w pracy [Piw98]. Idea klasyfikacji kinematyki manipulatorów przy pomocy prostych modeli matematycznych zwanych postaciami normalnymi należy do standardowych narzędzi teorii osobliwości odwzorowań, [GG73, AVGZ85, Arn93]. Pierwsze próby takiej klasyfikacji można znaleźć w pracach [Tch90, Tch91]. Uzyskane później wyniki dotyczą głównie warunków transformacji kinematyki nieredundantnej i redundantnej do kwadratowej (parabolicznej) i hiperbolicznej postaci normalnej [Tch95a, MT96, Tch98]. Twierdzenie 3.2.3 pochodzi z pracy [Tch98]. Twierdzenie 3.2.4 prezentujemy po raz pierwszy w niniejszej książce. Jest ono naturalną konsekwencją wcześniejszych wyników cząstkowych [Mus96, TMZ97, Tch99]. Podstawy metody postaci normalnych, polegającej na rozwiązaniu osobliwego odwrotnego zadania kinematyki przez jego redukcję do równoważnego zadania dla postaci normalnej kinematyki przedstawiono w pracach [Mus96, TM97, TM98]. Metoda postaci normalnych została poddana weryfikacji eksperymentalnej na manipulatorze *AdeptOne**, [TM98], oraz na manipulatorze IRb-6 zamontowanym na torze jezdny [MT98]. Wykorzystanie idei geometrii i topologii różniczkowej do badania kinematyki manipulatorów, bliskie podejściu zastosowanemu w metodzie postaci normalnych, zawierają m. in. prace Kieffera [Kie92, Kie94], Pai i Leu [PL92], Shankara i Sarafa [SS95] oraz Chena, O'Neila i Senga [CSO97, OCS97, SOC97]. Podstawy metody rozwiązania zadania kinematyki odwrotnej, znanej obecnie jako metoda jakobianu dołączonego, zostały podane w pracy [TD93], w której zaproponowano zastosowanie do osobliwego odwrotnego zadania kinematyki manipulatora tzw. uogólnionego algorytmu Newtona, pochodzącego od Smale'a, [Sma76] i nazwanego w podrozdziale 3.2.3 algorytmem Newtona-Smale'a. Metoda została rozwinięta przez Nencheva i współpracowników w pracach [NU97, T⁺97, NTU98]. Metoda przestrzeni zerowej pochodzi od Nencheva [Nen95]; metoda nawiązuje do pewnych idei sformułowanych przez Sampei i Furutę [SF88] oraz Kieffera [Kie92, Kie94]. Zastosowanie metody najmniejszych kwadratów do uzyskania przybliżonego algorytmu kinematyki odwrotnej zaproponowali Nakamura i Hanafusa [NH86, Nak91] oraz Wampler II [Wam86]. Szczegółowa analiza tego sposobu podejścia została przeprowadzona w pracy [CSE94]. Problematyka osobliwości kinematyki manipulatorów i algorytmów osobliwej kinematyki odwrotnej stanowi ob-

*Za umożliwienie przeprowadzenia tych badań jesteśmy zobowiązani Prof. W. Jacakowi, Uniwersytet Johannesesa Keplera, Linz, Austria.

szaż znacznej aktywności badawczej. Jej celem jest opracowanie algorytmów zapewniających dużą dokładność przejścia przez konfiguracje osobliwe i zarazem nieskomplikowanych pojęciowo i obliczeniowo. W tym kontekście niedostatkim metody postaci normalnych jest konieczność rozpoznania typu osobliwości przed zastosowaniem algorytmu.

Literatura

- [AGLV93] V. I. Arnold, V. V. Goryunov, O. V. Lyashko i V. A. Vasilev, Singularity theory II. classification and applications. W: V. I. Arnold, (red.), *Dynamical Systems VIII*. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [Ang97] J. Angeles, *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems. Theory, Methods, and Algorithms*. Springer-Verlag, New York, 1997.
- [Arn93] V. I. Arnold, (red.), *Dynamical Systems VI. Singularity Theory I*. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [AVGZ85] V. I. Arnold, A. N. Varchenko i S. M. Gusein-Zade, *Singularities of Differentiable Maps*. Birkhäuser, Boston, 1985.
- [Bai85] J. Bailleul, Kinematic programming alternatives for redundant manipulators. W: *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics Automat.*, vol. 1, strony 722–728, St. Louis, 1985.
- [Bed91] N. S. Bedrossian, Classification of singular configurations for redundant manipulators. W: *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics Automat.*, vol. 1, strony 818–823, Sacramento, 1991.
- [Bei97] L. Beiner, Singularity avoidance for articulated robots. *Robotics Autonomous Systems*, **20**:39–47, 1997.
- [BF91] N. S. Bedrossian i K. Flueckiger, Characterizing spatial redundant manipulator singularities. W: *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics Automat.*, vol. 1, strony 714–719, Sacramento, 1991.
- [BHB84] J. Bailleul, J. Hollerbach i R. W. Brockett, Programming and control of kinematically redundant manipulators. W: *Proc. IEEE Conf. Decision Control*, vol. 1, strony 768–774, 1984.
- [Bro84] R. W. Brockett, Robotic manipulators and the product of exponentials formula. W: *Mathematical Theory of Networks and Systems*, strony 120–129. Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [Bur89] J. W. Burdick, On the inverse kinematics of redundant manipulators: Characterization of the self-motion manifolds. W: *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics Automat.*, vol. 1, strony 264–270, Scottsdale, 1989.

- [Bur91] J. W. Burdick, A classification of 3R regional manipulator singularities and geometries. W: *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics Automat.*, vol. 3, strony 2670–2675, Sacramento, 1991.
- [BW88] D. R. Baker i C. W. Wampler II, On the inverse kinematics of redundant manipulators. *Int. J. Robotics Research*, 7(2):3–21, 1988.
- [CD98] C. D. Crane III i J. Duffy, *Kinematic Analysis of Robot Manipulators*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [Cha87] P. H. Chang, Closed-form solution for inverse kinematics of robot manipulators with redundancy. *J. Robotic Automat.*, 3(5):383–403, 1987.
- [CSE94] S. Chiaverini, B. Siciliano i O. Egeland, Review of the damped least-squares inverse kinematics with experiments on an industrial robot manipulator. *IEEE Trans. Control Syst. Technology*, 2(2):123–134, 1994.
- [CSO97] Y. C. Chen, J. Seng i K. A. O’Neil, Lowest-order rate control of mechanisms near singularities. W: *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics Automat.*, vol. 3, strony 3597–3601, Albuquerque, 1997.
- [GG73] M. Golubitsky i V. Guillemin, *Stable Mappings and Their Singularities*. Springer-Verlag, Berlin, 1973.
- [Got86] D. H. Gottlieb, Robots and fibre bundles. *Bull. Soc. Math. Belgique*, 37:219–223, 1986.
- [KB87] C. A. Klein i B. E. Blaho, Dexterity measures for the design and control of kinematically redundant manipulators. *Int. J. Robotics Research*, 6(2):72–83, 1987.
- [KH83] C. Klein i C. Huang, Review of pseudoinverse control for use with kinematically redundant manipulators. *IEEE Trans. Systems, Man, Cybernet.*, 13(2):245–250, 1983.
- [Kie92] J. Kieffer, Manipulator inverse kinematics for untimed end-effector trajectories with ordinary singularities. *Int. J. Robotics Research*, 11(3):225–237, 1992.
- [Kie94] J. Kieffer, Differential analysis of bifurcations and isolated singularities for robots and mechanisms. *IEEE Trans. Robotics Automat.*, 10(1):1–10, 1994.
- [Lat93] J. C. Latombe, *Robot Motion Planning*. Kluwer, Boston, 1993.
- [Lié77] A. Liégeois, Automatic supervisory control of the configuration and behaviour of multibody mechanisms. *IEEE Trans. Systems, Man, Cybernet.*, 7(6):868–871, 1977.

- [MLS94] R. M. Murray, Z. Li i S. S. Sastry, *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. CRC Press, Boca Raton, 1994.
- [MT96] R. Muszyński i K. Tchoń, Normal forms of non-redundant singular robot kinematics: Three DOF worked examples. *J. Robotic Systems*, **13**(12):765–791, 1996.
- [MT98] R. Muszyński i K. Tchoń, A solution to the singular inverse kinematic problem for a planar manipulation robot mounted on a track. W: *1st IFAC Workshop on Space Robotics*, vol. 1, strony 146–151, Motreal, 1998.
- [Mus96] R. Muszyński, *Modele i algorytmy sterowania manipulatorów z osobliwościami kinematycznymi*. Rozprawa doktorska, Instytut Cybernetyki Technicznej, Politechnika Wrocławska, 1996.
- [Nak91] Y. Nakamura, *Advanced Robotics: Redundancy and Optimization*. Addison-Wesley, Reading, 1991.
- [Nen95] D. N. Nenchev, Tracking manipulator trajectories with ordinary singularities: A null space-based approach. *Int. J. Robotics Research*, **14**(4):399–404, 1995.
- [NH86] Y. Nakamura i H. Hanafusa, Inverse kinematic solutions with singularity robustness for robot manipulator control. *J. Dyn. Syst. Meas. Contr.*, **109**(2):163–171, 1986.
- [NTU98] D. N. Nenchev, Y. Tsumaki i M. Uchiyama, Singularity-consistent behavior of telerobots: Theory and experiments. *Int. J. Robotics Research*, **17**(2):138–152, 1998.
- [NU97] D. N. Nenchev i M. Uchiyama, Singularity-consistent path planning and motion control through instantaneous self-motion singularities of parallel-link manipulators. *J. Robotic Systems*, **14**(13):27–36, 1997.
- [OCS97] K. A. O’Neil, Y. C. Chen i J. Seng, Removing singularities of resolved motion rate control of mechanisms, including self-motion. *IEEE Trans. Robotics Automat.*, **13**(5):741–751, 1997.
- [PB94] F. C. Park i R. W. Brockett, Kinematic dexterity of robotic mechanisms. *Int. J. Robotics Research*, **13**(1):1–15, 1994.
- [Piw98] S. Piwko, Unikanie osobliwości w robotach o redundantnej kinematyce. Praca magisterska, Instytut Cybernetyki Technicznej, Politechnika Wrocławska, 1998.
- [PL92] D. K. Pai i M. C. Leu, Genericity and singularities of robot manipulators. *IEEE Trans. Robotics Automat.*, **8**(5):492–504, 1992.

- [RM94] R. G. Roberts i A. A. Maciejewski, Singularities, stable surfaces, and the repeatable behaviour of kinematically redundant manipulators. *Int. J. Robotics Research*, **13**(1):207–213, 1994.
- [SB96] A. Stokes i R. W. Brockett, Dynamics of kinematic chains. *Int. J. Robotics Research*, **15**(4):393–405, 1996.
- [SF88] M. Sampei i K. Furuta, Robot control in a neighbourhood of singular points. *J. Robotic Automat.*, **4**(3):303–309, 1988.
- [Sha90] T. Shamir, The singularities of redundant robot arm. *Int. J. Robotics Research*, **9**(1):113–121, 1990.
- [Sma76] S. Smale, A convergent process of price adjustment and global Newton method. *J. Math. Econ.*, **3**:107–120, 1976.
- [SOC97] J. Seng, K. A. O’Neil i Y. C. Chen, On the existence and the manipulability recovery rate of self-motion at manipulator singularities. *Int. J. Robotics Research*, **16**(2):171–184, 1997.
- [SS95] S. Shankar i A. Saraf, Singularities in mechanisms I. *Mech. Machine Theory*, **30**:1139–1148, 1995.
- [SS96] L. Sciavicco i B. Siciliano, *Modeling and Control of Robot Manipulators*. The McGraw-Hill, New York, 1996.
- [SV97] M. Spong i M. Vidyasagar, *Dynamika i sterowanie robotów*. WNT, Warszawa, 1997.
- [SY88] T. Shamir i Y. Yomdin, Repeatability of redundant manipulators. mathematical solution of the problem. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, **33**:1004–1009, 1988.
- [T⁺97] Y. Tsumaki et al., Teleoperation based on adjoint Jacobian approach. *Contr. Systems*, **17**(1):53–62, 1997.
- [Tch90] K. Tchoń, Towards a differential topological classification of robot manipulators. W: *Robust Control of Linear Systems and Nonlinear Control*, strony 565–574. Birkhäuser, Boston, 1990.
- [Tch91] K. Tchoń, Differential topology of the inverse kinematic problem for redundant robot manipulators. *Int. J. Robotics Research*, **10**(5):492–504, 1991.
- [Tch95a] K. Tchoń, A normal form of singular kinematics of robot manipulators with smallest degeneracy. *IEEE Trans. Robotics Automat.*, **11**(3):401–404, 1995.
- [Tch95b] K. Tchoń, Normal forms of kinematic singularities of 3R robot manipulators. *Appl. Mathematics and Computer Science*, **5**(2):391–407, 1995.

- [Tch97] K. Tchoń, Singularity avoidance in robotic manipulators: A differential form approach. *Systems & Contr. Lett.*, **30**(6):165–176, 1997.
- [Tch98] K. Tchoń, Quadratic normal forms of redundant robot kinematics with application to singularity avoidance. *IEEE Trans. Robotics Automat.*, **14**(5):834–837, 1998.
- [Tch99] K. Tchoń, Singularities of the Euler wrist. *Mech. Machine Theory*, 1999. W druku.
- [TD93] K. Tchoń i I. Dulęba, On inverting singular kinematics and geodesic trajectory generation for robot manipulators. *J. Intelligent Robotic Systems*, **8**:325–359, 1993.
- [TM95] K. Tchoń i A. Matuszok, On avoiding singularities in redundant robot kinematics. *Robotica*, **13**:599–606, 1995.
- [TM97] K. Tchoń i R. Muszyński, Singularities of non-redundant robot kinematics. *Int. J. Robotics Research*, **16**(1):60–76, 1997.
- [TM98] K. Tchoń i R. Muszyński, Singular inverse kinematic problem for robotic manipulators: A normal form approach. *IEEE Trans. Robotics Automat.*, **14**(1):93–104, 1998.
- [TMZ97] K. Tchoń, R. Muszyński i C. Zieliński, Kinematic singularities of the IRp-6 manipulator mounted on a track. W: *Proc. MMAR Symposium*, vol. **3**, strony 913–920, Międzyzdroje, 1997.
- [Wam86] C. W. Wampler II, Manipulator inverse kinematic solutions based on vector formulations and damped least-squares methods. *IEEE Trans. Systems, Man, Cybernet.*, **16**:93–101, 1986.
- [Yos84] T. Yoshikawa, Analysis and control of robot manipulators with redundancy. W: M. Brady i R. Paul, (red.), *Robotics Research*, strony 735–747. MIT Press, Cambridge, 1984.
- [Yos91] T. Yoshikawa, Manipulability of robotic mechanisms. *Int. J. Robotics Research*, **4**(2):3–9, 1991.

Część II

Algorytmy sterowania manipulatorów

Rozdział 5

Algorytmy sterowania manipulatorów sztywnych w przestrzeni zadaniowej

Rozdział ten jest poświęcony zagadnieniom sterowania manipulatorów sztywnych, a więc układów robotycznych o nieruchomej podstawie (bazie) zbudowanych z łańcucha ramion będących ciałami sztywnymi, połączonych sztywnymi przegubami. Manipulator może być częścią robota manipulacyjnego lub być umieszczony na platformie mobilnej*. Zgodnie z klasycznym paradygmatem automatyki, najwcześniejsze algorytmy sterowania używane w robotach traktowały dynamikę manipulatora jako zbiór nie sprzężonych ze sobą liniowych obiektów sterowania rzędu drugiego, opisujących pojedyncze stopnie swobody. Do każdego z tych obiektów stosowano regulator typu PD lub PID. To tradycyjne podejście dominuje nadal w robotach przemysłowych, nie jest ono jednak w stanie zagwarantować odpowiedniej jakości sterowania wymaganej we współczesnych zastosowaniach robotów. Wiadomo bowiem, że podczas realizacji ruchów o dużym zakresie zmian położenia i prędkości, istotną rolę zaczynają odgrywać nieliniowości dynamiki oraz sprzężenia dynamiczne między ogniwami. Wysokie wymagania dotyczące stabilności i dokładności stawiane obecnie układom sterowania manipulatorów mogą być spełnione wtedy, gdy algorytmy sterowania opierają się na kompletnych, nieliniowych równaniach dynamiki manipulatora. Gdy model dynamiki manipulatora nie jest w pełni znany, używane są algorytmy sterowania adaptacyjnego lub odpornego. Algorytmy sterowania

*Taki układ robotyczny nazywa się manipulatorem mobilnym.

wykorzystujące model dynamiki manipulatora zaczynają obecnie być stosowane przez czołowych producentów w robotach przemysłowych.

Zadania sterowania manipulatora można sklasyfikować w zależności od pożądanego zachowania efektora. Najczęstszym celem sterowania jest przeprowadzenie efektora od określonego punktu początkowego do punktu końcowego przestrzeni zadaniowej. W nowoczesnych robotach pojawia się jednak potrzeba zapewnienia ruchu efektora wzdłuż zadanej, zależnej od czasu trajektorii. Taki ruch jest niezbędny w przypadku, gdy zadaniem robota jest spawanie, malowanie, skrawanie, cięcie lub operacje montażowe, a w niedalekiej przyszłości precyzyjne operacje chirurgiczne, itp.

W naszych rozważaniach skoncentrujemy się na algorytmach sterowania zapewniających śledzenie zadanej trajektorii (zadaniowej lub przegubowej). Przyjmijmy założenie o regularności trajektorii zadanej, a mianowicie założymy, że zadana trajektoria jest gładka i ograniczona wraz z dwiema (dla manipulatora sztywnego) lub czterema (w przypadku manipulatora o elastycznych przegubach) pierwszymi pochodnymi względem czasu.

W dalszej części tego rozdziału przedstawimy zagadnienie sterowania w przestrzeni zadaniowej manipulatora, a więc w przypadku, gdy została zadana trajektoria efektora. W rozdziale 6 opiszemy algorytmy sterowania manipulatorów sztywnych, dla których jest możliwe przekształcenie trajektorii określonej w przestrzeni zadaniowej w trajektorię zadaną w przestrzeni przegubowej. Osobnym zadaniem jest uzyskanie algorytmów sterowania dla manipulatorów elastycznych. W praktyce mogą wystąpić dwa rodzaje zjawisk elastycznych, a mianowicie elastyczność przegubów lub elastyczność ramion manipulatora. Uwzględnienie efektów elastycznych powoduje rozszerzenie modelu matematycznego opisującego zachowanie manipulatora (modelu dynamiki) i wymaga zastosowania specyficznych algorytmów sterowania, innych niż w przypadku manipulatorów sztywnych. Algorytmy sterowania manipulatorów z elastycznymi przegubami zostaną omówione w rozdziale 7.

5.1 Dynamika układu robotycznego

Dla układu robotycznego z uniwersum fazowym $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, nie podlegającemu ograniczeniom konfiguracyjnym ani fazowym, a więc o liczbie stopni swobody $n = N$, definiujemy gładką (analityczną) funkcję Lagrange'a $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, zwaną *lagranżianem*, rozumianą jako różnica *energii kinetycznej* i *potencjalnej* układu, $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - V(\mathbf{q})$. Na mocy *Zasady Najmniejszego*

Działania Hamiltona, *równania dynamiki* układu robotycznego przyjmują postać równań Eulera-Lagrange'a[†]

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{F}, \quad (5.1)$$

gdzie wektor $\mathbf{F}$ symbolizuje uogólnione siły niepotencjalne działające na układ (tarcie, opory ruchu, siły więzów, oddziaływania sterujące itp.). Układ (5.1) jest układem równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu,

$$\frac{\partial^2 L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}^2} \ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial^2 L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q} \partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{F}. \quad (5.2)$$

Zważywszy, że energia kinetyczna układu robotycznego ma postać formy kwadratowej prędkości uogólnionej z symetryczną i dodatnio określoną macierzą formy zależną od współrzędnych uogólnionych, tzn.

$$K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{Q}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}},$$

uzyskujemy na podstawie (5.2) następującą ogólną postać równań dynamiki układu robotycznego

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}(\mathbf{q}) = \mathbf{F}. \quad (5.3)$$

W powyższym równaniu macierz formy energii kinetycznej $\mathbf{Q}(\mathbf{q})$ pełni rolę *macierzy inercji* układu, wektor $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}$ opisuje wpływ *sił (momentów sił) Coriolisa i odśrodkowych*, a wektor $\mathbf{D}(\mathbf{q}) = \frac{\partial V(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}$ jest wektorem *sił grawitacji*. Elementy macierzy sił Coriolisa i odśrodkowych $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ można wyrazić przez elementy macierzy inercji w następujący sposób

$$C_{ij}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{k=1}^n c_{kj}^i(\mathbf{q}) \dot{q}_k, \quad (5.4)$$

gdzie współczynniki

$$c_{kj}^i(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial Q_{ij}(\mathbf{q})}{\partial q_k} + \frac{\partial Q_{ik}(\mathbf{q})}{\partial q_j} - \frac{\partial Q_{jk}(\mathbf{q})}{\partial q_i} \right) \quad (5.5)$$

nazywają się *symbolami Christoffela* I rodzaju macierzy inercji.

[†]Zobacz dodatek A.6.

Bezpośrednio z definicji wynikają następujące własności modelu dynamiki (5.3):

- macierz inercji $\mathbf{Q}(\mathbf{q})$ jest symetryczna i dodatnio określona (a więc nieosobliwa),
- pochodna macierzy inercji wzdłuż trajektorii przegubowej jest wyznaczona przez macierz sił Coriolisa i odśrodkowych

$$\frac{d}{dt}\mathbf{Q}(\mathbf{q}) = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{C}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}). \quad (5.6)$$

Zakładając, że na i -tą współrzędną uogólnioną układu działa sterowanie u_i , oraz że wszelkie inne niepotencjalne siły uogólnione (np. siły tarcia) można opisać pewną funkcją $-\zeta(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$, model dynamiki (5.3) układu robotycznego bez ograniczeń przyjmuje postać

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}(\mathbf{q}) + \zeta(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{u}, \quad (5.7)$$

gdzie $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)^T$. W następnym podrozdziale wyznaczymy poszczególne składniki modelu dynamiki układu robotycznego, jakim jest manipulator o sztywnych ramionach i sztywnych przegubach, zwany w skrócie *manipulatorem sztywnym*.

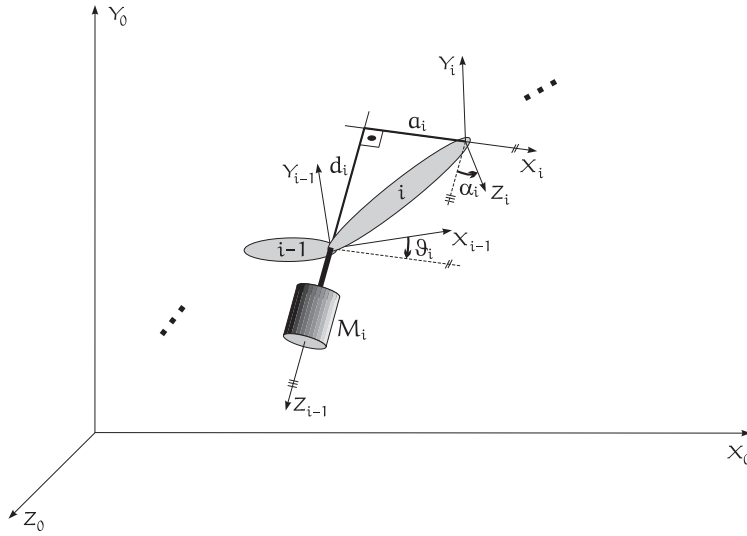
5.2 Dynamika manipulatora sztywnego

Energia kinetyczna i potencjalna manipulatora sztywnego o n stopniach swobody składa się z energii kinetycznej i energii potencjalnej każdego z ramion manipulatora wraz z jego układem napędowym. Dwa kolejne ramiona i układ napędowy przedstawia schematycznie rysunek 5.1.

Rozważmy najpierw energię kinetyczną elementu masy dm ramienia o numerze i , którego położenie względem układu $X_i Y_i Z_i$ związanego z tym ramieniem jest określone przy pomocy współrzędnych jednorodnych $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i, 1)^T$. Zakładając, że transformacja kinematyczna

$$\mathbf{A}_0^i(\mathbf{q}^i) = \prod_{k=1}^i \mathbf{A}_{k-1}^k(q_k),$$

gdzie $\mathbf{q}^i = (q_1, \dots, q_i)^T$, układu podstawowego $X_0 Y_0 Z_0$ w układ $X_i Y_i Z_i$ jest znana, obliczymy współrzędne elementu dm w układzie podstawowym jako $\mathbf{A}_0^i(\mathbf{q}^i) \mathbf{r}_i$. Prędkość elementu dm względem układu podstawowego



Rysunek 5.1 Ogniw manipulatora wraz z układem napędowym.

wynosi $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{A}}_0^i(\mathbf{q}^i) \mathbf{r}_i$. W konsekwencji, energia kinetyczna elementu dm i -tego ramienia

$$dK_{L_i} = \frac{1}{2} dm \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2} dm \operatorname{tr}(\mathbf{v} \mathbf{v}^T) = \frac{1}{2} dm \operatorname{tr}(\dot{\mathbf{A}}_0^i(\mathbf{q}^i) \mathbf{r}_i \mathbf{r}_i^T \dot{\mathbf{A}}_0^{iT}(\mathbf{q}^i)).$$

Całkując energie kinetyczne wszystkich elementów ramienia nr i , wyliczamy energię kinetyczną ramienia

$$\begin{aligned} K_{L_i}(\mathbf{q}^i, \dot{\mathbf{q}}^i) &= \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\dot{\mathbf{A}}_0^i(\mathbf{q}^i) \mathbf{J}_{L_i} \dot{\mathbf{A}}_0^{iT}(\mathbf{q}^i)) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \operatorname{tr} \left(\frac{\partial \mathbf{A}_0^i}{\partial q_j}(\mathbf{q}^i) \mathbf{J}_{L_i} \left(\frac{\partial \mathbf{A}_0^i}{\partial q_k}(\mathbf{q}^i) \right)^T \right) \dot{q}_j \dot{q}_k. \end{aligned} \quad (5.8)$$

W powyższym wzorze $\mathbf{J}_{L_i} = \int_{\text{ramię } i} \mathbf{r}_i \mathbf{r}_i^T dm$ oznacza macierz inercji i -tego ramienia. W celu obliczenia energii kinetycznej układu napędowego ramienia i -tego będziemy zakładać, że ramię i -te jest napędzane przez silnik elektryczny zamocowany na ramieniu $(i-1)$ -szym, w przegubie i -tym, w taki sposób, że stojan silnika stanowi część ramienia $(i-1)$ -szego, natomiast wirnik silnika obraca się wokół osi Z_{i-1} układu $X_{i-1}Y_{i-1}Z_{i-1}$. Z wirnikiem i -tego silnika związamy układ współrzędnych $X'_{i-1}Y'_{i-1}Z'_{i-1}$, którego początek pokrywa się z początkiem układu $X_{i-1}Y_{i-1}Z_{i-1}$, obracający się

wraz z wirnikiem wokół osi Z_{i-1} . Niech ϑ_i oznacza położenie wirnika. Wówczas, przekształcenie układów $X_{i-1}Y_{i-1}Z_{i-1} \mapsto X'_{i-1}Y'_{i-1}Z'_{i-1}$ jest opisane macierzą $\mathbf{Rot}(Z, \vartheta_i)$. Transformacja układu podstawowego $X_0Y_0Z_0$ w układ wirnika $X'_{i-1}Y'_{i-1}Z'_{i-1}$ ma postać

$$\mathbf{A}_0^{i-1}(\mathbf{q}^{i-1}, \vartheta_i) = \mathbf{A}_0^{i-1}(\mathbf{q}^{i-1}) \mathbf{Rot}(Z, \vartheta_i).$$

W celu obliczenia energii kinetycznej wirnika wybierzemy element masy wirnika dm o współrzędnych jednorodnych $\mathbf{s}_i = (x_i, y_i, z_i, 1)^T$ względem układu $X'_{i-1}Y'_{i-1}Z'_{i-1}$. Współrzędne tego elementu w układzie podstawowym są określone wzorem $\mathbf{A}_0^{i-1}(\mathbf{q}^{i-1}) \mathbf{Rot}(Z, \vartheta_i) \mathbf{s}_i$, a prędkość wynosi

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{A}}_0^{i-1}(\mathbf{q}^{i-1}) \mathbf{Rot}(Z, \vartheta_i) \mathbf{s}_i + \mathbf{A}_0^{i-1}(\mathbf{q}^{i-1}) \dot{\mathbf{Rot}}(Z, \vartheta_i) \mathbf{s}_i.$$

Energia kinetyczna elementu dm może być przedstawiona w następującej formie

$$\begin{aligned} dK_{M_i} &= \frac{1}{2} dm \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2} dm \operatorname{tr}(\mathbf{v} \mathbf{v}^T) = \\ &= \frac{1}{2} dm \operatorname{tr} \left(\dot{\mathbf{A}}_0^{i-1}(\mathbf{q}^{i-1}) \mathbf{Rot}(Z, \vartheta_i) \mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^T \mathbf{Rot}^T(Z, \vartheta_i) \left(\dot{\mathbf{A}}_0^{i-1} \right)^T(\mathbf{q}^{i-1}) \right) + \\ &+ \frac{1}{2} dm \operatorname{tr} \left(\dot{\mathbf{A}}_0^{i-1}(\mathbf{q}^{i-1}) \mathbf{Rot}(Z, \vartheta_i) \mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^T \dot{\mathbf{Rot}}^T(Z, \vartheta_i) \left(\mathbf{A}_0^{i-1} \right)^T(\mathbf{q}^{i-1}) \right) + \\ &+ \frac{1}{2} dm \operatorname{tr} \left(\mathbf{A}_0^{i-1}(\mathbf{q}^{i-1}) \dot{\mathbf{Rot}}(Z, \vartheta_i) \mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^T \mathbf{Rot}^T(Z, \vartheta_i) \left(\dot{\mathbf{A}}_0^{i-1} \right)^T(\mathbf{q}^{i-1}) \right) + \\ &+ \frac{1}{2} dm \operatorname{tr} \left(\mathbf{A}_0^{i-1}(\mathbf{q}^{i-1}) \dot{\mathbf{Rot}}(Z, \vartheta_i) \mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^T \dot{\mathbf{Rot}}^T(Z, \vartheta_i) \left(\mathbf{A}_0^{i-1} \right)^T(\mathbf{q}^{i-1}) \right). \end{aligned}$$

Energię kinetyczną wirnika silnika nr i obliczymy całkując elementarne energie dK_{M_i} w obrębie wirnika,

$$\begin{aligned} K_{M_i}(\mathbf{q}^{i-1}, \vartheta_i, \dot{\mathbf{q}}^{i-1}, \dot{\vartheta}_i) &= \int_{\text{wirnik } i} dK_{M_i} = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left(\dot{\mathbf{A}}_0^{i-1}(\mathbf{q}^{i-1}) \mathbf{Rot}(Z, \vartheta_i) \mathbf{J}_{M_i} \mathbf{Rot}^T(Z, \vartheta_i) \left(\dot{\mathbf{A}}_0^{i-1} \right)^T(\mathbf{q}^{i-1}) \right) + \\ &+ \operatorname{tr} \left(\dot{\mathbf{A}}_0^{i-1}(\mathbf{q}^{i-1}) \mathbf{Rot}(Z, \vartheta_i) \mathbf{J}_{M_i} \mathbf{Rot}^T(Z, \vartheta_i) \begin{bmatrix} -[\mathbf{e}_3] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \left(\mathbf{A}_0^{i-1} \right)^T(\mathbf{q}^{i-1}) \right) \dot{\vartheta}_i + \\ &+ \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left(\mathbf{A}_0^{i-1}(\mathbf{q}^{i-1}) \begin{bmatrix} [\mathbf{e}_3] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Rot}(Z, \vartheta_i) \mathbf{J}_{M_i} \right. \\ &\quad \left. \mathbf{Rot}^T(Z, \vartheta_i) \begin{bmatrix} -[\mathbf{e}_3] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \left(\mathbf{A}_0^{i-1} \right)^T(\mathbf{q}^{i-1}) \right) \dot{\vartheta}_i^2. \quad (5.9) \end{aligned}$$

W powyższej formule $\mathbf{J}_{M_i} = \int_{\text{wirnik } i} \mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^T dm$ oznacza macierz inercji wirnika nr i . Korzystając z własności operacji śladu macierzy i biorąc pod uwagę postać macierzy

$$\mathbf{A}_0^{i-1}(\mathbf{q}^{i-1}) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^{i-1}(\mathbf{q}^{i-1}) & \mathbf{T}_0^{i-1}(\mathbf{q}^{i-1}) \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix},$$

przekształcamy ostatni składnik wyrażenia (5.9) w następujący sposób

$$\begin{aligned} \text{tr} \left(\mathbf{A}_0^{i-1}(\mathbf{q}^{i-1}) \begin{bmatrix} [\mathbf{e}_3] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Rot}(Z, \vartheta_i) \mathbf{J}_{M_i} \mathbf{Rot}^T(Z, \vartheta_i) \begin{bmatrix} -[\mathbf{e}_3] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} (\mathbf{A}_0^{i-1})^T(\mathbf{q}^{i-1}) \right) = \\ = \text{tr} \left(\mathbf{J}_{M_i} \mathbf{Rot}^T(Z, \vartheta_i) \begin{bmatrix} -[\mathbf{e}_3] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} (\mathbf{A}_0^{i-1})^T(\mathbf{q}^{i-1}) \mathbf{A}_0^{i-1}(\mathbf{q}^{i-1}) \begin{bmatrix} [\mathbf{e}_3] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Rot}(Z, \vartheta_i) \right) = \\ = \text{tr} \left(\mathbf{J}_{M_i} \begin{bmatrix} -[\mathbf{e}_3]^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \right) = \int_{\text{wirnik } i} (x_i^2 + y_i^2) dm = I_i, \end{aligned}$$

gdzie I_i oznacza moment bezwładności wirnika silnika względem osi Z_{i-1} układu $X_{i-1}Y_{i-1}Z_{i-1}$. Pokazaliśmy, że trzeci składnik energii kinetycznej wirnika ma postać

$$\frac{1}{2} I_i \dot{\vartheta}_i^2.$$

Wykonując różniczkowanie względem czasu w wyrażeniu (5.9), otrzymujemy ostatecznie

$$\begin{aligned} K_{M_i}(\mathbf{q}^{i-1}, \vartheta_i, \dot{\mathbf{q}}^{i-1}, \dot{\vartheta}_i) = \\ = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \text{tr} \left(\frac{\partial \mathbf{A}_0^{i-1}}{\partial q_j}(\mathbf{q}^{i-1}) \mathbf{Rot}(Z, \vartheta_i) \mathbf{J}_{M_i} \mathbf{Rot}^T(Z, \vartheta_i) \left(\frac{\partial \mathbf{A}_0^{i-1}}{\partial q_k}(\mathbf{q}^{i-1}) \right)^T \right) \dot{q}_j \dot{q}_k + \\ + \sum_{j=1}^n \text{tr} \left(\frac{\partial \mathbf{A}_0^{i-1}}{\partial q_j}(\mathbf{q}^{i-1}) \mathbf{Rot}(Z, \vartheta_i) \mathbf{J}_{M_i} \mathbf{Rot}^T(Z, \vartheta_i) \begin{bmatrix} -[\mathbf{e}_3] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} (\mathbf{A}_0^{i-1})^T(\mathbf{q}^{i-1}) \right) \dot{q}_j \dot{\vartheta}_i + \\ + \frac{1}{2} I_i \dot{\vartheta}_i^2. \quad (5.10) \end{aligned}$$

W manipulatorze sztywnym transmisja napędu do przegubu jest opisana przez przełożenie przekładni, $\kappa_i q_i = \vartheta_i$. Biorąc to pod uwagę oraz wprowadzając oznaczenie

$$\mathbf{J}_{M_i}^* = \mathbf{Rot}(Z, \vartheta_i) \mathbf{J}_{M_i} \mathbf{Rot}^T(Z, \vartheta_i),$$

zapisujemy energię kinetyczną (5.10) w postaci

$$\begin{aligned}
 K_{M_i}(\mathbf{q}^i, \dot{\mathbf{q}}^i) = & \\
 = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \text{tr} \left(\frac{\partial \mathbf{A}_0^{i-1}}{\partial q_j}(\mathbf{q}^{i-1}) \mathbf{J}_{M_i}^* \left(\frac{\partial \mathbf{A}_0^{i-1}}{\partial q_k}(\mathbf{q}^{i-1}) \right)^T \right) \dot{q}_j \dot{q}_k + & \\
 + \sum_{j=1}^n \text{tr} \left(\frac{\partial \mathbf{A}_0^{i-1}}{\partial q_j}(\mathbf{q}^{i-1}) \mathbf{J}_{M_i}^* \begin{bmatrix} -[\mathbf{e}_3] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} (\mathbf{A}_0^{i-1})^T(\mathbf{q}^{i-1}) \right) \kappa_i \dot{q}_j \dot{q}_i + & \\
 + \frac{1}{2} \kappa_i^2 I_i \dot{q}_i^2. & \quad (5.11)
 \end{aligned}$$

Sumaryczna energia kinetyczna wszystkich ramion i układów napędowych manipulatora sztywnego jest opisana formułą

$$K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{Q}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \quad (5.12)$$

z symetryczną, dodatnio określoną macierzą $\mathbf{Q}(\mathbf{q})$, której elementy mają postać wynikającą z wyrażeń (5.8), (5.11), mianowicie

$$\begin{aligned}
 Q_{jk}(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{n-1} \text{tr} \left(\frac{\partial \mathbf{A}_0^i}{\partial q_j}(\mathbf{q}^i) \left(\mathbf{J}_{L_i} + \mathbf{J}_{M_{i+1}}^* \right) \left(\frac{\partial \mathbf{A}_0^i}{\partial q_k}(\mathbf{q}^i) \right)^T \right) + & \\
 + \text{tr} \left(\frac{\partial \mathbf{A}_0^n}{\partial q_j}(\mathbf{q}) \mathbf{J}_{L_n} \left(\frac{\partial \mathbf{A}_0^n}{\partial q_k}(\mathbf{q}) \right)^T \right) + & \\
 + \text{tr} \left(\frac{\partial \mathbf{A}_0^{k-1}}{\partial q_j}(\mathbf{q}^{k-1}) \mathbf{J}_{M_k}^* \begin{bmatrix} -[\mathbf{e}_3] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} (\mathbf{A}_0^{k-1})^T(\mathbf{q}^{k-1}) \right) \kappa_k + \kappa_j^2 I_j \delta_{jk}. & \quad (5.13)
 \end{aligned}$$

We wzorze (5.13) δ_{ij} oznacza funkcję zwaną *delta Kroneckera*, określoną formułą

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } i = j, \\ 0, & \text{jeżeli } i \neq j. \end{cases}$$

Dla $i = 0$ macierz $\mathbf{A}_0^i$ definiujemy jako macierz jednostkową $\mathbb{I}_4$.

Energia potencjalna manipulatora pochodzi od oddziaływania pola grawitacyjnego Ziemi. W celu obliczenia energii potencjalnej ramienia nr i (wraz z układem napędowym), można je potraktować jako masę punktową m_i skupioną w środku masy ramienia. Zakładając, że $\mathbf{R}_i$ oznacza

współrzędne jednorodne środka masy w układzie $X_i Y_i Z_i$, obliczamy energię potencjalną i -tego ramienia jako

$$V_i = -m_i \mathbf{g}^T \mathbf{A}_0^i(\mathbf{q}^i) \mathbf{R}_i, \quad (5.14)$$

gdzie $\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3, 0)^T$ jest wektorem przyspieszenia ziemskiego w układzie podstawowym. Całkowita energia potencjalna manipulatora

$$V(\mathbf{q}) = - \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{g}^T \mathbf{A}_0^i(\mathbf{q}^i) \mathbf{R}_i. \quad (5.15)$$

Forma energii kinetycznej definiuje dwa pierwsze elementy modelu dynamiki (5.7) (macierz inercji $\mathbf{Q}(\mathbf{q})$ i macierz sił odśrodkowych i sił Coriolisa $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$), natomiast gradient energii potencjalnej $\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q})$ wyznacza wektor sił grawitacji $\mathbf{D}(\mathbf{q})$. Określenie składnika niepotencjalnego $\zeta(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ wymaga specjalnych badań. Jeżeli składnik ten nie występuje, *równania dynamiki manipulatora sztywnego* uzyskują postać

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}(\mathbf{q}) = \mathbf{u}. \quad (5.16)$$

Można pokazać, że poszczególne elementy modelu dynamiki (5.16), oprócz własności ogólnych (5.6), mają następujące własności

$$\|\mathbf{Q}(\mathbf{q})\| \leq Q_M, \quad (5.17)$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y} = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{y})\mathbf{x}, \quad (5.18)$$

$$\|\mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{x})\| \leq C_M \|\mathbf{x}\|, \quad (5.19)$$

$$\|\mathbf{D}(\mathbf{q})\| \leq D_M, \quad (5.20)$$

przy czym $Q_M, C_M, D_M > 0$ są pewnymi stałymi, a własność (5.20) zachodzi dla manipulatorów o przegubach obrotowych lub ograniczonych przegubach przesuwnych. W powyższych zależnościach norma wektora powinna być rozumiana jako norma euklidesowa, natomiast jako normę macierzy bierzemy normę indukowaną przez normę euklidesową

$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\bar{\lambda}_{\mathbf{A}^T \mathbf{A}}},$$

gdzie $\bar{\lambda}_{\mathbf{M}}$ oznacza największą wartość własną symetrycznej macierzy $\mathbf{M}^\dagger$.

[†]Zobacz dodatek A.1.

Przykład 5.2.1 (Manipulator *EDDA*)

Rozpatrzmy manipulator *EDDA*, którego model kinematyki został opisany w przykładzie 2.3.8. Dynamika tego manipulatora może być wyrażona równaniem (5.16), przy czym macierz inercji, macierz sił Coriolisa i wektor grawitacji mają postać

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \theta_1 + 0.6\theta_4 \cos q_2 & \theta_3 + 0.3\theta_4 \cos q_2 \\ \theta_3 + 0.3\theta_4 \cos q_2 & \theta_3 \end{bmatrix}, \quad (5.21)$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} -\dot{q}_1 & -(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} 0.3\theta_4 \sin q_2, \quad (5.22)$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{q}) = g \begin{pmatrix} \theta_2 \cos q_1 + \theta_4 \cos(q_1 + q_2) \\ \theta_4 \cos(q_1 + q_2) \end{pmatrix}. \quad (5.23)$$

Parametry modelu dynamiki przyjmują następujące wartości nominalne

$$\begin{aligned} \theta_1 &= I_1 + I_2 + m_2 l_1^2 = 3.1 [\text{kg} \cdot \text{m}^2], \\ \theta_2 &= m_1 p_1 + m_2 l_1 = 9.5 [\text{kg} \cdot \text{m}], \\ \theta_3 &= I_2 = 0.24 [\text{kg} \cdot \text{m}^2], \\ \theta_4 &= m_2 p_2 = 0.77 [\text{kg} \cdot \text{m}], \end{aligned} \quad (5.24)$$

przy oznaczeniach

- m_i — masa i -tego ogniwa,
- p_i — położenie środka masy i -tego ogniwa w i -tym układzie współrzędnych,
- l_i — długość i -tego ogniwa,
- I_i — moment bezwładności i -tego ogniwa (względem osi Z układu $X_i Y_i Z_i$),
- g — wartość przyspieszenia ziemskiego. ■

5.3 Sterowanie w przestrzeni zadaniowej manipulatora

W niniejszym rozdziale rozważymy zadanie polegające na śledzeniu trajektorii przez manipulator sztywny przy założeniu, że zadana jest trajektoria w przestrzeni zadaniowej manipulatora $\mathbf{y}_d(t) \in \mathcal{Z} \subset \mathbb{R}^m$ co oznacza, że efektor manipulatora ma się poruszać wzdłuż zadanej krzywej w przestrzeni, zachowując określoną orientację. Przyjmujemy, że model manipulatora obejmuje zarówno równania dynamiki, jak i równania kinematyki

(odwzorowanie stan-wyjście), i ma postać

$$\begin{cases} \mathbf{Q}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}(\mathbf{q}) = \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{k}(\mathbf{q}). \end{cases} \quad (5.25)$$

5.3.1 Linearyzacja i odsprężanie wejściowo-wyjściowe

Wprowadźmy w układzie (5.25) nowe współrzędne

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{q} \\ \boldsymbol{\xi} = \dot{\mathbf{q}}, \end{cases}$$

i wyrażmy równania układu w tych współrzędnych w postaci afinicznego układu sterowania z funkcją wyjścia

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\xi}, \\ \dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{k}(\mathbf{x}), \end{cases} \quad (5.26)$$

gdzie $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = -\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{x})(\mathbf{C}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi} + \mathbf{D}(\mathbf{x}))$, $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{x})$. Przyjmijmy dodatkowo, że manipulator jest nieredundantny, a zatem liczba stopni swobody manipulatora (i liczba wejść sterujących) jest równa wymiarowi wektora współrzędnych położenia i orientacji efektora, czyli liczbie wyjść (tzn. $n = m$). Idea algorytmu sterowania przedstawionego poniżej opiera się na dwóch elementach. Pierwszym jest *odsprężenie* i *linearyzacja* modelu manipulatora, czyli uzyskanie takiego nieliniowego *sprężenia zwrotnego*, które po zastosowaniu do modelu manipulatora spowoduje, że i-te sterowanie będzie oddziaływało wyłącznie na i-tą składową wektora wyjściowego, natomiast odwzorowanie wejście-wyjście stanie się liniowe. Drugi element algorytmu sterowania jest standardowy i sprowadza się do zastosowania w odsprężonym modelu manipulatora liniowego regulatora PD z korekcją.

Konstrukcję odsprężającego i linearyzującego sprzężenia zwrotnego dla modelu (5.26) rozpoczniemy od wyliczenia kolejnych pochodnych czasowych wyjść y_i wzdłuż trajektorii układu. Dla wyjścia y_i otrzymujemy

$$\begin{aligned} y_i(t) &= k_i(\mathbf{x}(t)), \\ \dot{y}_i(t) &= \frac{\partial k_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial k_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \boldsymbol{\xi}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że $\dot{y}_i$ nie zależy bezpośrednio od sterowania. Policzmy pochodną rzędu drugiego

$$\begin{aligned}\ddot{y}_i(t) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{\partial k_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \boldsymbol{\xi} \right) \dot{\boldsymbol{\xi}} + \frac{\partial k_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \ddot{\boldsymbol{\xi}} = \\ &= \boldsymbol{\xi}^T \frac{\partial^2 k_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} \boldsymbol{\xi} + \frac{\partial k_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) + \mathbf{G}(\mathbf{x}) \mathbf{u}) = \\ &= \boldsymbol{\xi}^T \frac{\partial^2 k_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} \boldsymbol{\xi} + \frac{\partial k_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) + \frac{\partial k_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{G}(\mathbf{x}) \mathbf{u}.\end{aligned}$$

Zapisując analogiczne równania dla $i = 1, \dots, n$ otrzymujemy następujący układ równań

$$\ddot{\mathbf{y}} = \mathbf{P}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) + \mathbf{H}(\mathbf{x}) \mathbf{u}, \quad (5.27)$$

w którym

$$\begin{aligned}P_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= \boldsymbol{\xi}^T \frac{\partial^2 k_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} \boldsymbol{\xi} + \frac{\partial k_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}), \\ \mathbf{H}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial \mathbf{k}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{G}(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

W dalszych rozważaniach przyjmiemy założenie, że macierz $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ jest nieosobliwa dla każdego $\mathbf{x}$. Jest ono spełnione wtedy, gdy jacobian analityczny $\mathbf{J}^a(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x})$ jest pełnego rzędu, a więc gdy manipulator nie przyjmuje konfiguracji osobliwych (przy realizacji zadanej trajektorii $\mathbf{y}_d(t)$). Ponieważ macierz $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ jest zawsze odwracalna, przyjęte założenie pozwala zastosować do układu (5.27) sprzężenie zwrotne

$$\mathbf{u} = -\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{P}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) + \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{v} \quad (5.28)$$

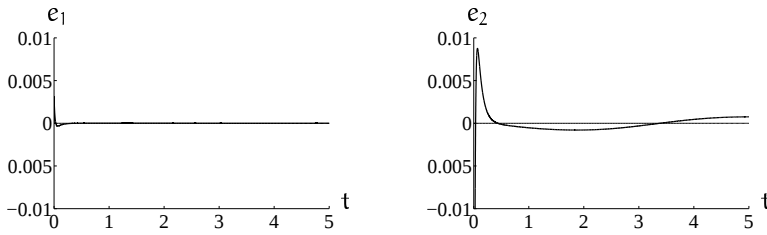
i przekształcić go do postaci

$$\ddot{y}_i = v_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.29)$$

co oznacza pełne odsprężenie wejść i wyjść oraz liniowość odwzorowania wejście-wyjście.

Po uzyskaniu liniowego i odsprężonego modelu manipulatora będziemy szukać sterowania $\mathbf{v}(t)$ generującego trajektorię $\mathbf{y}(t)$ efektora w taki sposób, aby błąd śledzenia

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_d(t) \quad (5.30)$$



Rysunek 5.2 Przebieg błędów śledzenia przy zastosowaniu algorytmu od-sprężania wejściowo-wyjściowego ze wzmocnieniami $\mathbf{K}_p = \text{diag}\{10000\}$ i $\mathbf{K}_d = \text{diag}\{1000\}$.

dążył asymptotycznie do zera. W celu osiągnięcia żadanego zachowania manipulatora, do każdego wejścia v_i dołączymy lokalny regulator typu PD z korekcją co oznacza, że sygnał podawany na wejście układu (5.29) będzie miał postać

$$\mathbf{v} = \ddot{\mathbf{y}}_d - \mathbf{K}_d(\dot{\mathbf{y}} - \dot{\mathbf{y}}_d) - \mathbf{K}_p(\mathbf{y} - \mathbf{y}_d). \quad (5.31)$$

Macierze $\mathbf{K}_d = \text{diag}\{k_{di}\} > 0$ i $\mathbf{K}_p = \text{diag}\{k_{pi}\} > 0$, $i = 1, \dots, n$, są diagonalnymi macierzami wzmocnień lokalnych regulatorów PD. Taki wybór macierzy wzmocnień gwarantuje, że błąd regulacji określony równaniem różniczkowym

$$\ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_p \mathbf{e} = \mathbf{0}$$

zanika do zera eksponencjalnie, gdy t dąży do $+\infty$.

Przykład 5.3.1 (Manipulator *EDDA*)

Działanie algorytmu odsprężania wejściowo-wyjściowego zilustrujemy na przykładzie manipulatora *EDDA*. Niech zadanie sterowania polega na śledzeniu trajektorii cyklicznej wyrażonej w przestrzeni zadaniowej manipulatora (w aspekcie współrzędnych $\times_0 \vee_0$) równaniem

$$\mathbf{y}_d(t) = \begin{pmatrix} y_{d1}(t) \\ y_{d2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 + 0.1 \cos t \\ -0.6 + 0.1 \sin t \end{pmatrix}.$$

Rysunek 5.2 przedstawia wykresy błędu (5.30) śledzenia współrzędnych położenia efektora*. Symbol e_1 oznacza błąd śledzenia współrzędnej y_1 , natomiast symbol e_2 — błąd śledzenia współrzędnej y_2 . ■

Z przeprowadzonych symulacji wynika, że przystępując do implementacji algorytmu odsprężania, należy zwrócić szczególną uwagę na zapewnienie

*Symulacje wykonano w środowisku MATLAB® + SIMULINK®.

odwracalności jacobianu analitycznego manipulatora. Praktycznie oznacza to nie tylko, że przy realizacji trajektorii zadanej manipulator nie przyjmuje konfiguracji osobliwych, lecz także nie zbliża się do nich. Algorytm odsprężania jest trudny do implementacji ze względu na dużą wrażliwość na warunki początkowe, wybór metody całkowania, a także na wartości wzmocnień $\mathbf{K}_p$, $\mathbf{K}_d$.

5.3.2 Transformacja do zadania sterowania w przestrzeni przegubowej

Większość algorytmów sterowania manipulatorów sztywnych dotyczy sterowania w przestrzeni przegubowej. Aby zastosować takie algorytmy do sterowania w przestrzeni zadaniowej manipulatora, niezbędne jest przeniesienie trajektorii zadanej, określonej w naturalny sposób w przestrzeni zadaniowej, do przestrzeni przegubowej. Polega ono na rozwiązaniu odwrotnego zadania kinematyki i wyliczeniu n -wymiarowego wektora trajektorii zadanych zdefiniowanych dla każdego przegubu manipulatora. Potrzebne algorytmy kinematyki odwrotnej manipulatora zostały omówione w rozdziale 3.

5.4 Komentarze i uwagi bibliograficzne

Klasyczne układy sterowania manipulatorów można znaleźć w większości podręczników [Pau81, Cra93, SV97]. Doniesienie o wdrożeniu algorytmów sterowania opartych na modelu dynamiki manipulatora przez firmę KUKA pochodzi od Hirzingera [H⁺98]. Formalizm lagranżowski i hamiltonowski mechaniki analitycznej stanowi przedmiot klasycznego wykładu mechaniki [RK95, AM78, Arn78]. Wyprowadzenie równań dynamiki manipulatora przedstawione w podrozdziale 5.2 jest również klasyczne [Pau81, AS86, SV97]. Identyfikacja parametrów modeli kinematyki (zwana kalibracją kinematyki) i dynamiki manipulatorów należy do podstawowych zadań robotyki [SS96, Koz98, MRD91]. Bardziej wnikliwe potraktowanie dynamiki układów napędowych okaże się przydatne w rozdziale poświęconym modelowi dynamiki manipulatora o elastycznych przegubach. Idea sterowania w przestrzeni zewnętrznej z odsprężeniem modelu pochodzi od Freunda [Fre82]. Metoda ta jest znana w geometrycznej teorii sterowania pod nazwą metody odsprężania wejściowo-wyjściowego [Isi89, NS90]. Określenia interakcji dynamicznych i odsprężenia manipulatora IRb-6 dokonano w pracy [GW86].

Literatura

- [AM78] R. Abraham i J. E. Marsden, *Foundations of Mechanics*. The Benjamin, Reading, 1978.
- [Arn78] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer-Verlag, Berlin, 1978.
- [AS86] H. Asada i J. J. E. Slotine, *Robot Analysis and Control*. J. Wiley and Sons, New York, 1986.
- [Cra93] J. J. Craig, *Wprowadzenie do robotyki*. WNT, Warszawa, 1993.
- [Fre82] E. Freund, Fast nonlinear control with arbitrary pole-placement for industrial robots and manipulators. *Int. J. Robotics Research*, 1(1):65–78, 1982.
- [GW86] A. Gosiewski i W. Wieczorek, Dynamic interactions in IRb robot. *Control & Cybernetics*, 15(3–4):462–472, 1986.
- [H⁺98] G. Hirzinger et al., Towards a new robot generation. W: *Proc. MMAR Symposium*, vol. 3, strony 747–762, Międzyzdroje, 1998.
- [Isi89] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [Koz98] K. Kozłowski, *Modelling and Identification in Robotics*. Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [MRD91] B. W. Mooring, Z. S. Roth i M. R. Driels, *Fundamentals of Manipulator Calibration*. J. Wiley and Sons, New York, 1991.
- [NS90] H. Nijmeijer i A. J. van der Schaft, *Nonlinear Dynamic Control Systems*. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [Pau81] R. P. Paul, *Robot Manipulators: Mathematics, Programming and Control*. MIT Press, Cambridge, 1981.
- [RK95] W. Rubinowicz i W. Królikowski, *Mechanika teoretyczna*. PWN, Warszawa, 1995.
- [SS96] L. Sciavicco i B. Siciliano, *Modeling and Control of Robot Manipulators*. The McGraw-Hill, New York, 1996.
- [SV97] M. Spong i M. Vidyasagar, *Dynamika i sterowanie robotów*. WNT, Warszawa, 1997.

Rozdział 6

Algorytmy sterowania manipulatorów sztywnych w przestrzeni przegubowej

W niniejszym rozdziale przedstawimy algorytmy sterowania manipulatorów sztywnych wykorzystujące różny stopień znajomości matematycznego opisu zachowania manipulatora. W przypadku, gdy znany jest model dynamiki manipulatora, przy syntezie algorytmów sterowania stosuje się dwa podejścia. Pierwsze podejście polega na wykorzystaniu odwracalności macierzy bezwładności manipulatora i prowadzi do algorytmów typu *obliczanego momentu*. Z punktu widzenia geometrycznej teorii sterowania, metoda obliczanego momentu stanowi przykład linearyzacji dynamiki układu przez statyczne sprzężenie zwrotne. W zasadzie, procedura linearyzacji modelu manipulatora przy pomocy sprzężenia zwrotnego pozwala usunąć z dynamiki manipulatora wszystkie składniki nieliniowe, ale z praktycznego punktu widzenia posiada ona istotne ograniczenia polegające na wymaganiu pełnej znajomości modelu dynamiki oraz konieczności obliczania modelu w trybie *on-line*.

Drugie podejście prowadzi do algorytmów sterowania typu *dysypatywnego*. W przeciwieństwie do algorytmów typu obliczanego momentu, algorytmy typu dysypatywnego nie wymagają sprzężenia linearyzującego. Działanie tych algorytmów polega na rozpraszaniu energii układu w taki sposób, aby dla układu sterowania z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego błąd śledzenia położenia i prędkości przegubów manipulatora zmierzał asymptotycznie do zera.

Założmy, że model dynamiki manipulatora ma postać

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}(\mathbf{q}) + \boldsymbol{\zeta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{u}. \quad (6.1)$$

Model (6.1) różni się od modelu (5.16) obecnością wektora $\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$, który oznacza różnego rodzaju siły niepotencjalne, włączając efekty wynikające z niedokładności modelowania. Algorytmy typu obliczanego momentu i typu dysypatywnego wymagają pełnej znajomości modelu manipulatora. Oczywiście, w praktyce model dynamiki manipulatora jest zawsze obciążony niepewnością. Nieznajomość modelu można podzielić na dwa rodzaje: nieznajomość *parametryczną* i nieznajomość *strukturalną*. Nieznajomość parametryczna polega na tym, że znane są wszystkie składniki równań modelu (znana jest ich postać funkcyjna), natomiast nie są znane pewne parametry tych równań. Model manipulatora zawiera wiele parametrów, które zależą od własności fizycznych manipulatora, takich jak długości ramion oraz masy i momenty bezwładności ramion, a także od własności przenoszonego ładunku, itp. Zauważmy, że zmienna masa i moment bezwładności przenoszonego ładunku powoduje zmiany parametrów modelu dynamiki w trakcie pracy manipulatora.

Innego rodzaju nieznajomość modelu stanowi nieznajomość strukturalna, która polega na tym, że nie jest znana zależność funkcyjna między pewnymi zmiennymi modelu. Nieznajomość strukturalna modelu jest często skutkiem niedokładności modelowania dynamiki manipulatora. W modelu (6.1) wszystkie nieznane oddziaływania, którym podlega manipulator, mieszczą się w składniku $\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$. Oddziaływania te zostaną potraktowane jako zaburzenia modelu podstawowego (5.3).

Ponieważ z reguły model dynamiki manipulatora nie jest dokładnie znany, szczególne zainteresowanie robotyków budzą algorytmy sterowania zapewniające śledzenie trajektorii pomimo nieznajomości modelu. W teorii sterowania są znane dwa rozwiązania tego problemu: algorytmy *sterowania adaptacyjnego* i algorytmy *sterowania odpornego*. Sterowanie adaptacyjne polega na zaprojektowaniu układu sterowania, który dostosowuje swoje działanie do zmian obiektu sterowania w taki sposób, aby cel sterowania został osiągnięty. Typowy adaptacyjny algorytm sterowania wykorzystuje układ estymujący nieznane parametry modelu i generuje sygnał sterujący w oparciu o otrzymane estymaty parametrów. Z tego względu, układy adaptacyjne są najczęściej wykorzystywane w sytuacji, gdy model jest obciążony nieznajomością parametryczną. Układy adaptacyjne są skomplikowane, zwłaszcza w przypadku, gdy zawierają układ estymacji. Są

one skuteczne, lecz kosztowne i trudne do realizacji. Opracowano wiele algorytmów sterowania manipulatora, które są adaptacyjnymi wersjami algorytmów typu obliczanego momentu i algorytmów typu dysypatywnego.

Konkurencyjne rozwiązanie problemu sterowania przy niepełnej znajomości modelu stanowią algorytmy sterowania odpornego*. Algorytmy odporne wykorzystują pewne aprioryczne oszacowania parametrów modelu i w oparciu o taką informację zapewniają poprawne sterowanie dla wszystkich dopuszczalnych zaburzeń modelu. Ze względu na brak układu estymacji odporne układy sterowania są znacznie prostsze niż adaptacyjne, cechują się jednak strukturalną nadczynnością (np. nadmiernym wzmocnieniem) dla wartości parametrów innych niż ekstremalne.

W połowie lat osiemdziesiątych w dziedzinie sterowania adaptacyjnego pojawił się nowy paradygmat, który umożliwił opracowanie prostych algorytmów sterowania zapewniających osiągnięcie celu sterowania dla całej klasy obiektów na podstawie znajomości sygnałów wyjściowych obiektu. Dla układów liniowych minimalnofazowych odpowiednie układy sterowania zostały nazwane *uniwersalnymi adaptacyjnymi układami sterowania* (w skrócie UAUS). Układy uniwersalne są adaptacyjne w tym sensie, że realizują zadanie sterowania korzystając z ograniczonej informacji o obiekcie (jedynie informacje, jakie posiada układ sterowania, to informacje strukturalne na temat liniowości i minimalnofazowości obiektu sterowania), nie zawierają jednak układu estymacji parametrów. Uważa się, że sposób działania uniwersalnych układów sterowania imituje postępowanie człowieka, który ma sterować obiektem o nieznanym parametrach. Wyobraźmy sobie człowieka, który próbuje balansować tyczką ustawioną na dłoni. Na początku jego ruchy, mające na celu utrzymanie tyczki w pozycji pionowej, są przesadnie obszerne, lecz po krótkim okresie prób i błędów ich amplituda i częstotliwość maleje i tyczka jest trwale utrzymywana w pobliżu położenia równowagi. Po zmianie tyczki na inną wynik doświadczenia jest podobny. Uniwersalne adaptacyjne układy sterowania charakteryzują się prostą budową, brakiem układu estymacji i skutecznością działania.

Działanie uniwersalnego adaptacyjnego układu sterowania można zilustrować na przykładzie zadania stabilizacji obiektu liniowego. Każdy układ należący do klasy minimalnofazowych układów liniowych, jednowejściowych

*Zastosowany tu termin „odporny” odpowiada, przyjętemu w środowisku automatyków tłumaczeniu angielskiego przymiotnika „robust”. Spośród alternatywnych jego przekładów, zaproponowanych przez robotyków, najbardziej przypadła nam do gustu propozycja „chędogi”, autorstwa dra hab. A. Kasińskiego.

i jednowyjściowych, o stopniu względnym równym 1, postaci

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{q}(t) + \mathbf{b}u(t) \\ y(t) = \mathbf{c}^T\mathbf{q}(t), \end{cases} \quad (6.2)$$

gdzie $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{c}^T\mathbf{b} > 0$, daje się ustabilizować za pomocą dynamicznego sprzężenia zwrotnego od wyjścia

$$\begin{cases} u(t) = -k(t)y(t) \\ \dot{k}(t) = y^2(t). \end{cases}$$

Można by oczekiwać, że znajomość znaku wyrażenia $\mathbf{c}^T\mathbf{b}$ jest warunkiem koniecznym zbieżności każdego adaptacyjnego algorytmu stabilizacji. Jednak, dzięki wprowadzeniu pojęcia funkcji przełączającej, okazało się możliwe zaproponowanie adaptacyjnego układu stabilizacji, pomimo że znak wyrażenia $\mathbf{c}^T\mathbf{b}$ jest nieznany. W rezultacie, jeżeli tylko $\mathbf{c}^T\mathbf{b} \neq 0$, układy postaci (6.2) można ustabilizować przy użyciu uniwersalnego adaptacyjnego układu sterowania

$$\begin{cases} u(t) = N(k(t))y(t) \\ \dot{k}(t) = y^2(t), \end{cases}$$

gdzie $N(\cdot)$ jest tzw. *funkcją Nussbauma*, to znaczy funkcją odcinkami prawostronnie ciągłą, spełniającą warunki

$$\inf_{k>0} \frac{1}{k} \int_0^k N(s) ds = -\infty, \\ \sup_{k>0} \frac{1}{k} \int_0^k N(s) ds = +\infty.$$

Przykładowymi funkcjami Nussbauma są funkcje $N(k) = k^2 \cos k$ i $N(k) = \cos(k\pi/2)e^{k^2}$. Mechanizm sterowania jest następujący: układ adaptacji opisany równaniem $\dot{k} = y^2$ monotonicznie zwiększa $k(t)$, a funkcja przełączająca $N(k)$ przyjmuje na przemian wartości dodatnie i ujemne o rosnącej amplitudzie i czasie trwania. Jeśli poprawny znak funkcji N jest stały w czasie dostatecznie długim na to, aby sygnał wyjściowy y obiektu z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego zmniejszył się do zera, to adaptacja wzmocnienia dynamicznego k zatrzyma się na pewnej skończonej wartości.

6.1 Algorytmy wymagające pełnej znajomości modelu

6.1.1 Algorytmy typu obliczanego momentu

Dokładna linearyzacja

Najbardziej znany algorytm typu obliczanego momentu korzysta z linearyzacji modelu dynamiki manipulatora przy pomocy statycznego sprzężenia zwrotnego. Aby przedstawić ideę tego algorytmu, rozważmy model dynamiki manipulatora sztywnego

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}(\mathbf{q}) = \mathbf{u}. \quad (6.3)$$

Na wejście układu podajmy sygnał sterujący

$$\mathbf{u} = \mathbf{Q}(\mathbf{q})\mathbf{v} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}(\mathbf{q}), \quad (6.4)$$

gdzie $\mathbf{v}$ jest nowym wektorem sterowań. Po podstawieniu sterowania (6.4) do modelu dynamiki manipulatora (6.3) otrzymujemy równanie układu z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego postaci

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}(\mathbf{q})\mathbf{v},$$

lub równoważne mu równanie liniowe

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{v}, \quad (6.5)$$

uzyskane dzięki odwracalności macierzy bezwładności $\mathbf{Q}(\mathbf{q})$.

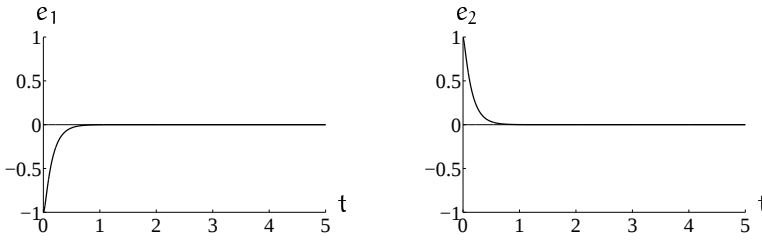
W celu zapewnienia śledzenia trajektorii $\mathbf{q}_d(t)$ w układzie zlinearyzowanym, wystarczy podać na wejście $\mathbf{v}$ sygnał z regulatora PD z korekcją

$$\mathbf{v} = \ddot{\mathbf{q}}_d - \mathbf{K}_d\dot{\mathbf{e}} - \mathbf{K}_p\mathbf{e}, \quad (6.6)$$

gdzie $\mathbf{e}(t) = \mathbf{q}(t) - \mathbf{q}_d(t)$ oznacza błąd śledzenia położenia, a diagonalne macierze $\mathbf{K}_d > 0$ oraz $\mathbf{K}_p > 0$ opisują wzmocnienia części różniczkującej oraz proporcjonalnej regulatora PD. Równanie błędu w zamkniętej pętli sprzężenia zwrotnego jest następujące

$$\ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_d\dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_p\mathbf{e} = \mathbf{0},$$

a zaproponowany wybór macierzy $\mathbf{K}_d$ i $\mathbf{K}_p$ zapewnia eksponencjalną zbieżność błędu śledzenia do zera.



Rysunek 6.1 Przebieg błędów śledzenia przy zastosowaniu algorytmu linearyzacji przez sprzężenie zwrotne ze wzmocnieniami $\mathbf{K}_p = \text{diag}\{300\}$ i $\mathbf{K}_d = \text{diag}\{50\}$.

Przykład 6.1.1 (Manipulator *EDDA*)

Założmy, że zadanie sterowania manipulatora *EDDA* o modelu dynamiki zdefiniowanym przez (5.16), (5.21)–(5.23) polega na śledzeniu trajektorii zadanej w przestrzeni przegubowej

$$\mathbf{q}_d(t) = \begin{pmatrix} q_{1d}(t) \\ q_{2d}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{1}{2}t\right) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}. \quad (6.7)$$

Błędy śledzenia powyższej trajektorii manipulatora zostały przedstawione na rysunku 6.1*.

Algorytm Wena-Bayarda

Drugim przedstawicielem algorytmów typu obliczanego momentu jest algorytm zaproponowany przez Wena i Bayarda

$$\mathbf{u} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}_d)\ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{C}(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d)\dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{D}(\mathbf{q}_d) - \mathbf{K}_d\dot{\mathbf{e}} - \mathbf{K}_p\mathbf{e}. \quad (6.8)$$

Łatwo zauważyć, że algorytm (6.8) składa się z dwóch składników. Pierwszy z nich, o charakterze korekcyjnym, wymaga znajomości modelu manipulatora wzdłuż zadanej trajektorii przegubowej. Drugi składnik, za pomocą regulatora PD o stałym wzmocnieniu, generuje poprawkę zależną od błędu śledzenia $\mathbf{e}(t) = \mathbf{q}(t) - \mathbf{q}_d(t)$ i jego pochodnej względem czasu. W celu wykazania zbieżności algorytmu sterowania manipulatora opisanego równaniem (6.8) rozważmy funkcję Lapunowa

$$V(\mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}}, t) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{e}}^T \mathbf{Q}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{e}} + \frac{1}{2}\mathbf{e}^T (\mathbf{K}_p + \varepsilon \mathbf{K}_d)\mathbf{e} + \varepsilon \mathbf{e}^T \mathbf{Q}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{e}}, \quad (6.9)$$

*Symulacje zamieszczone w tym i następnym rozdziale wykonano w środowisku MATLAB® + SIMULINK®.

gdzie $\mathbf{q} = \mathbf{q}_d + \mathbf{e}$, a ε jest pewną stałą dodatnią. Z własności form kwadratowych[†] otrzymujemy warunek na ε zapewniający dodatnią określoność funkcji Lapunowa

$$0 < \varepsilon \leq \frac{\lambda_{\mathbf{K}_d} + \sqrt{\lambda_{\mathbf{K}_d}^2 + 4\Lambda_{\mathbf{Q}}\lambda_{\mathbf{K}_p}}}{2\Lambda_{\mathbf{Q}}},$$

przy czym $\underline{\Lambda}_{\mathbf{Q}} = \min_{\mathbf{q}} \underline{\Lambda}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{q})$, $\Lambda_{\mathbf{Q}} = \max_{\mathbf{q}} \underline{\Lambda}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{q})$, zaś $\underline{\Lambda}_{\mathbf{M}}$ oznacza najmniejszą wartość własną symetrycznej macierzy $\mathbf{M}$. Zauważmy, że istnienie $\Lambda_{\mathbf{Q}}$ wynika z własności (5.17). Przed oszacowaniem pochodnej funkcji Lapunowa V zapiszmy równania manipulatora z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego

$$\begin{cases} \mathbf{Q}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{e}} = -\Delta\mathbf{Q}\ddot{\mathbf{q}}_d - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{e}} - \Delta\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}_d - \Delta\mathbf{D} - \mathbf{K}_p\mathbf{e} - \mathbf{K}_d\dot{\mathbf{e}} \\ \mathbf{q} = \mathbf{q}_d + \mathbf{e} \\ \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}_d + \dot{\mathbf{e}}, \end{cases} \quad (6.10)$$

gdzie $\Delta\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}) - \mathbf{Q}(\mathbf{q}_d)$, $\Delta\mathbf{C} = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{C}(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d)$, $\Delta\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{q}) - \mathbf{D}(\mathbf{q}_d)$. Korzystając z twierdzenia o wartości średniej[‡] można pokazać, że pochodna po czasie funkcji Lapunowa opisanej wzorem (6.9) wzdłuż trajektorii układu zamkniętego (6.10) da się oszacować w następujący sposób

$$\dot{V} \leq -B\|\mathbf{e}\|^2 - (A - S\|\mathbf{e}\|)\|\dot{\mathbf{e}}\|^2,$$

gdzie A, B, S są pewnymi liczbami dodatnimi. Wartość parametru S wynika z oszacowania modelu dynamiki wzdłuż trajektorii zadanej i dla konkretnej trajektorii zadanej jest ustalona. Parametr B można dowolnie powiększać poprzez wybór coraz większych wartości wzmocnień $\mathbf{K}_p$, natomiast parametr A rośnie wraz ze wzrostem wzmocnień $\mathbf{K}_d$.

Zdefiniujmy parametr $\xi_1 = \frac{1}{2} (\underline{\lambda}_{\mathbf{K}_p} + \varepsilon \underline{\lambda}_{\mathbf{K}_d} - \varepsilon^2 \Lambda_{\mathbf{Q}})$. Jeśli zachodzi

$$B > 0, \quad A > S\sqrt{\frac{V_0}{\xi_1}},$$

gdzie $V_0 = V(\mathbf{e}(0), \dot{\mathbf{e}}(0), 0)$, to można udowodnić, że dla λ_1, λ_2 spełniających

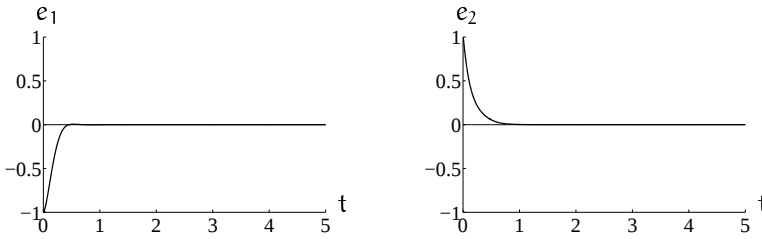
$$0 < \lambda_1 < B, \quad 0 < \lambda_2 < A - S\sqrt{\frac{V_0}{\xi_1}},$$

jest prawdziwa nierówność

$$\dot{V} \leq -\lambda_1\|\mathbf{e}\|^2 - \lambda_2\|\dot{\mathbf{e}}\|^2. \quad (6.11)$$

[†]Zobacz dodatek A.1.

[‡]Zobacz dodatek A.2.



Rysunek 6.2 Przebieg błędów śledzenia przy zastosowaniu algorytmu Wena-Bayarda ze wzmocnieniami $\mathbf{K}_p = \text{diag}\{300\}$ i $\mathbf{K}_d = \text{diag}\{50\}$.

Algorytm Wena-Bayarda zapewnia tzw. półglobalną stabilność zamkniętego układu sterowania. Oznacza to, że dla każdego warunku początkowego istnieją wzmocnienia $\mathbf{K}_d$ i $\mathbf{K}_p$ zapewniające eksponencjalną zbieżność błędu śledzenia do zera[§].

Przykład 6.1.2 (Manipulator *EDDA*)

Podobnie jak w algorytmie linearyzacji statycznej, celem sterowania jest śledzenie trajektorii przegubowej opisanej równaniem (6.7). Błędy powstałe przy zastosowaniu algorytmu Wena-Bayarda do śledzenia trajektorii zadanej przedstawiono na rysunku 6.2. ■

6.1.2 Algorytmy typu dysypatywnego

Algorytm Slotine'a-Li

Najbardziej znanym algorytmem sterowania manipulatorów typu dysypatywnego jest algorytm Slotine'a-Li

$$\mathbf{u} = \mathbf{Q}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{D}(\mathbf{q}) - \mathbf{K}_d\mathbf{s}, \quad (6.12)$$

w którym funkcja $\mathbf{q}_r(t)$ jest tzw. trajektorią odniesienia zdefiniowaną następująco

$$\dot{\mathbf{q}}_r = \dot{\mathbf{q}}_d - \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{e}, \quad (6.13)$$

natomiast zmienna

$$\mathbf{s} = \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_r = \dot{\mathbf{e}} + \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{e}, \quad (6.14)$$

nosi nazwę zmiennej ślizgu.

[§]Zauważmy, że im większy jest początkowy błąd śledzenia, tym wzmocnienia te muszą być większe.

Diagonalne macierze $\mathbf{\Lambda} > 0$ i $\mathbf{K}_d > 0$ są parametrami algorytmu sterowania. Łatwo pokazać, że równania manipulatora z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego są następujące

$$\begin{cases} \mathbf{Q}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{s}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{s} + \mathbf{K}_d\mathbf{s} = \mathbf{0} \\ \mathbf{q} = \mathbf{e} + \mathbf{q}_d \\ \dot{\mathbf{e}} = \mathbf{s} - \mathbf{\Lambda}\mathbf{e}. \end{cases} \quad (6.15)$$

Dla dowodu stabilności algorytmu Slotine'a-Li można wykorzystać następującą funkcję Lapunowa

$$V(\mathbf{e}, \mathbf{s}, t) = \frac{1}{2}\mathbf{s}^T\mathbf{Q}(\mathbf{q})\mathbf{s}. \quad (6.16)$$

Pochodna względem czasu funkcji $V(\mathbf{e}, \mathbf{s}, t)$ jest równa

$$\dot{V} = \mathbf{s}^T\mathbf{Q}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{s}} + \frac{1}{2}\mathbf{s}^T\dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{q})\mathbf{s}.$$

Policzymy pochodną funkcji Lapunowa wzdłuż trajektorii układu zamkniętego (6.15)

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \mathbf{s}^T(-\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{s} - \mathbf{K}_d\mathbf{s}) + \frac{1}{2}\mathbf{s}^T\dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{q})\mathbf{s} = \\ &= -\mathbf{s}^T\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{s} - \mathbf{s}^T\mathbf{K}_d\mathbf{s} + \frac{1}{2}\mathbf{s}^T\dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{q})\mathbf{s}. \end{aligned}$$

Z własności (5.6) i z własności form kwadratowych otrzymujemy

$$\dot{V} = -\mathbf{s}^T\mathbf{K}_d\mathbf{s} \leq -\underline{\lambda}_{\mathbf{K}_d}\|\mathbf{s}\|^2. \quad (6.17)$$

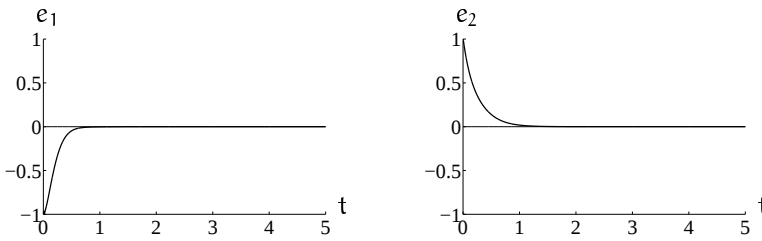
Korzystając z oszacowania

$$V(\mathbf{e}, \mathbf{s}, t) \leq \frac{1}{2}\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}\|\mathbf{s}\|^2$$

i z nierówności (6.17) można pokazać eksponencjalną zbieżność algorytmu*

$$\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0}, \quad \text{gdy} \quad t \rightarrow +\infty.$$

Ponieważ $\mathbf{s} = \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{\Lambda}\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{0}$, to przy odpowiednim wyborze elementów macierzy $\mathbf{\Lambda}$ błąd śledzenia $\mathbf{e}(t)$ również zanika do zera eksponencjalnie.



Rysunek 6.3 Przebieg błędów śledzenia przy algorytmie Slotine'a-Li z parametrami $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{4\}$ i $\mathbf{K}_d = \text{diag}\{75\}$.

Przykład 6.1.3 (Manipulator *EDDA*)

W celu zilustrowania zachowania manipulatora przy sterowaniu według algorytmu Slotine'a-Li, przeprowadziliśmy symulacje komputerowe przebiegu śledzenia trajektorii przegubowej (6.7) manipulatora *EDDA*. Wykresy błędów zostały przedstawione na rysunku 6.3. ■

Zwróćmy uwagę na fakt, że składnik $\mathbf{K}_d \mathbf{s}$ algorytmu Slotine'a-Li tłumiący błędy jest równoważny regulatorowi PD o wzmacnieniach $\mathbf{K}_d \mathbf{\Lambda}$ i $\mathbf{K}_d$. Widać, że elementy macierzy $\mathbf{\Lambda}$, będąc składnikiem wzmacnienia części proporcjonalnej P regulatora, wpływają na szybkość dążenia błędu śledzenia trajektorii $\mathbf{e}(t)$ do zera.

Algorytm Sadegha-Horowitza

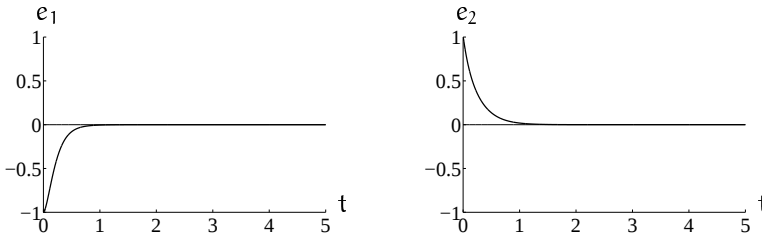
Innym algorytmem wykorzystującym pojęcie ślizgu jest algorytm sterowania Sadegha-Horowitza

$$\mathbf{u} = \mathbf{Q}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{D}(\mathbf{q}) - \mathbf{K}_d \mathbf{s} - \mathbf{R}\mathbf{e}, \quad (6.18)$$

w którym wszystkie zmienne zostały zdefiniowane tak samo jak w algorytmie Slotine'a-Li. Jedynym elementem różniącym oba wspomniane algorytmy jest wyraz proporcjonalny do błędu $\mathbf{R}\mathbf{e}$ występujący we wzorze (6.18), z diagonalną macierzą wzmacnień $\mathbf{R} > 0$.

Algorytm sterowania Sadegha-Horowitza jest pewną modyfikacją algorytmu Slotine'a-Li. Można pokazać za pomocą drugiej metody Lapunowa, że algorytm Sadegha-Horowitza jest eksponencjalnie stabilny. Dowód eksponencjalnej stabilności algorytmu Sadegha-Horowitza został umieszczony w dodatku C.

*Zobacz dodatek C, wzór (C.9).



Rysunek 6.4 Przebieg błędów śledzenia przy zastosowaniu algorytmu Sadegha-Horowitza z parametrami $\mathbf{K}_d = \text{diag}\{75\}$, $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{2\}$ i $\mathbf{R} = \text{diag}\{150\}$.

Przykład 6.1.4 (Manipulator *EDDA*)

Przykładowe przebiegi błędów śledzenia trajektorii przegubowej (6.7) manipulatora *EDDA* zostały zamieszczone na rysunku 6.4. ■

Analogicznie jak w przypadku algorytmu Slotine'a-Li, drugi składnik algorytmu Sadegha-Horowitza, równy $\mathbf{K}_d \mathbf{s} + \mathbf{R} \mathbf{e}$, jest równoważny regulatorowi PD o wzmocnieniach $\mathbf{P} = \mathbf{K}_d \mathbf{\Lambda} + \mathbf{R}$ i $\mathbf{D} = \mathbf{K}_d$.

Uniwersalny adaptacyjny algorytm sterowania

Znajomości modelu manipulatora wzdłuż zadanej trajektorii przegubowej wymaga *uniwersalny adaptacyjny algorytm sterowania* postaci

$$\mathbf{u} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}_d) \ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{C}(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d) \dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{D}(\mathbf{q}_d) - \mathbf{k}(t) \mathbf{P}_1 \mathbf{e} - \mathbf{k}(t) \mathbf{P}_2 \dot{\mathbf{e}}. \quad (6.19)$$

Stałe $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ są dodatnie, natomiast $\mathbf{e}(t)$ oznacza błąd śledzenia położenia zdefiniowany następująco

$$\mathbf{e}(t) = (e_1(t), \dots, e_i(t), \dots, e_n(t))^T = \mathbf{q}(t) - \mathbf{q}_d(t).$$

Macierz $\mathbf{k}(t) = \text{diag}\{k_i(t)\}$, $i = 1, \dots, n$, reprezentuje wzmocnienia lokalnych uniwersalnych układów śledzenia. Lokalny układ uniwersalny dla i -tego przegubu manipulatora ma wzmocnienie zmieniane według reguły

$$\dot{k}_i(t) = (P_1 e_i + P_2 \dot{e}_i)^2, \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.20)$$

Często przyjmuje się założenie, że $k_i(0) > 0$, co zapewnia dodatniość wzmocnień $k_i(t)$ w każdej chwili czasu $t \geq 0$.

Z postaci równania (6.19) widać, że sterowanie manipulatora jest sumą dwóch składników

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_d + \mathbf{u}_{univ}.$$

Składnik $\mathbf{u}_d$ ma charakter korekcyjny i jest liczony w oparciu o znajomość modelu manipulatora wzdłuż zadanej trajektorii. Drugi składnik sterowania jest regulatorem PD o dynamicznym wzmocnieniu $\mathbf{k}(t)$ generowanym przez układ uniwersalny

$$\mathbf{u}_{univ} = -\mathbf{k}(t)\mathbf{P}_1\mathbf{e} - \mathbf{k}(t)\mathbf{P}_2\dot{\mathbf{e}}. \quad (6.21)$$

Aby dowieść stabilności algorytmu sterowania, wybierzmy następującą funkcję Lapunowa

$$V(\mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}}, \mathbf{k}, t) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{e}}^T \mathbf{Q}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{e}} + \frac{1}{2}\mathbf{e}^T \mathbf{k}(\mathbf{P}_1 + \varepsilon \mathbf{P}_2)\mathbf{e} + \varepsilon \mathbf{e}^T \mathbf{Q}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{e}}, \quad (6.22)$$

gdzie $\mathbf{q} = \mathbf{q}_d + \mathbf{e}$, $\varepsilon > 0$, a $\mathbf{k} = \mathbf{k}(t)$ jest macierzą dynamicznych wzmocnień lokalnych uniwersalnych układów śledzenia. Podobnie jak w algorytmie Wena-Bayarda, warunkiem dodatniej określoności funkcji Lapunowa jest

$$0 < \varepsilon \leq \frac{P_2 \lambda_{\mathbf{k}(0)} + \sqrt{P_2^2 \lambda_{\mathbf{k}(0)}^2 + 4 \lambda_{\mathbf{Q}} P_1 \lambda_{\mathbf{k}(0)}}}{2 \lambda_{\mathbf{Q}}}.$$

Przed przystąpieniem do oszacowania pochodnej funkcji Lapunowa $\dot{V}$, zapiszmy równania manipulatora z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego (6.19)

$$\begin{cases} \mathbf{Q}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{e}} = -\Delta \mathbf{Q}\ddot{\mathbf{q}}_d - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{e}} - \Delta \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}_d - \Delta \mathbf{D} - \mathbf{k}\mathbf{P}_1\mathbf{e} - \mathbf{k}\mathbf{P}_2\dot{\mathbf{e}} \\ \dot{\mathbf{k}} = \text{diag}\{P_1\dot{\mathbf{e}}_i + P_2\ddot{\mathbf{e}}_i\}^2 \\ \mathbf{q} = \mathbf{q}_d + \mathbf{e} \\ \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}_d + \dot{\mathbf{e}}, \end{cases} \quad (6.23)$$

przy oznaczeniach $\Delta \mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}) - \mathbf{Q}(\mathbf{q}_d)$, $\Delta \mathbf{C} = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{C}(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d)$, $\Delta \mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{q}) - \mathbf{D}(\mathbf{q}_d)$. Twierdzenie o wartości średniej pozwala pokazać, że pochodna względem czasu funkcji Lapunowa opisanej wzorem (6.22) wzdłuż trajektorii układu zamkniętego (6.23) da się oszacować w następujący sposób

$$\dot{V} \leq -(B - E\|\mathbf{e}\|^2 - D\|\dot{\mathbf{e}}\|)\|\mathbf{e}\|^2 - (A - S\|\mathbf{e}\|)\|\dot{\mathbf{e}}\|^2.$$

Parametry A , B , D , E , S są pewnymi liczbami dodatnimi. Wartość parametru S wynika z oszacowania modelu dynamiki wzdłuż trajektorii zadanej i dla konkretnej trajektorii zadanej jest ustalona. Parametry A , B , D , E można dowolnie powiększać poprzez odpowiedni wybór wartości P_1 i P_2 .

Zdefiniujmy wyrażenia

$$\xi_1 = \frac{1}{2} \left(P_1 \underline{\lambda}_{\mathbf{k}(0)} + \varepsilon P_2 \underline{\lambda}_{\mathbf{k}(0)} - \varepsilon^2 \underline{\lambda}_{\mathbf{Q}} \right),$$

$$\xi_2 = \frac{\underline{\lambda}_{\mathbf{Q}} \xi_1}{P_1 \underline{\lambda}_{\mathbf{k}(0)} + \varepsilon P_2 \underline{\lambda}_{\mathbf{k}(0)}}.$$

Jeśli spełnione są nierówności

$$B > E \frac{V_0}{\xi_1} + D \sqrt{\frac{V_0}{\xi_2}}, \quad A > S \sqrt{\frac{V_0}{\xi_1}},$$

gdzie $V_0 = V(\mathbf{e}(0), \dot{\mathbf{e}}(0), 0)$, $\underline{\lambda}_{\mathbf{Q}} = \max_{\mathbf{q}} \underline{\lambda}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{q})$ oraz $\underline{\lambda}_{\mathbf{Q}} = \min_{\mathbf{q}} \underline{\lambda}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{q})$, to można pokazać, że dla λ_1, λ_2 spełniających

$$0 < \lambda_1 < B - E \frac{V_0}{\xi_1} - D \sqrt{\frac{V_0}{\xi_2}}, \quad 0 < \lambda_2 < A - S \sqrt{\frac{V_0}{\xi_1}},$$

prawdziwa jest nierówność

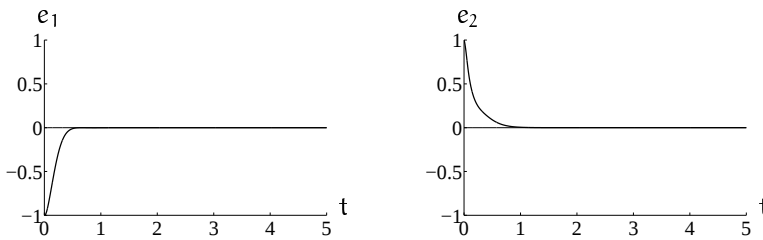
$$\dot{V} \leq -\lambda_1 \|\mathbf{e}\|^2 - \lambda_2 \|\dot{\mathbf{e}}\|^2. \quad (6.24)$$

Przedstawiony uniwersalny algorytm sterowania jest półglobalnie asymptotycznie stabilny, przy czym błąd śledzenia trajektorii $\mathbf{e}(t)$ oraz błąd śledzenia prędkości $\dot{\mathbf{e}}(t)$ zanikają do zera eksponencjalnie. Zaletą algorytmu uniwersalnego w porównaniu z algorytmami o statycznym wzmocnieniu w pętli sprzężenia zwrotnego jest mniejsza wartość sił i momentów sterujących $\mathbf{u}$ potrzebnych do uzyskania pożądanego zachowania manipulatora.

Przykład 6.1.5 (Manipulator *EDDA*)

Przykładowe przebiegi błędów śledzenia trajektorii przegubowej (6.7) manipulatora *EDDA* przy wykorzystaniu uniwersalnego adaptacyjnego algorytmu sterowania zostały zamieszczone na rysunku 6.5. W trakcie symulacji wzmocnienia lokalnych układów uniwersalnych ustaliły się na wartościach $k_{1ust} = 17$ i $k_{2ust} = 6.5$. ■

Symulacje pokazują, że wszystkie algorytmy przedstawione w podrozdziałach 6.1.1 i 6.1.2 zapewniają porównywalną jakość śledzenia trajektorii, natomiast różnią się pod względem łatwości implementacji komputerowej. W praktyce najłatwiej jest zaimplementować algorytm Wena-Bayarda.



Rysunek 6.5 Przebieg błędów śledzenia przy zastosowaniu uniwersalnego adaptacyjnego algorytmu sterowania z parametrami $P_1 = 20$, $P_2 = 4$ i $k_i(0) = 0.1$.

W tym algorytmie składowa korekcyjna $\mathbf{u}_d$ sterowania może zostać obliczona w trybie *off-line*, co zmniejsza zarówno zajętość pamięci komputera, jak i czas trwania bieżących obliczeń. Uniwersalny adaptacyjny algorytm sterowania może być traktowany jako dynamiczna wersja algorytmu Wena-Bayarda. Składową $\mathbf{u}_d$ sterowania również wylicza się w tym przypadku *off-line*, jednak konieczność wyznaczania dynamicznego wzmocnienia zwiększa wymagania co do wielkości potrzebnych zasobów obliczeniowych. Pozostałe algorytmy wymagają obliczania dodatkowych zmiennych, a przez to są jeszcze trudniejsze do implementacji.

6.2 Algorytmy sterowania przy parametrycznej nieznajomości modelu

Jak powiedzieliśmy na wstępie, nieznajomością parametryczną modelu nazywa się sytuację, gdy znane są wszystkie elementy modelu dynamiki manipulatora (znana jest postać funkcyjna wszystkich zależności między zmiennymi opisującymi zachowanie), natomiast nie są znane parametry występujące w tych równaniach. Z postaci modelu dynamiki manipulatora przedstawionej w podrozdziale 5.2 wynika, że każde ramię jest opisane przy pomocy dziesięciu parametrów dynamiki (elementów macierzy inercji ramienia), zatem model manipulatora o n stopniach swobody zawiera $10n$ parametrów dynamiki, które zależą od jego własności fizycznych. Na ogół parametry dynamiki są nieznane lub znane tylko w przybliżeniu. Najczęstszą przyczyną zmiany tych parametrów jest zmienna masa i moment bezwładności ładunku przenoszonego przez manipulator. W dalszych rozważaniach przyjmujemy założenie, że w trakcie śledzenia konkretnej trajektorii przegubowej parametry dynamiki pozostają ustalone, aczkolwiek mogą być nieznane.

W przedstawionych niżej adaptacyjnych algorytmach sterowania będziemy posługiwać modelem manipulatora, który jest liniowy ze względu na nieznane parametry θ

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \theta) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \theta) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}(\mathbf{q}, \theta) = \mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \theta = \mathbf{u}, \quad (6.25)$$

gdzie $\theta \in \mathbb{R}^p$, zaś $\mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$ jest macierzą rozmiaru $n \times p$ zwaną *macierzą regresji*. Parametry θ występujące w równaniu (6.25) są parametrami zastępczymi modelu, będącymi pewnymi funkcjami parametrów fizycznych, a nie bezpośrednio parametrami fizycznymi. W zapisie macierzy regresji przyjmujemy, że trzeci argument odnosi się do prędkości $\dot{\mathbf{q}}$, która jest mnożona przez macierz $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$. Nietrudno zauważyć, że macierz regresji $\mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$ zależy w sposób liniowy od trzeciego i czwartego argumentu.

Przykład 6.2.1 (Manipulator *EDDA*)

Manipulator *EDDA* opisany równaniami macierzowo-wektorowymi (5.16) z macierzami $\mathbf{Q}$, $\mathbf{C}$ i wektorem $\mathbf{D}$ zdefiniowanymi przez (5.21)–(5.23) posiada następujący równoważny opis w postaci (6.25):

$$\mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \theta = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} \\ 0 & 0 & Y_{23} & Y_{24} \end{bmatrix} \theta. \quad (6.26)$$

Elementy Y_{ij} macierzy w równaniu (6.26) są następujące:

$$\begin{aligned} Y_{11} &= \ddot{q}_1, \\ Y_{12} &= g \cos q_1, \\ Y_{13} &= \ddot{q}_2, \\ Y_{14} &= 0.3(2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) \cos q_2 + g \cos(q_1 + q_2) + \\ &\quad - 0.3(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) \sin q_2, \\ Y_{23} &= \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2, \\ Y_{24} &= 0.3\ddot{q}_1 \cos q_2 + g \cos(q_1 + q_2) + 0.3\dot{q}_1^2 \sin q_2, \end{aligned}$$

natomiast wektor $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_4)^T$ jest wektorem nieznanych parametrów zastępczych modelu, których wartości nominalne podaje formuła (5.24). Model manipulatora *EDDA* opisany równaniami (6.26) zostanie użyty do symulacji komputerowych adaptacyjnych algorytmów sterowania. ■

Przy projektowaniu adaptacyjnego algorytmu sterowania zapewniającego śledzenie zadanej trajektorii $\mathbf{q}_d(t)$ w układzie (6.25) należy postępować

w następujący sposób:

- założyć, że w każdej chwili dysponujemy pewną oceną, czyli estymatą $\hat{\theta}(t)$ wektora nieznanych parametrów θ ,
- znaleźć algorytm sterowania u wykorzystujący bieżącą wartość estymaty wektora nieznanych parametrów,
- znaleźć algorytm estymacji nieznanych parametrów generujący w każdej chwili kolejną ocenę $\hat{\theta}(t)$,
- udowodnić asymptotyczną stabilność adaptacyjnego układu sterowania złożonego z podsystemu sterowania i podsystemu estymacji.

6.2.1 Algorytmy adaptacyjne typu obliczanego momentu

Adaptacyjny algorytm linearyzacji

Adaptacyjny algorytm linearyzacji otrzymuje się wprost z algorytmu sterowania zaprojektowanego dla przypadku nieadaptacyjnego (6.4). W tym celu, zamiast rzeczywistych wartości nieznanych parametrów, należy wykorzystać ich bieżące estymaty

$$\begin{cases} u = Q(q, \hat{\theta})v + C(q, \dot{q}, \hat{\theta})\dot{q} + D(q, \hat{\theta}) \\ v = \ddot{q}_d - K_d\dot{e} - K_p e. \end{cases} \quad (6.27)$$

Wstawiając sterowanie (6.27) do modelu dynamiki manipulatora (6.25) otrzymujemy równanie układu z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego

$$Q(q, \hat{\theta})(\ddot{e} + K_d\dot{e} + K_p e) = Y(q, \dot{q}, \ddot{q}, \ddot{q})\tilde{\theta}, \quad (6.28)$$

w którym $\tilde{\theta}(t) = \hat{\theta}(t) - \theta$ jest błędem estymacji parametrów. Przy założeniu, że macierz $Q(q, \hat{\theta})$ jest nieosobliwa, równanie (6.28) przyjmuje postać

$$\ddot{e} + K_d\dot{e} + K_p e = Q^{-1}(q, \hat{\theta})Y(q, \dot{q}, \ddot{q}, \ddot{q})\tilde{\theta},$$

lub równoważną postać wyrażoną za pomocą zmiennych stanu

$$\dot{z} = Az + BQ^{-1}(q, \hat{\theta})Y(q, \dot{q}, \ddot{q}, \ddot{q})\tilde{\theta}, \quad z = (e^T, \dot{e}^T)^T, \quad (6.29)$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -K_p & -K_d \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ I_n \end{bmatrix}.$$

Algorytm estymacji parametrów jest następujący

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}(t) = \dot{\boldsymbol{\theta}}(t) = -\boldsymbol{\Gamma} \mathbf{Y}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) (\mathbf{Q}^T)^{-1}(\mathbf{q}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{z}. \quad (6.30)$$

Macierz $\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{\Gamma}^T > 0$ jest macierzą wzmocnień algorytmu estymacji, natomiast macierz $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$ jest rozwiązaniem równania Lapunowa

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{M}, \quad (6.31)$$

dla pewnej macierzy $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T > 0$, która będzie odpowiadać za szybkość zbieżności zmiennej $\mathbf{z}$ do zera.

Wyberzmy następującą funkcję Lapunowa dla układu (6.29)–(6.30)

$$V(\mathbf{z}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{P} \mathbf{z} + \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\theta}}. \quad (6.32)$$

Pochodna względem czasu funkcji $V(\mathbf{z}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}, t)$, wyliczona wzdłuż trajektorii układu zamkniętego (6.29)–(6.30), jest równa

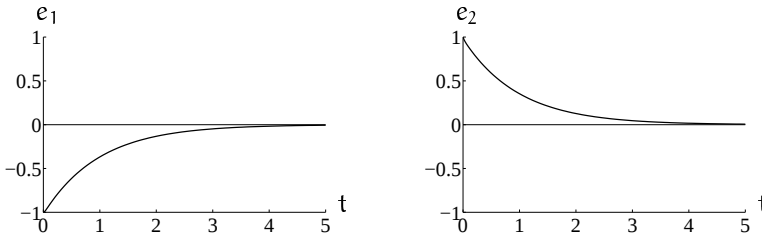
$$\dot{V}(\mathbf{z}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{z}}^T \mathbf{P} \mathbf{z} + \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{z}} + \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} = -\frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{M} \mathbf{z} \quad (6.33)$$

i zawiera macierz $\mathbf{M}$ wprowadzoną w równaniu (6.31). Z równości (6.33) wynika, że adaptacyjny algorytm linearyzacji jest globalnie asymptotycznie stabilny.

Przykład 6.2.2 (Manipulator *EDDA*)

Aby zilustrować działanie adaptacyjnego algorytmu linearyzacji, ponownie rozważymy zadanie śledzenia trajektorii (6.7) manipulatora *EDDA*. Wykresy błędów śledzenia w poszczególnych przegubach manipulatora zostały przedstawione na rysunku 6.6. ■

Prezentowany algorytm jest uogólnieniem algorytmu linearyzacji przez statyczne sprzężenie zwrotne na przypadek parametrycznej nieznajomości modelu dynamiki manipulatora. Algorytm posiada kilka własności utrudniających jego implementację. Po pierwsze, algorytm estymacji wymaga pomiaru przyspieszeń w przegubach. W praktyce jest to bardzo utrudnione, ponieważ większość robotów nie posiada czujników przyspieszenia, a wyliczanie sygnału przyspieszenia poprzez różniczkowanie sygnału położenia wprowadza znaczne zaszumienie sygnału przyspieszenia. Drugą istotną wadą



Rysunek 6.6 Przebieg błędów śledzenia przy zastosowaniu adaptacyjnego algorytmu linearyzacji z parametrami $\mathbf{K}_p = \text{diag}\{300\}$, $\mathbf{K}_d = \text{diag}\{50\}$, $\mathbf{\Gamma} = \text{diag}\{20\}$.

adaptacyjnego algorytmu linearyzacji jest konieczność odwracania estymowanej macierzy bezwładności $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$. Odwracanie macierzy $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ dla manipulatorów o wielu stopniach swobody jest nie tylko czasochłonne i skomplikowane numerycznie ale również często niemożliwe. Wynika stąd, że chociaż macierz bezwładności manipulatora z parametrami nominalnymi jest zawsze dodatnio określona, to estymowana macierz $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ nie posiada tej własności i przy pewnych wartościach $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ może stać się osobliwa. Należy również podkreślić fakt, że algorytm estymacji nie gwarantuje zbieżności estymat parametrów dynamiki do ich rzeczywistych wartości.

Algorytm adaptacyjny Bayarda-Wena

Bayard i Wen zaproponowali rodzinę adaptacyjnych algorytmów sterowania wykorzystujących stopniowo coraz mniejszą wiedzę o modelu dynamiki manipulatora. W obrębie tej rodziny najmniejszej wiedzy o dynamice manipulatora wymaga następujący algorytm sterowania

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{Q}(\mathbf{q}_d, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{C}(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{D}(\mathbf{q}_d, \hat{\boldsymbol{\theta}}) - \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{e}} - \mathbf{K}_p \mathbf{e} = \\ &= \mathbf{Y}(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d, \ddot{\mathbf{q}}_d) \hat{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{e}} - \mathbf{K}_p \mathbf{e}, \end{aligned} \quad (6.34)$$

z algorytmem estymacji parametrów

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}(t) = -\mathbf{\Gamma} \mathbf{Y}^T(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d, \ddot{\mathbf{q}}_d) (\dot{\mathbf{e}} + \varepsilon \mathbf{e}). \quad (6.35)$$

Zakłada się, że $\mathbf{K}_d = \mathbf{K}_d^T > 0$, $\mathbf{K}_p = \mathbf{K}_p^T > 0$ i $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}^T > 0$. Przed przystąpieniem do badania stabilności algorytmu przedstawimy równania dynamiki

manipulatora z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego (6.34), (6.35)

$$\begin{cases} \mathbf{Q}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{e}} = -\Delta\mathbf{Q}\ddot{\mathbf{q}}_d - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{e}} - \Delta\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}_d - \Delta\mathbf{D} + \\ \quad - \mathbf{K}_p\mathbf{e} - \mathbf{K}_d\dot{\mathbf{e}} + \mathbf{Y}(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d, \ddot{\mathbf{q}}_d)\ddot{\boldsymbol{\theta}} \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}(\mathbf{t}) = -\Gamma\mathbf{Y}^T(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d, \ddot{\mathbf{q}}_d)(\dot{\mathbf{e}} + \varepsilon\mathbf{e}) \\ \mathbf{q} = \mathbf{q}_d + \mathbf{e} \\ \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}_d + \dot{\mathbf{e}}, \end{cases} \quad (6.36)$$

gdzie $\Delta\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}) - \mathbf{Q}(\mathbf{q}_d)$, $\Delta\mathbf{C} = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{C}(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d)$, $\Delta\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{q}) - \mathbf{D}(\mathbf{q}_d)$.

Dla układu opisanego równaniami (6.36) wybieramy funkcję Lapunowa

$$V(\mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}}, \ddot{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{t}) = V^0 + \frac{1}{2}\ddot{\boldsymbol{\theta}}^T\Gamma^{-1}\ddot{\boldsymbol{\theta}}, \quad (6.37)$$

zawierającą funkcję Lapunowa V^0 dla nieadaptacyjnego algorytmu Wena-Bayarda zdefiniowaną wzorem (6.9). Można pokazać, że pochodna funkcji V obliczona wzdłuż trajektorii układu (6.36) wynosi

$$\dot{V} = \dot{V}^0 + \dot{\mathbf{e}}^T\mathbf{Y}(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d, \ddot{\mathbf{q}}_d)\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \varepsilon\mathbf{e}^T\mathbf{Y}(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d, \ddot{\mathbf{q}}_d)\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \ddot{\boldsymbol{\theta}}^T\Gamma^{-1}\ddot{\boldsymbol{\theta}}. \quad (6.38)$$

Widać, że po wstawieniu równania (6.35) opisującego algorytm estymacji parametrów do wzoru (6.38), prawdziwe jest oszacowanie

$$\dot{V} \leq -B\|\mathbf{e}\|^2 - (A - S\|\mathbf{e}\|)\|\dot{\mathbf{e}}\|^2,$$

z parametrami A , B , S identycznymi jak w przypadku algorytmu Wena-Bayarda. Oznacza to, że dla λ_1 , λ_2 spełniających zależności

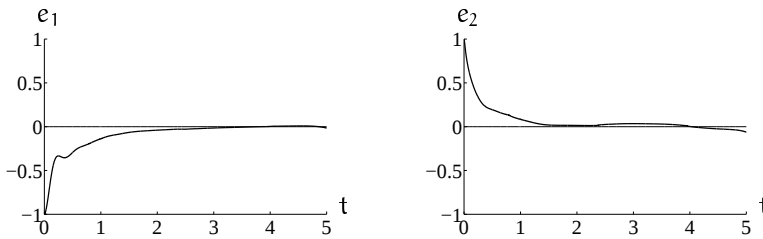
$$0 < \lambda_1 < B, \quad 0 < \lambda_2 < A - S\sqrt{\frac{V_0}{\xi_1}},$$

prawdziwa jest nierówność

$$\dot{V} \leq -\lambda_1\|\mathbf{e}\|^2 - \lambda_2\|\dot{\mathbf{e}}\|^2. \quad (6.39)$$

Wszystkie występujące tu zmienne i parametry zostały zdefiniowane w rozdziale omawiającym algorytm Wena-Bayarda*. Algorytm (6.34), (6.35) jest

*Kolejność nazwisk w algorytmach Wena-Bayarda i Bayarda-Wena nie jest przypadkowa, lecz wynika z kolejności nazwisk autorów artykułów, w których te algorytmy zostały opublikowane.



Rysunek 6.7 Przebieg błędów śledzenia przy zastosowaniu adaptacyjnego algorytmu Bayarda-Wena z parametrami $\mathbf{K}_p = \text{diag}\{300\}$, $\mathbf{K}_d = \text{diag}\{50\}$ i $\mathbf{\Gamma} = \text{diag}\{20\}$.

półglobalnie asymptotycznie stabilny. Oznacza to, że dla dowolnych warunków początkowych istnieją wzmocnienia regulatora PD (czyli wartości elementów macierzy $\mathbf{K}_d$ i $\mathbf{K}_p$), które zapewniają zbieżność błędu śledzenia trajektorii $\mathbf{e}(t) = \mathbf{q}(t) - \mathbf{q}_d(t)$ do zera. Zaletą algorytmu Bayarda-Wena jest duża odporność na zakłócenia, natomiast istotną wadą są bardzo duże wartości wzmocnień $\mathbf{K}_d$ i $\mathbf{K}_p$ konieczne do zapewnienia stabilności algorytmu. Również ten algorytm nie gwarantuje zbieżności estymat do nominalnych wartości parametrów.

Przykład 6.2.3 (Manipulator *EDDA*)

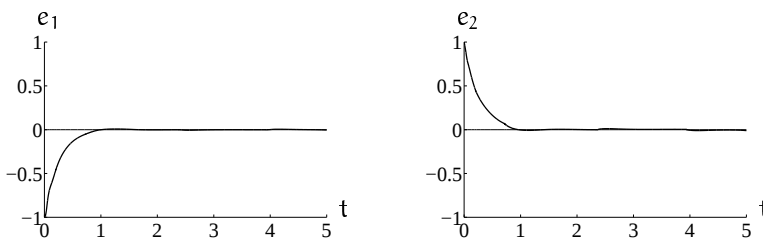
Aby zilustrować działanie powyższego algorytmu, pokażemy przykładowe wykresy błędów śledzenia trajektorii dla manipulatora typu *EDDA*. Podobnie jak w przypadku nieadaptacyjnym, trajektoria zadana jest opisana równaniem (6.7). Wykresy błędów śledzenia trajektorii przegubowej zostały przedstawione na rysunku 6.7. ■

6.2.2 Algorytmy adaptacyjne typu dysypatywnego

Algorytm adaptacyjny Slotine'a-Li

Adaptacyjny algorytm Slotine'a-Li wywodzi się z algorytmu (6.12) używanego przy pełnej znajomości modelu manipulatora, z tą różnicą, że zawarte w nim prawo sterowania zamiast rzeczywistych wartości wektora nieznanymi parametrów modelu $\boldsymbol{\theta}$ wykorzystuje ich bieżące estymaty $\hat{\boldsymbol{\theta}}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{D}(\mathbf{q}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) - \mathbf{K}_d \mathbf{s} = \\ &= \mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}_r, \ddot{\mathbf{q}}_r) \hat{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{K}_d \mathbf{s}. \end{aligned} \quad (6.40)$$



Rysunek 6.8 Przebieg błędów śledzenia przy zastosowaniu adaptacyjnego algorytmu Slotine'a-Li z parametrami $\mathbf{K}_d = \text{diag}\{75\}$, $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{4\}$ i $\mathbf{\Gamma} = \text{diag}\{20\}$.

Wszystkie sygnały występujące we wzorze (6.40) są takie same jak sygnały dla algorytmu nieadaptacyjnego i zostały zdefiniowane następująco:

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \mathbf{q} - \mathbf{q}_d, \\ \dot{\mathbf{q}}_r &= \dot{\mathbf{q}}_d - \mathbf{\Lambda} \mathbf{e}, \\ \mathbf{s} &= \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_r = \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{\Lambda} \mathbf{e}. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Jako algorytm estymacji przyjmujemy następujący algorytm

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}(t) = -\mathbf{\Gamma} \mathbf{Y}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}_r, \ddot{\mathbf{q}}_r) \mathbf{s}, \quad (6.42)$$

gdzie $\mathbf{\Gamma}$ jest symetryczną, dodatnio określoną macierzą wzmocnień adaptacyjnych rozmiaru $p \times p$, zaś p jest liczbą parametrów zastępczych.

Adaptacyjny algorytm Slotine'a-Li cechuje się eksponencjalną zbieżnością błędu śledzenia trajektorii $\mathbf{e}$ do zera. Dowód jego stabilności znajduje się w dodatku C. Algorytm ten nie gwarantuje zbieżności estymat nieznanymi parametrów do ich wartości nominalnych.

Przykład 6.2.4 (Manipulator *EDDA*)

W celu zaprezentowania działania powyższego algorytmu, na rysunku 6.8 przedstawimy wykresy błędów śledzenia trajektorii (6.7) dla manipulatora eksperymentalnego *EDDA*. ■

Algorytm adaptacyjny Sadegha-Horowitza

Podobnie jak Bayard i Wen, Sadegh i Horowitz zaproponowali rodzinę adaptacyjnych algorytmów sterowania wykorzystujących różny stopień znajomości modelu dynamiki manipulatora. Spośród adaptacyjnych algorytmów sterowania z tej rodziny rozważymy algorytm wykorzystujący prawo

sterowania

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{Q}(\mathbf{q}_d, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{C}(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{D}(\mathbf{q}_d, \hat{\boldsymbol{\theta}}) - \mathbf{K}_d \mathbf{s} - \mathbf{R} \mathbf{e} - K_f \|\mathbf{e}\|^2 \mathbf{s} = \\ &= \mathbf{Y}(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d, \ddot{\mathbf{q}}_d, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \hat{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{K}_d \mathbf{s} - \mathbf{R} \mathbf{e} - K_f \|\mathbf{e}\|^2 \mathbf{s} \end{aligned} \quad (6.43)$$

oraz algorytm estymacji parametrów

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}(\mathbf{t}) = -\boldsymbol{\Gamma} \mathbf{Y}^T(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d, \ddot{\mathbf{q}}_d) \mathbf{s}. \quad (6.44)$$

W algorytmie $\mathbf{e} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_d$ jest błędem śledzenia trajektorii, $\mathbf{s} = \dot{\mathbf{e}} + \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{e}$ oznacza zmienną ślizgu, analogicznie do wersji nieadaptacyjnej, współczynnik $K_f > 0$, zaś macierze wzmocnień spełniają warunki $\mathbf{K}_d = \mathbf{K}_d^T > \mathbf{0}$, $\mathbf{R} = \mathbf{R}^T > \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{\Gamma}^T > \mathbf{0}$ i $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda}^T > \mathbf{0}$. Do przeprowadzenia analizy stabilności powyższego algorytmu wykorzystamy równania dynamiki manipulatora z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego

$$\begin{cases} \mathbf{Q}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{s}} = -\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{s} - \mathbf{R} \mathbf{e} - \mathbf{K}_d \mathbf{s} - K_f \|\mathbf{e}\|^2 \mathbf{s} + \mathbf{Y}(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d, \ddot{\mathbf{q}}_d) \tilde{\boldsymbol{\theta}} + \Delta \mathbf{Y} \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}(\mathbf{t}) = -\boldsymbol{\Gamma} \mathbf{Y}^T(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d, \ddot{\mathbf{q}}_d) \mathbf{s} \\ \mathbf{q} = \mathbf{q}_d + \mathbf{e} \\ \mathbf{s} = \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_r = \dot{\mathbf{e}} + \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{e}, \end{cases} \quad (6.45)$$

gdzie $\Delta \mathbf{Y} = (\mathbf{Y}(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d, \ddot{\mathbf{q}}_d) - \mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}_r, \ddot{\mathbf{q}}_r)) \boldsymbol{\theta}$. Dla układu (6.45) wybieramy funkcję Lapunowa

$$V(\mathbf{e}, \mathbf{s}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{t}) = V^0(\mathbf{e}, \mathbf{s}, \mathbf{t}) + \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{2} \lambda \underline{\lambda}^2 \mathbf{e}^T \mathbf{e}, \quad (6.46)$$

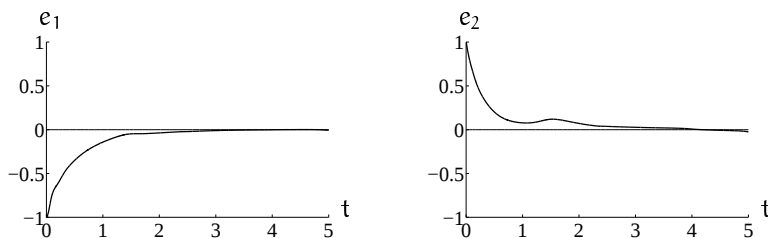
w której składnik V^0 oznacza funkcję Lapunowa nieadaptacyjnego algorytmu Sadegha-Horowitza zdefiniowaną wzorem (C.4), a $\lambda = \frac{1}{2} (\underline{\lambda}_{\mathbf{Q}} + \overline{\lambda}_{\mathbf{Q}})^*$. Pochodną funkcji Lapunowa $\dot{V}$ wzdłuż trajektorii układu (6.45) można oszacować następująco

$$\dot{V}(\mathbf{e}, \dot{\mathbf{s}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{t}) \leq -\sigma_1 \|\mathbf{s}\|^2 - \underline{\lambda}_{\boldsymbol{\Lambda}} \sigma_2 \|\mathbf{e}\|^2, \quad (6.47)$$

gdzie σ_1, σ_2 są pewnymi stałymi dodatnimi. Algorytm (6.43)–(6.44) został wybrany z rodziny adaptacyjnych algorytmów Sadegha-Horowitza ze względu na to, że jest globalnie asymptotycznie stabilny. Inną ważną zaletą tego algorytmu jest zależność składnika korekcyjnego w prawie sterowania[†] jedynie od zadanej trajektorii przegubowej. Algorytm ten nie gwarantuje zbieżności błędu estymacji parametrów dynamiki $\tilde{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{t})$ do zera.

*Zobacz dodatek C.

[†]Czyli części algorytmu sterowania wymagającej znajomości modelu dynamiki.



Rysunek 6.9 Przebieg błędów śledzenia przy zastosowaniu adaptacyjnego algorytmu Sadegha-Horowitza z parametrami $\mathbf{K}_d = \text{diag}\{75\}$, $\mathbf{A} = \text{diag}\{2\}$, $\mathbf{R} = \text{diag}\{150\}$, $\mathbf{\Gamma} = \text{diag}\{20\}$ i $K_f = 12$.

Przykład 6.2.5 (Manipulator EDDA)

Aby zilustrować działanie algorytmu pokażemy, podobnie jak w przypadku nieadaptacyjnym, błędy śledzenia trajektorii przegubowej (6.7) manipulatora EDDA. Wykresy błędów położenia przegubów zostały przedstawione na rysunku 6.9. ■

Z przeprowadzonych badań wynika, że spośród prezentowanych algorytmów adaptacyjnych najtrudniejszy do implementacji komputerowej jest adaptacyjny algorytm linearyzacji. Wymaga on pomiaru przyspieszeń przegubów manipulatora oraz odwracania estymowanej macierzy bezwładności. Najprostsze do praktycznego zastosowania są adaptacyjne algorytmy Bayarda-Wena i Sadegha-Horowitza, które wykorzystują do estymacji parametrów i do prawa sterowania model robota obliczany wzdłuż zadanej trajektorii.

6.3 Algorytmy sterowania przy strukturalnej nieznajomości modelu

Nieznajomość strukturalna modelu dynamiki manipulatora pojawia się, gdy nie jest znana postać funkcyjna zależności między zmiennymi stanu manipulatora. Przykładem takich trudnych do wyznaczenia zależności jest funkcja opisująca tarcie i opory ruchu.

W dalszych rozważaniach założymy, że dynamika manipulatora o n stopniach swobody jest opisana następującym modelem

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\theta})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\theta})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{\zeta}(t) = \\ = \mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\zeta}(t) = \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (6.48)$$

gdzie $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ oznacza wektor położenia przegubów, $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ jest wektorem

prędkości przegubów, $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\theta})$ jest symetryczną, dodatnio określoną macierzą bezwładności, $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\theta})$ opisuje siły odśrodkowe i Coriolisa, zaś wektor $\mathbf{D}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\theta})$ reprezentuje oddziaływania grawitacyjne. W modelu wszystkie oddziaływania wpływające na manipulator, mające nieznaną postać, zostały potraktowane jako zaburzenia i oznaczone symbolem $\zeta(t)$.

6.3.1 Algorytm sterowania ślizgowego

W celu przedstawienia *algorytmu sterowania ślizgowego* przyjmiemy, że dynamika manipulatora jest opisana równaniem (6.48). Załóżmy, że parametry $\boldsymbol{\theta}$ występujące w modelu są nieznane i dopuśćmy oddziaływanie na współrzędne przegubowe manipulatora nieznanymi zaburzeniami*. Zaburzenia działające na współrzędną q_i mogą być opisane pewną nieznaną funkcją czasu $\zeta_i(t)$, gdzie $i = 1, \dots, n$. Zadanie sterowania będzie polegać na śledzeniu zadanej trajektorii $\mathbf{q}_d(t)$ w przestrzeni przegubowej manipulatora, pomimo nieznanowości parametrów i w obecności nieznanymi zaburzeń.

Aby możliwe było znalezienie sterowania ślizgowego zapewniającego śledzenie trajektorii, niezbędne jest posiadanie pewnej apriorycznej informacji na temat nieznanymi elementów modelu. W dalszych rozważaniach będziemy zakładali, że zarówno nieznane parametry jak i zaburzenia są ograniczone, tzn.

$$|\theta_i| \leq \theta_i^*, \quad |\zeta_i(t)| \leq \zeta_i^*, \quad i = 1, \dots, n, \quad (6.49)$$

a wartości ograniczeń θ_i^* i ζ_i^* są znane. Oznacza to, że użycie algorytmu ślizgowego do sterowania manipulatora jest możliwe jedynie wtedy, gdy można przewidzieć zakres zmian nieznanymi parametrów i zaburzeń.

Algorytm sterowania ślizgowego przypomina pod względem formalnym adaptacyjny algorytm sterowania Slotine'a-Li, różni się jednak brakiem układu estymacji parametrów. Do sterowania jest wprowadzanie wykorzystywana pewna ocena wektora nieznanymi parametrów $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, jednak jest ona wybierana w sposób arbitralny przed rozpoczęciem procesu regulacji jako stały wektor spełniający założenie (6.49). Prawo sterowania w algorytmie ślizgowym ma postać

$$\mathbf{u} = \mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}_r, \ddot{\mathbf{q}}_r) \hat{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{K}_d \mathbf{s} - \mathbf{K} \operatorname{sgn}(\mathbf{s}), \quad (6.50)$$

przy czym sygnały $\ddot{\mathbf{q}}_r$ i $\mathbf{s}$ spełniają zależność (6.41). Symetryczna i dodatnio określona macierz $\mathbf{K}_d$ ma zapewniać zbieżność algorytmu sterowania.

* Jest to przypadek nieznanymi strukturalnej modelu.

W porównaniu z algorytmem Slotine'a-Li, nowym elementem prawa sterowania (6.50) jest składnik o charakterze przełączającym $\mathbf{K} \operatorname{sgn}(\mathbf{s}) = (k_1 \operatorname{sgn}(s_1), \dots, k_n \operatorname{sgn}(s_n))^T$, który ma za zadanie tłumić błędy wynikłe z nieznajomości modelu. Zauważmy, że obecność składnika przełączającego w równaniu (6.50) powoduje nieciągłość względem czasu proponowanego algorytmu sterowania. Największą trudnością przy implementacji algorytmu sterowania ślizgowego jest dobór współczynników wzmocnienia k_i w taki sposób, aby algorytm stał się zbieżny.

Zastosujmy teraz sterowanie (6.50) do modelu (6.48) wyrażonego w postaci zależnej liniowo od nieznanymi parametrów

$$\begin{cases} \mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\zeta}(t) = \mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}_r, \ddot{\mathbf{q}}_r)\hat{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{K}_d \mathbf{s} - \mathbf{K} \operatorname{sgn}(\mathbf{s}) \\ \mathbf{e} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_d \\ \mathbf{s} = \dot{\mathbf{e}} + \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{e} = \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_r. \end{cases} \quad (6.51)$$

Po prostych przekształceniach i podstawieniu $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}$ uzyskujemy równanie dynamiki układu z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\theta})\dot{\mathbf{s}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\theta})\mathbf{s} = \mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}_r, \ddot{\mathbf{q}}_r)\tilde{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{K}_d \mathbf{s} + \mathbf{K} \operatorname{sgn}(\mathbf{s}) - \boldsymbol{\zeta}(t), \quad (6.52)$$

gdzie

$$\mathbf{q} = \mathbf{e} + \mathbf{q}_d.$$

Aby udowodnić zbieżność algorytmu sterowania ślizgowego, zastosujemy metodę funkcji Lapunowa. Rozważmy następującą funkcję

$$V(\mathbf{s}, \mathbf{e}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\theta}) \mathbf{s}, \quad (6.53)$$

zawierającą symetryczną i dodatnio określoną macierz bezwładności manipulatora $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\theta})$. Policzmy pochodną względem czasu funkcji (6.53) wzdłuż trajektorii układu (6.52), skorzystajmy z warunku skośnej symetrii (5.6) i podstawmy wyrażenie $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\theta})\dot{\mathbf{s}}$ uzyskane z równania (6.52). W rezultacie, po prostych przekształceniach, otrzymamy

$$\dot{V} = -\mathbf{s}^T \mathbf{K}_d \mathbf{s} - \mathbf{s}^T (\mathbf{K} \operatorname{sgn}(\mathbf{s}) + \boldsymbol{\zeta}(t) - \mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}_r, \ddot{\mathbf{q}}_r)\tilde{\boldsymbol{\theta}}). \quad (6.54)$$

Drugi składnik pochodnej (6.54) jest sumą następujących elementów

$$\begin{aligned} s_i \left(k_i \operatorname{sgn}(s_i) + \zeta_i - \sum_j Y_{ij} \tilde{\theta}_j \right) &= k_i |s_i| + \zeta_i s_i - \sum_j Y_{ij} \tilde{\theta}_j s_i = \\ &= |s_i| \left(k_i + \zeta_i \operatorname{sgn}(s_i) - \sum_j Y_{ij} \tilde{\theta}_j \operatorname{sgn}(s_i) \right). \end{aligned}$$

Zdefiniujmy teraz współczynniki k_i jako

$$k_i = \sum_j Z_{ij} \alpha_j + \zeta_i^* + \eta_i, \quad (6.55)$$

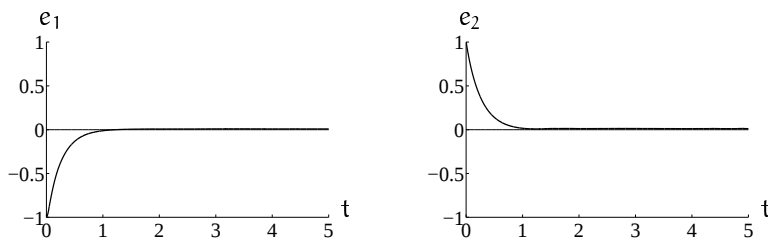
gdzie $|Y_{ij}| \leq Z_{ij}$ wyraża ograniczenia modelu wzdłuż trajektorii odniesienia, $\alpha_i = |\hat{\theta}_i| + \theta_i^* \geq |\tilde{\theta}_i|$ jest oszacowaniem maksymalnego błędu popełnionego podczas wyboru estymaty parametrów, zaś η_i jest pewną liczbą dodatnią.

Przy przyjętej definicji współczynników k_i uzyskujemy następujące oszacowanie pochodnej funkcji Lapunowa wzdłuż trajektorii układu (6.52)

$$\dot{V} \leq -\mathbf{s}^T \mathbf{K}_d \mathbf{s} - \sum_{i=1}^n \eta_i |s_i| \leq 0. \quad (6.56)$$

Z twierdzenia La Salle'a-Yoshizawy wynika, że trajektorie układu (6.52) dążą do $\mathbf{0}$ przy $t \rightarrow +\infty$. Oznacza to, że błąd śledzenia $\mathbf{e}$ spełnia równanie $\dot{\mathbf{e}} = -\mathbf{\Lambda} \mathbf{e}$. Poprzez wybór macierzy $\mathbf{\Lambda}$ w taki sposób, aby jej wartości własne leżały w prawej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej, zagwarantowana jest asymptotyczna stabilność śledzenia. Algorytm sterowania ślizgowego wyróżnia się prostotą i niewrażliwością na zmiany parametrów manipulatora oraz zewnętrzne zakłócenia, np. efekty tarcia w przegubach, jednakże pod warunkiem, że możliwe jest oszacowanie zakresu zmian nieznanymi wielkościami. Algorytm sterowania ślizgowego może być zastosowany także wówczas, gdy oszacowanie zakłóceń zewnętrznych jest zależne od czasu, tj. $|\zeta_i(t)| \leq \zeta_i^*(t)$; otrzymuje się wówczas współczynniki wzmocnienia k_i zależne w sposób jawny od czasu.

Należy jednakże pamiętać o pewnej wadzie powyższego algorytmu polegającej na tym, że aby oszacować wartości współczynników k_i gwarantujące stabilność algorytmu ślizgowego, niezbędna jest znajomość maksymalnej prędkości ruchu w przegubach. W przypadku, gdy prędkość ta nie jest znana, nie można uzyskać oszacowań Z_{ij} elementów macierzy Y_{ij} . W takim wypadku wartości współczynników k_i można dobrać wyłącznie metodą symulacyjną lub eksperymentalną.



Rysunek 6.10 Przebieg błędów śledzenia przy zastosowaniu algorytmu ślizgowego z parametrami $\mathbf{K}_d = \text{diag}\{75\}$, $\mathbf{A} = \text{diag}\{4\}$, $\mathbf{K} = \text{diag}\{100\}$ i $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0}$.

Przykład 6.3.1 (Manipulator *EDDA*)

Dla zilustrowania działania powyższego algorytmu, pokażemy przebiegi błędów śledzenia trajektorii zadanej (6.7) dla manipulatora *EDDA*. Wykresy błędów położenia przegubów zostały przedstawione na rysunku 6.10. ■

6.3.2 Algorytm Qu-Dorseya — regulator PD o stałym wzmożeniu

W poprzednich podrozdziałach dokonaliśmy przeglądu układów sterowania zapewniających śledzenie zadanej trajektorii i dopuszczających kolejno coraz większy stopień nieznajomości modelu dynamiki manipulatora. W konsekwencji, pojawia się pytanie, czy jest możliwe sprowadzenie błędu śledzenia trajektorii do zera, jeśli model manipulatora jest całkowicie nieznany (nawet wzdłuż trajektorii odniesienia). Odpowiedź na tak postawione pytanie jest negatywna. Można pokazać, że zastosowanie do modelu manipulatora (6.25) klasycznego regulatora PD* z diagonalnymi macierzami wzmocnień $\mathbf{K}_d > \mathbf{0}$ i $\mathbf{K}_p > \mathbf{0}$

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}_d \dot{\mathbf{e}} - \mathbf{K}_p \mathbf{e} \quad (6.57)$$

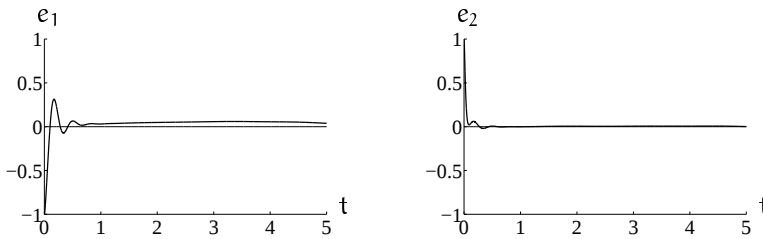
powoduje, że w układzie z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}(\mathbf{q}) + \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_p \mathbf{e} = \mathbf{0},$$

przy $t \rightarrow +\infty$ błąd śledzenia trajektorii

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{q}(t) - \mathbf{q}_d(t) \rightarrow \bar{\mathbf{B}}_{\lambda}(\mathbf{0}).$$

*Bez generowania sterowania odniesienia $\mathbf{u}_d$, które wymaga chociaż częściowej znajomości modelu dynamiki.



Rysunek 6.11 Przebieg błędów śledzenia przy zastosowaniu algorytmu Qu-Dorsey'a ze wzmocnieniami $\mathbf{K}_p = \text{diag}\{1500\}$ i $\mathbf{K}_d = \text{diag}\{50\}$.

Symbol $\bar{\mathbf{B}}_\lambda(\mathbf{0})$ oznacza kulę domkniętą o pewnym promieniu $\lambda > 0$ i środku w punkcie $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$. Innymi słowy, błąd śledzenia położenia w procesie regulacji może nie zanikać do zera, ale z upływem czasu dążyć do pewnej niezerowej wartości ustalonej. Wynika stąd, że jeżeli do każdego przegubu manipulatora dołączymy lokalny regulator PD, to błąd śledzenia trajektorii będzie dążył do pewnego przedziału zawierającego 0. Wyznaczenie wartości ustalonej błędów śledzenia położenia w poszczególnych przegubach wymaga znajomości funkcji szacujących model dynamiki manipulatora. Istotną zaletą algorytmu sterowania (6.57) jest jego prostota, łatwość implementacji oraz możliwość kontrolowania obszaru, do którego dąży błąd $\mathbf{e}(t)$, poprzez wybór odpowiednio dużych wzmocnień $\mathbf{K}_d$ i $\mathbf{K}_p$.

Przykład 6.3.2 (Manipulator EDDA)

Aby zobrazować działanie algorytmu Qu-Dorsey'a, pokażemy przebiegi błędów powstałych podczas śledzenia trajektorii przez manipulator EDDA, opisaną wzorem (6.7). Wykresy błędów położenia przegubów zostały przedstawione na rysunku 6.11. ■

6.3.3 Algorytm λ -śledzenia — regulator PD o dynamicznym wzmocnieniu

Jak pokazaliśmy, zastosowanie regulatora PD o stałym wzmocnieniu zapewnia dążenie błędu śledzenia trajektorii $\mathbf{e}(t)$ do kuli domkniętej o promieniu λ i środku w punkcie $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$. Takie działanie algorytmu sterowania będziemy nazywali λ -śledzeniem trajektorii*, przy czym $\lambda > 0$. Obecnie proponujemy specjalny λ -śledzący uniwersalny algorytm sterowania

*Śledzeniem trajektorii z błędem nie większym niż λ .

z tzw. martwą strefą, zapewniający następującą własność

$$P_1 \mathbf{e}(t) + P_2 \dot{\mathbf{e}}(t) \rightarrow \bar{\mathbf{B}}_\lambda(\mathbf{0}), \quad 0 < P_1, P_2 \in \mathbb{R}, \quad \text{gdy} \quad t \rightarrow +\infty,$$

gdzie $\mathbf{e}(t) = \mathbf{q}(t) - \mathbf{q}_d(t)$, $\dot{\mathbf{e}}(t) = \dot{\mathbf{q}}(t) - \dot{\mathbf{q}}_d(t)$. Łatwo pokazać, że zbieżność kombinacji liniowej błędów $\mathbf{e}$ i $\dot{\mathbf{e}}$ do kuli o promieniu λ i środka w zerze implikuje zbieżność błędu $\mathbf{e}(t)$ do kuli o promieniu λ/P_1 .

W celu wyprowadzenia algorytmu λ -śledzenia trajektorii rozważymy model dynamiki manipulatora postaci (6.25). Założmy, że $\lambda > 0$ i podajmy na wejście $\mathbf{u}$ manipulatora opisanego równaniem (6.25) sterowanie

$$\mathbf{u}(t) = -k(t)\mathbf{E}(t), \quad (6.58)$$

gdzie

$$\mathbf{E}(t) = P_1 \mathbf{e}(t) + P_2 \dot{\mathbf{e}}(t). \quad (6.59)$$

Wzmocnienie $k(t)$ sterowania będziemy adaptować zgodnie z regułą

$$\dot{k} = d_\lambda(\mathbf{E})\|\mathbf{E}\| = \begin{cases} (\|\mathbf{E}\| - \lambda)\|\mathbf{E}\|, & \text{jeżeli } \|\mathbf{E}\| > \lambda, \\ 0, & \text{jeżeli } \|\mathbf{E}\| \leq \lambda, \end{cases} \quad (6.60)$$

przy założeniu, że $k(0) > 0$. Układ z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego jest opisany następującymi równaniami

$$\begin{cases} \mathbf{Q}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{e}} = -\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{e}} - kP_1 \mathbf{e}(t) - kP_2 \dot{\mathbf{e}}(t) - \mathbf{Q}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_d - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_d - \mathbf{D}(\mathbf{q}) \\ \dot{k} = d_\lambda(\mathbf{E})\|\mathbf{E}\| \\ \mathbf{q} = \mathbf{q}_d + \mathbf{e}. \end{cases} \quad (6.61)$$

W dalszych rozważaniach pokażemy, że układ (6.61) posiada następujące własności:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(t) = P_1 \mathbf{e}(t) + P_2 \dot{\mathbf{e}}(t) &\rightarrow \bar{\mathbf{B}}_\lambda(\mathbf{0}) \quad \text{przy} \quad t \rightarrow +\infty, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} k(t) &< \infty. \end{aligned} \quad (6.62)$$

W tym celu rozpatrzmy funkcję Lapunowa postaci

$$V(\mathbf{E}, k) = V_\lambda(\mathbf{E}) + \frac{a}{2} \left(k - \frac{b+1}{a} \right)^2 = \frac{1}{2} d_\lambda^2(\mathbf{E}) + \frac{a}{2} \left(k - \frac{b+1}{a} \right)^2, \quad (6.63)$$

przy czym

$$V_\lambda(\mathbf{E}) = \frac{1}{2} d_\lambda^2(\mathbf{E}) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\|\mathbf{E}\| - \lambda)^2, & \text{jeżeli } \|\mathbf{E}\| > \lambda, \\ 0, & \text{jeżeli } \|\mathbf{E}\| \leq \lambda, \end{cases} \quad (6.64)$$

zaś a i b są pewnymi znanymi liczbami dodatnimi. Dowód zbieżności algorytmu λ -śledzenia wymaga przyjęcia założenia o ograniczonej prędkości manipulatora. Przy takim założeniu można pokazać, że prawdziwa jest następująca nierówność

$$\dot{V} \leq -\dot{k} \leq 0. \quad (6.65)$$

Z (6.65), (6.63) i (6.64) wynika, że trajektorie $\mathbf{e}(t)$, $k(t)$ są ograniczone. Co więcej, z twierdzenia La Salle'a-Yoshizawy wnioskujemy, że trajektorie układu z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego dążą do zbioru

$$\|\mathbf{E}\| \leq \lambda, \quad (6.66)$$

co jest równoważne własności (6.62). Po prostych przekształceniach można pokazać, że jeśli zachodzi (6.66), to dla każdego przegubu mamy

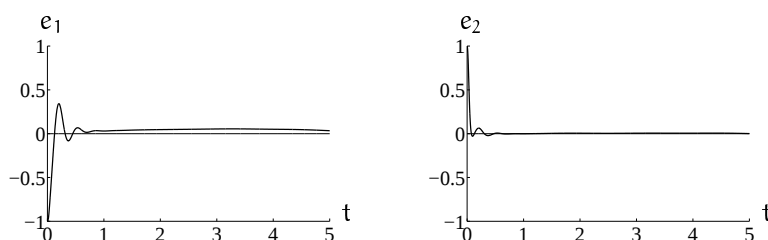
$$e_i(t) \rightarrow \left[-\frac{\lambda}{P_1}, \frac{\lambda}{P_1} \right] \quad \text{przy } t \rightarrow +\infty,$$

czyli każda składowa błędu $\mathbf{e}(t)$ dąży do znanego przedziału domkniętego.

Algorytm λ -śledzenia jest odporny na zakłócenia. Występujący w nim parametr $\lambda > 0$, czyli szerokość martwej strefy (strefy nieczułości), ustalamy przed przystąpieniem do regulacji na podstawie przewidywanej wielkości zakłóceń. Jeśli tylko wartość wzmocnienia P_1 będzie dostatecznie duża, można zagwarantować zbieżność błędu $e_i(t)$ do małego, wybranego przez nas otoczenia punktu 0, dla każdego $i = 1, \dots, n$. Należy podkreślić, że szerokość przedziału, w którym znajduje się błąd śledzenia położenia, zależy jedynie od doboru wartości parametrów λ i P_1 algorytmu sterowania, a nie zależy od stopnia znajomości dynamiki manipulatora.

Przykład 6.3.3 (Manipulator EDDA)

Działanie algorytmu λ -śledzenia zilustrujemy na przykładzie zadania śledzenia trajektorii opisanej wzorem (6.7) dla manipulatora EDDA. Wykresy błędów położenia przegubów zostały przedstawione na rysunku 6.12. W czasie trwania symulacji wzmocnienie układu uniwersalnego ustaliło się na wartości $k_{ust} = 57$. ■



Rysunek 6.12 Przebieg błędów śledzenia przy zastosowaniu algorytmu λ -śledzenia z parametrami $P_1 = 30$, $P_2 = 1$ i $\lambda = 0.5$.

Spośród algorytmów sterowania przedstawionych w tym rozdziale, najprostszym i najczęściej wykorzystywanym w praktyce jest algorytm Qu-Dorsey'a, a więc statyczny regulator PD. Algorytm λ -śledzenia jest nieco bardziej skomplikowany, bowiem wymaga obliczania wzmocnienia dynamicznego, ale za to daje możliwość kontrolowania dokładności śledzenia. Algorytm ślizgowy jest najtrudniejszy do praktycznej implementacji, poza tym prowadzi często do wzbudzenia w układzie sterowania drgań granicznych, polegających na przełączaniu sterowania z dużą częstotliwością w pobliżu powierzchni ślizgu.

6.4 Komentarze i uwagi bibliograficzne

Układem dysypatywnym nazywa się układ, w którym przyrost energii wewnętrznej jest mniejszy od energii dostarczonej do układu. Znaczenie własności pasywności i dysypatywności dla badania stabilności układów, w tym układów sterowania robotów, zostało objaśnione w pracach [SL88, Spo98]. Koncepcja adaptacyjnych układów sterowania nie wykorzystujących identyfikacji parametrów została sformułowana przez Marelsa [Mar84], Mårtenssona [Mår85] oraz Morse'a [Mor83]. W pracy [Mor83] Morse postawił hipotezę, że znajomość znaku wyrażenia $\mathbf{c}^T \mathbf{b}^\dagger$ jest warunkiem koniecznym zbieżności algorytmów adaptacyjnej stabilizacji. Hipotezę Morse'a sfalsyfikował Nussbaum [Nus83], który wprowadził pojęcie funkcji przełączającej i zdefiniował adaptacyjny układ stabilizacji dla systemów liniowych pierwszego rzędu, jednowejściowych i jednowyjściowych, przy czym znak $\mathbf{c}^T \mathbf{b}$ był nieznanym. Pomysł ten rozwinęli Byrnes i Willems [BW84]. W przypadku układów (6.2) o wielu wejściach i wielu wyjściach (wówczas $m = p > 1$,

[†]Zobacz wzór (6.2).

a wektory **b**, **c** zastępujemy macierzami **B**, **C**), Ilchmann i Townley [IT93] oraz Schmid [Sch91] pokazali, że przy założeniu, że widmo macierzy **CB** leży w dodatniej półpłaszczyźnie płaszczyzny zespolonej, układ sterowania

$$u(t) = -k(t)y(t), \quad \dot{k}(t) = \|y(t)\|^2$$

jest uniwersalnym adaptacyjnym układem stabilizacji. Najogólniejsze rozwiązanie problemu syntezy uniwersalnego układu sterowania, nie wymagające założeń na temat minimalnofazowości ani stopnia względnego obiektu podano w pracach [Mär85, MP96]. Od początku lat dziewięćdziesiątych nasiliły się badania mające na celu rozszerzenie klasy obiektów, dla których uniwersalne układy sterowania działają poprawnie. Ilchmann [Ilc93, IT93] rozszerzył klasę obiektów stabilizowalnych przy pomocy uniwersalnych układów sterowania o układy o wielu wejściach i wyjściach, a także o układy o stopniu względnym 2 oraz układy z nieliniowym zaburzeniem. Praetzel-Wolters [PW93] oraz Schmid [Sch91] zdefiniowali uniwersalne układy sterowania dla obiektów liniowych, niestacjonarnych, oddziałujących na siebie poprzez interakcje. Dalsze prace nad uniwersalnymi adaptacyjnymi układami sterowania zmierzają w kierunku rozszerzenia klasy obiektów sterowania o układy nieliniowe, jak również układy o wyższych stopniach względnych i układy z wektorowym wzmocnieniem w pętli sprzężenia zwrotnego. Udaną próbą zastosowania uniwersalnych układów sterowania do sterowania obiektami nieliniowymi było użycie tych układów do sterowania manipulatorów [Maz96a, Maz96b], robotów mobilnych [MH97, Maz98] i procesów chemicznych [AI95]. Algorytm linearyzacji statycznej w wersji adaptacyjnej i nieadaptacyjnej można znaleźć w pracy [Ber93]. Dynamika silników napędzających przeguby została uwzględniona w artykule [T⁺91]. Klasa nieadaptacyjnych algorytmów Wena-Bayarda została przedstawiona w artykule [WB88], zaś ich wersje adaptacyjne przedstawiono w [BW88]. Dowody stabilności wszystkich algorytmów podanych przez Wena i Bayarda oraz uniwersalnego adaptacyjnego algorytmu sterowania opierają się na lemacie Wena-Bayarda (patrz dodatek B), który jest w rzeczywistości twierdzeniem o lokalnej stabilności. Pojęcie stabilności półglobalnej zostało wprowadzone w [TP94]. Wśród adaptacyjnych algorytmów obliczanego momentu należy wymienić algorytm Middletona-Goodwina [MG88], w którym poprzez zastosowanie odpowiedniego filtra udało się uniknąć pomiaru przyspieszenia manipulatora, oraz algorytm Sponga-Ortegi [SO90] zapewniający odwracalność estymowanej macierzy bezwładności manipulatora. Spośród algorytmów wykorzystujących pojęcie zmiennej śli-

zgu, algorytm Slotine'a-Li w wersji nieadaptacyjnej i adaptacyjnej oraz algorytm ślizgowy można znaleźć w [SL87, SL88]. Algorytm sterowania ślizgowego robota IRb-6 zaproponowali Gosiewski i Szynkiewicz w referacie [GS88]. W pracy [SL89] wprowadzono zmodyfikowane algorytmy estymacji parametrów, które zapewniają zbieżność estymacji, o ile jest spełniony warunek trwałego wzbudzenia. Z kolei, klasa algorytmów sterowania wprowadzona przez Sadegha-Horowitza, w tym oba algorytmy przedstawione w tym rozdziale, znajduje się w pracy [SH90]. Algorytm Qu-Dorsey'a wraz z dowodem został przedstawiony w [QD91]. Przykładem zastosowania układów uniwersalnych do sterowania manipulatora jest algorytm λ -śledzenia trajektorii [Maz96b]. Dowód zbieżności tego algorytmu bazuje na twierdzeniu La Salle'a-Yoshizawy, które zostało przedstawione w dodatku B. Możliwość liniowej parametryzacji modelu dynamiki manipulatora ma znaczenie fundamentalne [SV97, Koz98]. W celu przeanalizowania działania algorytmów sterowania opisanych w tym rozdziale wykonaliśmy badania eksperymentalne na manipulatorze *EDDA*. Badania pokazały, że żaden z algorytmów nie gwarantował redukcji do zera błędu śledzenia, a jedynie zapewniał ustalenie się błędu śledzenia na pewnej nieznaczącej wartości. Wynikało to prawdopodobnie z nieliniowości układów napędowych manipulatora *EDDA*, odgrywającej rolę nieliniowego zaburzenia przyjętego modelu dynamiki. Algorytmy uniwersalne bez strefy nieczułości okazały się najbardziej wrażliwe na obecność tego zaburzenia, co objawiło się utratą przez nie stabilności. Jedynymi algorytmami, które umożliwiły istotne ograniczenie ustalonej wartości błędu śledzenia były: algorytm Qu-Dorsey'a i algorytm λ -śledzenia, przy czym ten ostatni algorytm w przeprowadzonych eksperymentach zapewniał największą dokładność śledzenia.

Literatura

- [AI95] F. Allgoewer i A. Ilchmann, Multivariable adaptive λ -tracking for nonlinear chemical processes. W: *Proc. Europ. Contr. Conf.*, strony 1645–1651, Rome, 1995.
- [Ber93] H. Berghuis, *Model-Based Robot Control: from Theory to Practice*. Rozprawa doktorska, University Twente, Enschede, 1993.
- [BW84] C. I. Byrnes i J. C. Willems, Adaptive stabilization of multivariable linear systems. W: *Proc. IEEE Conf. Decision Control*, vol. 2, strony 1574–1577, 1984.

- [BW88] D. S. Bayard i J. T. Wen, New class of control laws for robotic manipulators: Part 2 — adaptive case. *Int. J. Control*, **47**(5):1387–1406, 1988.
- [GS88] A. Gosiewski i W. Szykiewicz, Zastosowanie algorytmu ruchu ślizgowego do układu sterowania manipulatora robota. W: *Materiały 2 Krajowej Konferencji Robotyki*, vol. **1**, strony 141–150, Wrocław, 1988.
- [Ilc93] A. Ilchmann, *Non-Identifier-Based High-Gain Adaptive Control*. Springer-Verlag, London, 1993.
- [IT93] A. Ilchmann i S. Townley, Simple adaptive stabilization of high-gain stabilizable systems. *Systems & Contr. Lett.*, **20**:189–198, 1993.
- [Koz98] K. Kozłowski, *Modelling and Identification in Robotics*. Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [Mar84] I. Mareels, A simple selftuning controller for stably invertible systems. *Systems & Contr. Lett.*, **4**:5–16, 1984.
- [Mår85] B. Mårtensson, The order of any stabilizing regulator is sufficient a priori information for adaptive stabilization. *Systems & Contr. Lett.*, **6**:87–91, 1985.
- [Maz96a] A. Mazur, *Algorytmy sterowania robotów oparte na zasadzie uniwersalnego adaptacyjnego układu sterowania*. Rozprawa doktorska, Instytut Cybernetyki Technicznej, Politechnika Wrocławska, 1996.
- [Maz96b] A. Mazur, Uniwersalny adaptacyjny λ -śledzący układ sterowania robota. W: *Materiały 5 Krajowej Konferencji Robotyki*, strony 124–131, Świeradów Zdrój, 1996.
- [Maz98] A. Mazur, Universal adaptive tracking controller for nonholonomic multibody wheeled mobile robots. W: *Proc. MMAR Symposium*, vol. **3**, strony 937–944, Międzyzdroje, 1998.
- [MG88] R. H. Middleton i G. C. Goodwin, Adaptive computed torque control for rigid link manipulations. *Systems & Contr. Lett.*, **10**:9–16, 1988.
- [MH97] A. Mazur i R. Hossa, Universal adaptive λ -tracking controller for wheeled mobile robots. W: *Proc. IFAC SyRoCo Conference*, vol. **1**, strony 33–37, Nantes, 1997.
- [Mor83] A. S. Morse, Recent problems in parameter adaptive control. W: I. D. Landau, (red.), *Outils et Modèles Mathématiques pour l'Automatique, l'Analyse de Systèmes et le Traitement du Signal*, strony 733–740. Editions du CNRS3, Paris, 1983.
- [MP96] I. Mareels i J. W. Polderman, *Adaptive Systems: An Introduction*. Birkhäuser, Boston, 1996.

- [Nus83] R. D. Nussbaum, Some remarks on a conjecture in parameter adaptive control. *Systems & Contr. Lett.*, **3**:243–246, 1983.
- [PW93] D. Praetzel-Wolters, Adaptive control without parameter identification. W: *Proc. Int. Symp. MTNS*, strony 311–337, 1993.
- [QD91] Z. Qu i J. Dorsey, Robust tracking control of robots by a linear feedback law. *IEEE Trans. Robotics Automat.*, **36**(9):1081–1084, 1991.
- [Sch91] S. Schmid, *Adaptive Synchronization of Interconnected Systems*. Rozprawa doktorska, University of Kaiserslautern, 1991.
- [SH90] N. Sadegh i R. Horowitz, Stability and robustness analysis of a class of adaptive controllers for robotic manipulators. *Int. J. Robotics Research*, **9**(3):74–94, 1990.
- [SL87] J. J. E. Slotine i W. Li, On the adaptive control of robot manipulators. *Int. J. Robotics Research*, **6**(3):49–59, 1987.
- [SL88] J. J. E. Slotine i W. Li, Adaptive manipulator control: A case study. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, **33**(11):995–1003, 1988.
- [SL89] J. J. E. Slotine i W. Li, Composite adaptive control of robot manipulators. *Automatica*, **25**(4):509–529, 1989.
- [SO90] M. Spong i R. Ortega, On adaptive inverse dynamics control of rigid robots. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, **35**(1):92–95, 1990.
- [Spo98] M. W. Spong, On feedback linearization of robot manipulators and riemannian curvature. W: J. Bailleul, S. S. Sastry i H. J. Sussmann, (red.), *Essays on Mathematical Robotics*, strony 185–202. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [SV97] M. Spong i M. Vidyasagar, *Dynamika i sterowanie robotów*. WNT, Warszawa, 1997.
- [T⁺91] T. J. Tarn et al., Effect of motor dynamics on nonlinear feedback robot arm control. *IEEE Trans. Robotics Automat.*, **7**(1):114–122, 1991.
- [TP94] A. Teel i L. Praly, Global stabilizability and observability imply semi-global stabilizability by output-feedback. *Systems & Contr. Lett.*, **22**(5):313–325, 1994.
- [WB88] J. T. Wen i D. S. Bayard, New class of control laws for robotic manipulators: Part 1 — non-adaptive case. *Int. J. Control*, **47**(5):1361–1386, 1988.

Rozdział 7

Algorytmy sterowania manipulatorów o elastycznych przegubach

W manipulatorze mogą wystąpić dwa rodzaje sił elastyczności powodujących powstanie niedokładności śledzenia trajektorii: elastyczność ramion i elastyczność przegubów. Właściwe rozpoznanie typu elastyczności i jej uwzględnienie w modelu dynamiki umożliwia istotną poprawę jakości sterowania.

Elastyczność ramion pojawia się w przypadku manipulatorów o ramionach zbudowanych z lekkich materiałów oraz wtedy, gdy ramiona manipulatora są znacznej długości. Taka konstrukcja manipulatora powoduje uginanie się ramion podczas pracy i powstanie niedokładności pozycjonowania. Uwzględnienie elastyczności ramion prowadzi do skomplikowanych modeli dynamiki opisanych równaniami różniczkowymi cząstkowymi. Oprócz elastyczności ramion może wystąpić elastyczność przegubów manipulatora, zwłaszcza w przypadku manipulatorów o napędzie niebezpośrednim. Skutkiem elastyczności przegubów jest pojawienie się różnicy między położeniem układu napędowego (wału silnika) a położeniem napędzanego przegubu. Za błędy powstające przy przekazywaniu napędu odpowiadają takie zjawiska fizyczne jak tarcie, poślizg i luzy w przekładniach, efekty histerezy oraz siły sprężystości. Model manipulatora o elastycznych przegubach jest wprawdzie skończenie wymiarowy*, ale znacznie bardziej złożony od modelu manipulatora sztywnego. W dalszych rozważaniach ograniczymy się do sytuacji,

*W przeciwieństwie do modelu manipulatora z elastycznymi ramionami.

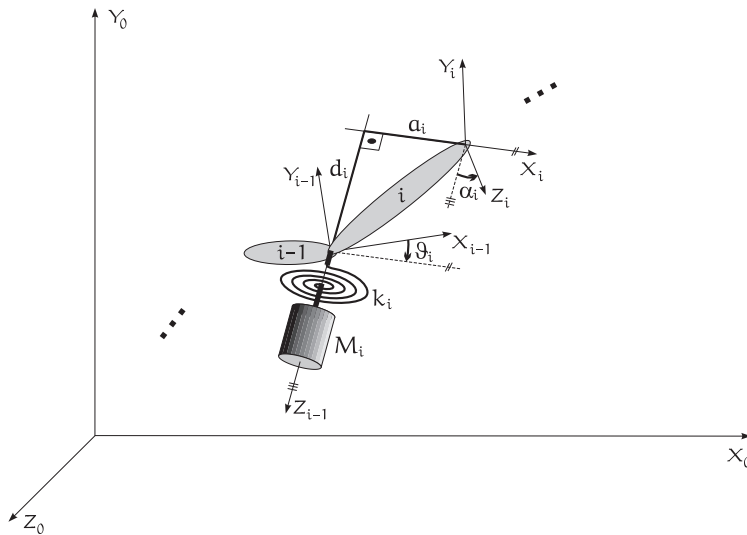
w których przyczyną elastyczności przegubów są wyłącznie siły sprężystości. Przy ograniczeniu uwagi do małych, sprężystych deformacji przegubów, uzasadnione jest założenie, że siły sprężystości zależą od tych deformacji w sposób liniowy.

W porównaniu ze sztywnym manipulatorem, model manipulatora o elastycznych przegubach wymaga do kompletnego opisu stanu manipulatora dwukrotnie większej liczby współrzędnych uogólnionych. W modelu manipulatora z elastycznymi przegubami liczba wejść sterujących jest mniejsza niż liczba mechanicznych stopni swobody. Z tych powodów, zadanie sterowania staje się znacznie trudniejsze niż zadanie sterowania dla manipulatorów sztywnych. W szczególności, implementacja algorytmu sterowania opartego na statycznym sprzężeniu zwrotnym wymaga instalacji sensorów mierzących zarówno położenie wałów silników, jak i położenie przegubów.

Niniejszy rozdział przedstawia wybrane algorytmy sterowania zapewniające śledzenie trajektorii przegubowej manipulatorów o sztywnych ramionach i elastycznych przegubach. Spośród algorytmów sterowania manipulatorów o elastycznych przegubach omówimy wyłącznie algorytmy nieadaptacyjne, a ich działanie zilustrujemy na przykładach.

7.1 Dynamika manipulatora o elastycznych przegubach

Podobnie jak w przypadku manipulatora sztywnego, równania dynamiki manipulatora o elastycznych przegubach uzyskamy przy pomocy formalizmu Lagrange'a przedstawionego w podrozdziale 2.2. Założmy, że manipulator posiada n stopni swobody i że z każdym stopniem swobody jest związany układ napędowy. W takiej sytuacji, do opisu dynamiki manipulatora będą potrzebne współrzędne uogólnione $\mathbf{q}^1 = (q_1^1, \dots, q_n^1)^T \in \mathbb{R}^n$ określające położenia przegubów, oraz $\mathbf{q}^2 = (q_1^2, \dots, q_n^2)^T \in \mathbb{R}^n$, które definiują położenia wałów silników napędzających. Odpowiednie prędkości uogólnione oznaczymy symbolami $\dot{\mathbf{q}}^1, \dot{\mathbf{q}}^2 \in \mathbb{R}^n$. Elastyczność transmisji napędu od układu napędowego do przegubu będziemy modelować przy pomocy liniowej sprężyny poddanej siłom skręcającym. Przyjmijmy, że układem napędowym ramienia nr i manipulatora jest silnik elektryczny, którego stojan stanowi część $(i-1)$ -szego ramienia, a wirnik obraca się razem z i -tym ogniwem wokół osi Z_{i-1} układu współrzędnych $X_{i-1}Y_{i-1}Z_{i-1}$ (zobacz rysunek 7.1).



Rysunek 7.1 Schemat połączenia elastycznego pomiędzy dwoma ramionami manipulatora o elastycznych przegubach.

Rozważania analogiczne do tych, które przeprowadziliśmy w podrozdziale 5.2, pozwalają uzyskać następujące wyrażenia na energię kinetyczną i -tego ramienia i i -tego układu napędowego

$$\begin{aligned} K_{L_i}(\mathbf{q}^{1i}, \dot{\mathbf{q}}^{1i}) &= \frac{1}{2} \text{tr} \left(\dot{\mathbf{A}}_0^i(\mathbf{q}^{1i}) \mathbf{J}_{L_i} \dot{\mathbf{A}}_0^{iT}(\mathbf{q}^{1i}) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \text{tr} \left(\frac{\partial \mathbf{A}_0^i(\mathbf{q}^{1i})}{\partial q_j^1} \mathbf{J}_{L_i} \left(\frac{\partial \mathbf{A}_0^i(\mathbf{q}^{1i})}{\partial q_k^1} \right)^T \right) \dot{q}_j^1 \dot{q}_k^1, \end{aligned} \quad (7.1)$$

$$\begin{aligned} K_{M_i}(\mathbf{q}^{1i-1}, q_i^2, \mathbf{q}^{1i-2}, \dot{q}_i^2) &= \frac{1}{2} \text{tr} \left(\dot{\mathbf{A}}_0^{i-1}(\mathbf{q}^{1i-1}) \hat{\mathbf{J}}_{M_i} (\dot{\mathbf{A}}_0^{i-1})^T(\mathbf{q}^{1i-1}) \right) + \\ &+ \text{tr} \left(\dot{\mathbf{A}}_0^{i-1}(\mathbf{q}^{1i-1}) \hat{\mathbf{J}}_{M_i} \begin{bmatrix} -[\mathbf{e}_3] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} (\mathbf{A}_0^{i-1})^T(\mathbf{q}^{1i-1}) \right) \dot{q}_i^2 + \frac{1}{2} I_i (\dot{q}_i^2)^2. \end{aligned} \quad (7.2)$$

W powyższych wzorach $\mathbf{J}_{L_i}$ oznacza macierz inercji i -tego ramienia, $\mathbf{J}_{M_i}$, I_i są, odpowiednio, macierzą inercji i momentem bezwładności i -tego wirnika względem osi Z_{i-1} układu $X_{i-1}Y_{i-1}Z_{i-1}$, $\hat{\mathbf{J}}_{M_i} = \mathbf{Rot}(Z, q_i^2) \mathbf{J}_{M_i} \mathbf{Rot}^T(Z, q_i^2)$, natomiast $\mathbf{A}_0^i$ oznacza macierz transformacji układu podstawowego $X_0Y_0Z_0$ w układ $X_iY_iZ_i$, $\mathbf{q}^{1i} = (q_1^1, \dots, q_i^1)^T$.

Oznaczmy pierwszy i drugi składnik prawej strony wyrażenia (7.2) jako K_{M_i1} i K_{M_i2} . Przy założeniu, że wirnik i -tego silnika ma postać walca[†]

[†]Ogólniej — wykazuje symetrię obrotową względem osi Z .

obracającego się wokół osi Z_{i-1} układu $X_{i-1}Y_{i-1}Z_{i-1}$, którego środek masy pokrywa się z początkiem tego układu, nietrudno pokazać, że macierz inercji J_{M_i} jest diagonalna i ma postać

$$J_{M_i} = \text{diag}\{\alpha_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i\}.$$

Dla macierzy J_{M_i} zachodzi związek $\hat{J}_{M_i} = J_{M_i}$, a zatem

$$\begin{aligned} K_{M_i 1} &= \frac{1}{2} \text{tr} \left(\dot{\mathbf{A}}_0^{i-1}(\mathbf{q}^{1:i-1}) J_{M_i} (\dot{\mathbf{A}}_0^{i-1})^T (\mathbf{q}^{1:i-1}) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \text{tr} \left(\frac{\partial \mathbf{A}_0^{i-1}(\mathbf{q}^{1:i-1})}{\partial q_j^1} J_{M_i} \left(\frac{\partial \mathbf{A}_0^{i-1}(\mathbf{q}^{1:i-1})}{\partial q_k^1} \right)^T \right) \dot{q}_j^1 \dot{q}_k^1. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Podobnie

$$\begin{aligned} K_{M_i 2} &= \text{tr} \left(\dot{\mathbf{A}}_0^{i-1}(\mathbf{q}^{1:i-1}) J_{M_i} \begin{bmatrix} -[\mathbf{e}_3] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} (\mathbf{A}_0^{i-1})^T (\mathbf{q}^{1:i-1}) \right) \dot{q}_i^2 \\ &= \sum_{j=1}^n \text{tr} \left(\frac{\partial \mathbf{A}_0^{i-1}(\mathbf{q}^{1:i-1})}{\partial q_j^1} \begin{bmatrix} -\alpha_i [\mathbf{e}_3] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} (\mathbf{A}_0^{i-1})^T (\mathbf{q}^{1:i-1}) \right) \dot{q}_j^1 \dot{q}_i^1. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Całkowita energia kinetyczna manipulatora z układami napędowymi jest sumą energii (7.1) i (7.2) i ma postać formy kwadratowej

$$K(\mathbf{q}^1, \mathbf{q}^2, \dot{\mathbf{q}}^1, \dot{\mathbf{q}}^2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}^1 \\ \dot{\mathbf{q}}^2 \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{q}^1) & \mathbf{S}(\mathbf{q}^{1:n-1}) \\ \mathbf{S}^T(\mathbf{q}^{1:n-1}) & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}^1 \\ \dot{\mathbf{q}}^2 \end{pmatrix}. \quad (7.5)$$

Elementy macierzy $\mathbf{Q}(\mathbf{q}^1)$ są zdefiniowane przez wzory (7.1), (7.3) w następujący sposób (porównaj z (5.13))

$$\begin{aligned} Q_{jk}(\mathbf{q}^1) &= \sum_{i=1}^{n-1} \text{tr} \left(\frac{\partial \mathbf{A}_0^i(\mathbf{q}^{1:i})}{\partial q_j^1} (J_{L_i} + J_{M_{i+1}}) \left(\frac{\partial \mathbf{A}_0^i(\mathbf{q}^{1:i})}{\partial q_k^1} \right)^T \right) + \\ &\quad + \text{tr} \left(\frac{\partial \mathbf{A}_0^n(\mathbf{q}^1)}{\partial q_j^1} J_{L_n} \left(\frac{\partial \mathbf{A}_0^n(\mathbf{q}^1)}{\partial q_k^1} \right)^T \right). \end{aligned} \quad (7.6)$$

Do obliczenia elementów macierzy $\mathbf{S}(\mathbf{q}^{1:n-1})$ wykorzystamy wyrażenie (7.4), z którego otrzymujemy

$$S_{jk}(\mathbf{q}^{1:n-1}) = \text{tr} \left(\frac{\partial \mathbf{A}_0^{k-1}(\mathbf{q}^{1:k-1})}{\partial q_j^1} \begin{bmatrix} -\alpha_i [\mathbf{e}_3] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} (\mathbf{A}_0^{k-1})^T (\mathbf{q}^{1:k-1}) \right). \quad (7.7)$$

Co więcej, ponieważ

$$\frac{\partial \mathbf{A}_0^{k-1}(\mathbf{q}^{1k-1})}{\partial \mathbf{q}_j^1} = \mathbf{0} \quad \text{dla } j = k, k+1, \dots, n,$$

macierz $\mathbf{S}(\mathbf{q}^{1n-1})$ jest górną-trójkątną, tzn.

$$\mathbf{S}(\mathbf{q}^{1n-1}) = \begin{bmatrix} 0 & S_{12}(q_1^1) & S_{13}(q_1^1, q_2^1) & \cdots & S_{1n}(q_1^1, \dots, q_{n-1}^1) \\ 0 & 0 & S_{23}(q_2^1) & \cdots & S_{2n}(q_2^1, \dots, q_{n-1}^1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & S_{n-1n}(q_{n-1}^1) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.8)$$

Macierz $\mathbf{I}$ występująca w formie kwadratowej (7.5) składa się z momentów bezwładności wirników,

$$\mathbf{I} = \text{diag}\{I_1, I_2, \dots, I_n\}.$$

Energia potencjalna manipulatora o elastycznych przegubach składa się z energii potencjalnej ramion wraz z układami napędowymi oraz z energii potencjalnej elastyczności przegubów. Zakładając, że energia elastyczności

$$V_E(\mathbf{q}^1, \mathbf{q}^2) = \frac{1}{2}(\mathbf{q}^1 - \mathbf{q}^2)^T \mathbf{K}(\mathbf{q}^1 - \mathbf{q}^2), \quad (7.9)$$

gdzie $\mathbf{K} = \text{diag}\{k_1, \dots, k_n\}$ jest macierzą współczynników elastyczności przegubów, i korzystając z zależności (5.15), zapiszemy energię potencjalną manipulatora w postaci

$$V(\mathbf{q}^1, \mathbf{q}^2) = - \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{g}^T \mathbf{A}_0^i(\mathbf{q}^{1i}) \mathbf{R}_i + V_E(\mathbf{q}^1, \mathbf{q}^2). \quad (7.10)$$

Z równań Eulera-Lagrange'a dla lagranżianu

$$L(\mathbf{q}^1, \mathbf{q}^2, \dot{\mathbf{q}}^1, \dot{\mathbf{q}}^2) = K(\mathbf{q}^1, \mathbf{q}^2, \dot{\mathbf{q}}^1, \dot{\mathbf{q}}^2) - V(\mathbf{q}^1, \mathbf{q}^2),$$

gdzie K jest dane przez (7.5), a V przez (7.10) otrzymujemy *równania dynamiki manipulatora o elastycznych przegubach*

$$\begin{cases} \mathbf{Q}(\mathbf{q}^1) \ddot{\mathbf{q}}^1 + \mathbf{S}(\mathbf{q}^{1n-1}) \ddot{\mathbf{q}}^2 + \dot{\mathbf{S}}(\mathbf{q}^{1n-1}) \dot{\mathbf{q}}^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}^1} (\dot{\mathbf{q}}^1 \mathbf{S}(\mathbf{q}^{1n-1}) \dot{\mathbf{q}}^2) + \\ \quad + \mathbf{C}(\mathbf{q}^1, \dot{\mathbf{q}}^1) \dot{\mathbf{q}}^1 + \mathbf{D}(\mathbf{q}^1) + \mathbf{K}(\mathbf{q}^1 - \mathbf{q}^2) = \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \ddot{\mathbf{q}}^2 + \mathbf{S}^T(\mathbf{q}^{1n-1}) \ddot{\mathbf{q}}^1 + \dot{\mathbf{S}}^T(\mathbf{q}^{1n-1}) \dot{\mathbf{q}}^1 - \mathbf{K}(\mathbf{q}^1 - \mathbf{q}^2) = \mathbf{u}. \end{cases} \quad (7.11)$$

W drugim z równań układu (7.11) symbolem $\mathbf{u}$ oznaczyliśmy siły (momenty) sterujące wywierane przez układy napędowe. Model (7.11) nosi nazwę pełnego modelu dynamiki manipulatora o elastycznych przegubach. Jeżeli przyjąć, że macierz $\mathbf{S}(\mathbf{q}^{1n-1})$ formy energii kinetycznej (7.5) jest stała, model (7.11) upraszcza się do postaci

$$\begin{cases} \mathbf{Q}(\mathbf{q}^1) \ddot{\mathbf{q}}^1 + \mathbf{S} \ddot{\mathbf{q}}^2 + \mathbf{C}(\mathbf{q}^1, \dot{\mathbf{q}}^1) \dot{\mathbf{q}}^1 + \mathbf{D}(\mathbf{q}^1) + \mathbf{K}(\mathbf{q}^1 - \mathbf{q}^2) = \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \ddot{\mathbf{q}}^2 + \mathbf{S}^T \ddot{\mathbf{q}}^1 - \mathbf{K}(\mathbf{q}^1 - \mathbf{q}^2) = \mathbf{u}, \end{cases} \quad (7.12)$$

która posiada własność linearyzowalności przez dynamiczne sprzężenie zwrotne. Najczęściej spotykany w literaturze jest model (7.12) z macierzą $\mathbf{S} = \mathbf{0}$, nazywany zredukowanym modelem dynamiki manipulatora o elastycznych przegubach. Model zredukowany

$$\begin{cases} \mathbf{Q}(\mathbf{q}^1) \ddot{\mathbf{q}}^1 + \mathbf{B}(\mathbf{q}^1, \dot{\mathbf{q}}^1) + \mathbf{K}(\mathbf{q}^1 - \mathbf{q}^2) = \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \ddot{\mathbf{q}}^2 + \mathbf{K}(\mathbf{q}^2 - \mathbf{q}^1) = \mathbf{u}, \end{cases} \quad (7.13)$$

w którym $\mathbf{B}(\mathbf{q}^1, \dot{\mathbf{q}}^1) = \mathbf{C}(\mathbf{q}^1, \dot{\mathbf{q}}^1) \dot{\mathbf{q}}^1 + \mathbf{D}(\mathbf{q}^1)$, będziemy traktować w dalszych rozważaniach jako obiekt sterowania, dla którego przedstawimy zestaw algorytmów sterowania.

Przykład 7.1.1 (Manipulator *EDDA*)

Do badania własności prezentowanych algorytmów sterowania wykorzystamy model manipulatora *EDDA* z uwzględnieniem oddziaływań elastycznych w przegubach. Macierzowo-wektorowe równania dynamiki tego manipulatora mają postać (7.13), a elementy modelu dynamiki są dane jako[‡]

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}^1) = \begin{bmatrix} 2.833 + 0.462 \cos q_2^1 & 0.24 + 0.231 \cos q_2^1 \\ 0.24 + 0.231 \cos q_2^1 & 0.2325 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}^1, \dot{\mathbf{q}}^1) = \begin{bmatrix} -0.231 \dot{q}_2^1 \sin q_2^1 & -0.231 (\dot{q}_1^1 + \dot{q}_2^1) \sin q_2^1 \\ 0.231 \dot{q}_1^1 \sin q_2^1 & 0 \end{bmatrix},$$

[‡]Macierz $\mathbf{Q}(\mathbf{q}^1)$ jest macierzą bezwładności manipulatora bez uwzględnienia bezwładności wirników. Macierz $\mathbf{I}$ opisuje bezwładność samych wirników. Zauważmy, że suma obu macierzy daje macierz bezwładności $\mathbf{Q}(\mathbf{q})$ manipulatora sztywnego opisaną wzorem (5.21).

$$\mathbf{D}(\mathbf{q}^1) = \begin{pmatrix} 93.2 \cos q_1^1 + 7.55 \cos (q_1^1 + q_2^1) \\ 7.55 \cos (q_1^1 + q_2^1) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0.267 & 0 \\ 0 & 7.5 \times 10^{-3} \end{bmatrix}.$$

Wektor $\mathbf{q}^1 = (q_1^1, q_2^1)^T \in \mathbb{R}^2$ opisuje położenia ramion manipulatora *EDDA*, zaś $\mathbf{q}^2 = (q_1^2, q_2^2)^T \in \mathbb{R}^2$ oznacza położenia silników napędzających poszczególne ogniwa manipulatora. ■

7.2 Algorytmy sterowania

Spośród algorytmów zapewniających śledzenie trajektorii w przypadku pełnej znajomości modelu manipulatora przedstawimy trzy algorytmy: algorytm linearyzacji za pomocą statycznego sprzężenia zwrotnego, algorytm całkowania wstecznego oraz algorytm Ortegi-Lorii.

7.2.1 Algorytm linearyzacji statycznej

Dla modelu manipulatora o elastycznych przegubach (7.13) zdefiniujemy współrzędne stanu

$$\mathbf{x}^1 = \mathbf{q}^1, \quad \mathbf{x}^2 = \dot{\mathbf{q}}^1, \quad \mathbf{x}^3 = \mathbf{q}^2, \quad \mathbf{x}^4 = \dot{\mathbf{q}}^2.$$

Równania dynamiki we współrzędnych przyjmują postać

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}^1 = \mathbf{x}^2 \\ \dot{\mathbf{x}}^2 = -\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{x}^1) \mathbf{B}(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) + \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{x}^1) \mathbf{K}(\mathbf{x}^3 - \mathbf{x}^1) \\ \dot{\mathbf{x}}^3 = \mathbf{x}^4 \\ \dot{\mathbf{x}}^4 = -\mathbf{I}^{-1} \mathbf{K}(\mathbf{x}^3 - \mathbf{x}^1) + \mathbf{I}^{-1} \mathbf{u}. \end{cases} \quad (7.14)$$

Przy oznaczeniach

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) = -\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{x}^1) \mathbf{B}(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) - \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{x}^1) \mathbf{K} \mathbf{x}^1,$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^3) = -\mathbf{I}^{-1} \mathbf{K}(\mathbf{x}^3 - \mathbf{x}^1),$$

układ równań (7.14) zapiszemy jako

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}^1 = \mathbf{x}^2 \\ \dot{\mathbf{x}}^2 = \mathbf{F}(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) + \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{x}^1) \mathbf{K} \mathbf{x}^3 \\ \dot{\mathbf{x}}^3 = \mathbf{x}^4 \\ \dot{\mathbf{x}}^4 = \mathbf{G}(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^3) + \mathbf{I}^{-1} \mathbf{u}. \end{cases}$$

Zastosujemy teraz transformację współrzędnych stanu

$$\boldsymbol{\xi} = (\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)^T = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3, \mathbf{x}^4),$$

taką że

$$\begin{cases} \xi^1 = \mathbf{x}^1 \\ \xi^2 = \mathbf{x}^2 \\ \xi^3 = \mathbf{F}(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) + \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{x}^1) \mathbf{K} \mathbf{x}^3 \\ \xi^4 = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2)}{\partial \mathbf{x}^1} \mathbf{x}^2 + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2)}{\partial \mathbf{x}^2} (\mathbf{F}(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) + \\ + \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{x}^1) \mathbf{K} \mathbf{x}^3) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^1} (\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{x}^1) \mathbf{K} \mathbf{x}^3) \mathbf{x}^2 + \\ + \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{x}^1) \mathbf{K} \mathbf{x}^4 = \mathbf{H}_1(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3) + \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{x}^1) \mathbf{K} \mathbf{x}^4. \end{cases}$$

Ze względu na nieosobliwość macierzy $\mathbf{Q}(\mathbf{x}^1)$ oraz $\mathbf{K}$, $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$ jest globalnym dyfeomorfizmem przestrzeni stanu. Ostatecznie, równania dynamiki manipulatora w nowych współrzędnych zapiszemy w następującej formie

$$\begin{cases} \dot{\xi}^1 = \xi^2 \\ \dot{\xi}^2 = \xi^3 \\ \dot{\xi}^3 = \xi^4 \\ \dot{\xi}^4 = \mathbf{H}_2(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3, \mathbf{x}^4) + \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{x}^1) \mathbf{K} \mathbf{I}^{-1} \mathbf{u}, \end{cases} \quad (7.15)$$

przy oznaczeniu

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_2(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3, \mathbf{x}^4) = & \frac{\partial \mathbf{H}_1(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3)}{\partial \mathbf{x}^1} \mathbf{x}^2 + \frac{\partial \mathbf{H}_1(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3)}{\partial \mathbf{x}^2} (\mathbf{F}(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) + \\ & + \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{x}^1) \mathbf{K} \mathbf{x}^3) + \frac{\partial \mathbf{H}_1(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3)}{\partial \mathbf{x}^3} \mathbf{x}^4 + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^1} (\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{x}^1) \mathbf{K} \mathbf{x}^4) \mathbf{x}^2. \end{aligned}$$

Widać, że przy pomocy dyfeomorfizmu $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$ dynamika układu została częściowo zlinearyzowana. Aby uzyskać całkowitą linearyzację, niezbędne jest

zastosowanie statycznego sprzężenia zwrotnego

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x})\mathbf{v}, \quad (7.16)$$

gdzie $\mathbf{v}$ oznacza nowe sterowanie układu, zaś

$$\begin{cases} \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) = -\mathbf{IK}^{-1}\mathbf{Q}(\mathbf{x}^1) \mathbf{H}_2(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3, \mathbf{x}^4) \\ \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}) = \mathbf{IK}^{-1}\mathbf{Q}(\mathbf{x}^1). \end{cases} \quad (7.17)$$

Nietrudno sprawdzić, że sprzężenie zwrotne (7.16), (7.17)

$$\mathbf{u} = -\mathbf{IK}^{-1}\mathbf{Q}(\mathbf{x}^1) \mathbf{H}_2(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3, \mathbf{x}^4) + \mathbf{IK}^{-1}\mathbf{Q}(\mathbf{x}^1) \mathbf{v} \quad (7.18)$$

przekształca układ (7.15) do postaci liniowej

$$\begin{cases} \dot{\xi}^1 = \xi^2 \\ \dot{\xi}^2 = \xi^3 \\ \dot{\xi}^3 = \xi^4 \\ \dot{\xi}^4 = \mathbf{v}. \end{cases} \quad (7.19)$$

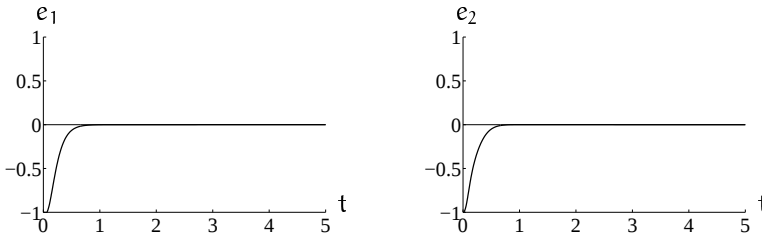
Po przeprowadzeniu linearyzacji modelu dynamiki manipulatora zadanie śledzenia zadanej trajektorii sprowadza się do śledzenia zadanej trajektorii przegubowej $\xi_d^1(t)$ w układzie liniowym (7.19). Sterowanie $\mathbf{v}$, które zastosowane do układu (7.19) zapewni śledzenie zadanej trajektorii $\xi_d^1(t)$, tzn. doprowadzi do tego, że trajektoria przegubowa $\xi^1(t)$ będzie dążyć asymptotycznie do $\xi_d^1(t)$, uzyskujemy metodami liniowej teorii regulacji. W tym celu założymy, że

$$\mathbf{v} = \xi_d^{1(4)} - \mathbf{R}_3\mathbf{e}^{(3)} - \mathbf{R}_2\mathbf{e}^{(2)} - \mathbf{R}_1\mathbf{e}^{(1)} - \mathbf{R}_0\mathbf{e}, \quad (7.20)$$

gdzie $\mathbf{e}(t) = \xi^1(t) - \xi_d^1(t)$ oznacza błąd śledzenia trajektorii wyrażony we współrzędnych ξ . Błąd śledzenia w układzie (7.19) ze sterowaniem (7.20) jest opisany równaniem

$$\mathbf{e}^{(4)} + \mathbf{R}_3\mathbf{e}^{(3)} + \mathbf{R}_2\mathbf{e}^{(2)} + \mathbf{R}_1\mathbf{e}^{(1)} + \mathbf{R}_0\mathbf{e} = \mathbf{0}, \quad (7.21)$$

zaś warunek śledzenia $\mathbf{e}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ przy $t \rightarrow +\infty$ można zapewnić poprzez taki dobór macierzy wzmocnień $\mathbf{R}_3, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_0$, aby układ (7.21) był eksponencjalnie stabilny. Właściwy dobór tych macierzy może zapewnić, oprócz eksponencjalnej stabilności, także pożądany przebieg błędu śledzenia (tłumienie krytyczne, minimalne przeregulowanie, itp.).



Rysunek 7.2 Przebieg błędów śledzenia przy zastosowaniu algorytmu linearyzacji statycznej.

Przykład 7.2.1 (Manipulator *EDDA*)

Działanie algorytmu linearyzacji statycznej zilustrujemy na przykładzie modelu manipulatora *EDDA* opisanego w przykładzie 7.1.1. Do obliczeń przyjęliśmy, że współczynniki elastyczności przegubów są równe $k_1 = k_2 = 1000$, co pozwoliło zaobserwować efekty związane z obecnością sił elastyczności. Trajektoria przegubowa $\mathbf{q}_d^1(t)$ została zadana jako skok jednostkowy. Na rysunku 7.2 przedstawiono przykładowe przebiegi błędów śledzenia trajektorii dla parametrów układu sterowania równych odpowiednio $\mathbf{R}_0 = \text{diag}\{10\}$, $\mathbf{R}_1 = \text{diag}\{10\}$, $\mathbf{R}_2 = \text{diag}\{50\}$, $\mathbf{R}_3 = \text{diag}\{50\}$. Poprzez wybór różnych wartości parametrów $\mathbf{R}_i$ można kształtować charakter przebiegu błędów śledzenia trajektorii w poszczególnych przegubach. ■

7.2.2 Algorytm całkowania wstecznego

Rozważmy model manipulatora o elastycznych przegubach opisany równaniami (7.13). Zadaniem algorytmu sterowania jest zapewnienie śledzenia zadanej trajektorii przegubowej manipulatora. Zauważmy, że o ile zadana trajektoria przegubowa manipulatora ($\mathbf{q}_d^1(t)$) jest dowolna, to zadana trajektoria silników ($\mathbf{q}_d^2(t)$) wynika bezpośrednio z pierwszego równania (7.13)

$$\mathbf{q}_d^2 = \mathbf{q}_d^1 + \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{Q}(\mathbf{q}_d^1) \ddot{\mathbf{q}}_d^1 + \mathbf{B}(\mathbf{q}_d^1, \dot{\mathbf{q}}_d^1)). \quad (7.22)$$

Zdefiniujmy współrzędne

$$\mathbf{x}^1 = \mathbf{q}^1, \quad \mathbf{x}^2 = \dot{\mathbf{q}}^1, \quad \mathbf{x}^3 = \mathbf{q}^2, \quad \mathbf{x}^4 = \dot{\mathbf{q}}^2,$$

w taki sposób, że

$$\mathbf{x}_d^1 = \mathbf{q}_d^1, \quad \mathbf{x}_d^2 = \dot{\mathbf{q}}_d^1, \quad \mathbf{x}_d^3 = \mathbf{q}_d^2, \quad \mathbf{x}_d^4 = \dot{\mathbf{q}}_d^2,$$

i przepiszmy równania (7.13) jako

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}^1 = \mathbf{x}^2 \\ \dot{\mathbf{x}}^2 = \mathbf{F}_1(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) + \mathbf{G}_1(\mathbf{x}^1) \mathbf{x}^3 \\ \dot{\mathbf{x}}^3 = \mathbf{x}^4 \\ \dot{\mathbf{x}}^4 = \mathbf{F}_2(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^3) + \mathbf{G}_2 \mathbf{u}, \end{cases} \quad (7.23)$$

gdzie $\mathbf{F}_1(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) = -\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{x}^1) \mathbf{B}(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) - \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{x}^1) \mathbf{K} \mathbf{x}^1$, $\mathbf{G}_1(\mathbf{x}^1) = \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{x}^1) \mathbf{K}$, $\mathbf{F}_2(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^3) = -\mathbf{I}^{-1} \mathbf{K} (\mathbf{x}^3 - \mathbf{x}^1)$, $\mathbf{G}_2 = \mathbf{I}^{-1}$. Równania standardowe (7.23) przedstawimy w postaci zależnej od błędów $\mathbf{e}^i = \mathbf{x}^i - \mathbf{x}_d^i$, $i = 1, \dots, 4$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{e}}^1 = \mathbf{e}^2 \\ \dot{\mathbf{e}}^2 = \mathbf{F}_{12}(\mathbf{t}, \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2) + \mathbf{G}_1(\mathbf{t}, \mathbf{e}^1) \mathbf{e}^3 \\ \dot{\mathbf{e}}^3 = \mathbf{e}^4 \\ \dot{\mathbf{e}}^4 = \mathbf{F}_{22}(\mathbf{t}, \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^3) + \mathbf{G}_2 \mathbf{u}, \end{cases} \quad (7.24)$$

przy czym $\mathbf{F}_{12}(\mathbf{t}, \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2) = \mathbf{F}_1(\mathbf{t}, \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2) + \mathbf{G}_1(\mathbf{t}, \mathbf{e}^1) \mathbf{x}_d^3 - \dot{\mathbf{x}}_d^2$, $\mathbf{G}_1(\mathbf{t}, \mathbf{e}^1) = \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{t}, \mathbf{e}^1) \mathbf{K}$, $\mathbf{F}_{22}(\mathbf{t}, \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^3) = \mathbf{F}_2(\mathbf{t}, \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^3) - \dot{\mathbf{x}}_d^4$, $\mathbf{G}_2 = \mathbf{I}^{-1}$. Zauważmy, że równania (7.24) mają strukturę kaskadową, która pozwala na zastosowanie algorytmu sterowania typu *całkowania wstecznego**.

Rozpocznijmy od rozważenia równania pierwszego podsystemu, a mianowicie

$$\dot{\mathbf{e}}^1 = \mathbf{e}^2. \quad (7.25)$$

Powyższy układ jest układem liniowym, w którym $\mathbf{e}^2$ można potraktować jako sterowanie. Wybierzmy funkcję Lapunowa postaci

$$V_1(\mathbf{e}^1) = \frac{1}{2} \mathbf{e}^{1\top} \mathbf{e}^1. \quad (7.26)$$

Skoro zmienna $\mathbf{e}^2$ jest sterowaniem układu (7.25), zastosujmy sprzężenie zwrotne

$$\mathbf{e}^2 = -\mathbf{R}_0 \mathbf{e}^1, \quad (7.27)$$

z macierzą $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}_0^\top > 0$. Wówczas, pochodna funkcji Lapunowa wzdłuż trajektorii układu (7.25)

$$\dot{V}_1 = -\mathbf{e}^{1\top} \mathbf{R}_0 \mathbf{e}^1 = -W_1(\mathbf{e}^1) \leq 0. \quad (7.28)$$

*Termin ten proponujemy jako odpowiednik angielskiego zwrotu *integrator backstepping*.

Z teorii Lapunowa wynika, że wybór $\mathbf{e}^2$ w taki sposób, aby spełnione było równanie (7.27), gwarantuje zbieżność błędu śledzenia $\mathbf{e}^1(t)$ do $\mathbf{0}$. Łatwo można zauważyć, że błąd $\mathbf{e}^1$ dąży do $\mathbf{0}$ eksponencjalnie.

Następny krok całkowania wstecznego polega na rozważeniu drugiego, większego podsystemu układu (7.24), zawierającego dwa równania

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{e}}^1 = \mathbf{e}^2 \\ \dot{\mathbf{e}}^2 = \mathbf{F}_{12}(t, \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2) + \mathbf{G}_1(t, \mathbf{e}^1) \mathbf{e}^3. \end{cases} \quad (7.29)$$

W tym podsystemie rolę sterowania będzie spełniać zmienna $\mathbf{e}^3$. Dla układu (7.29) wybierzmy funkcję Lapunowa

$$V_2(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2) = V_1(\mathbf{e}^1) + \frac{1}{2}(\mathbf{e}^2 + \mathbf{R}_0 \mathbf{e}^1)^T (\mathbf{e}^2 + \mathbf{R}_0 \mathbf{e}^1), \quad (7.30)$$

której pochodna wzdłuż trajektorii układu (7.29) jest równa

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \dot{V}_1 + (\mathbf{e}^2 + \mathbf{R}_0 \mathbf{e}^1)^T (\dot{\mathbf{e}}^2 + \mathbf{R}_0 \dot{\mathbf{e}}^1) = \\ &= \dot{V}_1 + (\mathbf{e}^2 + \mathbf{R}_0 \mathbf{e}^1)^T (\mathbf{F}_{12}(t, \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2) + \mathbf{G}_1(t, \mathbf{e}^1) \mathbf{e}^3 + \mathbf{R}_0 \mathbf{e}^2). \end{aligned} \quad (7.31)$$

Zażądamy teraz, aby

$$\mathbf{F}_{12} + \mathbf{G}_1 \mathbf{e}^3 + \mathbf{R}_0 \mathbf{e}^2 = -\mathbf{R}_1 (\mathbf{e}^2 + \mathbf{R}_0 \mathbf{e}^1),$$

gdzie $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_1^T > \mathbf{0}$, skąd wyliczamy sterowanie

$$\mathbf{e}^3 = -\mathbf{G}_1^{-1} (\mathbf{F}_{12} + (\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_0) \mathbf{e}^2 + \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_0 \mathbf{e}^1) = -\mathbf{H}_3(t, \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2). \quad (7.32)$$

Widać, że dla tak wybranego sterowania funkcja Lapunowa ma pochodną równą

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= -W_1(\mathbf{e}^1) - (\mathbf{e}^2 + \mathbf{R}_0 \mathbf{e}^1)^T \mathbf{R}_1 (\mathbf{e}^2 + \mathbf{R}_0 \mathbf{e}^1) = \\ &= -W_2(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2) \leq 0. \end{aligned} \quad (7.33)$$

Na podstawie twierdzenia La Salle'a-Yoshizawy[†] można łatwo wywnioskować, że $\mathbf{e}^3 = -\mathbf{H}_3(t, \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2)$ zapewnia śledzenie trajektorii zadanych $\mathbf{x}_d^1, \mathbf{x}_d^2$ przez podsystem (7.29).

[†]Zobacz dodatek B.

W trzecim kroku algorytmu całkowania wstecznego rozważmy podsystem

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{e}}^1 = \mathbf{e}^2 \\ \dot{\mathbf{e}}^2 = \mathbf{F}_{12}(\mathbf{t}, \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2) + \mathbf{G}_1(\mathbf{t}, \mathbf{e}^1) \mathbf{e}^3 \\ \dot{\mathbf{e}}^3 = \mathbf{e}^4, \end{cases} \quad (7.34)$$

przy czym zmienna $\mathbf{e}^4$ spełnia rolę sterowania. Sterowanie stabilizujące dla układu (7.34) otrzymamy wybierając zależną od czasu funkcję Lapunowa

$$V_3(\mathbf{t}, \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3) = V_2(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2) + \frac{1}{2}(\mathbf{e}^3 + \mathbf{H}_3(\mathbf{t}, \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2))^T (\mathbf{e}^3 + \mathbf{H}_3(\mathbf{t}, \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2)). \quad (7.35)$$

Pochodna $\dot{V}_3$ funkcji Lapunowa wzdłuż trajektorii układu (7.34) jest równa

$$\dot{V}_3 = \dot{V}_2 + (\mathbf{e}^3 + \mathbf{H}_3(\mathbf{t}, \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2))^T (\mathbf{e}^4 + \dot{\mathbf{H}}_3(\mathbf{t}, \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2)). \quad (7.36)$$

Aby powyższa pochodna była niedodatnia, zastosujemy podstawienie

$$\mathbf{e}^4 + \dot{\mathbf{H}}_3(\mathbf{t}, \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2) = -\mathbf{R}_2 (\mathbf{e}^3 + \mathbf{H}_3(\mathbf{t}, \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2))$$

z macierzą $\mathbf{R}_2$ symetryczną i dodatnio określoną. Stąd

$$\mathbf{e}^4 = -\dot{\mathbf{H}}_3(\mathbf{t}, \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2) - \mathbf{R}_2 (\mathbf{e}^3 + \mathbf{H}_3(\mathbf{t}, \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2)) = -\mathbf{H}_4(\mathbf{t}, \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3). \quad (7.37)$$

Z definicji (7.37) oraz (7.36) mamy

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &= -W_2(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2) - (\mathbf{e}^3 + \mathbf{H}_3(\mathbf{t}, \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2))^T \mathbf{R}_2 \\ &\quad (\mathbf{e}^3 + \mathbf{H}_3(\mathbf{t}, \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2)) = -W_3(\mathbf{t}, \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3) \leq 0. \end{aligned} \quad (7.38)$$

Ostatecznie, rozważmy cały układ (7.24) ze sterowaniem $\mathbf{u}$. Analogicznie do poprzednich kroków, sterowanie $\mathbf{u}$ wyznaczymy poprzez analizę funkcji Lapunowa, w tym przypadku

$$\begin{aligned} V_4(\mathbf{t}, \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3, \mathbf{e}^4) &= V_3(\mathbf{t}, \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3) + \\ &\quad + \frac{1}{2}(\mathbf{e}^4 + \mathbf{H}_4(\mathbf{t}, \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3))^T (\mathbf{e}^4 + \mathbf{H}_4(\mathbf{t}, \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3)). \end{aligned} \quad (7.39)$$

Pochodna względem czasu funkcji $V_4(\mathbf{t}, \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3, \mathbf{e}^4)$ opisanej powyższym

równaniem, liczona wzdłuż trajektorii układu (7.24), jest równa

$$\dot{V}_4 = -W_3(t, \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3) + (\mathbf{e}^4 + \mathbf{H}_4(t, \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3))^T (\mathbf{F}_{22}(t, \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^3) + \mathbf{G}_2 \mathbf{u} + \dot{\mathbf{H}}_4(t, \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3)). \quad (7.40)$$

Aby była ona niedodatnia, wystarczy spełnienie zależności

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{22}(t, \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^3) + \mathbf{G}_2 \mathbf{u} + \dot{\mathbf{H}}_4(t, \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3) = \\ = -\mathbf{R}_3 (\mathbf{e}^4 + \mathbf{H}_4(t, \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3)) \end{aligned}$$

dla pewnej macierzy $\mathbf{R}_3$ symetrycznej i dodatnio określonej. Z ostatniej zależności otrzymujemy algorytm sterowania $\mathbf{u}$ zapewniający asymptotyczną stabilność układu (7.24), a mianowicie

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = -\mathbf{G}_2^{-1} (\mathbf{F}_{22}(t, \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^3) + \dot{\mathbf{H}}_4(t, \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3) + \\ + \mathbf{R}_3 (\mathbf{e}^4 + \mathbf{H}_4(t, \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3))). \end{aligned} \quad (7.41)$$

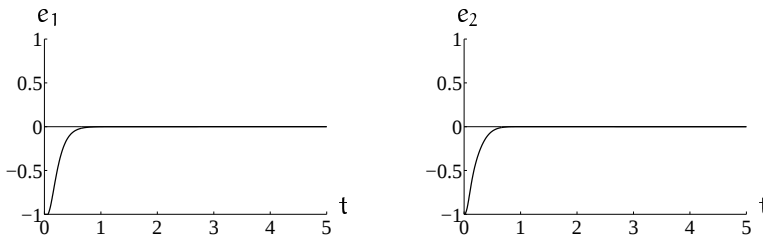
Po podstawieniu (7.41) do (7.40) dostaniemy

$$\begin{aligned} \dot{V}_4 = -W_3(t, \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3) - (\mathbf{e}^4 + \mathbf{H}_4(t, \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3))^T \mathbf{R}_3 \\ (\mathbf{e}^4 + \mathbf{H}_4(t, \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3)) = -W_4(t, \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3, \mathbf{e}^4) \leq 0. \end{aligned} \quad (7.42)$$

Dowód stabilności algorytmu sterowania (7.41) zastosowanego do układu sterowania (7.24) opiera się na twierdzeniu La Salle'a-Yoshizawy lub na lemacie Barbalata.

Przykład 7.2.2 (Manipulator *EDDA*)

Zastosujemy teraz algorytm całkowania wstecznego do modelu manipulatora *EDDA*. Do obliczeń przyjęto wartości $k_1 = k_2 = 1000$ współczynników elastyczności przegubów, co pozwoliło zaobserwować efekty związane z obecnością sił elastyczności. Zadaną trajektorię przegubową $\mathbf{q}_d^1(t)$ określiliśmy jako skok jednostkowy. Na rysunku 7.3 przedstawiono przykładowe przebiegi błędów śledzenia trajektorii w obu przegubach dla parametrów układu sterowania $\mathbf{R}_0 = \text{diag}\{10\}$, $\mathbf{R}_1 = \text{diag}\{10\}$, $\mathbf{R}_2 = \text{diag}\{50\}$, $\mathbf{R}_3 = \text{diag}\{50\}$. Wybór innych parametrów $\mathbf{R}_i$ pozwala uzyskać większe tłumienie błędów oraz szybszą zbieżność, ale powoduje wystąpienie przeregulowań. ■



Rysunek 7.3 Przebieg błędów śledzenia przy zastosowaniu algorytmu całkowania wstecznego.

7.2.3 Algorytm Ortegi-Lorii

Rozważmy teraz model manipulatora o elastycznych przegubach opisany równaniami (7.13), z algorytmem sterowania Ortegi-Lorii

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{I}\ddot{\mathbf{q}}_d^2 + \mathbf{K}(\mathbf{q}_d^2 - \mathbf{q}_d^1) - \mathbf{K}_{p2}\mathbf{e}^2 - \mathbf{K}_{d2}\dot{\boldsymbol{\vartheta}}^2 \\ \dot{\boldsymbol{\vartheta}}^i + \mathbf{M}_i\boldsymbol{\vartheta}^i = \mathbf{N}_i\dot{\mathbf{e}}^i, \quad i = 1, 2, \end{cases} \quad (7.43)$$

którego elementy składowe są zdefiniowane jak następuje:

$$\mathbf{q}_d^2 = \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{Q}(\mathbf{q}^1)\ddot{\mathbf{q}}_d^1 + \mathbf{B}(\mathbf{q}^1, \dot{\mathbf{q}}_d^1) - \mathbf{K}_{p1}\mathbf{e}^1 - \mathbf{K}_{d1}\dot{\boldsymbol{\vartheta}}^1) + \mathbf{q}_d^1,$$

$$\mathbf{K}_{pi} = \text{diag}\{k_{pi}\}, \quad \mathbf{K}_{di} = \text{diag}\{k_{di}\}, \quad k_{pi}, k_{di} > 0,$$

$$\mathbf{M}_i = \text{diag}\{m_{ij}\}, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\mathbf{N}_i = \text{diag}\{n_{ij}\}, \quad n_{ij} > \frac{\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}}}{\beta_2 \lambda_{\mathbf{Q}}}, \quad 0 < \beta_2 < 1, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\mathbf{e}^i = \mathbf{q}^i - \mathbf{q}_d^i, \quad i = 1, 2,$$

$$\hat{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{q}^1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

Elementy macierzy $\mathbf{K}_{pi}$, $\mathbf{K}_{di}$, $\mathbf{M}_i$, $\mathbf{N}_i$, $i = 1, 2$, należy dobrać w taki sposób, aby zapewnić zbieżność algorytmu. W tym celu standardowo definiujemy $\bar{\lambda}_{\mathbf{Q}} = \max_{\mathbf{q}} \bar{\lambda}_{\mathbf{Q}(\mathbf{q})}$, $\lambda_{\mathbf{Q}} = \min_{\mathbf{q}} \lambda_{\mathbf{Q}(\mathbf{q})}$. Zauważmy, że algorytm Ortegi-Lorii nie wymaga bezpośredniego pomiaru prędkości przegubów ani silników. Algorytm ten przypomina regulator PD, w którym sygnał $\dot{\boldsymbol{\vartheta}}^i$ podawany na wejście członu różniczkującego nie jest sygnałem błędu prędkości uzyskiwanym z bezpośredniego pomiaru, lecz przefiltrowanym sygnałem błędu położenia. Symbolem $\dot{\boldsymbol{\vartheta}}^1$ oznaczyliśmy estymowaną prędkość przegubów manipulatora, natomiast $\dot{\boldsymbol{\vartheta}}^2$ oznacza estymowaną prędkość silników napędzających poszczególne przeguby.

Równania układu zamkniętego złożonego z modelu (7.13) i algorytmu sterowania (7.43) można przedstawić w postaci

$$\begin{cases} \mathbf{Q}\ddot{\mathbf{e}} + (\mathbf{C} + \mathbf{C}_d)\dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_p\mathbf{e} + \mathbf{K}_d\boldsymbol{\vartheta} = \mathbf{0} \\ \dot{\boldsymbol{\vartheta}} = -\mathbf{M}\boldsymbol{\vartheta} + \mathbf{N}\dot{\mathbf{e}}, \end{cases} \quad (7.44)$$

przy oznaczeniach $\mathbf{e} = (\mathbf{e}^{1T}, \mathbf{e}^{2T})^T$, $\boldsymbol{\vartheta} = (\boldsymbol{\vartheta}^{1T}, \boldsymbol{\vartheta}^{2T})^T$ oraz

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}(\mathbf{q}^1, \dot{\mathbf{q}}^1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, & \mathbf{C}_d &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}(\mathbf{q}^1, \dot{\mathbf{q}}_d^1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{K}_p &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{p1} + \mathbf{K} & -\mathbf{K} \\ -\mathbf{K} & \mathbf{K}_{p2} + \mathbf{K} \end{bmatrix}, & \mathbf{K}_d &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{d1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{d2} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_2 \end{bmatrix}, & \mathbf{N} &= \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Funkcją Lapunowa dla układu zamkniętego jest

$$V(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{e}}^T\mathbf{Q}\dot{\mathbf{e}} + \frac{1}{2}\mathbf{e}^T\mathbf{K}_p\mathbf{e} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\vartheta}^T\mathbf{K}_d\mathbf{N}^{-1}\boldsymbol{\vartheta} + \varepsilon\mathbf{e}^T\mathbf{Q}\dot{\mathbf{e}} - \varepsilon\boldsymbol{\vartheta}^T\mathbf{Q}\dot{\mathbf{e}}, \quad (7.45)$$

gdzie $\mathbf{x} = (\mathbf{e}^T, \dot{\mathbf{e}}^T, \boldsymbol{\vartheta}^T)^T$, a stała ε została wybrana w taki sposób, by zapewnić dodatnią określoność V . Obszar przyciągania trajektorii $\mathbf{x}(t)$ układu zamkniętego może być zdefiniowany jako

$$\mathbf{A} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{6n} \mid \|\mathbf{x}\| < c_2(\underline{\lambda}_{\mathbf{N}})\},$$

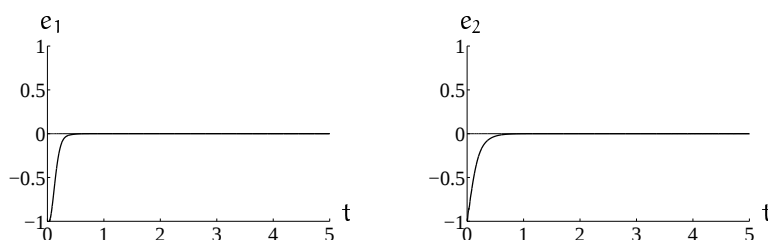
przy czym

$$\lim_{\underline{\lambda}_{\mathbf{N}} \rightarrow +\infty} c_2(\underline{\lambda}_{\mathbf{N}}) = +\infty,$$

co oznacza półglobalną stabilność algorytmu Ortegi-Lorii.

Przykład 7.2.3 (Manipulator *EDDA*)

Podobnie jak w przypadku poprzednich algorytmów, działanie algorytmu Ortegi-Lorii prześledzimy na przykładzie zadania śledzenia trajektorii przegubowej manipulatora *EDDA* mającej postać skoku jednostkowego. Ponownie przyjmijmy wartości współczynników elastyczności $k_1 = k_2 = 1000$. Na rysunku 7.4 przedstawiono przykładowe przebiegi błędów śledzenia trajektorii dla parametrów układu sterowania równych $\mathbf{M}_i = \text{diag}\{100\}$, $\mathbf{N}_i = \text{diag}\{400\}$, $\mathbf{K}_{pi} = \text{diag}\{300\}$, $\mathbf{K}_{di} = \text{diag}\{10\}$, $i = 1, 2$. Badania symulacyjne wykazały, że dla każdej wartości wzmocnienia regulatora $\mathbf{K}_{pi}$ istnieje optymalna wartość $\mathbf{K}_{di}$ zapewniająca największe tłumienie błędów śledzenia i nie powodująca przeregulowań. ■



Rysunek 7.4 Wykres błędów śledzenia przy zastosowaniu algorytmu Ortegi-Lorii.

Przeprowadzone symulacje pokazują, że wszystkie algorytmy przedstawione w tym rozdziale zapewniają praktycznie jednakową jakość śledzenia. Różnice między algorytmami są związane z ich warunkami implementacji. Największym stopniem skomplikowania cechuje się algorytm całkowania wstecznego, który dodatkowo wymaga pomiaru trzeciej pochodnej rzeczywistej trajektorii manipulatora. Najprostszy do implementacji jest algorytm Ortegi-Lorii, w którym dzięki zastosowaniu odpowiednich filtrów wymagany jest jedynie pomiar położenia przegubów i silników napędzających manipulator.

7.3 Komentarze i uwagi bibliograficzne

Model zredukowany dynamiki manipulatora o elastycznych przegubach można znaleźć w [CSB96]. Linearyzację przez dynamiczne sprzężenie zwrotne modelu dynamiki manipulatora o elastycznych przegubach przy stałej macierzy $\mathbf{S}$ przeprowadzili De Luca i Lucibello [LL98]. Algorytm statycznej linearyzacji manipulatora o elastycznych przegubach został zaczerpnięty z [Vid92]. Idea całkowania wstecznego pochodzi z monografii [KKK95], natomiast zastosowanie algorytmu całkowania wstecznego do zadania sterowania manipulatorem o elastycznych przegubach przedstawiono w [TM98]. Algorytm Ortegi-Lorii pochodzi z pracy [LO95]. Algorytmy adaptacyjne dla manipulatora o elastycznych przegubach otrzymane poprzez zastosowanie metody osobliwych zaburzeń można znaleźć u Khorasaniego [Kho92]. Problemem otwartym pozostaje znalezienie algorytmu sterowania, gdy macierz $\mathbf{S}(\mathbf{q}^{1n-1})$ nie jest stała, a także modeli dynamiki i algorytmów sterowania dla przypadku, gdy elastyczność przegubów nie pochodzi wyłącznie od sił sprężystości. Uwzględnienie elastyczności ramion powoduje znaczną komplikację modelu dynamiki manipulatora. Praktyczne aspekty mode-

lowania manipulatora o elastycznych ramionach za pomocą metody elementów skończonych można znaleźć w [BS95].

Literatura

- [BS95] W. Beres i J. Sasiadek, Finite elements dynamic model of multilink flexible manipulators. *Appl. Mathematics and Computer Science*, 5(2):231–262, 1995.
- [CSB96] C. Canudas de Wit, B. Siciliano i G. Bastin, *Theory of Robot Control*. Springer-Verlag, New York, 1996.
- [Kho92] K. Khorasani, Adaptive control of flexible-joint robots. *IEEE Trans. Robotics Automat.*, 8(2):250–267, 1992.
- [KKK95] M. Krstić, I. Kanellakopoulos i P. Kokotović, *Nonlinear and Adaptive Control Design*. J. Wiley and Sons, New York, 1995.
- [LL98] A. De Luca i P. Lucibello, A general algorithm for dynamic feedback linearization of robots with elastic joints. W: *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics Automat.*, vol. 1, strony 504–510, Leuven, 1998.
- [LO95] A. Loria i R. Ortega, On tracking control of rigid and flexible joint robots. *Appl. Mathematics and Computer Science*, 5(2):329–342, 1995.
- [TM98] K. Tchoń i A. Mazur, A backstepping control algorithm for flexible joint robotic manipulators. W: *Proc. MMAR Symposium*, vol. 3, strony 891–896, Międzyzdroje, 1998.
- [Vid92] M. Vidyasagar, *Nonlinear Systems Analysis*. Prentice Hall, New Jersey, 1992.

Część III

Algorytmy planowania ruchu i sterowania robotów mobilnych

Rozdział 11

Modele i algorytmy sterowania kołowych robotów mobilnych

Roboty mobilne poruszające się na kołach nazywamy *kołowymi robotami mobilnymi*. Przyjmiemy, że kołowy robot mobilny składa się z *wózka napędzanego* (*traktora*) ciągnącego nienapędzane *przyczepy*. Traktor jest wyposażony w silniki, które wprowadzają w ruch cały układ. Robota posiadającego przyczepę nazywamy *złożonym* — kołowy robot mobilny bez przyczep będzie nazywany *prostym*. Zakładamy, że ruch kołowego robota mobilnego odbywa się bez poślizgu kół. Wymaganie to definiuje nieholonomiczne ograniczenia fazowe ruchu układu. Intensywne prace badawcze prowadzone w ostatnich kilku latach zaowocowały powstaniem nowych i specyficznych algorytmów sterowania kołowych robotów mobilnych.

W tym rozdziale książki zajmujemy się metodami modelowania i algorytmami sterowania kołowych robotów mobilnych. Rozpocznijmy od przedstawienia modeli kinematyki i dynamiki prostych i złożonych kołowych robotów mobilnych. Następnie omówimy wybrane algorytmy sterowania. Pierwszym z nich jest algorytm Corona-Pometa, wykorzystujący statyczne sprzężenie zwrotne zależne od czasu. Po nim omówimy algorytm linearyzacji dynamicznej. Kolejnym algorytmem będzie algorytm opracowany przez Walsha, Tilbury'ego, Sastry'ego, Murraya i Laumonda, oparty na przybliżeniu liniowym dynamiki robota w otoczeniu trajektorii zadanej. W dwóch następnych podrozdziałach zajmujemy się ideą sterowania we współrzędnych linearyzujących, realizowaną zarówno w postaci algorytmów nieadaptacyj-

nych, jak i adaptacyjnych. Ostatnim z omawianych algorytmów będzie uniwersalny adaptacyjny λ -śledzący algorytm sterowania.

11.1 Dynamika układu robotycznego z ograniczeniami

W podrozdziale 2.2 ustaliliśmy, że kinematyka układu robotycznego określonego na uniwersum fazowym $\mathbb{R}^{2N}$, podlegającego l niezależnym ograniczeniom fazowym typu Pfaffa

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}, \quad (11.1)$$

jest zdefiniowana za pośrednictwem bezdryfowego układu sterowania

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{G}(\mathbf{q})\boldsymbol{\eta}. \quad (11.2)$$

Przy założeniu, że układ robotyczny nie podlega ograniczeniom konfiguracyjnym (liczba ograniczeń konfiguracyjnych $k = 0$), wymiar przestrzeni stanu układu (11.2) wynosi $n = N$. Macierz $\mathbf{G}(\mathbf{q})$, której kolumny rozpinają przestrzeń zerową macierzy $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ jest rozmiaru $n \times m$, gdzie $m = n - l$. Jak pokazaliśmy w podrozdziale 2.2, wektor $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^m$ reprezentuje część składowych wektora prędkości $\dot{\mathbf{q}}$. Aby połączyć model dynamiki układu robotycznego (5.2) z zależnością (11.2), zróżniczkujemy (11.2) względem czasu

$$\ddot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{G}}(\mathbf{q})\boldsymbol{\eta} + \mathbf{G}(\mathbf{q})\dot{\boldsymbol{\eta}} \quad (11.3)$$

i skorzystamy z *Zasady d'Alemberta*, w myśl której siły uogólnione $\mathbf{F}$ zapewniające spełnienie ograniczeń fazowych (11.1) nie wykonują pracy na dopuszczalnych przemieszczeniach. Z Zasady d'Alemberta wynika równość

$$\mathbf{F}^T \dot{\mathbf{q}} = 0,$$

która wobec założonej niezależności ograniczeń fazowych prowadzi do wniosku, że istnieje wektor mnożników Lagrange'a $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^l$, taki że

$$\mathbf{F}^T = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{A}(\mathbf{q}). \quad (11.4)$$

Po wzięciu pod uwagę zależności (11.4) i (5.3) oraz przy założeniu, że oddziaływania sterujące wpływają na m stopni swobody układu za pośrednic-

twem pewnej *macierzy sterowań* $\mathbf{B}(\mathbf{q})$, równania dynamiki układu robotycznego z ograniczeniami można zapisać w postaci

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}^2} \ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial^2 L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q} \partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} = \\ = \mathbf{Q}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}(\mathbf{q}) = \mathbf{A}^T(\mathbf{q}) \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{B}(\mathbf{q}) \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (11.5)$$

Macierz sterowań $\mathbf{B}(\mathbf{q})$ występująca w powyższym wzorze ma rozmiar $n \times m$ i składa się z elementów $b_{ij}(\mathbf{q})$, takich że

$$b_{ij}(\mathbf{q}) = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli sterowanie } u_j \text{ działa} \\ & \text{bezpośrednio na współrzędną } q_i, \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

W celu wyeliminowania mnożników $\boldsymbol{\lambda}$ skorzystamy z własności

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \iff \mathbf{G}^T(\mathbf{q})\mathbf{A}^T(\mathbf{q}) = \mathbf{0}.$$

Konsekwencją ostatniej własności oraz równości (11.2) i (11.3) jest następujące sformułowanie równań dynamiki (11.5)

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{G}(\mathbf{q})\boldsymbol{\eta} \\ \mathbf{G}^T(\mathbf{q})\mathbf{Q}(\mathbf{q})\mathbf{G}(\mathbf{q})\dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{G}^T(\mathbf{q}) \left(\mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{G}(\mathbf{q})\boldsymbol{\eta})\mathbf{G}(\mathbf{q}) + \mathbf{Q}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{G}}(\mathbf{q}) \right) \boldsymbol{\eta} + \\ + \mathbf{G}^T(\mathbf{q})\mathbf{D}(\mathbf{q}) = \mathbf{G}^T(\mathbf{q})\mathbf{B}(\mathbf{q})\mathbf{u}. \end{cases} \quad (11.6)$$

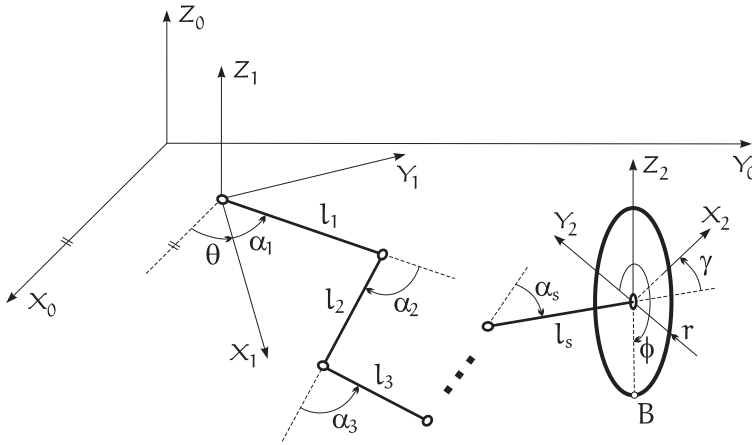
Dysponując trajektorią $\mathbf{q}(t)$ układu robotycznego, obliczoną jako rozwiązanie układu równań (11.6) przy określonym sterowaniu $\mathbf{u}(t)$ i warunkach początkowych $\mathbf{q}(0)$, $\dot{\mathbf{q}}(0)$, jesteśmy w stanie wyznaczyć wektor mnożników Lagrange'a $\boldsymbol{\lambda}$, a co za tym idzie, siły uogólnione $\mathbf{F}$ zapewniające spełnienie ograniczeń fazowych

$$\begin{cases} \boldsymbol{\lambda} = (\mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{A}^T(\mathbf{q}))^{-1} \mathbf{A}(\mathbf{q}) (\mathbf{Q}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}(\mathbf{q}) - \mathbf{B}(\mathbf{q})\mathbf{u}) \\ \mathbf{F} = \mathbf{A}^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda}. \end{cases} \quad (11.7)$$

11.2 Modele kołowych robotów mobilnych

Założmy, że ruch kołowego robota mobilnego podlega ograniczeniom fazowym (11.1). Podstawowe zadanie modelowania robota mobilnego polega na wyznaczeniu modelu kinematyki (2.36), w formie układu sterowania

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{G}(\mathbf{q})\mathbf{u} = \sum_{i=1}^m \mathbf{g}_i(\mathbf{q})u_i, \quad (11.8)$$



Rysunek 11.1 Schemat kinematyczny pojedynczego koła w układzie $X_0Y_0Z_0$.

oraz modelu dynamiki (11.6). W równaniu (11.8) macierz $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ spełnia warunek $\mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$, natomiast $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ oznacza wektor sterowań*.

Celem tego podrozdziału będzie wyznaczenie specyficznej postaci modelu matematycznego kinematyki i dynamiki kołowego robota mobilnego.

11.2.1 Ograniczenia fazowe

Niech układ $X_0Y_0Z_0$ będzie podstawowym układem odniesienia, którego oś Z_0 pokrywa się z kierunkiem wektora grawitacji. Rozważmy kołowy robot mobilny złożony z traktora ciągnącego p przyczep. Przyjmujemy, że każdy element składowy robota posiada jednorodne i недеformowalne koła[†] i że porusza się po płaszczyźnie X_0Y_0 bez poślizgu. Po umieszczeniu lokalnego układu współrzędnych $X_1Y_1Z_1$ na traktorze, do określenia położenia i orientacji traktora będziemy używać współrzędnych $\boldsymbol{\xi} = (x, y, \theta)^T$, gdzie x i y oznaczają położenie początku układu lokalnego w układzie $X_0Y_0Z_0$, zaś θ jest kątem między osiami X_0 i X_1 .

W celu wyprowadzenia ograniczeń fazowych dla kołowego robota mobilnego rozpatrzmy układ zawieszenia pojedynczego koła, złożony z s elementów połączonych przegubami obrotowymi (zobacz rysunek 11.1). Układ ten potraktujemy jako manipulator planarny o s przegubach z efektoorem w postaci koła, co pozwoli na wykorzystanie algorytmu Denavita-Harten-

*Zauważmy, że wektor sterowań w układzie (11.8) jest inny niż w układzie (11.6).

[†]Oznacza to, że kontakt koła z podłożem ogranicza się do pojedynczego punktu.

berga opisanego w podrozdziale 2.3.1. W rezultacie, współrzędne jednorodne $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3, 1)^T$ pewnego punktu na obwodzie koła względem układu $X_0Y_0Z_0$ można wyrazić wzorem

$$\mathbf{p} = \mathbf{A}_0^2(\xi, \mathbf{l}, \alpha) \mathbf{p}_2, \quad (11.9)$$

gdzie

$\mathbf{p}_2 = (0, r \cos \phi, r \sin \phi, 1)^T$ — współrzędne jednorodne wybranego punktu na obwodzie koła w układzie lokalnym $X_2Y_2Z_2$ †,

r — promień koła,

$\xi = (x, y, \theta)^T$ — położenie i orientacja traktora względem układu $X_0Y_0Z_0$,

ϕ — kąt obrotu koła wokół osi X_2 układu lokalnego $X_2Y_2Z_2$,

$$\mathbf{A}_0^2(\xi, \mathbf{l}, \alpha) = \mathbf{Trans}(x, x) \mathbf{Trans}(y, y) \mathbf{Trans}(z, z) \mathbf{Rot}(z, \theta) \left(\prod_{i=1}^s \mathbf{Rot}(z, \alpha_i) \mathbf{Trans}(x, l_i) \right) \mathbf{Rot}(z, \gamma),$$

$(\mathbf{l}, \alpha)$ — charakterystyka geometryczna koła, czyli parametry określające położenie i orientację koła w układzie $X_1Y_1Z_1$,

$$\mathbf{l} = (l_1, l_2, \dots, l_s)^T, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \gamma)^T.$$

Przyjmujemy, że kąt γ jest stały w czasie. W celu wyznaczenia warunków *toczenia się koła bez poślizgu* zróżniczkujemy zależność (11.9) względem czasu. Warunki te są związane z punktem B (w tym punkcie $\phi = -\pi/2$) o współrzędnych $\mathbf{b} = \mathbf{A}_0^2(\xi, \mathbf{l}, \alpha) \mathbf{b}_2$, w którym ma miejsce kontakt koła z podłożem i sprowadzają się do wymagania, aby prędkość punktu B względem układu $X_0Y_0Z_0$ była równa $\mathbf{0}$, a więc $\dot{\mathbf{b}} = \mathbf{0}$. Zatem, założenie o toczeniu się koła bez poślizgu po płaszczyźnie poziomej pociąga za sobą następujące zależności

$$\frac{d}{dt} \mathbf{A}_0^2(\xi, \mathbf{l}, \alpha) \mathbf{b}_2 + \mathbf{A}_0^2(\xi, \mathbf{l}, \alpha) \dot{\mathbf{b}}_2 = \mathbf{0}.$$

Wyrażenie warunku braku poślizgu w układzie $X_2Y_2Z_2$,

$$\dot{\mathbf{b}}_2 + (\mathbf{A}_0^2)^{-1}(\xi, \mathbf{l}, \alpha) \frac{d}{dt} \mathbf{A}_0^2(\xi, \mathbf{l}, \alpha) \mathbf{b}_2 = \mathbf{0},$$

pozwala zdekomponować toczenie się koła bez poślizgu na toczenie się bez

†Układ ten jest nieruchomo związany z osią koła w taki sposób, że płaszczyzna X_2Y_2 jest równoległa do płaszczyzny X_0Y_0 , a oś X_2 jest prostopadła do płaszczyzny koła.

poślizgu bocznego i wzdłużnego. Ostatecznie, biorąc pod uwagę położenie $\phi = -\pi/2$ punktu kontaktu koła z podłożem, wyliczamy

$$\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ r \cos \phi \\ r \sin \phi \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{b}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -r\dot{\phi} \sin \phi \\ r\dot{\phi} \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r\dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wymaganie toczenia się bez poślizgu przybiera zatem formę następujących ograniczeń fazowych

$$\begin{pmatrix} 0 \\ r\dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -(\mathbf{A}_0^2)^{-1}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{l}, \boldsymbol{\alpha}) \frac{d}{dt} \mathbf{A}_0^2(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{l}, \boldsymbol{\alpha}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (11.10)$$

z których, po uwzględnieniu postaci macierzy $\mathbf{A}_0^2(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{l}, \boldsymbol{\alpha})$, otrzymujemy równania opisujące:

- *toczenie się koła bez poślizgu bocznego*

$$\begin{aligned} & \left(\cos \bar{\alpha}_1, \sin \bar{\alpha}_1, \sum_{i=1}^s l_i \sin \bar{\alpha}_{i+1} \right) \mathbf{R}(-\theta) \dot{\boldsymbol{\xi}} + \dot{\alpha}_1 \left(\sum_{i=1}^s l_i \sin \bar{\alpha}_{i+1} \right) + \\ & + \dot{\alpha}_2 \left(\sum_{i=2}^s l_i \sin \bar{\alpha}_{i+1} \right) + \dots + \dot{\alpha}_s l_s \sin \gamma = 0, \end{aligned} \quad (11.11)$$

- *toczenie się koła bez poślizgu wzdłużnego*

$$\begin{aligned} & \left(-\sin \bar{\alpha}_1, \cos \bar{\alpha}_1, \sum_{i=1}^s l_i \cos \bar{\alpha}_{i+1} \right) \mathbf{R}(-\theta) \dot{\boldsymbol{\xi}} + \dot{\alpha}_1 \left(\sum_{i=1}^s l_i \cos \bar{\alpha}_{i+1} \right) + \\ & + \dot{\alpha}_2 \left(\sum_{i=2}^s l_i \cos \bar{\alpha}_{i+1} \right) + \dots + \dot{\alpha}_s l_s \cos \gamma + r\dot{\phi} = 0, \end{aligned} \quad (11.12)$$

- *toczenie się koła po płaszczyźnie*

$$\dot{z} = 0. \quad (11.13)$$

W równaniach (11.11)–(11.13) $\bar{\alpha}_i = \gamma + \sum_{k=i}^s \alpha_k$, a $\mathbf{R}(-\theta) = \mathbf{R}(Z, -\theta)$ oznacza macierz obrotu o kąt $-\theta$ wokół osi Z układu $\times_1 \gamma_1 Z_1$.

Warunki braku poślizgu bocznego i wzdłużnego kół wyprowadzone przy pomocy formalizmu Denavita-Hartenberga umożliwiają wyznaczenie ogra-

niczeń fazowych dla prostych i złożonych kołowych robotów mobilnych poruszających się po płaszczyźnie poziomej.

Przykład 11.2.1 (Jednokołowy robot mobilny)

Na podstawie analizy układów zawieszenia kół kołowych robotów mobilnych okazało się, że charakterystyka geometryczna koła postaci $\mathbf{l} = (l_1, l_2)^T$ oraz $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1 = \text{const}, \alpha_2 = \text{var}, \gamma = \text{const})^T$ opisuje wszystkie spotykane w praktyce rozwiązania. Na tej podstawie, korzystając z ogólnych zależności (11.11)–(11.13) przedstawiających ograniczenia fazowe dla pojedynczego koła, otrzymujemy warunki:

- toczenia się koła bez poślizgu bocznego

$$(\cos \alpha, \sin \alpha, l_2 \sin \gamma + l_1 \sin(\alpha_1 + \gamma)) \mathbf{R}(-\theta) \dot{\boldsymbol{\xi}} + l_2 \dot{\alpha}_2 \sin \gamma = 0,$$

- toczenia się koła bez poślizgu wzdłużnego

$$(-\sin \alpha, \cos \alpha, l_2 \cos \gamma + l_1 \cos(\alpha_1 + \gamma)) \mathbf{R}(-\theta) \dot{\boldsymbol{\xi}} + l_2 \dot{\alpha}_2 \cos \gamma + r \dot{\phi} = 0,$$

gdzie $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \gamma$. Przedstawione w postaci Pfaffa ograniczenia te wyglądają następująco[§]:

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha + \theta) & \sin(\alpha + \theta) & l_2 \sin \gamma + l_1 \sin(\alpha_1 + \gamma) & l_2 \sin \gamma & 0 \\ -\sin(\alpha + \theta) & \cos(\alpha + \theta) & l_2 \cos \gamma + l_1 \cos(\alpha_1 + \gamma) & l_2 \cos \gamma & r \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha}_2 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Korzystając z twierdzenia 2.2.1 nietrudno wykazać, że ograniczenia fazowe dla jednokołowego robota mobilnego o charakterystyce geometrycznej $(\mathbf{l}, \boldsymbol{\alpha})$ są nieholonomiczne. ■

Dla kołowego robota mobilnego złożonego z traktora ciągnącego p przyczep wymaganie toczenia się wszystkich kół bez poślizgu prowadzi, po u-

[§]Przy podstawieniach $l_1 = l_2 = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\gamma = -\pi/2$ pierwsze z poniższych równań przechodzi w równanie (8.2).

względnieniu zależności (11.11) i (11.12), do ograniczeń fazowych postaci

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}_0(\mathbf{q}_0)\dot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{10}(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1)\dot{\mathbf{q}}_0 + \mathbf{A}_{11}(\mathbf{q}_1)\dot{\mathbf{q}}_1 = \mathbf{0} \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^r \mathbf{A}_{ri}(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_{i+1}, \dots, \mathbf{q}_r)\dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{0} \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^p \mathbf{A}_{pi}(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_{i+1}, \dots, \mathbf{q}_p)\dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{0}, \end{array} \right. \quad (11.14)$$

przy oznaczeniach

- $\mathbf{q}_0$ — współrzędne uogólnione traktora,
- $\mathbf{A}_0(\mathbf{q}_0)\dot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{0}$ — ograniczenia fazowe związane z traktorem,
- $\mathbf{q}_i, i = 1, 2, \dots, p$ — współrzędne uogólnione i -tej przyczepy,
- $\sum_{i=0}^r \mathbf{A}_{ri}(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_{i+1}, \dots, \mathbf{q}_r)\dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{0}$ — ograniczenia fazowe związane z r -tą przyczepą.

Nietrudno zauważyć, że równania ograniczeń fazowych (11.14) dla wieloczołowego kołowego robota mobilnego dają się zapisać w postaci Pfaffa (11.1).

11.2.2 Modele kinematyki prostych kołowych robotów mobilnych

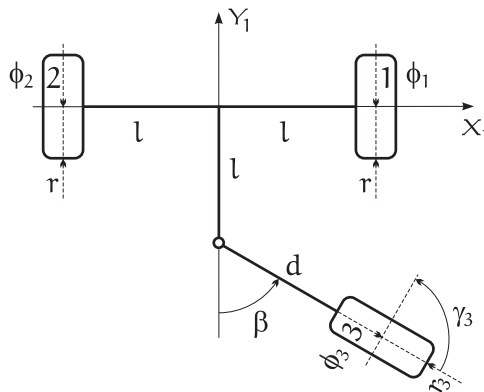
Przyjmijmy, że prosty kołowy robot mobilny (traktor) posiada k kół, z których każde ma promień r_i i jest opisane przez charakterystykę geometryczną $(\mathbf{l}_i, \boldsymbol{\alpha}_i) = (l_{i1}, l_{i2}, \alpha_{i1} = \text{const}, \alpha_{i2}, \gamma_i = \text{const})^T, i = 1, 2, \dots, k$. Warunki ruchu bez poślizgu postaci (11.11) i (11.12) prowadzą do następujących ograniczeń fazowych:

- ruch traktora bez poślizgu bocznego

$$\mathbf{C}_1(\boldsymbol{\alpha}_2)\mathbf{R}(-\theta) \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}^T + \mathbf{C}_2\dot{\boldsymbol{\alpha}}_2 = \mathbf{0}, \quad (11.15)$$

gdzie macierze $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$ są zdefiniowane jako

- $\mathbf{C}_{1i\text{ty wiersz}} = (\cos(\alpha_{i1} + \alpha_{i2} + \gamma_i), \sin(\alpha_{i1} + \alpha_{i2} + \gamma_i), l_{i2}\sin\gamma_i + l_{i1}\sin(\alpha_{i2} + \gamma_i)), i = 1, 2, \dots, k,$
- $\mathbf{C}_2 = \text{diag}\{l_{i2}\sin\gamma_i\}, i = 1, 2, \dots, k,$



Rysunek 11.2 Schemat kinematyczny traktora z kołem swobodnym.

- ruch traktora bez poślizgu wzdłużnego

$$\mathbf{Z}_1(\boldsymbol{\alpha}_2)\mathbf{R}(-\theta) \begin{pmatrix} \dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta} \end{pmatrix}^T + \mathbf{Z}_2\dot{\boldsymbol{\alpha}}_2 + \mathbf{Z}_3\dot{\boldsymbol{\phi}} = \mathbf{0}, \quad (11.16)$$

gdzie macierze $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{Z}_3$ są zdefiniowane przez

- $\mathbf{Z}_{1 \text{ i-ty wiersz}}(\boldsymbol{\alpha}_2) = (-\sin(\alpha_{i1} + \alpha_{i2} + \gamma_i), \cos(\alpha_{i1} + \alpha_{i2} + \gamma_i),$
 $l_{i2}\cos\gamma_i + l_{i2}\cos(\alpha_{i2} + \gamma_i)), i = 1, 2, \dots, k,$
- $\mathbf{Z}_2 = \text{diag}\{l_{i2}\cos\gamma_i\}, i = 1, 2, \dots, k,$
- $\mathbf{Z}_3 = \text{diag}\{r_i\}, i = 1, 2, \dots, k.$

W zależnościach (11.15) i (11.16) wektor $\boldsymbol{\alpha}_2 = (\alpha_{12}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{k2})^T$, a i -ty wiersz jest równaniem ograniczeń dla i -tego koła rozpatrywanego kołowego robota mobilnego.

Przykład 11.2.2 (Traktor trójkołowy)

Rozpatrzmy przypadek traktora, którego układ jezdny składa się z dwóch sztywnych kół tylnych oraz z koła swobodnego (wolnego) umieszczonego z przodu (zobacz rysunek 11.2). Lokalny układ współrzędnych $X_1Y_1Z_1$ związany z poruszającym się robotem jest ulokowany w środku odcinka łączącego koła tylne (1 i 2). Orientacja β koła przedniego (3) względem lokalnego układu odniesienia ulega zmianie podczas ruchu traktora, podczas gdy orientacje kół tylnych pozostają stałe. Traktor trójkołowy jest wprowadzany w ruch przy pomocy dwóch silników napędzających koła tylne. Ograniczenia fazowe dla traktora z kołem swobodnym wyznaczamy w następujący sposób.

Krok 1. Określamy charakterystykę geometryczną kół traktora:

koło 1 — $l_{11} = l$, $\alpha_{11} = 0$, $l_{12} = 0$, $\alpha_{12} = 0$, $\gamma_1 = 0$,

koło 2 — $l_{21} = l$, $\alpha_{21} = \pi$, $l_{22} = 0$, $\alpha_{22} = 0$, $\gamma_2 = 0$,

koło 3 — $l_{31} = l$, $\alpha_{31} = 3/2\pi$, $l_{32} = d$, $\alpha_{32} = \beta$, $\gamma_3 = \pi/2$.

Krok 2. W oparciu o charakterystykę geometryczną kół oraz ogólne zależności (11.15) i (11.16) wyznaczamy ograniczenia fazowe:

- dla ruchu robota bez poślizgu bocznego

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ \cos \beta & \sin \beta & d + l \cos \beta \end{bmatrix} \mathbf{R}(-\theta) \dot{\mathbf{x}} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} \dot{\beta} = \\ = \mathbf{C}_1(\beta) \mathbf{R}(-\theta) \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}_2 \dot{\alpha}_2 = \mathbf{0}, \quad (11.17)$$

- dla ruchu robota bez poślizgu wzdłużnego

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & l \\ 0 & -1 & l \\ -\sin \beta \cos \beta & -l \sin \beta \end{bmatrix} \mathbf{R}(-\theta) \dot{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\phi}_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (11.18)$$

■

Specyficzną postać ograniczeń kinematycznych (11.15) i (11.16) wykorzystuje się w algorytmie wyznaczania modelu kinematyki prostych kołowych robotów mobilnych. Algorytm ten składa się z następujących kroków.

Krok 1. Jeżeli macierz $\mathbf{C}_2$ jest nieosobliwa (tzn. dla każdego koła robota mobilnego zachodzi warunek $l_{2i} \sin \gamma_i \neq 0$), to model kinematyki robota przyjmujemy w postaci

$$\dot{\mathbf{q}}_0 = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\alpha}_2 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(\theta) \\ -\mathbf{C}_2^{-1} \mathbf{C}_1(\alpha_2) \\ -\mathbf{Z}_3^{-1} (\mathbf{Z}_1(\alpha_2) - \mathbf{Z}_2 \mathbf{C}_2^{-1} \mathbf{C}_1(\alpha_2)) \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{G}_0(\mathbf{q}_0) \mathbf{u}, \quad (11.19)$$

gdzie $\mathbf{u}$ jest wektorem sterowań. W przypadku przeciwnym przechodzimy do kroku 2.

Krok 2. Dzielimy ograniczenia związane z ruchem robota bez poślizgu bocznego (11.15) na dwie grupy

$$\begin{cases} \mathbf{C}_{1v}(\alpha_{2v}) \mathbf{R}(-\theta) \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}_{2v} \dot{\alpha}_{2v} = \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{1u}(\alpha_{2u}, \alpha_{2q}) \mathbf{R}(-\theta) \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (11.20)$$

gdzie

$\mathbf{C}_{2v}$ — diagonalna macierz nieosobliwa,

$\boldsymbol{\alpha}_2 = (\boldsymbol{\alpha}_{2v}, \boldsymbol{\alpha}_{2u}, \boldsymbol{\alpha}_{2q})^T$,

$\boldsymbol{\alpha}_{2v}$ — wektor zawierający zmienne w czasie współrzędne wektora $\boldsymbol{\alpha}_2$, dla których zachodzi $l_{2i} \sin \gamma_i \neq 0$,

$\boldsymbol{\alpha}_{2u}$ — wektor zawierający zmienne w czasie współrzędne wektora $\boldsymbol{\alpha}_2$, dla których zachodzi $l_{2i} \sin \gamma_i = 0$,

$\boldsymbol{\alpha}_{2q}$ — wektor złożony ze stałych w czasie współrzędnych wektora $\boldsymbol{\alpha}_2$.

Krok 3. Szukamy macierzy $\mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha}_{2u}, \boldsymbol{\alpha}_{2q})$, której kolumny rozpinają przestrzeń zerową macierzy (jądro) $\mathbf{C}_{1u}(\boldsymbol{\alpha}_{2u}, \boldsymbol{\alpha}_{2q})$

$$\mathbf{C}_{1u}(\boldsymbol{\alpha}_{2u}, \boldsymbol{\alpha}_{2q})\mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha}_{2u}, \boldsymbol{\alpha}_{2q}) = \mathbf{0}. \quad (11.21)$$

Przy wyznaczaniu postaci macierzy $\mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha}_{2u}, \boldsymbol{\alpha}_{2q})$ korzystamy z następującego twierdzenia.

Twierdzenie 11.2.1 *Zdefiniujmy stopień mobilności δ_m kołowego robota mobilnego równy wymiarowi dystrybucji rozpiętej przez kolumny macierzy $\mathbf{R}(\theta)\mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha}_{2u}, \boldsymbol{\alpha}_{2q})$ oraz stopień sterowalności δ_s jako liczbę sterowanych kół robota, których orientacja może być ustalona w sposób niezależny, tak że istnieje chwilowy środek obrotu robota. Istnieje 5 podstawowych typów kołowych robotów mobilnych poruszających się po płaszczyźnie, z których każdy może być w pełni scharakteryzowany przez parę liczb (δ_m, δ_s) . Dla każdego typu robota można znaleźć taki punkt (w obrębie układu jezdnego lub nadwozia robota), zwany punktem charakterystycznym, że umieszczając w nim odpowiednio zorientowany lokalny układ odniesienia otrzymamy jedną z następujących postaci macierzy $\mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha}_{2u}, \boldsymbol{\alpha}_{2q})$:*

- typ (3, 0)

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha}_{2u}, \boldsymbol{\alpha}_{2q}) = \mathbb{I}_3, \quad (11.22)$$

- typ (2, 0)

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha}_{2u}, \boldsymbol{\alpha}_{2q}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (11.23)$$

- typ (2, 1)

$$\mathbf{P}(\alpha_{2u}, \alpha_{2q}) = \begin{bmatrix} -\sin \alpha_{2u1} & 0 \\ \cos \alpha_{2u1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (11.24)$$

- typ (1, 1)

$$\mathbf{P}(\alpha_{2u}, \alpha_{2q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ l \sin \alpha_{2u1} \\ \cos \alpha_{2u1} \end{bmatrix}, \quad (11.25)$$

- typ (1, 2)

$$\mathbf{P}(\alpha_{2u}, \alpha_{2q}) = \begin{bmatrix} -2l \sin \alpha_{2u1} \sin \alpha_{2u2} \\ l \sin (\alpha_{2u1} + \alpha_{2u2}) \\ \sin (\alpha_{2u2} - \alpha_{2u1}) \end{bmatrix}. \quad (11.26)$$

Parametr l oznacza odległość punktu charakterystycznego robota do pewnego punktu związanego z układem napędowym.

Odpowiedni wybór położenia lokalnego układu odniesienia związanego z punktem charakterystycznym kołowego robota mobilnego umożliwia opis każdego z kół przy pomocy charakterystyki geometrycznej postaci (l, α) .

Z drugiego z równań (11.20) i równania (11.21) wynika zależność

$$\dot{\xi} = \mathbf{R}(\theta) \mathbf{P}(\alpha_{2u}, \alpha_{2q}) \mathbf{u}_1, \quad (11.27)$$

gdzie $\mathbf{u}_1$ jest wektorem sterowań. Praktyczny sposób wyznaczania macierzy $\mathbf{P}(\alpha_{2u}, \alpha_{2q})$ polega na sprawdzeniu, która z macierzy (11.23)–(11.26) spełnia warunek opisany przez (11.21). Jeżeli przy poprawnym wyborze punktu charakterystycznego żadna z proponowanych postaci macierzy $\mathbf{P}(\alpha_{2u}, \alpha_{2q})$ nie spełnia tego warunku, oznacza to, że ruch rozpatrywanego układu może się odbywać przy dodatkowych ograniczeniach konfiguracyjnych*, lub że robot mobilny może poruszać się po płaszczyźnie X_0Y_0 wzdłuż pewnego kierunku określonego przez warunki początkowe. W przypadku, gdy jedna z macierzy postaci (11.23)–(11.26) spełnia warunek (11.21), przechodzimy do kroku 4.

*Związki otrzymywane z warunku $\det \mathbf{C}_1(\alpha_{2u}, \alpha_{2q}) = 0$.

Krok 4. Z pierwszej z zależności (11.20) oraz z (11.27) obliczamy

$$\dot{\alpha}_{2v} = -\mathbf{C}_{2v}^{-1} \mathbf{C}_1(\alpha_{2v}) \mathbf{R}(-\theta) \dot{\xi} = -\mathbf{C}_{2v}^{-1} \mathbf{C}_1(\alpha_{2v}) \mathbf{P}(\alpha_{2u}, \alpha_{2q}) \mathbf{u}_1. \quad (11.28)$$

Krok 5. Wykorzystując dekompozycję wektora α_2 , ograniczenia związane z ruchem robota bez poślizgu wzdłużnego dane przez (11.16) możemy przedstawić w formie

$$\begin{cases} \mathbf{Z}_{1v}(\alpha_{2v}) \mathbf{R}(-\theta) \dot{\xi} + \mathbf{Z}_{2v}(\alpha_{2v}) \dot{\alpha}_{2v} + \mathbf{Z}_{3v} \dot{\phi}_v = 0 \\ \mathbf{Z}_{1u}(\alpha_{2u}) \mathbf{R}(-\theta) \dot{\xi} + \mathbf{Z}_{2u}(\alpha_{2u}) \dot{\alpha}_{2u} + \mathbf{Z}_{3u} \dot{\phi}_u = 0 \\ \mathbf{Z}_{1q}(\alpha_{2q}) \mathbf{R}(-\theta) \dot{\xi} + \mathbf{Z}_{3q} \dot{\phi}_q = 0, \end{cases}$$

gdzie $\dot{\phi}_v$, $\dot{\phi}_u$ i $\dot{\phi}_q$ oznaczają prędkości obrotu kół robota mobilnego określone stosownie do podziału wektora α_2 . Z kolei, z uwagi na nieosobliwość macierzy $\mathbf{Z}_{3u}$, $\mathbf{Z}_{3v}$ i $\mathbf{Z}_{3q}$ oraz równania (11.27) i (11.28), otrzymujemy

$$\begin{cases} \dot{\phi}_v = -\mathbf{Z}_{3v}^{-1} (\mathbf{Z}_{1v}(\alpha_{2v}) - \mathbf{Z}_{2v}(\alpha_2) \mathbf{C}_{2v}^{-1} \mathbf{C}_1(\alpha_{2v})) \mathbf{P}(\alpha_{2u}, \alpha_{2q}) \mathbf{u}_1 \\ \dot{\phi}_u = -\mathbf{Z}_{3u}^{-1} (\mathbf{Z}_{1u}(\alpha_{2u}) \mathbf{P}(\alpha_{2u}, \alpha_{2q}) \mathbf{u}_1 + \mathbf{Z}_{2u}(\alpha_{2u}) \mathbf{u}_2) \\ \dot{\phi}_q = -\mathbf{Z}_{3q}^{-1} \mathbf{Z}_{1q}(\alpha_{2q}) \mathbf{P}(\alpha_{2u}, \alpha_{2q}) \mathbf{u}_1 \\ \dot{\alpha}_{2u} = \mathbf{u}_2. \end{cases} \quad (11.29)$$

Reasumując, zależności (11.27), (11.28) i (11.29) wyznaczają następujący model kinematyki robota

$$\dot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{G}_0(\mathbf{q}_0) \mathbf{u}, \quad (11.30)$$

gdzie

$$\mathbf{G}_0(\mathbf{q}_0) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}(\alpha_{2u}, \alpha_{2q}) & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}_{2v} \mathbf{C}_1(\alpha_{2v}) \mathbf{P}(\alpha_{2u}, \alpha_{2q}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{I}_u \\ \mathbf{S}_{\phi v}(\alpha_{2v}) & \mathbf{0} \\ -\mathbf{Z}_{3u}^{-1} \mathbf{Z}_{1u}(\alpha_{2u}) \mathbf{P}(\alpha_{2u}, \alpha_{2q}) & \mathbf{Z}_{2u}(\alpha_{2u}) \\ -\mathbf{Z}_{3q}^{-1} \mathbf{Z}_{1q}(\alpha_{2q}) \mathbf{P}(\alpha_{2u}, \alpha_{2q}) & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

oraz $\mathbf{q}_0 = (\dot{\xi}, \dot{\alpha}_{2v}, \dot{\alpha}_{2u}, \dot{\phi}_v, \dot{\phi}_u, \dot{\phi}_q)^T$, $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1^T, \mathbf{u}_2^T)^T$, $\mathbf{S}_{\phi v}(\alpha_{2v}) = -\mathbf{Z}_{3v}^{-1} (\mathbf{Z}_{1v}(\alpha_{2v}) - \mathbf{Z}_{2v}(\alpha_2) \mathbf{C}_{2v}^{-1} \mathbf{C}_1(\alpha_{2v})) \mathbf{P}(\alpha_{2u}, \alpha_{2q})$.

Przedstawiony algorytm wyznaczania modelu kinematyki prostych kołowych robotów mobilnych generuje model w postaci (11.19) lub (11.30), zależnie od osobliwości lub nieosobliwości macierzy $\mathbf{C}_2$.

Przykład 11.2.3 (Traktor trójkolowy)

Rozważmy teraz zadanie określenia modelu kinematyki traktora trójkolowego z kołem swobodnym. Opis robota oraz wyprowadzenie ograniczeń fazowych przedstawiliśmy w przykładzie 11.2.2. Macierz $\mathbf{C}_2$ w równaniu (11.17) nie jest pełnego rzędu, zatem dokonujemy dekompozycji ograniczeń fazowych związanych z ruchem układu bez poślizgu bocznego na dwie części:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{R}(-\theta) \dot{\xi} = \mathbf{C}_{1u} \mathbf{R}(-\theta) \dot{\xi} = \mathbf{0}, \quad (11.31)$$

$$(\cos \beta, \sin \beta, d + l \cos \beta) \mathbf{R}(-\theta) \dot{\xi} + \dot{\beta} d = 0. \quad (11.32)$$

Korzystając z twierdzenia 11.2.1, szukamy macierzy $\mathbf{P}$, której kolumny rozpinają przestrzeń $\text{Ker } \mathbf{C}_{1u}$, tzn. takiej, że

$$\mathbf{C}_{1u} \mathbf{P} = \mathbf{0}.$$

Nietrudno zauważyć, że rozpatrywany traktor jest typu $(2, 0)$, a zatem macierz $\mathbf{P}$ ma postać

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wnioskujemy stąd, że

$$\dot{\xi} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \mathbf{R}(\theta) \mathbf{P} \mathbf{u} = \begin{pmatrix} -u_1 \sin \theta \\ u_1 \cos \theta \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad (11.33)$$

gdzie u_1 jest prędkością liniową traktora z kołem swobodnym w układzie podstawowym, natomiast u_2 prędkością zmian orientacji traktora. Z zależności (11.32) wyznaczamy zmienną $\dot{\beta}$

$$\dot{\beta} = -u_1 \frac{1}{d} \sin \beta - u_2 \left(1 + \frac{l}{d} \cos \beta \right), \quad (11.34)$$

natomiast z warunków na ruch traktora bez poślizgu wzdłużnego (11.18)

zmienne $\dot{\phi}_1$, $\dot{\phi}_2$ i $\dot{\phi}_3$

$$\begin{cases} \dot{\phi}_1 = -u_1 \frac{1}{r} - u_2 \frac{l}{r} \\ \dot{\phi}_2 = u_1 \frac{1}{r} - u_2 \frac{l}{r} \\ \dot{\phi}_3 = -u_1 \frac{1}{r_3} \cos \beta - u_2 \frac{l}{r_3} \sin \beta. \end{cases} \quad (11.35)$$

Ostatecznie, korzystając z równań (11.33), (11.34) i (11.35), otrzymujemy model kinematyki traktora z kołem swobodnym w postaci

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\phi}_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \theta & 0 \\ \cos \theta & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{1}{d} \sin \beta & -(1 + \frac{1}{d} \cos \beta) \\ -\frac{1}{r} & -\frac{l}{r} \\ \frac{1}{r} & -\frac{l}{r} \\ -\frac{1}{r_3} \cos \beta & \frac{l}{r_3} \sin \beta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \mathbf{G}(\beta, \theta) \mathbf{u}. \quad (11.36)$$

■

Przykład 11.2.4 (Robot mobilny Ulisses)

Przykładem traktora trójkolowego z kołem swobodnym jest kołowy robot mobilny Ulisses[†]. Model kinematyki robota Ulisses wynika z modelu (11.36) (po pominięciu współrzędnych β i ϕ_3 , na co pozwalają małe rozmiary koła swobodnego) i przyjmuje postać

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \theta & 0 \\ \cos \theta & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{1}{r} & -\frac{l}{r} \\ \frac{1}{r} & -\frac{l}{r} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \mathbf{G}(\theta) \mathbf{u}. \quad (11.37)$$

Parametry geometryczne występujące w przedstawionym modelu wynoszą: $r = 0.05[\text{m}]$, $l = 0.23[\text{m}]$. ■

[†]Robot mobilny Ulisses został zbudowany w Zakładzie Podstaw Cybernetyki i Robotyki Instytutu Cybernetyki Technicznej Politechniki Wrocławskiej przez dra A. Wołczowskiego.

11.2.3 Modele kinematyki złożonych kołowych robotów mobilnych

Przedstawiony w poprzednim podrozdziale algorytm tworzenia modeli kinematyki prostych kołowych robotów mobilnych może być uogólniony na przypadek złożonych kołowych robotów mobilnych. Punktem wyjścia jest w tym przypadku ogólna postać ograniczeń kinematycznych (11.14). Proponowane rozwiązanie zadania wyznaczenia modeli kinematyki złożonych kołowych robotów mobilnych wykorzystuje specyficzną postać ograniczeń fazowych i jest oparte na spostrzeżeniu, że w przypadku ogólnym (złożony układ jezdny) model kinematyki daje się zapisać w postaci

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}_0 \\ \dot{\mathbf{q}}_1 \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{q}}_p \end{pmatrix} = \mathbf{G}(\mathbf{q})\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_0(\mathbf{q}_0) \\ \mathbf{G}_1(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1) \\ \vdots \\ \mathbf{G}_p(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_p) \end{bmatrix} \mathbf{u}. \quad (11.38)$$

W rezultacie, na mocy warunku $\mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$, z (11.14) otrzymujemy następujące zależności

$$\begin{cases} \mathbf{A}_0(\mathbf{q}_0)\mathbf{G}_0(\mathbf{q}_0) = \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{10}(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1)\mathbf{G}_0(\mathbf{q}_0) + \mathbf{A}_{11}(\mathbf{q}_1)\mathbf{G}_1(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1) = \mathbf{0} \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^p \mathbf{A}_{pi}(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_{i+1}, \dots, \mathbf{q}_p)\mathbf{G}_i(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_i) = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (11.39)$$

Struktura równania (11.39) wskazuje na możliwość dekompozycji problemu wyznaczania macierzy $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ na $p + 1$ kolejnych zadań polegających na obliczeniu podmacierzy $\mathbf{G}_i(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_i)$ dla $i = 0, 1, 2, \dots, p$, co w efekcie pozwala skonstruować algorytm wyznaczania modeli kinematyki dla złożonych kołowych robotów mobilnych. Algorytm ten składa się z następujących kroków.

Krok 1. Obliczamy macierz $\mathbf{G}_0(\mathbf{q}_0)$ spełniającą zależność

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}_0)\mathbf{G}_0(\mathbf{q}_0) = \mathbf{0}.$$

W tym celu możemy wykorzystać algorytm zamieszczony w podrozdziale 11.2.2, na stronie 360.

Krok 2. Uwzględniając pozostałe warunki (11.39), z układu równań macierzowych (11.39) wyznaczamy podmacierze $\mathbf{G}_i(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_i)$, $i = 1, 2, \dots, p$ i otrzymujemy

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_i(\mathbf{q}_0, \dots, \mathbf{q}_i) &= \\ &= -\mathbf{A}_{ii}^{-1}(\mathbf{q}_i) \sum_{k=0}^{i-1} \mathbf{A}_{ik}(\mathbf{q}_k, \dots, \mathbf{q}_i) \mathbf{G}_i(\mathbf{q}_0, \dots, \mathbf{q}_k).\end{aligned}$$

Przedstawiony algorytm wyznaczania modelu kinematyki złożonych kołowych robotów mobilnych działa poprawnie przy założeniu nieosobliwości macierzy $\mathbf{A}_{ii}(\mathbf{q}_i)$. Warunek ten nie jest spełniony dla robotów zdegenerowanych, czyli takich, w których obecność przyczep jest przyczyną zmniejszenia stopnia mobilności.

11.2.4 Modele dynamiki

Po szczegółowym omówieniu zagadnień dotyczących modelowania kinematyki kołowych robotów mobilnych zajmiemy się wyznaczeniem zależności opisujących ich dynamikę. Ogólne zasady obowiązujące przy modelowaniu dynamiki układów robotycznych z więzami nieholonomicznymi zostały opisane w podrozdziale 11.1. Równania dynamiki uwzględniające wpływ sterowań (uogólnionych sił zewnętrznych wymuszających ruch układu) mają postać (11.6). Zadanie modelowania dynamiki nieholonomicznych układów robotycznych wymaga znajomości ich energii kinetycznej i potencjalnej. Jak łatwo zauważyć, energia potencjalna kołowego robota mobilnego o jednorodnych kołach, poruszającego się po płaszczyźnie prostopadłej do wektora grawitacji jest stała w czasie, a wobec tego nie wpływa na równania dynamiki robota. Energia kinetyczna kołowego robota mobilnego jest sumą energii układu jezdnego i nadwozia traktora, przyczep oraz energii obracających się kół. Połączenie klasycznej metodologii wyznaczania energii kinetycznej ciał sztywnych oraz reguł obliczania modeli kinematyki umożliwia wyprowadzenie kompletnych modeli matematycznych prostych i złożonych kołowych robotów mobilnych. Sposób tworzenia modelu zilustrujemy na prostym przykładzie.

Przykład 11.2.5 (Traktor trójkołowy)

Rozpatrzmy zadanie wyznaczenia modelu dynamiki traktora z kołem swobodnym zaniedbując, ze względu na małe wymiary geometryczne, wpływ koła swobodnego. Z przykładów 11.2.2 i 11.2.3 wynika, że wektor współ-

rzędnych uogólnionych opisujących zachowanie traktora jest postaci

$$\mathbf{q} = (x, y, \theta, \phi_1, \phi_2)^T, \quad (11.40)$$

natomiast macierz

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -\sin \theta & 0 \\ \cos \theta & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{1}{r} & -\frac{1}{r} \\ \frac{1}{r} & -\frac{1}{r} \end{bmatrix}. \quad (11.41)$$

Przy założeniu, że koła 1 i 2 są napędzane niezależnie, macierz sterowań przybiera formę

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T. \quad (11.42)$$

Energię kinetyczną traktora, przy pominięciu energii koła swobodnego, możemy zapisać jako

$$E_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} m_c (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} I_z \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_k (\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{Q} \dot{\mathbf{q}}, \quad (11.43)$$

gdzie $\mathbf{Q}(\mathbf{q}) = \text{diag}\{m_c, m_c, I_z, I_k, I_k\}$, m_c użyto do oznaczenia całkowitej masy traktora, I_z — całkowitego momentu bezwładności traktora względem osi Z układu $X_1 Y_1 Z_1$, a I_k jest momentem bezwładności koła napędzanego względem osi X odpowiedniego układu lokalnego*. W oparciu o zależności (11.6), (11.40) oraz (11.43) wyznaczamy model dynamiki traktora

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{G}(\mathbf{q})\boldsymbol{\eta} \\ \mathbf{G}^T(\mathbf{q})\mathbf{Q}(\mathbf{q})\mathbf{G}(\mathbf{q})\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{G}^T(\mathbf{q})\mathbf{B}(\mathbf{q})\mathbf{u} \end{cases} \quad (11.44)$$

w którym $\mathbf{G}^T(\mathbf{q})\mathbf{Q}(\mathbf{q})\mathbf{G}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_c + 2I_k \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & I_z + 2I_k \frac{1}{r^2} \end{bmatrix}$, $\mathbf{G}^T(\mathbf{q})\mathbf{B}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{r} & \frac{1}{r} \\ -\frac{1}{r} & -\frac{1}{r} \end{bmatrix}$, $\mathbf{u} = (u_1, u_1)^T$. ■

Przykład 11.2.6 (Robot mobilny Ulisses)

Ponieważ kołowy robot mobilny Ulisses ma strukturę traktora trójkółowego z kołem swobodnym o pomijalnej charakterystyce geometrycznej, model jego dynamiki jest opisany równaniami (11.44). Parametry geometryczne robota podano w przykładzie 11.2.4, zaś parametry dynamiki przyjmują wartości: $m_c = 12.8[\text{kg}]$, $I_z = 0.089[\text{kg} \cdot \text{m}^2]$, $I_k = 2.5 \times 10^{-5}[\text{kg} \cdot \text{m}^2]$. ■

*Przy założeniu, że koła 1 i 2 są identyczne.

11.3 Algorytmy sterowania kołowych robotów mobilnych

Przedstawimy teraz wybrane algorytmy sterowania kołowych robotów mobilnych lub, ogólniej, układów robotycznych z więzami nieholonomicznymi. Z punktu widzenia sterowania nieholonomicznych układów mechanicznych istotną rzeczą jest określenie specyficznych własności strukturalnych tych układów, które odróżniają je od układów holonomicznych. Temu celowi służą następujące twierdzenia.

Twierdzenie 11.3.1 *Jeżeli macierz $\mathbf{G}^T(\mathbf{q})\mathbf{B}(\mathbf{q})$ w równaniach dynamiki (11.6) jest nieosobliwa, to istnieje statyczne sprzężenie zwrotne*

$$\mathbf{u}(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{q}, \mathbf{v}) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

określone równaniem

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^T(\mathbf{q})\mathbf{Q}(\mathbf{q})\mathbf{G}(\mathbf{q})\mathbf{v} + \mathbf{G}^T(\mathbf{q}) \left(\mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{G}(\mathbf{q})\boldsymbol{\eta})\mathbf{G}(\mathbf{q}) + \mathbf{Q}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{G}}(\mathbf{q}) \right) \boldsymbol{\eta} + \\ + \mathbf{G}^T(\mathbf{q})\mathbf{D}(\mathbf{q}) = \mathbf{G}^T(\mathbf{q})\mathbf{B}(\mathbf{q})\mathbf{u}, \end{aligned}$$

gdzie $\mathbf{v}$ oznacza m -wymiarowy wektor nowych sterowań, które przekształca układ (11.6) do postaci normalnej

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{G}(\mathbf{q})\boldsymbol{\eta} \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{v}. \end{cases} \quad (11.45)$$

Twierdzenie 11.3.2 *Przy założeniu, że ograniczenia fazowe są nieholonomiczne oraz $\boldsymbol{\eta}$ jest wektorem sterowań, bezdryfowy układ sterowania opisany przez pierwsze z równań (11.45) jest sterowalny[†].*

Twierdzenie 11.3.3 *Układ sterowania opisany równaniami (11.45) posiada własność osiągalności z każdego punktu postaci $(\mathbf{q}, \boldsymbol{\eta})$ (tzn. zbiór stanów osiągalnych z dowolnego punktu ma niepuste wnętrze).*

Twierdzenie 11.3.4 *Punkt równowagi $(\mathbf{q}_e, \mathbf{0})$ układu (11.45) nie jest stabilizowalny przez statyczne sprzężenie zwrotne od stanu.*

Twierdzenie 11.3.5 *Układ sterowania (11.45) nie jest linearyzowalny wokół żadnego punktu $(\mathbf{q}, \boldsymbol{\eta})$ przez statyczne sprzężenie zwrotne od stanu.*

[†]W istocie, lokalnie sterowalny w krótkim czasie.

Twierdzenie 11.3.6 *Układ sterowania (11.45) nie jest linearyzowalny dynamicznie w otoczeniu punktu równowagi $(\mathbf{q}_e, \mathbf{0})$.*

Przyjęta w dalszej części rozdziału kolejność opisywania algorytmów sterowania zmierza w kierunku wzrastającego stopnia nieznanomości modelu dynamiki. W podrozdziałach 11.3.1–11.3.4 zakładamy pełną znajomość modelu dynamiki, w podrozdziale 11.3.5 dopuszczamy nieznanomość parametryczną modelu, natomiast w podrozdziale 11.3.6 dopuszczamy strukturalną nieznanomość modelu dynamiki kołowego robota mobilnego.

11.3.1 Algorytm Corona-Pometa

Konsekwencją twierdzenia 11.3.4 jest to, że metody wykorzystujące gładkie statyczne sprzężenie zwrotne od stanu nie nadają się do rozwiązania zadania stabilizacji modelu postaci (11.45). Jednakże, przy spełnieniu pewnych warunków przez układ (11.45), zadanie stabilizacji może być rozwiązane przy użyciu zmiennego w czasie statycznego sprzężenia zwrotnego od stanu. Mówi o tym następujące twierdzenie.

Twierdzenie 11.3.7 *Rozważmy układ sterowania postaci*

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{G}(\mathbf{q})\mathbf{u} = \sum_{k=1}^m \mathbf{g}_k(\mathbf{x})\mathbf{u}_k, \quad (11.46)$$

gdzie $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$. Załóżmy, że układ (11.46) spełnia warunki:

1. *Wymiar przestrzeni*

$$\dim \operatorname{span}_{\mathbb{C}^\infty} \left\{ \operatorname{ad}_{\mathbf{g}_i}^j \mathbf{g}_k \mid k = 2, \dots, m, j \geq 0 \right\}(\mathbf{q}) = n,$$

dla $\mathbf{q}$ leżących w pewnym otoczeniu punktu $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n*}$.

2. *Pole $\mathbf{g}_1(\mathbf{q})$ można wyprostować w otoczeniu $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n\dagger}$.*

3. *Jest określona pewna funkcja $V(t, \mathbf{q})$ postaci*

$$V(t, \mathbf{q}) = \frac{1}{2}(q_1 + h(t, q_2, \dots, q_n))^2 + \frac{1}{2}q_2^2 + \dots + \frac{1}{2}q_n^2.$$

* $\operatorname{ad}_{\mathbf{g}_i}^j \mathbf{g}_k$ oznacza iterowany nawias Liego pól wektorowych, zobacz dodatek A.3.

†Zobacz twierdzenie o prostowaniu, dodatek A.3.

4. Pola $\mathbf{g}_k$, $k = 1, \dots, m$ są takie, że dla funkcji $W(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n q_i^2$ warunki

$$dW \mathbf{g}_k(\mathbf{q}) = \mathbf{0}, \quad k = 2, \dots, m,$$

oraz

$$\frac{\partial^j h(t, \mathbf{q})}{\partial t^j} = \mathbf{0}, \quad j \geq 1,$$

pociągają za sobą równość $q_2 = q_3 = \dots = q_n = 0$.

Wówczas, zachodzą następujące własności:

- a) Punkt $\mathbf{0}$ jest globalnie jednostajnie asymptotycznie stabilnym punktem równowagi układu (11.46) ze sterowaniem

$$\begin{cases} u_1 = -\frac{\partial h(t, \mathbf{q})}{\partial t} - dV(t, \mathbf{q}) \mathbf{g}_1(\mathbf{q}) \\ u_2 = -dV(t, \mathbf{q}) \mathbf{g}_2(\mathbf{q}) \\ \vdots \\ u_m = -dV(t, \mathbf{q}) \mathbf{g}_m(\mathbf{q}), \end{cases} \quad (11.47)$$

gdzie $dV(t, \mathbf{q}) = \left(\frac{\partial V(t, \mathbf{q})}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial V(t, \mathbf{q})}{\partial q_n} \right)$.

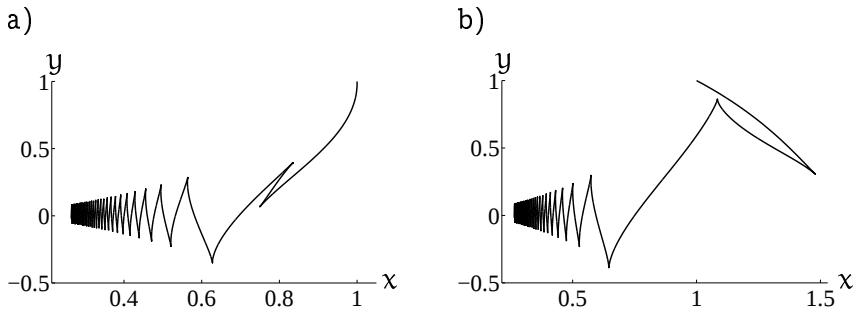
- b) Funkcja $V(t, \mathbf{q})$ jest nierosnąca na trajektoriach nieautonomicznego układu dynamicznego (11.46), (11.47), tzn.

$$\dot{V}(t, \mathbf{q}(t)) \leq 0.$$

Przykładową funkcją $h(t, \mathbf{q})$, która może być zastosowana przy wyznaczaniu stabilizującego sprzężenia zwrotnego jest

$$h(t, \mathbf{q}) = \left(\sum_{i=2}^n q_i^2 \right) \cos t.$$

Przytoczone twierdzenie podaje sposób wyznaczenia algorytmu stabilizacji układu (11.47) z funkcją Lapunowa $V(t, \mathbf{q})$. Proponowane w nim stabilizujące sprzężenie zwrotne działa poprawnie przy spełnieniu przez układ sterowania (11.46) warunków 1 i 2 twierdzenia. W przypadku prostych kołowych robotów mobilnych wykazano, że dla modelu kinematyki dowolnego typu robota mobilnego można znaleźć taką zmianę układu oraz statyczne sprzężenie zwrotne, że powstały w ten sposób nowy układ sterowania spełnia założenia twierdzenia 11.3.7. Nietrudno zauważyć, że stabilizujące



Rysunek 11.3 Trajektorie robota mobilnego Ulisses przy zastosowaniu algorytmu Corona-Pometa. Położenie początkowe wynosiło $(x(0), y(0)) = (1, 1)$, orientacja: a) $\theta(0) = 0$, b) $\theta(0) = \pi/4$.

sprzężenie zwrotne postaci (11.47) jest gładką funkcją czasu, co w efekcie pozwala na konstrukcję algorytmu stabilizacji dla postaci normalnej (11.45) modelu dynamiki kołowego robota mobilnego. W tym celu, w myśl twierdzenia 11.3.7, należy najpierw wyznaczyć sterowanie $\mathbf{u}(t)$, a następnie obliczyć sterowanie $\mathbf{v}(t)$ z zależności $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}$.

Przykład 11.3.1 (Robot mobilny Ulisses)

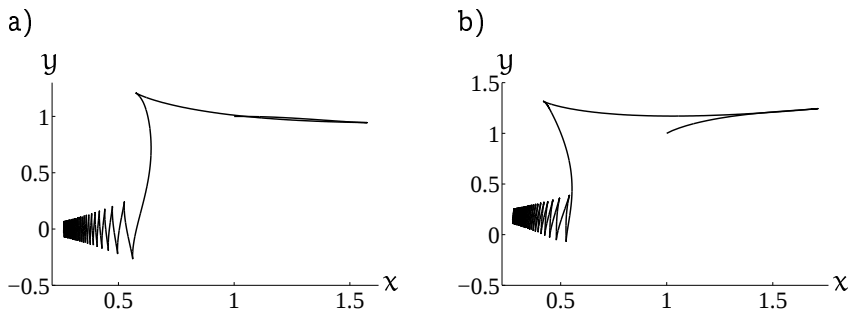
Rozważmy zadanie stabilizacji stanu postaci normalnej modelu dynamiki robota mobilnego Ulisses

$$\begin{cases} \dot{x} = -\eta_1 \sin \theta \\ \dot{y} = \eta_1 \cos \theta \\ \dot{\theta} = \eta_2 \\ \dot{\eta}_1 = u_1 \\ \dot{\eta}_2 = u_2. \end{cases} \quad (11.48)$$

Zmienne η_1 i η_2 w równaniach (11.48) mają, odpowiednio, sens prędkości liniowej i prędkości zmian orientacji ruchu robota.

Rezultaty przykładowych symulacji przy sterowaniu według algorytmu Corona-Pometa przedstawiono na rysunkach 11.3 i 11.4[‡]. Zamieszczone symulacje pokazują, że istotną wadą algorytmu Corona-Pometa jest bardzo wolna zbieżność trajektorii do punktu docelowego. Ponadto generowane trajektorie charakteryzują się częstymi zmianami kierunku ruchu. ■

[‡]W przykładach prezentowanych w tym rozdziale symulacje wykonano w środowisku MATLAB® + SIMULINK®.



Rysunek 11.4 Trajektorie robota mobilnego Ulisses przy zastosowaniu algorytmu Corona-Pometa. Położenie początkowe wynosiło $(x(0), y(0)) = (1, 1)$, orientacja: a) $\theta(0) = \pi/2$, b) $\theta(0) = 3/4\pi$.

11.3.2 Algorytm linearyzacji dynamicznej

W celu wprowadzenia podstawowych idei linearyzacji przy pomocy dynamicznego sprzężenia zwrotnego rozważmy afiniczny układ sterowania postaci

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_i)\mathbf{u}_i \quad (11.49)$$

i poddajmy go następującym przekształceniom:

- dołączenie kompensatora dynamicznego

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \mathbf{L}(\mathbf{x}, \mathbf{z})\mathbf{v} \\ \mathbf{u} = \mathbf{M}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \mathbf{N}(\mathbf{x}, \mathbf{z})\mathbf{v}, \end{cases} \quad (11.50)$$

gdzie $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^q$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$,

- statyczne sprzężenie zwrotne

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, \mathbf{z})\mathbf{w}, \quad (11.51)$$

- zmiana współrzędnych w rozszerzonej przestrzeni stanu $(\mathbf{x}, \mathbf{z})$

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, \mathbf{z}). \quad (11.52)$$

Odwzorowania (11.50), (11.52) są gładkie, natomiast połączenie układu sterowania (11.49) i kompensatora (11.50), traktowane jako układ sterowania

z wejściem $\mathbf{v}$ i wyjściem $\mathbf{u}$, powinno być odwracalne*. Wprowadzenie współrzędnych stanu ξ , pozwala uzyskać nowy układ, określony w przestrzeni stanu o wymiarze $n + q$. Mówimy, że układ afiniczny (11.49) jest *dynamicznie linearyzowalny*, jeżeli istnieje kompensator dynamiczny (11.50), sprzężenie zwrotne (11.51) oraz układ współrzędnych ϕ , takie że po ich zastosowaniu układ (11.49) przyjmuje postać liniowego układu sterowania

$$\dot{\xi} = \mathbf{A}\xi + \mathbf{B}\mathbf{v}, \quad (11.53)$$

gdzie macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są odpowiednich rozmiarów. W przypadku, kiedy układ współrzędnych $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ jest określony lokalnie, układ (11.49) nazywamy lokalnie dynamicznie linearyzowalnym.

Przykład 11.3.2 (Robot mobilny Ulisses)

Przeanalizujmy zadanie śledzenia zadanej trajektorii położenia $(x_d(t), y_d(t))$ dla postaci normalnej dynamiki robota Ulisses (11.48). Z uwagi na zadanie sterowania, które polega na śledzeniu trajektorii położenia, współrzędne (x, y) potraktujemy jako tzw. *wyjścia linearyzujące*. Przy takim wyborze wyjść linearyzujących, aby otrzymać dynamiczne sprzężenie zwrotne linearyzujące model (11.48), dwa pierwsze równania będziemy różniczkować tak długo, aż otrzymamy jawną zależność od sterowań

$$\begin{cases} \dot{x} = -\eta_1 \sin \theta \\ \ddot{x} = -\dot{u}_1 \sin \theta - \eta_1 \eta_2 \cos \theta \\ \ddot{\ddot{x}} = -\ddot{u}_1 \sin \theta - 2\dot{u}_1 \eta_2 \cos \theta - u_2 \eta_1 \cos \theta + \eta_1 \eta_2^2 \sin \theta \\ \dot{y} = \eta_1 \cos \theta \\ \ddot{y} = u_1 \cos \theta - \eta_1 \eta_2 \sin \theta \\ \ddot{\ddot{y}} = \dot{u}_1 \cos \theta - 2\dot{u}_1 \eta_2 \sin \theta - u_2 \eta_1 \sin \theta + \eta_1 \eta_2^2 \cos \theta. \end{cases} \quad (11.54)$$

Potraktujmy w powyższych wyrażeniach u_1 jako nową zmienną stanu, wprowadźmy kompensator dynamiczny

$$\dot{u}_1 = v_1, \quad (11.55)$$

oraz podstawmy

$$u_2 = v_2. \quad (11.56)$$

*Tzn. dla każdego stanu $(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ znajomość przebiegu wyjścia $\mathbf{u}(\cdot)$ pozwala wyznaczyć sterowanie $\mathbf{v}(\cdot)$ generujące to wyjście.

Wykonane przekształcenia pozwalają zapisać równania (11.54) w postaci

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \theta & -\eta_1 \cos \theta \\ \cos \theta & -\eta_1 \sin \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2u_1\eta_2 \cos \theta + \eta_1\eta_2^2 \sin \theta \\ -2u_1\eta_2 \sin \theta + \eta_1\eta_2^2 \cos \theta \end{pmatrix} = \\ = \mathbf{D}(\eta_1, \theta) \mathbf{v} + \boldsymbol{\alpha}(u_1, \eta_1, \eta_2, \theta).$$

Zauważmy, że macierz $\mathbf{D}(\eta_1, \theta)$ stojąca przed nowymi zmiennymi sterującymi v_1 i v_2 jest nieosobliwa pod warunkiem, że $\eta_1 \neq 0$, co oznacza, że robot mobilny musi się poruszać z niezerową prędkością liniową. Przy spełnieniu warunku $\eta_1 \neq 0$ możemy zastosować w układzie (11.54)–(11.56) statyczne sprzężenie zwrotne

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = -\mathbf{D}^{-1}(\eta_1, \theta) \boldsymbol{\alpha}(u_1, \eta_1, \eta_2, \theta) + \mathbf{D}^{-1}(\eta_1, \theta) \mathbf{w}. \quad (11.57)$$

Ostatecznie dochodzimy do konkluzji, że układ (11.48) wraz z kompensatorem (11.55), (11.56) i sprzężeniem zwrotnym (11.57) ma we współrzędnych $\boldsymbol{\xi} = \varphi(x, y, \theta, \eta_1, \eta_2, u_1)$ określonych zależnościami

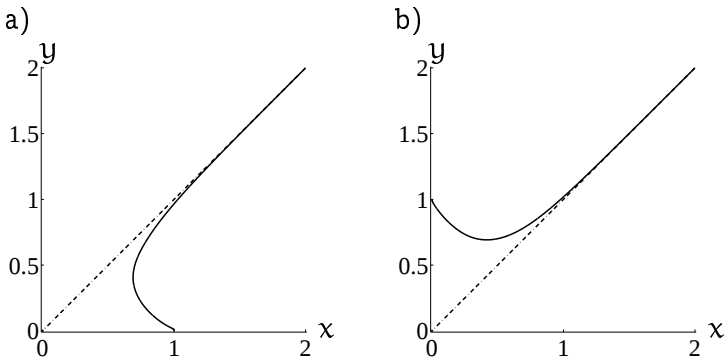
$$\begin{cases} \xi_1 = x \\ \xi_2 = -\eta_1 \sin \theta \\ \xi_3 = -u_1 \sin \theta - \eta_1 \eta_2 \cos \theta \\ \xi_4 = y \\ \xi_5 = \eta_1 \cos \theta \\ \xi_6 = u_1 \cos \theta - \eta_1 \eta_2 \sin \theta \end{cases}$$

postać liniową

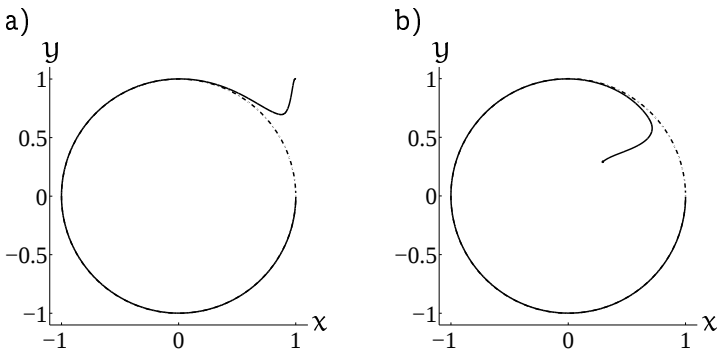
$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 & \dot{\xi}_4 = \xi_5 \\ \dot{\xi}_2 = \xi_3 & \dot{\xi}_5 = \xi_6 \\ \dot{\xi}_3 = w_1 & \dot{\xi}_6 = w_2. \end{cases} \quad (11.58)$$

Możemy zatem stwierdzić, że przy warunku $\eta_1 \neq 0$ układ (11.48) jest dynamicznie linearyzowalny. Przy zastosowaniu klasycznych metod liniowej teorii regulacji łatwo otrzymać algorytm śledzenia trajektorii zadanej $(x_d(t), y_d(t))$ w układzie (11.58):

$$\begin{cases} w_1 = \ddot{x}_d - k_2(\xi_3 - \ddot{x}_d) - k_1(\xi_2 - \dot{x}_d) - k_0(\xi_1 - x_d) \\ w_2 = \ddot{y}_d - l_2(\xi_6 - \ddot{y}_d) - l_1(\xi_5 - \dot{y}_d) - l_0(\xi_4 - y_d). \end{cases} \quad (11.59)$$



Rysunek 11.5 Zachowanie robota mobilnego Ulisses przy zastosowaniu algorytmu linearyzacji dynamicznej do śledzenia zadanej trajektorii położenia (11.60).



Rysunek 11.6 Zachowanie robota mobilnego Ulisses przy zastosowaniu algorytmu linearyzacji dynamicznej do śledzenia zadanej trajektorii położenia (11.61).

Na mocy kryterium Hurwitza, przy doborze wzmocnień spełniających warunki $k_i, l_i, k_1 k_2, l_1 l_2 > 0$, $i = 1, 2$, błąd śledzenia zanika eksponencjalnie do zera. Algorytm linearyzacji dynamicznej kołowego robota mobilnego Ulisses zastosowaliśmy do śledzenia dwóch zadanych trajektorii położenia

$$\xi_d^1(t) = \begin{pmatrix} \xi_{1d}(t) \\ \xi_{4d}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_d(t) \\ y_d(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t}{5} \\ \frac{t}{5} \end{pmatrix}, \quad (\text{linia prosta}), \quad (11.60)$$

$$\xi_d^1(t) = \begin{pmatrix} \xi_{1d}(t) \\ \xi_{4d}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_d(t) \\ y_d(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \frac{t}{5} \\ r \sin \frac{t}{5} \end{pmatrix}, \quad r = 1[\text{m}], \quad (\text{okrąg}), \quad (11.61)$$

przy różnych warunkach początkowych. Wybrane wyniki symulacji komputerowych zostały przedstawione na rysunkach 11.5 i 11.6. Jak widać,

algorytm sterowania oparty na metodzie linearyzacji dynamicznej znakomicie nadaje się do śledzenia trajektorii zadanej wyjść linearyzujących. Niewątpliwą jego zaletą jest globalna eksponencjalna stabilność. Należy jednak pamiętać, że śledzenie w przypadku robota mobilnego Ulisses dotyczy jedynie trajektorii wyjść linearyzujących oraz że algorytm wymaga, aby robot był w ruchu. ■

11.3.3 Algorytm Walsha-Tilbury’ego-Sastry’ego-Murraya-Laumonda

Rozważmy postać normalną dynamiki kołowego robota mobilnego (11.45), którą przy oznaczeniach $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \boldsymbol{\eta} \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \mathbf{G}(\mathbf{q})\boldsymbol{\eta} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbb{I}_m \end{bmatrix}$ można przedstawić w postaci afinicznego układu sterowania

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (11.62)$$

Założmy, że $\mathbf{x}_d(t)$ oznacza trajektorię zadaną, natomiast $\mathbf{u}_d(t)$ — sterowanie odpowiadające tej trajektorii. Przybliżenie liniowe modelu (11.62) wzdłuż trajektorii zadanej jest nieautonomicznym liniowym układem sterowania postaci

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{A}(t)\boldsymbol{\xi} + \mathbf{B}(t)\mathbf{v}, \quad (11.63)$$

gdzie

$$\mathbf{A}(t) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_d(t))}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial (\mathbf{g}(\mathbf{x}_d(t))\mathbf{u}_d(t))}{\partial \mathbf{x}}, \quad \mathbf{B}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}_d(t)).$$

Niech macierz $\boldsymbol{\Phi}(t, s)$ będzie rozwiązaniem równania różniczkowego

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\Phi}(t, s) = \mathbf{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t, s)$$

przy warunku początkowym $\boldsymbol{\Phi}(s, s) = \mathbb{I}_n$.

Dla pewnego $\alpha > 0$ zdefiniujemy macierz*

$$\mathbf{H}_c(s, t) = \int_s^t e^{6\alpha(s-\tau)} \boldsymbol{\Phi}(s, \tau) \mathbf{B}(\tau) \mathbf{B}^T(\tau) \boldsymbol{\Phi}^T(s, \tau) d\tau.$$

Jeżeli istnieje takie $\delta > 0$, że macierz $\mathbf{H}_c(t, t + \delta)$ jest nieosobliwa dla każdej chwili t , wówczas macierz

$$\mathbf{P}_c(t) = \mathbf{H}_c^{-1}(t, t + \delta)$$

jest dobrze określona.

*Porównaj z macierzą Grama (4.4).

Przyjęte założenia pozwalają udowodnić następujące twierdzenie.

Twierdzenie 11.3.8 *Jeżeli istnieją liczby $p_c^m, p_c^M > 0$, takie że*

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad 0 < p_c^m \mathbf{z}^T \mathbf{z} < \mathbf{z}^T \mathbf{P}_c(t) \mathbf{z} < p_c^M \mathbf{z}^T \mathbf{z},$$

wtedy, dla dowolnej ciągłej i ograniczonej funkcji $\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow [\frac{1}{2}, \infty)$, istnieje zależne od czasu sprzężenie zwrotne postaci

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_d(t) - \gamma(t) \mathbf{B}^T(t) \mathbf{P}_c(t) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_d), \quad (11.64)$$

które zapewnia lokalne śledzenie trajektorii $\mathbf{x}_d(t)$ w układzie sterowania (11.62), z błędem zbieżnym do zera jednostajnie i wykładniczo, przy czym prędkość zbieżności jest większa od

$$2\alpha p_c^m (p_c^M)^{-1} > 0.$$

Ze względu na to, że algorytm (11.64) wymaga znajomości trajektorii zadanej w przyszłości, używa się modyfikacji tego algorytmu, która polega na wprowadzeniu macierzy

$$\mathbf{P}_r(t) = \mathbf{H}_c^{-1}(t, t - \delta),$$

która zależy wyłącznie od wartości trajektorii zadanej w przeszłości. Jeżeli jest znana macierz $\mathbf{P}_r(t)$, algorytm sterowania definiujemy w następujący sposób.

Twierdzenie 11.3.9 *Jeżeli istnieją liczby $p_r^m, p_r^M > 0$ spełniające nierówność*

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad 0 < p_r^m \mathbf{z}^T \mathbf{z} < \mathbf{z}^T \mathbf{P}_r(t) \mathbf{z} < p_r^M \mathbf{z}^T \mathbf{z},$$

wtedy, dla dowolnej ciągłej i ograniczonej funkcji $\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow [\frac{1}{2}, \infty)$, istnieje zależne od czasu sprzężenie zwrotne postaci

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_d(t) - \gamma(t) \mathbf{B}^T(t) \mathbf{P}_r(t) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_d), \quad (11.65)$$

które zapewnia lokalną jednostajną eksponencjalną stabilność śledzenia trajektorii zadanej $\mathbf{x}_d(t)$ w układzie (11.62), z prędkością zbieżności błędu śledzenia większą od α .

Algorytm śledzenia Walsha-Tilbury'ego-Sastry'ego-Murraya-Laumonda jest złożony obliczeniowo. Nawet w tak prostym przypadku jak model dynamiki robota Ulisses przy trajektorii zadanej będącej łukiem okręgu, elementy

macierzy $\mathbf{H}_c$ mają na tyle skomplikowaną postać, że obliczenie w postaci symbolicznej elementów macierzy $\mathbf{P}_r$ i wektora sterowania $\mathbf{u}(t)$ jest praktycznie niemożliwe. Wadą algorytmu jest także jego lokalna zbieżność[†]. Do zalet algorytmu Walsha-Tilbury'ego-Sastry'ego-Murraya-Laumonda należy możliwość śledzenia zarówno współrzędnych położenia, jak i orientacji robota.

11.3.4 Sterowanie we współrzędnych linearyzujących

Rozważmy ograniczenia fazowe w postaci Pfaffa

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (11.66)$$

określające kinematykę kołowego robota mobilnego (11.8)

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{G}(\mathbf{q})\mathbf{u} = \sum_{i=1}^m \mathbf{g}_i(\mathbf{q})u_i. \quad (11.67)$$

Wybermy odwzorowanie $\mathbf{h} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, którego macierz Jacobiego $\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q})$ ma rząd m i uzupełnijmy je odwzorowaniem $\mathbf{k} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ spełniającym warunek

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \mathbf{q}} \end{bmatrix}(\mathbf{q}) = n.$$

Przy takim wyborze przekształcenie

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{h}(\mathbf{q}) \\ \mathbf{k}(\mathbf{q}) \end{pmatrix} \quad (11.68)$$

jest lokalnym dyfeomorfizmem przestrzeni stanu. Z powodów, które staną się jasne nieco później, nowe współrzędne $\boldsymbol{\xi}$ będziemy nazywać *linearyzującymi*. We współrzędnych linearyzujących ograniczenia fazowe (11.66) przyjmą postać

$$\bar{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\xi})\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{0}. \quad (11.69)$$

W celu wyznaczenia macierzy $\bar{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\xi})$ zastosujemy następujące rozumowanie. Biorąc pod uwagę zależność (11.68), formułę (11.69) możemy przepisać jako

$$\bar{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{q})) \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \mathbf{q}} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}.$$

[†]Symulacje pokazują, że przy dużym błędzie początkowym algorytm nie zapewnia zbieżności do trajektorii zadanej.

Wobec zależności (11.66), musi istnieć macierz $\mathbf{M}(\mathbf{q})$, taka że

$$\bar{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{q})) \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{q}} \\ \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \mathbf{q}} \end{bmatrix} = \mathbf{M}(\mathbf{q}) \mathbf{A}(\mathbf{q}). \quad (11.70)$$

Ponieważ $\mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$, po pomnożeniu obu stron równości (11.70) prawostronnie przez $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ otrzymujemy

$$\bar{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{q})) \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{G}(\mathbf{q}) \\ \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{G}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (11.71)$$

Zauważmy, że macierz $\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{G}(\mathbf{q})$ jest nieosobliwa. Podzielimy teraz macierz $\bar{\mathbf{A}}$ na bloki $\bar{\mathbf{A}}_1$ i $\bar{\mathbf{A}}_2$ rozmiarów $l \times m$ oraz $l \times l$. Lokalnie* $\bar{\mathbf{A}}_2$ jest rzędu l . Zależność (11.71) pozwala wyliczyć macierz $\bar{\mathbf{A}}_1$ jako

$$\bar{\mathbf{A}}_1(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{q})) = -\bar{\mathbf{A}}_2(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{q})) \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{G}(\mathbf{q}) \left(\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{G}(\mathbf{q}) \right)^{-1},$$

skąd wynika, że ograniczenia fazowe (11.69) można przedstawić w postaci

$$[-\mathbf{H}(\boldsymbol{\xi}) \quad \mathbb{I}_l] \dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{0}, \quad (11.72)$$

z macierzą $\mathbf{H}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{G}(\boldsymbol{\varphi}^{-1}(\boldsymbol{\xi})) \left(\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{G}(\boldsymbol{\varphi}^{-1}(\boldsymbol{\xi})) \right)^{-1}$, zaś kinematykę (11.67) jako

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{L}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{v}, \quad (11.73)$$

gdzie $\mathbf{L}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_m \\ \mathbf{H}(\boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$. Zmiana układu współrzędnych $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{q})$ zależy jedynie od postaci ograniczeń fazowych (własności geometrycznych), zatem współrzędne te mogą być używane pomimo nieznajomości parametrów dynamiki. Równania dynamiki robota mobilnego we współrzędnych $\boldsymbol{\xi}$, podlegającego więzom (11.72) zapiszemy zgodnie z Zasadą d'Alemberta

$$\bar{\mathbf{Q}}(\boldsymbol{\xi}) \ddot{\boldsymbol{\xi}} + \bar{\mathbf{C}}(\boldsymbol{\xi}, \dot{\boldsymbol{\xi}}) \dot{\boldsymbol{\xi}} + \bar{\mathbf{D}}(\boldsymbol{\xi}) = \bar{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{u} + \begin{bmatrix} -\mathbf{H}^T(\boldsymbol{\xi}) \\ \mathbb{I}_l \end{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}, \quad (11.74)$$

$\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^l$. Standardowa procedura eliminacji wektora mnożników Lagrange'a

*Przy analitycznej zależności $\bar{\mathbf{A}}(\mathbf{q})$ — prawie wszędzie.

oraz wykorzystanie równości

$$\ddot{\xi} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_m \\ \mathbf{H}(\xi) \end{bmatrix} \dot{\mathbf{v}} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{H}}(\xi) \end{bmatrix} \mathbf{v},$$

proceedzi do równań dynamiki postaci

$$\mathbf{J}(\xi)\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{C}(\xi, \mathbf{v})\mathbf{v} + \mathbf{D}(\xi) = \mathbf{B}(\xi)\mathbf{u}, \quad (11.75)$$

w których $\mathbf{J}(\xi) = \mathbf{L}^T(\xi)\bar{\mathbf{Q}}(\xi)\mathbf{L}(\xi)$, $\mathbf{B}(\xi) = \mathbf{L}^T(\xi)\bar{\mathbf{B}}(\xi)$, $\mathbf{D}(\xi) = \mathbf{L}^T(\xi)\bar{\mathbf{D}}(\xi)$, $\mathbf{C}(\xi, \mathbf{v}) = \mathbf{L}^T(\xi)\left(\bar{\mathbf{C}}(\xi, \mathbf{L}(\xi)\mathbf{v})\mathbf{L}(\xi) + \bar{\mathbf{Q}}(\xi)\dot{\mathbf{L}}(\xi)\right)$. Ostatecznie, z połączenia wyrażeń (11.73) i (11.75), otrzymujemy równania kinematyki i dynamiki robota mobilnego we współrzędnych linearyzujących ξ

$$\begin{cases} \dot{\xi}^1 = \mathbf{v} & (11.76) \\ \mathbf{J}(\xi)\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{C}(\xi, \mathbf{v})\mathbf{v} + \mathbf{D}(\xi) = \mathbf{B}(\xi)\mathbf{u} & (11.77) \\ \dot{\xi}^2 = \mathbf{H}(\xi)\mathbf{v}. & (11.78) \end{cases}$$

Nietrudno zauważyć, że macierze $\mathbf{H}(\xi)$ i $\mathbf{B}(\xi)$ są zależne jedynie od parametrów geometrycznych robota mobilnego. Zależność od parametrów dynamiki macierzy inercji $\mathbf{J}(\xi)$, macierzy $\mathbf{C}(\xi, \mathbf{v})$ i wektora $\mathbf{D}(\xi)$ może być przedstawiona w następującej postaci:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\xi) &= \mathbf{J}_0(\xi) + \sum_{i=1}^p \mathbf{J}_i(\xi)\theta_i, \\ \mathbf{C}(\xi, \mathbf{v}) &= \mathbf{C}_0(\xi, \mathbf{v}) + \sum_{i=1}^p \mathbf{C}_i(\xi, \mathbf{v})\theta_i, \\ \mathbf{D}(\xi) &= \mathbf{D}_0(\xi) + \sum_{i=1}^p \mathbf{D}_i(\xi)\theta_i. \end{aligned}$$

Parametry θ_i , $i = 1, 2, \dots, p$, występujące w powyższych zależnościach nazywamy *barycentrycznymi*.

Nietrudno wykazać, że macierz $\dot{\mathbf{J}}(\xi) - 2\mathbf{C}(\xi, \mathbf{v})$ jest skośnie symetryczna na trajektoriach układu (11.76)–(11.78). Macierze $\mathbf{H}(\xi)$, $\mathbf{J}(\xi)$, $\mathbf{D}(\xi)$ i $\mathbf{B}(\xi)$ są ograniczone (klasy $\mathbb{B}$), a macierz $\mathbf{C}(\xi, \mathbf{v})$ spełnia warunek $\|\mathbf{C}(\xi, \mathbf{v})\| \leq C\|\mathbf{v}\|$. Wynika stąd, że model dynamiki kołowego robota mobilnego we współrzędnych linearyzujących (11.76)–(11.77) ma podobne własności strukturalne do modelu dynamiki manipulatora (układu holonomicznego) o m stopniach

swobody[†]. Różnica polega jednak na tym, że model dynamiki robota mobilnego zawiera dodatkowo podsystem opisany równaniem (11.78).

Zostało udowodnione, że dla każdego z pięciu podstawowych typów robotów mobilnych (zobacz twierdzenie 11.2.1) można skonstruować wyjścia linearyzujące w taki sposób, aby składowe wektora ξ^1 były nowymi współrzędnymi położenia lokalnego układu odniesienia umieszczonego na nadwoziu robota, natomiast składowe wektora ξ^2 opisywały orientację robota, kąty obrotu kół oraz kąty orientacji kół w lokalnym układzie odniesienia.

Przykład 11.3.3 (Robot mobilny Ulisses)

Dla robota mobilnego Ulisses proponujemy następującą definicję współrzędnych linearyzujących ξ^1 i ξ^2

$$\xi^1 = \begin{pmatrix} x - e \sin \theta \\ y + e \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{12} \end{pmatrix}, \quad \xi^2 = \begin{pmatrix} \theta \\ \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad e \neq 0, \quad (11.79)$$

i obliczamy macierz

$$H(\xi) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{e} \cos \theta & -\frac{1}{e} \sin \theta \\ \frac{1}{r} \sin \theta + \frac{1}{er} \cos \theta & -\frac{1}{r} \cos \theta + \frac{1}{er} \sin \theta \\ -\frac{1}{r} \sin \theta + \frac{1}{er} \cos \theta & \frac{1}{r} \cos \theta + \frac{1}{er} \sin \theta \end{bmatrix}.$$

Jak łatwo zauważyć, macierz $H(\xi)$ jest ograniczona. Składowe wektora ξ^1 opisują nowe położenie lokalnego układu odniesienia, natomiast składowe wektora ξ^2 — orientację robota i kąty obrotu kół. Energia kinetyczna robota mobilnego we współrzędnych ξ

$$E_k(\xi, \dot{\xi}) = \frac{1}{2}(I_z + 2m_k l^2)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(m + 2m_k) \left(\dot{\xi}_{11}^2 + 2\dot{\xi}_{11}\dot{\theta}e \cos \theta + \right. \\ \left. + \dot{\xi}_{12}^2 + 2\dot{\xi}_{12}\dot{\theta}e \sin \theta + e^2\dot{\theta}^2 \right) + \frac{1}{2}I_k (\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2),$$

gdzie

m — masa nadwozia robota,

I_z — moment bezwładności nadwozia robota względem osi Z układu $X_1 Y_1 Z_1$,

m_k — masa koła,

[†]Zobacz podrozdział 5.2.

I_k — moment bezwładności koła względem osi $\times$ odpowiedniego układu lokalnego,

$m + 2m_k$ — masa całkowita robota,

$I_z + 2m_k l^2$ — całkowity moment bezwładności robota.

Przy wyborze parametrów barycentrycznych $\theta_1 = I_k$, $\theta_2 = m + 2m_k$, $\theta_3 = I_z + 2m_k l^2$, macierze $\mathbf{J}(\xi)$, $\mathbf{C}(\xi, \mathbf{v})$ i $\mathbf{B}(\xi)$ można przedstawić jako:

$$\mathbf{J}(\xi) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{J}_i(\xi) \theta_i,$$

$$\mathbf{C}(\xi, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{C}_i(\xi, \mathbf{v}) \theta_i,$$

$$\mathbf{B}(\xi) = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \sin \theta + \frac{1}{er} \cos \theta & -\frac{1}{r} \sin \theta + \frac{1}{er} \cos \theta \\ -\frac{1}{r} \cos \theta + \frac{1}{er} \sin \theta & \frac{1}{r} \cos \theta + \frac{1}{er} \sin \theta \end{bmatrix},$$

przy oznaczeniach

$$\mathbf{J}_1(\xi) = \begin{bmatrix} \left(\sin^2 \theta + \frac{l^2}{e^2} \cos^2 \theta \right) \frac{2}{r^2} & \sin \theta \cos \theta \left(\frac{l^2}{e^2} - 1 \right) \frac{2}{r^2} \\ \sin \theta \cos \theta \left(\frac{l^2}{e^2} - 1 \right) \frac{2}{r^2} & \left(\cos^2 \theta + \frac{l^2}{e^2} \sin^2 \theta \right) \frac{2}{r^2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{J}_2(\xi) = \begin{bmatrix} \sin^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_3(\xi) = \begin{bmatrix} \frac{1}{e^2} \cos^2 \theta & \frac{1}{e^2} \sin \theta \cos \theta \\ \frac{1}{e^2} \sin \theta \cos \theta & \frac{1}{e^2} \sin^2 \theta \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_1(\xi, \mathbf{v}) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{er^2} \sin \theta \cos \theta \left(1 - \frac{l^2}{e^2} \right) & -\frac{2}{er^2} \left(\sin^2 \theta + \frac{l^2}{e^2} \cos^2 \theta \right) \\ (v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta) & (v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta) \\ \frac{2}{er^2} \left(\cos^2 \theta + \frac{l^2}{e^2} \sin^2 \theta \right) & -\frac{2}{er^2} \sin \theta \cos \theta \left(-1 + \frac{l^2}{e^2} \right) \\ (v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta) & (v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_2(\xi, \mathbf{v}) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{e} \sin \theta \cos \theta & -\frac{1}{2e} (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \\ (v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta) & (v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta) \\ -\frac{1}{2e} (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) & \frac{1}{e} \sin \theta \cos \theta \\ (v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta) & (v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_3(\xi, \mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{e^3} \sin \theta \cos \theta & -\frac{1}{e^3} \cos^2 \theta \\ (v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta) & (v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta) \\ \frac{1}{e^3} \sin^2 \theta & -\frac{1}{e^3} \sin \theta \cos \theta \\ (v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta) & (v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta) \end{bmatrix}.$$

Łatwo sprawdzić, że w modelu dynamiki kołowego robota mobilnego Uli-ses macierze $\mathbf{J}(\xi)$, $\mathbf{C}(\xi, \mathbf{v})$ i $\mathbf{B}(\xi)$ są ograniczone ze względu na ξ , a norma macierzy $\mathbf{C}(\xi, \mathbf{v})$ jest ograniczona przez liniową funkcję normy $\|\mathbf{v}\|$. ■

Celem naszych dalszych rozważań będzie następujące zadanie sterowania układu (11.76)–(11.78):

Mając daną trajektorię $\xi_d^1(t)$, klasy $\mathbb{C}^2$, znaleźć sterowanie $\mathbf{u}(t)$, takie że w układzie (11.76)–(11.78) błąd śledzenia trajektorii położenia $\mathbf{e}(t) = \xi^1(t) - \xi_d^1(t)$ dąży do $\mathbf{0}$ przy $t \rightarrow +\infty$, a prędkość $\dot{\xi}^2(t)$ jest ograniczona (wszędzie lub prawie wszędzie).

Założmy, że składowe wektora $\xi^1(t)$ opisują położenie lokalnego układu odniesienia związanego z poruszającym się robotem, natomiast wektor $\xi^2(t)$ składa się ze współrzędnych opisujących orientację robota, kąty obrotu kół oraz orientacje kół względem lokalnego układu odniesienia. Tym sposobem rozpatrywane zadanie sterowania sprowadza się do wymagania śledzenia położenia robota we współrzędnych $\xi^1(t)$, natomiast ograniczoność wektora $\dot{\xi}^2(t)$ zapewni ograniczoność prędkości zmian orientacji robota i prędkości obrotu kół. Zauważmy, że jeżeli macierz sterowań $\bar{\mathbf{B}}(\xi)$ w wyrażeniu (11.74) jest pełnego rzędu, to macierz $\mathbf{B}(\xi)$ w układzie (11.76)–(11.78) jest nieosobliwa. W takiej sytuacji i przy założeniu, że parametry barycentryczne układu (11.77) są znane, zastosowanie sprzężenia zwrotnego

$$\mathbf{u}(\xi, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{B}^{-1}(\xi) (\mathbf{J}(\xi)\mathbf{w} + \mathbf{C}(\xi, \mathbf{v})\mathbf{v} + \mathbf{D}(\xi)), \quad (11.80)$$

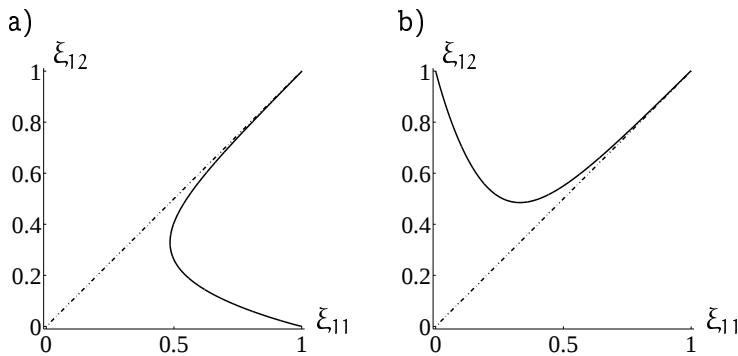
w którym $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$ oznacza nowy wektor sterowań, pozwala na linearyzację podsystemu (11.76)–(11.77)

$$\begin{cases} \dot{\xi}^1 = \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{w} \\ \dot{\xi}^2 = \mathbf{H}(\xi)\mathbf{v}. \end{cases} \quad (11.81)$$

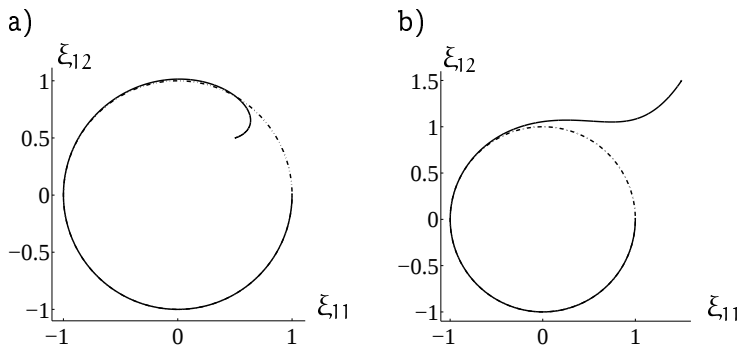
Własność ta tłumaczy nazwę *współrzędne linearyzujące*. Jeżeli $\xi_d^1(\cdot) \in \mathbb{C}^2$, to wybierając sterowanie $\mathbf{w}$ w postaci regulatora PD z korekcją

$$\mathbf{w} = \ddot{\xi}_d^1 - \mathbf{R}_1 \dot{\mathbf{e}} - \mathbf{R}_0 \mathbf{e}, \quad (11.82)$$

gdzie $\mathbf{e} = \xi^1 - \xi_d^1$, z diagonalnymi, dodatnio określonymi macierzami wzmocnień $\mathbf{R}_0$, $\mathbf{R}_1$, uzyskujemy eksponencjalną stabilność błędu śledzenia $\mathbf{e}$ oraz jego pochodnej $\dot{\mathbf{e}}$. Dalsza analiza zachowania układu (11.81) ze sterowaniem (11.82) pozwala wykazać następujący rezultat.



Rysunek 11.7 Zachowanie robota mobilnego Ulisses przy śledzeniu zadanej trajektorii położenia (11.60) we współrzędnych linearyzujących.



Rysunek 11.8 Zachowanie robota mobilnego Ulisses przy śledzeniu zadanej trajektorii położenia (11.61) we współrzędnych linearyzujących.

Twierdzenie 11.3.10 Załóżmy, że prędkości zadane $\dot{\xi}_d^1(\cdot) \in \mathbb{B}$ i że macierz $H(\xi)$ w układzie (11.81) jest ograniczona. Wówczas, prędkości $\dot{\xi}^2(t)$ w układzie (11.81) ze sterowaniem (11.82) są ograniczone, $\dot{\xi}^2(\cdot) \in \mathbb{B}$, oraz istnieją liczby a, b , takie że współrzędne $\|\dot{\xi}^2(t)\| \leq a + bt$.

Przykład 11.3.4 (Robot mobilny Ulisses)

Algorytm sterowania przy użyciu wyjść linearyzujących zastosowaliśmy do robota Ulisses. Przykładowe wyniki badań symulacyjnych przedstawiliśmy na rysunkach 11.7 i 11.8. Macierze wzmocnień wybraliśmy równe $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}_1 = \text{diag}\{5\}$. Przedmiotem badań było zachowanie robota mobilnego przy różnych zadanych trajektoriach położenia i stanach początkowych. Symulacje potwierdziły eksponencjalną zbieżność błędu śledzenia $\mathbf{e}$ oraz ograniczoną orientację $\theta(t)$ robota mobilnego. ■

11.3.5 Sterowanie adaptacyjne we współrzędnych linearyzujących

Algorytmy sterowania kołowych robotów mobilnych opisane w poprzednich podrozdziałach wykorzystywały pełną znajomość modeli kinematyki i dynamiki. Obecnie założymy, że parametry barycentryczne modelu dynamiki (11.76)–(11.78) są nieznane i rozważymy następujące zadanie sterowania adaptacyjnego.

Znaleźć prawo sterowania i algorytm estymacji parametrów dynamiki, które w układzie opisanym równaniami (11.76)–(11.78) zapewniają śledzenie trajektorii zadanej $\xi_d^1(t)$ i ograniczoność prędkości $\dot{\xi}^2(t)$.

Z uwagi na podobieństwo strukturalne układu sterowania (11.76)–(11.77) do modelu dynamiki robota manipulacyjnego możemy przypuszczać, że niektóre spośród algorytmów sterowania adaptacyjnego robotów manipulacyjnych przedstawionych w rozdziale 6.2 dostarczą poprawnego rozwiązania adaptacyjnego zadania sterowania kołowych robotów mobilnych. Okazuje się, że tak jest istotnie, prawdziwy bowiem jest następujący rezultat.

Twierdzenie 11.3.11 *Niech trajektoria zadana $\xi_d^1(\cdot) \in \mathbb{C}^2$ i niech macierz $H(\xi)$ w układzie (11.76)–(11.77) będzie ograniczona. Wówczas, jeżeli dla każdego ξ^2 algorytm sterowania adaptacyjnego zastosowany do układu (11.76)–(11.77) zapewnia ograniczoność i asymptotyczną stabilność błędu śledzenia $e = \xi^1 - \xi_d^1$ oraz ograniczoność $\dot{e}$, to prędkości $\dot{\xi}^2(t)$ w układzie z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego będą ograniczone ($\dot{\xi}^2(\cdot) \in \mathbb{B}$). Jeżeli dodatkowo $\dot{\xi}_d^1(\cdot) \in \mathbb{L}_1$ oraz algorytm sterowania adaptacyjnego zapewnia stabilność eksponencjalną, to współrzędne $\xi^2(t)$ będą ograniczone prawie wszędzie ($\xi^2(\cdot) \in \mathbb{L}_\infty$)*.*

Przykład 11.3.5 (Algorytm Slotine’a-Li dla robota mobilnego)

Zastosujmy do modelu kołowego robota mobilnego we współrzędnych linearyzujących klasyczny algorytm sterowania adaptacyjnego Slotine’a-Li, który zapewnia stabilność asymptotyczną błędu śledzenia. Algorytm ten ma postać

$$u = B^{-1}(\xi) \left(\hat{J}(\xi) \ddot{\xi}_r^1 + \hat{C}(\xi, \dot{\xi}^1) \dot{\xi}_r^1 + \hat{D}(\xi) - K_d s \right), \quad (11.83)$$

*Zobacz dodatek A.2.

gdzie

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{J}}(\boldsymbol{\xi}) &= \mathbf{J}_0(\boldsymbol{\xi}) + \sum_{i=1}^p \mathbf{J}_i(\boldsymbol{\xi}) \hat{\boldsymbol{\theta}}_i, \\
 \hat{\mathbf{C}}(\boldsymbol{\xi}, \dot{\boldsymbol{\xi}}^1) &= \mathbf{C}_0(\boldsymbol{\xi}, \dot{\boldsymbol{\xi}}^1) + \sum_{i=1}^p \mathbf{C}_i(\boldsymbol{\xi}, \dot{\boldsymbol{\xi}}^1) \hat{\boldsymbol{\theta}}_i, \\
 \hat{\mathbf{D}}(\boldsymbol{\xi}) &= \mathbf{D}_0(\boldsymbol{\xi}) + \sum_{i=1}^p \mathbf{D}_i(\boldsymbol{\xi}) \hat{\boldsymbol{\theta}}_i, \\
 \mathbf{K}_d > \mathbf{0} &\text{ — diagonalna macierz wzmocnienia rozmiaru } m \times m, \\
 \boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)^T &\in \mathbb{R}^p \text{ — wektor nieznanych parametrów barycentrycznych,} \\
 \hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_p)^T &\in \mathbb{R}^p \text{ — wektor estymowanych wartości parametrów barycentrycznych,} \\
 \tilde{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta} &\text{ — błąd estymacji,} \\
 \mathbf{e} = \boldsymbol{\xi}^1 - \boldsymbol{\xi}_d^1 &\in \mathbb{R}^m \text{ — błąd śledzenia,} \\
 \dot{\boldsymbol{\xi}}_r^1 = \dot{\boldsymbol{\xi}}_d^1 - \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{e} &\text{ — prędkość zmian sygnału odniesienia,} \\
 \mathbf{s} = \dot{\boldsymbol{\xi}}^1 - \dot{\boldsymbol{\xi}}_r^1 = \dot{\mathbf{e}} + \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{e} &\in \mathbb{R}^m \text{ — zmienna ślizgu,} \\
 \boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda}^T > \mathbf{0} &\text{ — macierz rozmiaru } m \times m.
 \end{aligned}$$

Parametry barycentryczne są estymowane stosownie do zależności

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\boldsymbol{\Gamma}^{-1} \mathbf{Y}^T(\boldsymbol{\xi}, \dot{\boldsymbol{\xi}}^1, \dot{\boldsymbol{\xi}}_r^1, \ddot{\boldsymbol{\xi}}_r^1) \mathbf{s}, \quad (11.84)$$

w której i -ta kolumna macierzy $\mathbf{Y}(\boldsymbol{\xi}, \dot{\boldsymbol{\xi}}^1, \dot{\boldsymbol{\xi}}_r^1, \ddot{\boldsymbol{\xi}}_r^1)$, $i = 1, 2, \dots, p$ jest zdefiniowana jako

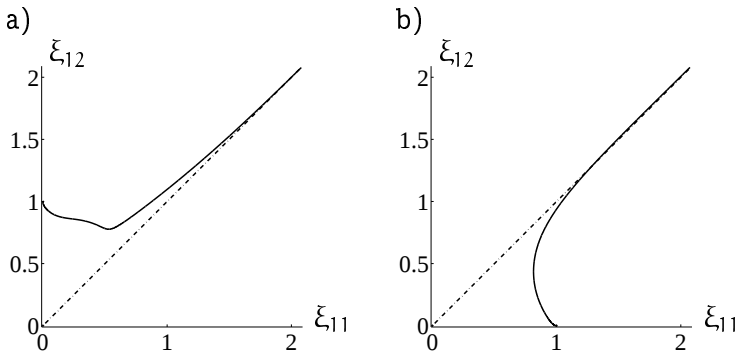
$$\mathbf{Y}(\boldsymbol{\xi}, \dot{\boldsymbol{\xi}}^1, \dot{\boldsymbol{\xi}}_r^1, \ddot{\boldsymbol{\xi}}_r^1)_{i \text{ kol}} = \mathbf{J}_i(\boldsymbol{\xi}) \ddot{\boldsymbol{\xi}}_r^1 + \mathbf{C}_i(\boldsymbol{\xi}, \dot{\boldsymbol{\xi}}^1) \dot{\boldsymbol{\xi}}_r^1 + \mathbf{D}_i(\boldsymbol{\xi}),$$

a $\boldsymbol{\Gamma}$ jest macierzą wzmocnienia algorytmu estymacji, rozmiaru $p \times p$, symetryczną i dodatnio określoną. Równania układu (11.76)–(11.77) z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego możemy przedstawić w postaci

$$\begin{cases}
 \mathbf{J}(\mathbf{e} + \boldsymbol{\xi}_d^1, \boldsymbol{\xi}^2) \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{Y}(\mathbf{e} + \boldsymbol{\xi}_d^1, \mathbf{s} - \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{e} + \dot{\boldsymbol{\xi}}_d^1, \boldsymbol{\xi}^2, \dot{\boldsymbol{\xi}}_d^1 - \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{e}, \ddot{\boldsymbol{\xi}}_d^1 - \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{s} + \boldsymbol{\Lambda}^2 \mathbf{e}) \tilde{\boldsymbol{\theta}} + \\
 \quad - \mathbf{C}(\mathbf{e} + \boldsymbol{\xi}_d^1, \mathbf{s} - \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{e} + \dot{\boldsymbol{\xi}}_d^1, \boldsymbol{\xi}^2) \mathbf{s} - \mathbf{K}_d \mathbf{s} \\
 \dot{\mathbf{e}} = \mathbf{s} - \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{e} \\
 \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} = -\boldsymbol{\Gamma}^{-1} \mathbf{Y}^T(\mathbf{e} + \boldsymbol{\xi}_d^1, \mathbf{s} - \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{e} + \dot{\boldsymbol{\xi}}_d^1, \boldsymbol{\xi}^2, \dot{\boldsymbol{\xi}}_d^1 - \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{e}, \ddot{\boldsymbol{\xi}}_d^1 - \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{s} + \boldsymbol{\Lambda}^2 \mathbf{e}) \mathbf{s} \\
 \dot{\boldsymbol{\xi}}^2 = \mathbf{H}(\mathbf{e} + \boldsymbol{\xi}_d^1, \boldsymbol{\xi}^2) (\mathbf{s} - \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{e} + \dot{\boldsymbol{\xi}}_d^1).
 \end{cases} \quad (11.85)$$

Do badania stabilności nieautonomicznego układu dynamicznego (11.85) wykorzystamy funkcję Lapunowa

$$V(t, \mathbf{e}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\xi}^2, \tilde{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{J}(\mathbf{e} + \boldsymbol{\xi}_d^1, \boldsymbol{\xi}^2) \mathbf{s} + \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\Gamma} \tilde{\boldsymbol{\theta}}. \quad (11.86)$$



Rysunek 11.9 Zachowanie robota mobilnego Ulisses przy zastosowaniu algorytmu Slotine'a-Li do śledzenia zadanej trajektorii położenia (11.60) we współrzędnych linearyzujących.

Równania układu w zamkniętej pętli sprzężenia zwrotnego i własność skośnej symetrii macierzy $\mathbf{J}-2\mathbf{C}$ pozwalają wyrazić pochodną funkcji Lapunowa wzdłuż trajektorii układu (11.85) w postaci

$$\dot{V}(\mathbf{t}, \mathbf{e}, \mathbf{s}, \xi^2, \tilde{\theta}) = -\mathbf{s}^T \mathbf{K}_d \mathbf{s} \leq 0. \quad (11.87)$$

Warunek (11.87) gwarantuje ograniczoność zmiennych $\mathbf{s}$ i $\tilde{\theta}$, a w konsekwencji $\mathbf{e}$ i $\dot{\mathbf{e}}$. Co więcej, na mocy twierdzenia La Salle'a-Yoshizawy[†] $\mathbf{s}(\mathbf{t}) \rightarrow 0$, przy $\mathbf{t} \rightarrow +\infty$, co ostatecznie pozwala wyciągnąć wniosek, że

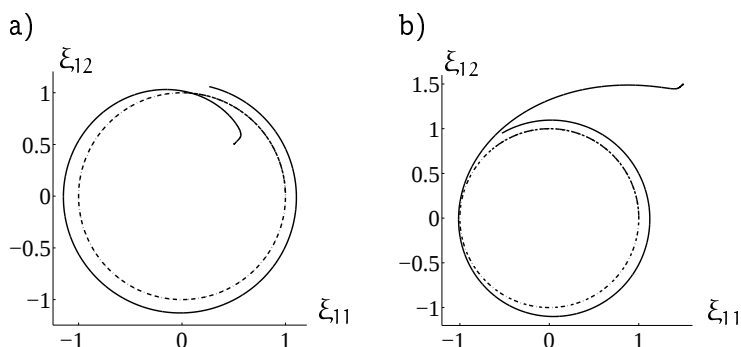
$$\lim_{\mathbf{t} \rightarrow +\infty} \mathbf{e}(\mathbf{t}) = \mathbf{0}.$$

Wreszcie, na podstawie ostatniego z równań układu (11.85) wyciągamy wniosek, że ograniczoność macierzy $\mathbf{H}(\xi)$ oraz prędkości $\dot{\mathbf{e}}$ i ξ_d^1 zapewnia ograniczoność prędkości ξ^2 . ■

Przykład 11.3.6 (Robot mobilny Ulisses)

Algorytm sterowania adaptacyjnego Slotine'a-Li zastosowaliśmy do modelu kołowego robota mobilnego Ulisses. Przedmiotem badań symulacyjnych było zachowanie robota przy śledzeniu dwóch trajektorii zadanych równaniami (11.60), (11.61). Przykładowe wyniki symulacji prezentujemy na rysunkach 11.9 i 11.10. Wyniki badań potwierdzają asymptotyczną zbieżność błędu śledzenia $\mathbf{e}$. Śledzenie zadanej trajektorii odbywa się przy ograniczonej prędkości zmian orientacji robota. ■

[†]Zobacz dodatek B.2.



Rysunek 11.10 Zachowanie robota mobilnego Ulisses przy zastosowaniu algorytmu Slotine'a-Li do śledzenia zadanej trajektorii położenia (11.61) we współrzędnych linearyzujących.

11.3.6 Uniwersalny adaptacyjny λ -śledzący algorytm sterowania

Przyjmijmy obecnie założenie, że model dynamiki kołowego robota mobilnego (11.77) jest całkowicie nieznany. Jak wiadomo, w tego typu sytuacjach znajdują zastosowanie układy sterowania zapewniające λ -śledzenie trajektorii zadanej*. Dlatego w niniejszym podrozdziale rozważymy możliwość wykorzystania algorytmu λ -śledzenia do rozwiązania zadania śledzenia trajektorii zadanej dla kołowych robotów mobilnych. Naszym celem będzie rozwiązanie następującego zadania sterowania:

Znaleźć prawo sterowania w układzie sterowania (11.76)–(11.78), które zapewnia śledzenie trajektorii zadanej $\xi_d^1(t)$ z błędem nie większym niż ustalona wartość $\lambda > 0$ i gwarantuje ograniczoność prędkości $\dot{\xi}^2(t)$.

Możliwość rozwiązania tego zadania za pośrednictwem algorytmu λ -śledzenia wynika z następującego twierdzenia.

Twierdzenie 11.3.12 Niech $\xi_d^1(t)$ oznacza trajektorię zadaną robota mobilnego, taką że $\xi_d^1(t)$, $\dot{\xi}_d^1(t)$ i $\ddot{\xi}_d^1(t)$ są ciągłe i ograniczone. Wybierzmy pewną liczbę $\lambda > 0$. Jeżeli do układu (11.76)–(11.77) zastosujemy algorytm sterowania

$$u(t) = -B^{-1}(\xi)k(t)E(t), \quad (11.88)$$

*Zobacz podrozdział 6.3.3.

gdzie $\mathbf{E}(t) = P_1 \mathbf{e}_1(t) + P_2 \mathbf{e}_2(t)$, $P_1, P_2 > 0$ oraz $\mathbf{e}_1(t) = \boldsymbol{\xi}^1(t) - \boldsymbol{\xi}_d^1(t)$, $\mathbf{e}_2(t) = \dot{\boldsymbol{\xi}}^1(t) - \dot{\boldsymbol{\xi}}_d^1(t)$, wraz z regułą adaptacji wzmocnienia $k(t)$

$$\dot{k} = d_\lambda(\mathbf{E}) \|\mathbf{E}\| = \begin{cases} (\|\mathbf{E}\| - \lambda) \|\mathbf{E}\|, & \text{jeżeli } \|\mathbf{E}\| \geq \lambda, \\ 0, & \text{jeżeli } \|\mathbf{E}\| < \lambda, \end{cases} \quad (11.89)$$

dla $k(0) > 0$ i dowolnego stanu początkowego $\boldsymbol{\xi}(0) \in \mathbb{R}^n$, to wówczas trajektoria $(\mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2(t), k(t))$ układu z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego, opisanego równaniami

$$\begin{cases} \mathbf{J}(\boldsymbol{\xi}) \dot{\mathbf{e}}_2 = -\mathbf{C}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}) \mathbf{e}_2 - k P_1 \mathbf{e}_1(t) - k P_2 \mathbf{e}_2(t) + \\ \quad - \mathbf{J}(\boldsymbol{\xi}) \ddot{\boldsymbol{\xi}}_d^1 - \mathbf{C}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{v}) \dot{\boldsymbol{\xi}}_d^1 - \mathbf{D}(\boldsymbol{\xi}) \\ \dot{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{e}_2 \\ \dot{k} = d_\lambda(\mathbf{E}) \|\mathbf{E}\| \\ \dot{\boldsymbol{\xi}}^2 = \mathbf{H}(\boldsymbol{\xi}) (\mathbf{e}_2 + \dot{\boldsymbol{\xi}}_d^1), \end{cases} \quad (11.90)$$

posiada następujące własności:

1. $\mathbf{E}(t) = (P_1 \mathbf{e}_1(t) + P_2 \mathbf{e}_2(t)) \rightarrow \bar{\mathbf{B}}_\lambda(0)$, gdy $t \rightarrow +\infty$, gdzie $\bar{\mathbf{B}}_\lambda(0)$ jest kulą domkniętą o środku w punkcie $\mathbf{0}$ i promieniu λ ,
2. $\lim_{t \rightarrow +\infty} k(t) < \infty$,
3. $\dot{\boldsymbol{\xi}}^2(\cdot) \in \mathbb{B}$,

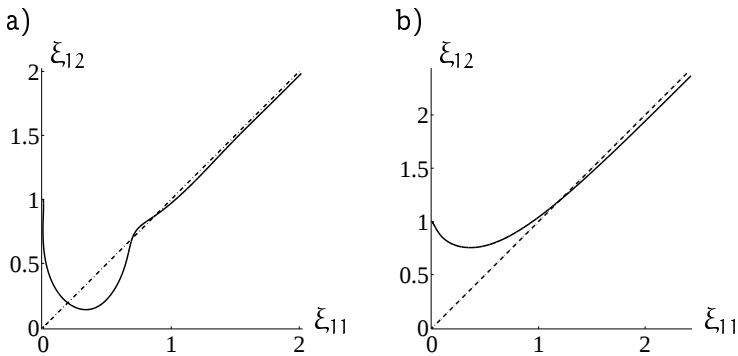
o ile tylko jest spełnione założenie $\mathbf{e}_2(\cdot) \in \mathbb{B}$.

Twierdzenie 11.3.12 pozwala na sformułowanie wniosku, że jeżeli wzmocnienia w pętli sprzężenia zwrotnego są adaptowane zgodnie z regułą (11.89), to wzmocnienia te i prędkości $\dot{\boldsymbol{\xi}}^2(t)$ są ograniczone w czasie trwania regulacji, a błąd śledzenia $\mathbf{E}(t)$ dąży do kuli o zadanym promieniu λ .

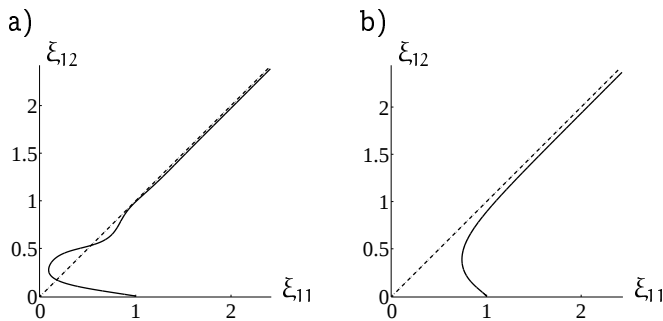
Przykład 11.3.7 (Robot mobilny Ulisses)

Przykładowe zachowanie kołowego robota mobilnego przy zastosowaniu algorytmu λ -śledzenia przedstawiliśmy na rysunkach 11.11 i 11.12 oraz 11.13 i 11.14. Wartość początkowa wzmocnienia $k(0) = 2$, wartość parametru λ ustaliliśmy na poziomie 0.01. Przeprowadzone badania symulacyjne potwierdziły przydatność uniwersalnego adaptacyjnego λ -śledzącego algorytmu sterowania do rozwiązania zadania śledzenia trajektorii współrzędnych linearyzujących kołowych robotów mobilnych. ■

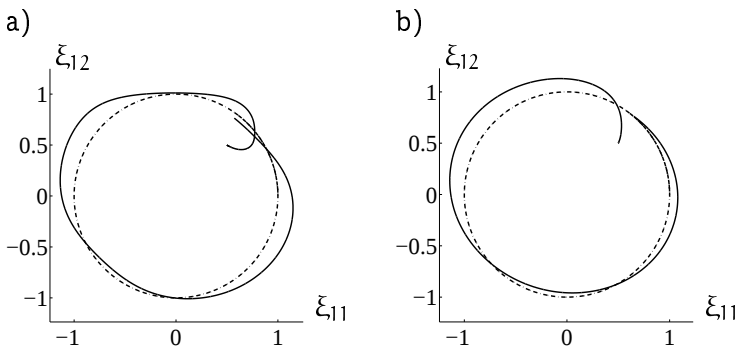
Algorytm λ -śledzenia nie wymaga znajomości modelu dynamiki układu, a jedynie modelu jego kinematyki (macierzy $\mathbf{H}(\boldsymbol{\xi})$) oraz macierzy oddziały-



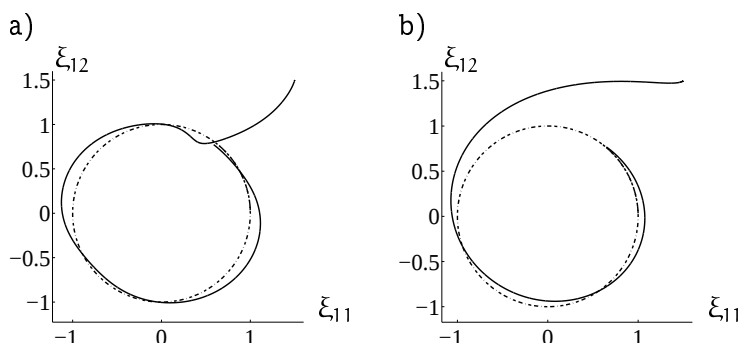
Rysunek 11.11 Zachowanie robota mobilnego Ulisses przy zastosowaniu algorytmu λ -śledzenia do śledzenia zadanej trajektorii położenia (11.60) we współrzędnych linearyzujących: a) $P_1 = 5$, $P_2 = 2$, b) $P_1 = 5$, $P_2 = 10$.



Rysunek 11.12 Zachowanie robota mobilnego Ulisses przy zastosowaniu algorytmu λ -śledzenia do śledzenia zadanej trajektorii położenia (11.60) we współrzędnych linearyzujących: a) $P_1 = 5$, $P_2 = 2$, b) $P_1 = 5$, $P_2 = 10$.



Rysunek 11.13 Zachowanie robota mobilnego Ulisses przy zastosowaniu algorytmu λ -śledzenia do śledzenia zadanej trajektorii położenia (11.61) we współrzędnych linearyzujących: a) $P_1 = 5$, $P_2 = 2$, b) $P_1 = 5$, $P_2 = 10$.



Rysunek 11.14 Zachowanie robota mobilnego Ulisses przy zastosowaniu algorytmu λ -śledzenia do śledzenia zadanej trajektorii położenia (11.61) we współrzędnych linearyzujących: a) $P_1 = 5$, $P_2 = 2$, b) $P_1 = 5$, $P_2 = 10$.

wań sterujących $\mathbf{B}(\xi)$. Zauważmy, że możliwość wystąpienia przeregulowań w początkowym okresie działania sterownika ogranicza możliwość jego wykorzystania w pobliżu przeszkód na scenie robota.

11.4 Komentarze i uwagi bibliograficzne

Dynamiki układów nieholonomicznych dotyczą prace [NF71] oraz [VG94]. Równania dynamiki układu nieholonomicznego wyprowadzone w podrozdziale 11.1 są konsekwencją Zasady d'Alemberta. Alternatywne i nierównoważne równania można uzyskać w ramach tzw. mechaniki wakonomicznej, opartej na Zasadzie Najmniejszego Działania Hamiltona [AKN88]. Na przełomie lat osiemdziesiątych i dziewięćdziesiątych pojawiło się w literaturze wiele prac poświęconych zagadnieniom modelowania i sterowania kołowych robotów mobilnych. Na rozwój teorii sterowania układów nieholonomicznych znaczący wpływ miała przełomowa praca Brocketta [Bro81], w której wykazano nieprzydatność statycznego sprzężenia zwrotnego od stanu do rozwiązania zadania stabilizacji tego typu układów. Problem modelowania kinematyki pojedynczych kołowych robotów mobilnych podjęto w pracach [ANBC91, MP87, Żyl96], natomiast klasyfikację kinematyki kołowych robotów mobilnych wprowadzono w pracy [CBAN96]. Z tej pracy pochodzi twierdzenie 11.2.1. Metodę wyznaczania ograniczeń fazowych oraz algorytm wyznaczania modeli kinematyki dla pojedynczych i złożonych kołowych robotów mobilnych zaproponowano w pracy [Hos96a]. W wyniku dalszych prac udało się dokonać uogólnienia metody na przypadek

kołowych robotów mobilnych poruszających się po powierzchniach w przestrzeni trójwymiarowej, [Hos98a]. Algorytmy wyznaczania ograniczeń fazowych i wyznaczania modeli kinematyki i dynamiki zostały zaimplementowane w systemie obliczeń symbolicznych MATHEMATICA®, [Hos96b, Hos96a, Hos98b]. Wzmoczone zainteresowanie układami nieholonomicznymi zbiegło się w czasie z okresem intensywnego rozwoju geometrycznej teorii sterowania, która dostarczyła efektywnych narzędzi do badań nad specyficznymi własnościami tych układów, [BCR90, NS90, CBAN96]. Możliwość stabilizacji układów nieholonomicznych przez zmienne w czasie statyczne sprzężenie zwrotne od stanu została udowodniona przez Corona, [Cor92]. Sposób projektowania algorytmu stabilizacji dla podklasy bezdryfowych układów sterowania zaproponował Pomet w pracy [Pom92], w której podano dowód twierdzenia 11.3.7. Próbę eliminacji istotnych wad tego typu algorytmów (generowanie „dziwnych” trajektorii oraz słaba zbieżność) podjęto w pracy [PTBC92] (sterowanie hybrydowe) oraz w pracy [MM97] (sterowanie niegładkie). Zastosowanie statycznego i dynamicznego linearyzującego sprzężenia zwrotnego do sterowania kołowych robotów mobilnych zostało zaproponowane w pracy [ANCB95b]. Wyprowadzenie warunków koniecznych i wystarczających linearyzacji afinicznych układów sterowania przez statyczne sprzężenie zwrotne, przedstawione przez Jakubczyka i Respondka, [JR80], należy do najbardziej znanych osiągnięć polskiej szkoły geometrycznej teorii sterowania. Równoważne warunki linearyzacji podali Hunt, Su i Meyer, [HSM82]. Niezmiennikom równoważności przez sprzężenie zwrotne nieliniowych układów sterowania zostały poświęcone artykuły Jakubczyka [Jak90] i [Jak98]. Metoda równoważności Cartana została zastosowana w teorii linearyzacji przez Gardnera [Gar89] i Sluisa, [Slu92]. Warunki wystarczające linearyzacji przez dynamiczne sprzężenie zwrotne, zawierające koncepcję wyjść linearyzujących, przedstawiono w pracy [CLM91]. Na tej pracy opiera się sformułowanie zadania linearyzacji dynamicznej przytoczone w podrozdziale 11.3.2. Teoria równoważności dynamicznej i linearyzacji dynamicznej, wywodząca się z idei algebry różniczkowej, pochodzi od Fliessa i współpracowników, [Fli90, F⁺95] (układy różniczkowo płaskie) oraz Jakubczyka, [Jak92]. W artykule [FLMR99] rozszerzono pojęcia równoważności dynamicznej do równoważności orbitalnej, dopuszczającej różne skale czasu w układach równoważnych, i zdefiniowano tzw. układy orbitalnie płaskie. Dynamiczna linearyzowalność modelu kinematyki złożonego kołowego robota mobilnego została udowodniona w pracach [R⁺93] i [CJ94]. Wykorzystanie metody wyjść linearyzujących do zadania śledzenia trajek-

torii położenia, przy pełnej znajomości modelu dynamiki robota mobilnego, zostało omówione w pracy [ANCB95a], z której pochodzi twierdzenie 11.3.10. Badania nad odpornością takiego podejścia w przypadku ruchu z poślizgiem robotów mobilnych przeprowadzono w pracy [ANCB95b]. Zadanie stabilizacji kołowych robotów mobilnych stanowi przedmiot licznych prac [SAA90, Sam91, CS92, SW93, WTS94, CNLM94]. Z pracy [W⁺92] pochodzą twierdzenia 11.3.8 i 11.3.9. Tematyki adaptacyjnego sterowania kołowych robotów mobilnych dotyczą prace [CB91, DW97]. Zastosowania klasycznych algorytmów adaptacyjnych do sterowania kołowym robotem mobilnym oraz wyniki badań eksperymentalnych zawiera praca [Hen96]. Uogólnienie metody wyjść linearyzujących na przypadek, w którym parametry modelu dynamiki są nieznane, można znaleźć w pracach [CH97, Hos96a], natomiast wykorzystanie uniwersalnego adaptacyjnego układu sterowania w przypadku strukturalnej nieznajomości modelu dynamiki prostych i złożonych kołowych robotów mobilnych zaproponowano w referatach [MH97, Maz98b]. Z pracy [CH97] pochodzi twierdzenie 11.3.11 natomiast twierdzenie 11.3.12 udowodniono w [MH97]. Metodę λ -śledzenia współrzędnych linearyzujących zastosowano również z powodzeniem do robotów mobilnych poruszających się w przestrzeni trójwymiarowej, [Maz98a, Maz98c]. Kwestią otwartą pozostaje takie rozszerzenie konstrukcji macierzy $\mathbf{P}$ występującej w twierdzeniu 11.2.1, aby dopuszczało dowolną orientację lokalnego układu odniesienia, a także swobodę wyboru punktu charakterystycznego. Zdefiniowanie takiej macierzy umożliwiłoby automatyczne generowanie modeli kołowych robotów mobilnych w sposób niezależny od położenia i orientacji lokalnego układu odniesienia. Pełnego opracowania wymaga również zadanie modelowania kinematyki i dynamiki robota mobilnego, którego ruch zachodzi z poślizgiem kół. Również w zakresie algorytmów sterowania uwzględnienie poślizgu kół robota należy do zadań otwartych.

Literatura

- [AKN88] V. I. Arnold, V. V. Kozlov i A. I. Neishtadt, Mathematical aspects of classical and celestial mechanics. W: V. I. Arnold, (red.), *Dynamical Systems III*. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [ANBC91] B. d'Andréa-Novet, G. Bastin i G. Campion, Modelling and control of non holonomic wheeled mobile robots. W: *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics Automat.*, vol. 1, strony 1130–1135, Sacramento, 1991.

- [ANCB95a] B. d'Andréa-Novel, G. Campion i G. Bastin, Control of nonholonomic wheeled mobile robots by state feedback linearization. *Int. J. Robotics Research*, **14**(6):543–559, 1995.
- [ANCB95b] B. d'Andréa-Novel, G. Campion i G. Bastin, Control of wheeled mobile robots not satisfying ideal velocity constraints: A singular perturbation approach. *Int. J. Robust Control*, **5**:243–267, 1995.
- [BCR90] A. M. Bloch, N. H. Mc Clamroch i M. Reyhanoglu, Controllability and stabilizability properties of a nonholonomic control systems. W: *Proc. IEEE Conf. Decision Control*, vol. **2**, strony 1312–1314, Honolulu, 1990.
- [Bro81] R. W. Brockett, Control theory and singular Riemannian geometry. W: P. Hinton i G. Young, (red.), *New Directions in Applied Mathematics*, strony 11–27. Springer-Verlag, New York, 1981.
- [CB91] G. Campion i G. Bastin, Adaptive control of nonholonomic mechanical systems. W: *Proc. Europ. Contr. Conf.*, strony 1334–1338, Grenoble, 1991.
- [CBAN96] G. Campion, G. Bastin i B. d'Andréa-Novel, Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots. *IEEE Trans. Robotics Automat.*, **12**(1):47–62, 1996.
- [CH97] G. Campion i R. Hossa, Adaptive output linearizing control of wheeled mobile robots. W: *Proc. IFAC SyRoCo Conference*, vol. **2**, strony 261–266, Nantes, 1997.
- [CJ94] P. E. Crouch i B. Jakubczyk, Dynamic transformations, linearization and chains of mechanical systems. W: *Proc. IEEE Conf. Decision Control*, vol. **3**, strony 2700–2705, Orlando, 1994.
- [CLM91] B. Charlett, J. Lévine i R. Marino, Sufficient conditions for dynamic state feedback linearization. *SIAM J. Contr. Opt.*, **29**(1):38–57, 1991.
- [CNLM94] C. Canudas de Wit, A. D. NDoudi-Likoho i A. Micaelli, Feedback control for a train-like vehicle. W: *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics Automat.*, vol. **1**, strony 14–19, San Diego, 1994.
- [Cor92] J. M. Coron, Global asymptotic stabilization for controllable systems without drifts. *Mathematics of Control, Signal and Systems*, **5**:295–315, 1992.
- [CS92] C. Canudas de Wit i O. J. Sørдалen, Exponential stabilization of mobile robot with nonholonomic constraints. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, **37**:1791–1797, 1992.

- [DW97] A. W. Divilbiss i J. T. Wen, Trajectory tracking control for a car-trailer system. *IEEE Trans. Control Syst. Technology*, **5**(3):269–278, 1997.
- [F⁺95] M. Fliess et al., Flatness and defect on non-linear systems: Introductory theory and examples. *Int. J. Control*, **61**:1327–1361, 1995.
- [Fli90] M. Fliess, Generalized control canonical forms for linear and nonlinear dynamics. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, **35**:994–1001, 1990.
- [FLMR99] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin i P. Rouchon, A Lie-Bäcklund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, **44**(5):922–937, 1999.
- [Gar89] R. B. Gardner, *The Method of Equivalence and Its Applications*. SIAM, Philadelphia, 1989.
- [Hen96] Z. Hendzel, *Sterowanie ruchem nadążnym mobilnych robotów kołowych*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów, 1996.
- [Hos96a] R. Hossa, *Modele i algorytmy sterowania kołowych robotów mobilnych*. Rozprawa doktorska, Instytut Cybernetyki Technicznej, Politechnika Wrocławska, 1996.
- [Hos96b] R. Hossa, Zastosowanie systemu obliczeń symbolicznych mathematica do wyznaczania modeli nieholonomicznych kinematyki i dynamiki kołowych robotów mobilnych. W: *Materiały 5 Krajowej Konferencji Robotyki*, vol. **1**, strony 29–37, Świeradów Zdrój, 1996.
- [Hos98a] R. Hossa, Modele nieholonomiczne kinematyki kołowych robotów mobilnych poruszających się w przestrzeni trójwymiarowej. W: *Materiały 6 Krajowej Konferencji Robotyki*, vol. **1**, strony 275–282, Świeradów Zdrój, 1998.
- [Hos98b] R. Hossa, Symbolic modelling of the kinematics for multibody wheeled mobile robots. W: *Proc. MMAR Symposium*, vol. **3**, strony 925–930, Międzyzdroje, 1998.
- [HSM82] L. R. Hunt, R. Su i G. Meyer, Design for multi-input nonlinear systems. W: R. W. Brockett, R. S. Millman i H. J. Sussmann, (red.), *Differential Geometric Control Theory*, strony 268–298. Birkhäuser, Boston, 1982.
- [Jak90] B. Jakubczyk, Equivalence and invariants of nonlinear control systems. W: H. J. Sussmann, (red.), *Differential Geometric Control Theory*, strony 177–218. M. Dekker, New York, 1990.

- [Jak92] B. Jakubczyk, Remarks on equivalence and linearization of nonlinear systems. W: *Proc. NOLCOS Symposium*, strony 393–397, Bordeaux, 1992.
- [Jak98] B. Jakubczyk, Critical Hamiltonians and feedback invariants. W: B. Jakubczyk i W. Respondek, (red.), *Geometry of Feedback and Optimal Control*, strony 219–256. M. Dekker, New York, 1998.
- [JR80] B. Jakubczyk i W. Respondek, On linearization of control systems. *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math.*, **28**:517–522, 1980.
- [Maz98a] A. Mazur, Universal adaptive λ -tracker for nonholonomic wheeled mobile robots moving on the plane in 3-dimensional space. W: *Proc. ICAM SPIE Symposium*, Boston, 1998.
- [Maz98b] A. Mazur, Universal adaptive tracking controller for nonholonomic multibody wheeled mobile robots. W: *Proc. MMAR Symposium*, vol. **3**, strony 937–944, Międzyzdroje, 1998.
- [Maz98c] A. Mazur, Uniwersalny adaptacyjny układ λ -śledzenia trajektorii dla robotów mobilnych poruszających się w przestrzeni trójwymiarowej. W: *Materiały 6 Krajowej Konferencji Robotyki*, vol. **1**, strony 115–127, Świeradów Zdrój, 1998.
- [MH97] A. Mazur i R. Hossa, Universal adaptive λ -tracking controller for wheeled mobile robots. W: *Proc. IFAC SyRoCo Conference*, vol. **1**, strony 33–37, Nantes, 1997.
- [MM97] R. McCloskey i R. M. Murray, Exponential stabilization of driftless nonlinear control systems via time-varying, homogeneous feedback. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, **42**(5):614–628, 1997.
- [MP87] P. F. Muir i Neuman C. P., Kinematic modelling for feedback control of an omnidirectional wheeled mobile robots. W: *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics Automat.*, vol. **2**, strony 1172–1178, Raleigh, 1987.
- [NF71] J. Nejmark i N. Fufajew, *Dynamika układów nieholonomicznych*. PWN, Warszawa, 1971.
- [NS90] H. Nijmeijer i A. J. van der Schaft, *Nonlinear Dynamic Control Systems*. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [Pom92] J. B. Pomet, Explicit design of time varying stabilization control laws for a class of controllable systems without drifts. *Systems & Contr. Lett.*, **18**:147–158, 1992.
- [PTBC92] J. B. Pomet, B. Thuilot, G. Bastin i G. Campion, A hybrid strategy for the feedback stabilization of nonholonomic mobile robots. W: *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics Automat.*, vol. **1**, strony 129–134, Nice, 1992.

- [R⁺93] P. Rouchon et al., Flatness and motion planning: The car with n-trailers. W: *Proc. Europ. Contr. Conf.*, vol. **3**, strony 1518–1522, Groningen, 1993.
- [SAA90] C. Samson i K. Ait-Abderrahim, Feedback control of nonholonomic wheeled cart in cartesian space. W: *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics Automat.*, vol. **2**, strony 1136–1141, Sacramento, 1990.
- [Sam91] C. Samson, Time-varying feedback stabilization of car-like wheeled mobile robots. *Int. J. Robotics Research*, **12**:55–64, 1991.
- [Slu92] W. M. Sluis, *Absolute Equivalence and Its Application to Control Theory*. Rozprawa doktorska, Univ. of Waterloo, Ontario, 1992.
- [SW93] O. J. Sørдалen i K. Y. Wichlund, Exponential stabilization of a car with n trailers. W: *Proc. IEEE Conf. Decision Control*, vol. **1**, strony 978–983, San Antonio, 1993.
- [VG94] A. M. Vershik i V. Ya. Gershkovich, Nonholonomic dynamical systems, geometry of distribution and variational problems. W: V. I. Arnold, (red.), *Dynamical Systems VII*, strony 1–81. Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [W⁺92] G. Walsh et al., Stabilization of trajectories for systems with nonholonomic constraints. W: *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics Automat.*, vol. **3**, strony 1999–2004, Nice, 1992.
- [WTSL94] G. Walsh, D. Tilbury, S. Sastry i J. P. Laumond, Stabilization of trajectories for systems with nonholonomic constraints. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, **39**(1):216–222, 1994.
- [Żyl96] W. Żylski, *Kinematyka i dynamika mobilnych robotów kołowych*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów, 1996.

Dodatki

Dodatek A

Podstawowe pojęcia matematyczne

Wiele specyficznych pojęć matematycznych staraliśmy się wprowadzić na bieżąco, w odpowiednich miejscach książki. Dodatek ma na celu zdefiniowanie i objaśnienie pojęć podstawowych, których zdefiniowanie w tekście mogłoby zakłócić płynność wyводу. Są to pojęcia z zakresu algebry liniowej, analizy matematycznej, teorii układów dynamicznych i teorii sterowania.

A.1 Algebra liniowa

Niech $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ oznaczają przestrzenie liniowe nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ z bazami $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m\}$. Oznaczmy symbolem $\mathcal{A} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ przekształcenie liniowe przestrzeni $\mathcal{X}$ w przestrzeń $\mathcal{Y}$. *Macierz* $\mathbf{A}$ przekształcenia liniowego, [Gan88], nazywamy tablicę rozmiaru $m \times n$ złożoną z liczb a_{jk} , takich że

$$\mathcal{A}\mathbf{e}_k = \sum_{j=1}^m a_{jk}\mathbf{f}_j.$$

Macierz dołączoną macierzy kwadratowej $\mathbf{A}$ rozmiaru $n \times n$ definiujemy jako

$$\text{adj } \mathbf{A} = [(-1)^{i+j} \det \mathbf{A}_{ij}]^T, \quad (\text{A.1})$$

gdzie $\mathbf{A}_{ij}$ jest macierzą rozmiaru $(n-1) \times (n-1)$, powstałą z macierzy $\mathbf{A}$ przez wykreślenie i -tego wiersza i j -tej kolumny, [HJ86].

Niech $\mathbf{A}$ oznacza macierz prostokątną rozmiaru $m \times n$. Załóżmy, że istnieje macierz $\mathbf{X}$ o n wierszach i m kolumnach, która spełnia następujące warunki, zwane warunkami Moore'a-Penrose'a:

$$\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{A} = \mathbf{A}, \quad (\text{A.2})$$

$$\mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{X}, \quad (\text{A.3})$$

$$(\mathbf{A}\mathbf{X})^T = \mathbf{A}\mathbf{X}, \quad (\mathbf{X}\mathbf{A})^T = \mathbf{X}\mathbf{A}. \quad (\text{A.4})$$

Macierz $\mathbf{X}$ nazywamy *odwrotnością uogólnioną* macierzy $\mathbf{A}$, jeżeli jest spełniony warunek (A.2). Macierz $\mathbf{X}$ jest *zwrotną odwrotnością uogólnioną*, jeżeli są spełnione warunki (A.3), (A.4). Macierz $\mathbf{X}$, która spełnia wszystkie trzy warunki (A.2)–(A.4) nosi nazwę *pseudoodwrotności* macierzy $\mathbf{A}$ i bywa oznaczana symbolem $\mathbf{A}^\#$, [Nak91].

Niech $\mathbf{A}$ oznacza macierz kwadratową rozmiaru $n \times n$. *Normą macierzową* nazywamy funkcję $\|\cdot\|$ spełniającą standardowe aksjomaty normy

$$\|\mathbf{A}\| \geq 0,$$

$$\|\mathbf{A}\| = 0 \iff \mathbf{A} = \mathbf{0},$$

$$\|c\mathbf{A}\| = |c|\|\mathbf{A}\|, \quad c \in \mathbb{R},$$

$$\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|,$$

oraz tzw. aksjomat pierścienia

$$\|\mathbf{A}\mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|.$$

Normą macierzową indukowaną przez normę $\|\cdot\|$ w $\mathbb{R}^n$ nazywamy normę

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|.$$

Szczególnym przykładem normy macierzowej indukowanej jest *norma widmowa*, indukowana przez normę euklidesową w $\mathbb{R}^n$. Norma widmowa ma postać $\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\bar{\lambda}_{\mathbf{A}}}$, gdzie przez $\bar{\lambda}_{\mathbf{A}}$ rozumiemy największą wartość własną symetrycznej macierzy $\mathbf{M}$, [HJ86, Kac98].

Przy badaniu stabilności algorytmów sterowania ważną rolę odgrywa następujące

Twierdzenie A.1.1 (Rayleigha-Ritza, [HJ86]) *Niech $\mathbf{A}$ będzie symetryczną macierzą kwadratową. Oznaczmy przez $\underline{\lambda}_{\mathbf{A}}$, $\bar{\lambda}_{\mathbf{A}}$ najmniejszą i największą wartość własną macierzy $\mathbf{A}$. Wówczas prawdziwa jest nierówność*

$$\underline{\lambda}_{\mathbf{A}}\mathbf{x}^T\mathbf{x} \leq \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \bar{\lambda}_{\mathbf{A}}\mathbf{x}^T\mathbf{x}.$$

A.2 Funkcje i odwzorowania

Funkcja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jest *ograniczona*, jeżeli zbiór wartości funkcji $f(\mathbb{R}^n)$ zawiera się w pewnym skończonym przedziale $I \subseteq \mathbb{R}$. Funkcję $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy *gładką*, jeżeli pochodne cząstkowe rzędu k postaci $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}(\mathbf{x})$ istnieją i są ciągłe dla dowolnego k . Funkcja f jest *analityczna*, jeżeli w pewnym otoczeniu każdego $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ można ją rozwinąć w zbieżny szereg Taylora. Odwzorowanie $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)^T$ nazywamy, odpowiednio, *ograniczonym*, *gładkim* lub *analitycznym*, jeżeli wszystkie funkcje składowe f_i są ograniczone, gładkie lub analityczne. Klasę ograniczonych odwzorowań $\mathbb{R}^n$ w $\mathbb{R}^m$ oznaczamy symbolem $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, gładkie odwzorowania $\mathbb{R}^n$ w $\mathbb{R}^m$ oznaczamy jako $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, dla odwzorowań analitycznych używamy oznaczenia $\mathcal{C}^\omega(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Odwzorowania o skończonej klasie gładkości, a więc takie, których pochodne cząstkowe są ciągłe do pewnego rzędu k , będziemy oznaczać symbolem $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Dla odwzorowań określonych na pewnym przedziale, $\mathbf{f} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ używamy, odpowiednio, oznaczeń $\mathcal{C}_n^k[0, T]$, $\mathcal{C}_n^\infty[0, T]$ oraz $\mathcal{C}_n^\omega[0, T]$. Przestrzenie odwzorowań *mierzalnych* w sensie Lebesgue'a, przedziału $[0, T]$ w $\mathbb{R}^n$, o skończonej normie $\|\mathbf{f}\|_p = \left(\int_0^T \|\mathbf{f}(t)\|_p^p dt \right)^{1/p}$, $p = 1, \dots, \infty$, gdzie $\|\mathbf{f}(t)\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |f_j(t)|^p \right)^{1/p}$, $\|\mathbf{f}(t)\|_\infty = \max_j |f_j(t)|$ oznaczamy symbolem $\mathcal{L}_n^p[0, T]$ lub jako $\mathcal{L}_p[0, T]$, jeżeli przestrzeń wartości funkcji wynika jasno z kontekstu. Przy $p = \infty$, $\|\mathbf{f}\|_\infty = \max_{t \in [0, T]} \|\mathbf{f}(t)\|_\infty$. Zauważmy, że przestrzeń $\mathcal{L}_n^2[0, T]$ jest *przestrzenią Hilberta*. Odwzorowanie $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ nosi nazwę *lokalnie lipschitzowskiego*, jeżeli dla każdego punktu w $\mathbb{R}^n$ istnieje otoczenie $\mathbf{U}$ oraz stała L , taka że dla $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{U}$ $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})\| \leq L \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, [Mau71].

Odwzorowanie ograniczone $\mathbf{f} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ będziemy nazywać odwzorowaniem klasy $\mathcal{B}$, odwzorowanie $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ nazywamy odwzorowaniem klasy $\mathcal{C}^k$ (dla $k = 1, \dots, \infty, \omega$). Odwzorowanie $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_n^k[0, T]$ zaliczamy do klasy $\mathcal{L}_k$, $k = 1, \dots, \infty$. Zauważmy, że odwzorowanie klasy $\mathcal{L}_\infty$ jest ograniczone prawie wszędzie.

Dla odwzorowania $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiujemy *odwzorowanie odwrotne* $\mathbf{f}^{-1}$ spełniające warunek $\mathbf{f} \circ \mathbf{f}^{-1} = \mathbf{f}^{-1} \circ \mathbf{f} = \mathbf{id}_{\mathbb{R}^n}$. Ciągłe odwzorowanie $\mathbf{f}$ posiadające ciągłe odwzorowanie odwrotne nazywamy *homeomorfizmem*.

Macierzą Jacobiego odwzorowania $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)^T$, klasy $\mathcal{C}^k$ (przy $k = 1, \dots, \infty, \omega$) nazywamy macierz pochodnych czątko-

wych $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \right]$. Jednym z najważniejszych twierdzeń analizy matematycznej jest *twierdzenie o funkcji odwrotnej*, [Mau71, AM78].

Twierdzenie A.2.1 (o funkcji odwrotnej) Załóżmy, że macierz Jacobiego odwzorowania $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ klasy $\mathbb{C}^k$ jest nieosobliwa w punkcie $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, tzn.

$$\text{rank } \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) = n.$$

Istnieje wówczas odwzorowanie

$$\mathbf{f}^{-1} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{U},$$

odwrotne do $\mathbf{f}^*$, klasy $\mathbb{C}^k$, określone na pewnych otoczeniach $\mathbf{V} \ni \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ oraz $\mathbf{U} \ni \mathbf{x}_0$, zwane lokalnym dyfeomorfizmem $\mathbb{R}^n$ klasy $\mathbb{C}^k$. Przy $k = \infty$ dyfeomorfizm nazywamy gładkim, przy $k = \omega$ — analitycznym.

W dowodach stabilności algorytmów sterowania, przy szacowaniu pochodnej funkcji Lapunowa względem czasu, często jest przydatne następujące *twierdzenie o wartości średniej*, [Mau71, AMR88].

Twierdzenie A.2.2 (o wartości średniej) Dla funkcji $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ klasy $\mathbb{C}^1$ zachodzi wzór

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \int_0^1 \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{0i}) \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i} (t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{x}_0) dt.$$

A.3 Układy dynamiczne, pola wektorowe, nawiasy Liego

Powiemy, że układ równań różniczkowych

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}), \tag{A.5}$$

w którym $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, definiuje *układ dynamiczny* w $\mathbb{R}^n$, jeżeli krzywe całkowite $\mathbf{x}(t)$ układu (A.5) są określone w każdej chwili czasu $t \in \mathbb{R}$. Odwzorowanie $\mathbf{X}$ określające układ dynamiczny nazywamy *polem wektorowym*, a przestrzeń $\mathbb{R}^n$ — *przestrzenią stanu* układu. Zakładamy,

*Tzn. takie, że $\mathbf{f} \circ \mathbf{f}^{-1} = \text{id}_{\mathbf{V}}$ oraz $\mathbf{f}^{-1} \circ \mathbf{f}|_{\mathbf{U}} = \text{id}_{\mathbf{U}}$.

że pole $\mathbf{X}$ jest gładkie, to znaczy $\mathbf{X} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Każdy układ dynamiczny definiuje odwzorowanie $\boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x})$ zwane *strumieniem*. Ze względu na formalne podobieństwo do strumienia liniowego układu dynamicznego, bardzo często stosowanym oznaczeniem strumienia pola $\mathbf{X}$ jest $\boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}) = \exp(t\mathbf{X})(\mathbf{x})$. Strumień spełnia układ równań (A.5), co oznacza, że $\frac{d}{dt}\boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{X}(\boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}))$. Dla ustalonego stanu początkowego $\mathbf{x}$ strumień określa krzywą całkową (trajektorię) układu dynamicznego przechodzącą przez punkt $\mathbf{x}$, a dla ustalonej chwili czasu t strumień wyznacza wzajemnie jednoznaczne i gładkie odwzorowanie $\boldsymbol{\varphi}_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, będące dyfeomorfizmem przestrzeni stanu. Podzbiór $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ nazywamy *zbiorem niezmienniczym* układu dynamicznego (A.5), jeżeli dla każdego $\mathbf{x} \in \Omega$ trajektoria $\boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}) \in \Omega$ dla $t \in \mathbb{R}$. Najprostszym przykładem zbioru niezmienniczego jest punkt równowagi zdefiniowany równaniem $\mathbf{X}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Punkt równowagi układu dynamicznego bywa też nazywany punktem osobliwym pola $\mathbf{X}$. Punkt, w którym pole wektorowe nie znika, nazywa się punktem regularnym. Zachowanie układu dynamicznego w otoczeniu punktów regularnych opisuje następujące *twierdzenie o prostowaniu*.

Twierdzenie A.3.1 (o prostowaniu) *Niech $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ oznacza punkt regularny pola $\mathbf{X}$. Wówczas, istnieje lokalny dyfeomorfizm $\xi = \Phi(\mathbf{x})$, zdefiniowany na pewnym otoczeniu punktu $\mathbf{x}$, taki że w nowych współrzędnych pole $\mathbf{X} = \mathbf{e}_1 \in \mathbb{R}^n$.*

Układ dynamiczny postaci (A.5) bywa nazywany *autonomicznym* (niezależnym od czasu). W przypadku, gdy pole $\mathbf{X}$ zależy w sposób jawny od czasu, a więc gdy

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t), \quad (\text{A.6})$$

układ dynamiczny nosi nazwę *nieautonomicznego*. Punkt $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ nazywamy punktem równowagi nieautonomicznego układu dynamicznego, jeżeli dla każdego $t \in \mathbb{R}$ zachodzi $\mathbf{X}(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{0}$, [Arn75, AA88, AM78].

Niech będą dane dwa pola wektorowe $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Oznaczmy symbolem $\boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x})$ strumień układu (A.5) (pola $\mathbf{X}$) i zdefiniujemy następujące *działanie pola $\mathbf{X}$ na pole $\mathbf{Y}$*

$$\text{Ad}_{\mathbf{X}}^t \mathbf{Y}(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_{-t}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{Y} \right) \circ \boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{x}). \quad (\text{A.7})$$

Nawiasem Liego pól $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ nazywamy pole wektorowe

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}](\mathbf{x}) = \left. \frac{d}{dt} \text{Ad}_{\mathbf{X}}^t \mathbf{Y}(\mathbf{x}) \right|_{t=0}. \quad (\text{A.8})$$

Nietrudno wykazać, że z formuły (A.8) wynika zależność (2.34), którą można uważać za definicję nawiasu Liego we współrzędnych. Dla wygody zapisu iterowanych nawiasów Liego wprowadza się oznaczenie $\text{ad}_{\mathbf{X}}^0 \mathbf{Y} = \mathbf{Y}$ oraz $\text{ad}_{\mathbf{X}}^{k+1} \mathbf{Y} = [\mathbf{X}, \text{ad}_{\mathbf{X}}^k \mathbf{Y}]$. Pola wektorowe z operacją nawiasu Liego tworzą tzw. *algebrę Liego*, [AM78, Gan88, Spi79, Sas99].

Niech będzie dana gładka funkcja $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ określona w $\mathbb{R}^{2n}$, zwana *funkcją Hamiltona* lub *hamiltonianem*. Układ dynamiczny postaci

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \quad (\text{A.9})$$

nazywamy *układem hamiltonowskim*, [AM78].

Niech będzie dany gładki układ dynamiczny postaci (A.5). Gładką funkcję $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy *całką pierwszą* (stałą ruchu) układu (A.4), jeżeli $\mathbf{f}$ jest stała na trajektoriach tego układu, tzn.

$$\dot{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = d\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{X}(\mathbf{x}) = 0.$$

Nietrudno sprawdzić, że hamiltonian jest całką pierwszą hamiltonowskiego układu dynamicznego.

A.4 Układy sterowania

Układem sterowania nazywamy obiekt opisany układem równań różniczkowych

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad (\text{A.10})$$

gdzie $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, zależnych od zmiennej $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ zwanej sterowaniem. Przestrzeń $\mathbb{R}^n$ nazywa się przestrzenią stanu układu (A.10), zaś odwzorowania $\mathbf{u} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ są nazywane funkcjami sterującymi. Zakłada się, że funkcje sterujące $\mathbf{u}(\cdot)$ należą do pewnej klasy sterowań dopuszczalnych $\mathcal{U}$. Z reguły do klasy $\mathcal{U}$ należą sterowania odcinkami stałe. Warunki nakładane na odwzorowanie $\mathbf{f}$ definiujące układ sterowania i klasę sterowań dopuszczalnych powinny zapewniać istnienie trajektorii układu (A.10). Układ sterowania (A.10) jest nazywany *zależnym od czasu*, *nieautonomicznym* lub *niestacjonarnym*. Ważną podklasę układów sterowania stanowią *układy liniowe* zdefiniowane w następujący sposób

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}. \quad (\text{A.11})$$

Jeżeli $\mathbf{f}$ nie zależy jawnie od czasu, układ sterowania jest *niezależny od czasu*, *autonomiczny* lub *stacjonarny*. Mamy wówczas

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}). \quad (\text{A.12})$$

Wśród układów niezależnych od czasu wyróżniamy podklasę *afinicznych* układów sterowania

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^m \mathbf{g}_k(\mathbf{x})u_k. \quad (\text{A.13})$$

Jeżeli w układzie afinicznym $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{0}$, a więc

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u} = \sum_{k=1}^m \mathbf{g}_k(\mathbf{x})u_k, \quad (\text{A.14})$$

uzyskujemy układ liniowy ze względu na sterowanie, zwany układem *bezdryfowym* lub *polisystemem dynamicznym*. Termin polisystem dynamiczny jest odzwierciedleniem tego, że przy sterowaniach odcinkami stałych układ (A.14) można utożsamić z rodziną pól wektorowych $\mathbf{g}_k(\mathbf{x})$. Układ afiniczny, w którym pole $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$, a pola $\mathbf{g}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_k = \text{const}$ staje się *liniowym* układem sterowania

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}. \quad (\text{A.15})$$

Podstawową własnością układów sterowania jest *sterowalność*. W teorii sterowania są znane różne własności typu sterowalności. Naszym potrzebom najbardziej służą własności: *sterowalność*, *lokalna sterowalność* i *sterowalność w krótkim czasie*. Mówimy, że układ sterowania jest sterowalny, jeżeli przy pomocy dopuszczalnych funkcji sterujących i w skończonym czasie z każdego stanu początkowego układu można osiągnąć każdy zadany stan w przestrzeni stanu. Układ sterowania jest lokalnie sterowalny, jeżeli zbiór stanów osiągalnych w skończonym czasie z każdego zadanego stanu $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ przy użyciu dopuszczalnych funkcji sterujących zawiera otoczenie tego stanu. Układ sterowania jest sterowalny w krótkim czasie, gdy zbiór stanów możliwych do osiągnięcia z każdego stanu w dowolnym czasie $t > 0$ pokrywa się z przestrzenią stanu układu oraz jest *lokalnie sterowalny w krótkim czasie*, gdy zbiór stanów osiągalnych w dowolnym czasie $t > 0$ z każdego stanu zawiera otoczenie tego stanu.

Mówimy, że układ sterowania (A.10) ma punkt równowagi $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$, jeżeli $\mathbf{f}(\mathbf{0}, \mathbf{u}, t) = \mathbf{0}$ w każdej chwili $t \in \mathbb{R}$. Punkt równowagi nazywa się

stabilizowalnym, jeżeli istnieje dopuszczalna funkcja sterująca $\mathbf{u}(t)$, taka że punkt równowagi $\mathbf{0}$ nieautonomicznego układu dynamicznego

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(t), t)$$

jest asymptotycznie stabilny. Rozwinięcie przedstawionych tu koncepcji można znaleźć w literaturze [Sus82, Isi89, Son90, NS90, Sas99].

A.5 Zasada Maksimum Pontriagina

Rozważmy niezależny od czasu układ sterowania opisany równaniami

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (\text{A.16})$$

z wektorem stanu $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ i wektorem sterowań $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$. Niech *zadanie sterowania* polega na przeprowadzeniu układu (A.16) ze stanu początkowego $\mathbf{x}_0$ do stanu końcowego $\mathbf{x}_1$ w taki sposób, by minimalizować wskaźnik jakości

$$\mathcal{J}(\mathbf{u}(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt. \quad (\text{A.17})$$

Wprowadźmy *zmienne dołączone* $(\boldsymbol{\psi}, \psi_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\psi_0 = \text{const}$, i przyporządkujmy układowi (A.16) ze wskaźnikiem (A.17) hamiltonian postaci

$$H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}, \psi_0, \mathbf{u}) = \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - \psi_0 L(\mathbf{x}, \mathbf{u}). \quad (\text{A.18})$$

W myśl *Zasady Maksimum Pontriagina*, [PBG60, AF69, VG97], warunkiem koniecznym optymalności sterowania $\mathbf{u}(t)$ jest przyjmowanie przez hamiltonian wartości maksymalnej

$$H(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \psi_0, \mathbf{u}(t)) = \max_{\mathbf{u}} H(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \psi_0, \mathbf{u}) \quad (\text{A.19})$$

wzdłuż trajektorii $(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\psi}(t))$ nieautonomicznego układu hamiltonowskiego opisanego przez *równania kanoniczne Hamiltona*

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\psi}}(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \psi_0, \mathbf{u}(t)), \\ \dot{\boldsymbol{\psi}} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \psi_0, \mathbf{u}(t)). \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Trójkę funkcji $(\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t), \boldsymbol{\psi}(t))$ spełniających warunek (A.19) oraz równania (A.20) nazywamy *ekstremalą zadania sterowania optymalnego*. Ekstremalę odpowiadającą wartości $\psi_0 = 0$, wzdłuż której hamiltonian znika

tożsamościowo, $H(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \psi_0, \mathbf{u}(t)) \equiv 0$, nazywamy osobliwą. Istnienie ekstremal osobliwych wynika z własności układu sterowania, nie z postaci wskaźnika jakości. Ekstremale nieosobliwe noszą nazwę regularnych. Przy ich wyznaczaniu można założyć, że zmienna $\psi_0 = 1$.

A.6 Równania Eulera-Lagrange'a

Niech będzie dany gładki lagranżian $L(\mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{x}) = L(u_1(\mathbf{x}), \dots, u_n(\mathbf{x}), u_{1x_1}(\mathbf{x}), \dots, u_{1x_m}(\mathbf{x}), \dots, u_{nx_1}(\mathbf{x}), \dots, u_{nx_m}(\mathbf{x}), x_1, \dots, x_m)$ zależny od funkcji $u_i(\mathbf{x})$ oraz ich pochodnych cząstkowych $u_{ix_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$. Załóżmy, że $\mathbf{V}$ jest pewnym obszarem w $\mathbb{R}^m$. Warunkiem koniecznym ekstremum funkcjonału

$$\mathcal{J}(\mathbf{u}(\cdot)) = \int_{\mathbf{V}} L(\mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (\text{A.21})$$

jest spełnienie następujących równań Eulera-Lagrange'a, [GF79]:

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial L}{\partial u_{ix_j}} - \frac{\partial L}{\partial u_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (\text{A.22})$$

W przypadku, gdy funkcje u_i zależą od jednej zmiennej, $u_i(t) = q_i(t)$, a zatem lagranżian jest równy $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$, równania (A.22) przyjmują klasyczną postać

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{0}. \quad (\text{A.23})$$

Literatura

- [AA88] D. V. Anosov i V. I. Arnold, (red.), *Dynamical Systems I*. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [AF69] M. Athans i P. L. Falb, *Sterowanie optymalne. Wstęp do teorii i jej zastosowania*. WNT, Warszawa, 1969.
- [AM78] R. Abraham i J. E. Marsden, *Foundations of Mechanics*. The Benjamin, Reading, 1978.
- [AMR88] R. Abraham, J. E. Marsden i T. Ratiu, *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [Arn75] V. I. Arnold, *Równania różniczkowe zwyczajne*. PWN, Warszawa, 1975.

- [Gan88] F. R. Gantmacher, *Teoria matric*. Nauka, Moskwa, 1988.
- [GF79] I. M. Gelfand i S. W. Fomin, *Rachunek wariacyjny*. PWN, Warszawa, 1979.
- [HJ86] R. A. Horn i C. R. Johnson, *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1986.
- [Isi89] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [Kac98] T. Kaczorek, *Wektory i macierze w automatyce i elektrotechnice*. WNT, Warszawa, 1998.
- [Mau71] K. Maurin, *Analiza cz. I*. PWN, Warszawa, 1971.
- [Nak91] Y. Nakamura, *Advanced Robotics: Redundancy and Optimization*. Addison-Wesley, Reading, 1991.
- [NS90] H. Nijmeijer i A. J. van der Schaft, *Nonlinear Dynamic Control Systems*. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [PBG60] L. S. Pontriagin, V. G. Boltianski i R. V. Gamkrelidze, Teoria optymalnych processow. I Princip maksimuma. *Izv. Sov. AN*, **24**(1):3–42, 1960.
- [Sas99] S. S. Sastry, *Nonlinear Systems*. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [Son90] E. D. Sontag, *Mathematical Control Theory*. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [Spi79] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. Publish or Perish, Berkeley, 1979.
- [Sus82] H. J. Sussmann, Lie brackets, real analyticity and geometric control. W: R. W. Brockett, R. S. Millman i H. J. Sussmann, (red.), *Differential Geometric Control Theory*, strony 1–116. Birkhäuser, Boston, 1982.
- [VG97] T. L. Vincent i W. J. Grantham, *Nonlinear and Optimal Control Systems*. J. Wiley and Sons, New York, 1997.

Indeks

Wytłuszczone numery stron oznaczają miejsca, gdzie dane pojęcie zostało wprowadzone (zdefiniowane), pozostałe — miejsca, gdzie było ono użyte.

- A**
- aksjomat pierścienia **402**
 - aksjomaty normy **402**
 - algebra Liego 88, 277
 - grupy $SE(3)$ 32
 - pól wektorowych 406
 - układu **274**
 - algorytm
 - λ -śledzenia
 - manipulatora **236**
 - robotu mobilnego **389**
 - adaptacyjny 223
 - Bayarda-Wena **226**
 - linearyzacji **224**
 - Sadegha-Horowitza **229**
 - Slotine'a-Li **228**, 419
 - całkowania wstecznego **255**, 261
 - Corona-Pometa **370**, 393
 - Denavita-Hartenberga **42**, 44, 46, 48, 50, 64, 89, 356
 - dysypatywny **209**
 - estymacji 224, 226, 230, 417
 - jakobianu
 - dołączonego **163**, 175
 - odpornego **170**
 - odwrotnego **103**
 - pseudoodwrotnego **111**
 - pseudoodwrotnego z projekcją ... **117**
 - rozszerzonego **119**
 - transponowanego **122**
 - kinematyki
 - prostych kołowych robotów mobilnych **360**, 392
 - złożonych kołowych robotów mobilnych **366**, 392
 - kinematyki odwrotnej
 - asymptotyczny **104**, **112**, **117**, **121**
 - manipulatora 95
 - osobliwy **140**
 - robotu mobilnego 182, **183**
 - linearyzacji
 - dynamicznej **373**
 - statycznej **213**, 251
 - mnożników Lagrange'a **125**
 - najszybszego spadku **122**
 - Newtona **104**, 187
 - z projekcją **117**
 - Newtona-Smale'a **163**, 175
 - obliczanego momentu **209**
 - odsprężania **204**
 - Ortegi-Lorii **259**
 - planowania Lie-algebraicznego **305**
 - przestrzeni zerowej **166**
 - Qu-Dorsey'a **236**
 - Sadegha-Horowitza **218**, 417
 - Slotine'a-Li **216**
 - sterowania robotu mobilnego... **386**
 - stabilizacji 372
 - sterowania 203, 209, 224, 369
 - ślizgowego **232**
 - uniwersalny **219**
 - Walsha-Tilbury'ego-Sastry'ego-Muraya-Laumonda **377**
 - Wena-Bayarda **214**, 216
 - aspekt kinematyki **57**
 - atan2 **99**
 - atlas rozmaitości **31**
- B**
- baza Ph. Halla **277**, 281, 297, 300

brzytwa Ockhama 18

C

całka pierwsza 138, 406

ciało sztywne 27, 40, 88

czas fizyczny 25

D

delta Kroneckera 200

długość wektora 25

dowód stabilności 417, 419

dyfeomorfizm 133, 252, 404, 405

dynamika

manipulatora

o elastycznych przegubach ... 249

sztywnego 201

robota mobilnego 367

dystrybucja 37, 89

dywergencja 132, 136

działanie pola wektorowego 405

E

efektor manipulatora 39, 41

eksperymenty 175, 241

ekstremala 286, 408

osobliwa 87, 185, 409

regularna 320

ekwiwariantność 28

elementarne

obroty 43

przesunięcia 43

elipsoida

manipulowalności 128, 174

podwójnego wahadła 130

mobilności 186, 188

energia

kinetyczna 194, 195, 247

manipulatora 200

robota mobilnego 367

potencjalna 194, 200, 249

manipulatora 201

euklidesowa

norma 25

przestrzeń 25

F

filtracja dystrybucji 38

forma kwadratowa 111, 402

formuła

Campbella-Bakera-Hausdorffa-Dyn-

kina 278, 281, 298, 310

uogólniona 299, 307, 310

CBHD 278

funkcja

analityczna 403

gładka 403

Hamiltona 319, 406

Lapunowa 214, 217, 220, 225, 227,

230, 233, 237, 387, 411, 417, 420

Nussbauma 212

ograniczona 403

przełączająca 319

sterująca 406

G

generatory układu 273, 293

gładka rozmaitość 30

grupa Liego 31, 88

H

halsowanie 274

hamiltonian 86, 134, 286, 406, 408

hiperboliczna postać normalna kinematy-

ki manipulatora 146, 148

homeomorfizm 403

I

iloczyn wektorów

mieszany 27

skalarny 25

wektorowy 25

indeks konfiguracji osobliwej 138

inwariantność 28

J

jakobian

analityczny

manipulatora 61, 71, 84, 111, 117,

128, 133, 163, 204

manipulatora IRb-6 63, 75

manipulatora SCARA 63, 75

podwójnego wahadła 62, 73

potrójnego wahadła 62

roboty mobilnego 86, 90, 290

rozszerzony 119, 174

geometryczny

- manipulatora **63**, 71, 79, 90
 manipulatora IRb-6 67, 75
 manipulatora *SCARA* 66, 71, 75, 78
 podwójnego wahadła 65, 70, 73, 77
 potrójnego wahadła 66
 rozszerzony **125**
 w ciele **63**, 69
 w przestrzeni **63**, 65, 125
 manipulatora **68**, 90
 manipulatora *SCARA* 69
 podwójne wahadło 68
 potrójne wahadło 69
- K**
- kąty
 Eulera **34**, 60, 71
 kołysanie-kiwanie-myszkowanie **35**
- kinematyka
 manipulatora **41**, **43**, 95
 IRb-6 49, 60
 korzędu I 144
 osobliwa 144
 podwójne wahadło 44, 53, 56
 potrójne wahadło 46, 57
SCARA 47, 54, 59
 w aspekcie **57**, 99, 205, 339
 we współrzędnych **55**, 131
 robota mobilnego 83, **84**, 90, 181
 układu robotycznego **39**
- konfiguracja
 izotropowa manipulatora **129**
 osobliwa
 manipulatora **79**, 96, 134
 manipulatora IRb-6 .. 82, 139, 158
 manipulatora *SCARA* 82
 możliwa do uniknięcia .. **131**, 135, 138, 174
 niemożliwa do uniknięcia **132**, 135, 138, 174
 podwójnego wahadła 80, 148
 potrójnego wahadła 81
 regularna manipulatora **79**, 96
- korząd osobliwości **79**, 136
- kowymiar
 rozmaitości **30**
 zbioru osobliwości **80**
- krzywizna toru **26**
- kwadratowa postać normalna kinematyki
 manipulatora **145**, **146**, 147
- L**
- lagranżian 86, **194**
- L^AT_EX 21
- lemat
 Barbalata 258, **413**
 Wena-Bayarda 240, **413**
- linearyzacja 203, 209, 213, 253
 dynamiczna 370, **374**, 393
 statyczna 369, 393
- M**
- macierz
 bezwładności 209
 dołączona 164, **401**
 dodatkowo określona 195
 górnio-trójkątna 249
 Grama **183**
 Hessego 138
 inercji **195**, 196, 199
 Jacobiego 61, **403**
 manipulowalności **128**
 mobilności **186**
 obrotu **28**
 odwrotna 111, 170
 odwrotność uogólniona **402**
 ortogonalna 28
 przekształcenia liniowego **401**
 przybliżenia liniowego 133, 136
 pseudoodwrotność **402**
 regresji 223
 skośnie symetryczna 31
 sterowań **353**
 symetryczna 195
 zwrotna odwrotność uogólniona **402**
- manipulator
EDDA 228
 algorytm λ -śledzenia 238
 algorytm adaptacyjny Bayarda-Wena 228
 algorytm adaptacyjny linearyzacji 225
 algorytm adaptacyjny Sadegha-Horowitza 231

- algorytm adaptacyjny Slotine'a-Li 229
 algorytm linearyzacji statycznej... 214
 algorytm odsprężania..... 205
 algorytm Qu-Dorseya..... 236
 algorytm Sadegha-Horowitza... 219
 algorytm Slotine'a-Li..... 218
 algorytm sterowania ślizgowego .. 235
 algorytm uniwersalny..... 221
 algorytm Wena-Bayarda..... 216
 dynamika..... 202, 223
 kinematyka..... 57
 parametry dynamiki..... 202
 elastyczny *EDDA*
 algorytm całkowania wstecznego .. 258
 algorytm linearyzacji statycznej... 254
 algorytm Ortegi-Lorii..... 260
 dynamika..... 250
IRb-6
 jakobian analityczny 63, 75
 jakobian geometryczny 67, 75
 kinematyka 49, 60
 konfiguracje osobliwe 82
 osobliwe zadanie odwrotne... 161
 parametry Denavita-Hartenberga. 49
 postacie normalne kinematyki 158
 przestrzeń robocza..... 61
 unikanie osobliwości 139
 zadanie odwrotne .. 100, 109, 114, 118, 121, 123, 172
nieredundantny 55
 o elastycznych przegubach . 246, 251, 254
 podwójne wahadło
 elipsoida manipulowalności... 130
 jakobian analityczny 62, 73
 jakobian geometryczny. 65, 70, 73, 77
 jakobian manipulatora..... 68
 kinematyka..... 44, 53, 56
 konfiguracje osobliwe 80
 osobliwe zadanie odwrotne... 151, 156
 parametry Denavita-Hartenberga. 45
 postacie normalne kinematyki 148
 zadanie odwrotne... 98, 102, 104, 165, 167, 170
 potrójne wahadło
 jakobian analityczny..... 62
 jakobian geometryczny..... 66
 jakobian manipulatora..... 69
 kinematyka 46, 57
 konfiguracje osobliwe 81
 parametry Denavita-Hartenberga. 46
 zadanie odwrotne..... 112, 126
 redundantny 55, 111, 125, 131
SCARA..... 44
 jakobian analityczny 63, 75
 jakobian geometryczny. 66, 71, 75, 78
 jakobian manipulatora..... 69
 kinematyka..... 47, 54, 59
 konfiguracje osobliwe 82
 parametry Denavita-Hartenberga. 48
 przestrzeń robocza..... 60
 zadanie odwrotne..... 103
 sztywny..... 40, **196**, 213
 manipulowalność . 118, 127, **129**, 174, 187
 mapa rozmaitości..... **30**
 zgodność..... **31**
mechanika
 hamiltonowska 206
 lagranżowska 206
 wakonomiczna 392
metoda
 algebraiczna **98**
 geometryczna..... **101**
 jakobianu
 dołączonego **163**, 175
 odpornego **168**
 odwrotnego **103**
 pseudoodwrotnego **111**
 pseudoodwrotnego z projekcją ... **117**
 rozszerzonego **119**

transponowanego.....122
 Lapunowa II.....412, 417
 Laumonda.....347
 Lie-algebraiczna.....285, 297, 310
 mnożników Lagrange'a.....125
 najmniejszych kwadratów.....168
 Newtona.....182, 285, 287
 odsprzęgania.....207
 optymalnego planowania
 ogólna.....285
 specjalizowana.....317
 podcelów.....317, 341, 348
 postaci normalnych...140, 142, 175
 propagacji fali.....310
 przestrzeni zerowej.....166, 175
 sterowań sinusoidalnych...317, 331, 348
 Sussmanna-Lafferiera.....348
 uśredniania.....285, 292, 310
 metody
 dyskretne.....310
 jakobianowe.....103
 potencjałowe.....311
 przeszukiwania grafu.....311
 mnożenie
 skalarne.....25
 wektorowe.....25
 mnożniki Lagrange'a.....126, 352, 353
 mobilność.....186, 187
 model dynamiki
 manipulatora o elastycznych przegubach.....246
 manipulatora sztywnego...209, 210, 213

N
 nawias Liego.....38, 87, 89, 274, 405
 iterowany.....406
 własności.....276
 nieznanajomość
 modelu.....210
 parametryczna.....210, 222, 370
 strukturalna.....210, 231, 370
 norma
 aksjomaty.....402
 euklidesowa.....25, 201, 402
 macierzy.....402

indukowana.....402
 widmowa.....402

O

obroty elementarne.....43
 odsprężenie.....203
 odwrotność
 przybliżona macierzy.....168
 uogólniona macierzy.....402
 zwrotna.....402
 odwzorowanie
 analityczne.....403
 gładkie.....403
 klasy $\mathbb{B}$403
 klasy $\mathbb{C}^k$403
 klasy $\mathbb{L}_k$403
 lokalnie lipschitzowskie...403, 413
 mierzałne.....403
 odwrotne.....403, 404
 ograniczone.....403
 ogniwo manipulatora.....40
 ograniczenia
 fazowe....36, 38, 194, 352, 358, 379
 postać Pfaffa.....36
 holonomiczne.....37, 38, 89, 265
 konfiguracyjne.....36, 38, 194, 362
 mechaniczne przegubów.....118
 nieholonomiczne.37, 38, 83, 89, 265
 brak poślizgu kół.....266
 kryterium.....38
 zasada zachowania momentu pędu
 267
 osobliwości
 manipulatora..79, 90, 129, 131, 167, 173
 reprezentacji.....80
 roboata mobilnego.....86
 osobliwy algorytm kinematyki odwrotnej
 140
 oś obrotu.....34

P

para kinematyczna.....40
 paraboliczna postać normalna kinematyki
 manipulatora.....146, 147
 parametry
 barycentryczne.....381, 383, 386
 Denavita-Hartenberga.....43

- manipulatora IRb-6 49
- manipulatora *SCARA* 48
- podwójnego wahadła 45
- potrójnego wahadła 46
- dynamiki 222
 - manipulatora *EDDA* 202
 - geometryczne 43, 365, 381
 - zastępcze 419
- parametryzacja 30
 - Cayleya 34, 73
 - kąty Eulera 34
 - kołysanie-kiwanie-myszkowanie .. 35, 72
 - wykładnicza 51
 - $SE(3)$ 35
- planowanie ruchu 285, 317
 - metody
 - globalne 271
 - lokalne 272
 - ogólnego przeznaczenia 272
 - specjalizowane 272
- pola
 - hamiltonowskie 136, 174
 - sterujące 83
 - stowarzyszone 273
- pole wektorowe 37, 404
 - ruchu własnego 166
- polisystem dynamiczny 407
- postać normalna 141, 174
 - dynamiki 369
 - kinematyki manipulatora 141
 - hiperboliczna 146, 147, 148, 175
 - IRb-6 158
 - kwadratowa 145, 146, 147, 175
 - paraboliczna 146, 147, 175
 - podwójne wahadło 148
 - wokół konfiguracji osobliwej .. 144
 - wokół konfiguracji regularnej .. 141
- postać prenormalna 153
- powtarzalność 174
- prędkość
 - ciała sztywnego 31
 - w układzie ciała 31
 - w układzie przestrzeni 31, 125
 - kątowa
 - w układzie ciała 31
 - w układzie przestrzeni 31
- liniowa
 - w układzie ciała 32
 - w układzie przestrzeni 32
- przegubów 125
- punktu materialnego 26
- prędkości
 - przegubowe 128
 - uogólnione 36, 40
 - zadaniowe 128
- przełożenie przekładni 199
- przegub manipulatora
 - obrotowy 40
 - przesuwny 40
- przemieszczenie ciała sztywnego 28
- przestrzeń
 - euklidesowa 25
 - fizyczna 25
 - Hilberta 83, 403
 - konfiguracyjna
 - ciała sztywnego 29
 - manipulatora 55
 - punktu materialnego 26
 - przegubowa manipulatora .. 55, 126, 135, 206
- robocza 96
 - manipulatora IRb-6 61
 - manipulatora *SCARA* 60
- stanu 84, 406
- sterowań 84
- styczna 30, 32, 36, 38, 79
- zadaniowa manipulatora 55, 96, 122, 164, 166, 194, 206
- przesunięcia elementarne 43
- przyczepa 351
- przyspieszenie ruchu 26
- pseudoodwrotność
 - jakobianu analitycznego
 - manipulatora 112
 - robota mobilnego 183
 - macierzy 111, 170, 294, 402
- punkt
 - osobliwy 405
 - równowagi .. 132, 134, 136, 405, 407
 - asymptotycznie stabilny 133
 - eksponencjalnie stabilny 412
 - globalnie eksponencjalnie stabilny 412

- globalnie jednostajnie asymptotycznie stabilny 412, 413
 globalnie jednostajnie stabilny 412
 jednostajnie asymptotycznie stabilny 412
 jednostajnie stabilny 412
 jednostajnie stabilny asymptotycznie globalnie 371
 niestabilny 133
 stabilny w sensie Lapunowa 133
 regularny 405
- R**
- ramię manipulatora 40
 regulator PD 203, 213, 218–220, 235
 reprezentacja kinematyki
 kwaternionowa 89
 we współrzędnych 55
 wg Denavita-Hartenberga 43
 wykładnicza 52, 76, 89
 RL-równoważność 141
 lokalna 141
 robot mobilny 83
 jednokołowy 275, 317, 357
 metoda Lie-algebraiczna 305
 metoda uśredniania 295
 kołowy 351
 charakterystyka koła 355
 klasyfikacja 361, 392
 prosty 351, 358
 złożony 351, 366
 Ulisses 365
 λ -śledzenie 390
 algorytm Corona-Pometa 372
 algorytm linearyzacji dynamicznej 374
 algorytm Walsha-Tilbury'ego-Sastry'ego-Murray-Laumonda 379
 model dynamiki 368
 model kinematyki 365
 postać normalna 372
 sterowanie adaptacyjne 388
 współrzędne linearyzujące 382, 385
 robot nieholonomiczny 83
 rozmaitość
- gładka 30
 konfiguracyjna 36, 38–41, 131, 265
 przegubowa 41, 174
 różniczkowa 89
 ruchu własnego 132, 174
 zadaniowa 39, 41, 79, 95, 125, 131, 174
 różniczka Gâteaux 84
 równania
 dynamiki 195
 bez ograniczeń 196
 manipulatora o elastycznych przegubach 246, 249
 manipulatora sztywnego 201
 układu robotycznego 195
 z ograniczeniami 353
 Eulera-Lagrange'a 195, 249, 409
 kanoniczne Hamiltona 286, 318, 408
 kinematyki 39
 równanie
 Lapunowa 225
 wariacyjne 85
 równoważność 140, 141
 równozmienność 28
 ruch punktu materialnego 26
- S**
- scenariusz ruchu 322
 sfera nieholonomiczna 311
 siły
 Coriolisa 195
 grawitacji 195
 odśrodkowe 195
 sprężystości 245
 tarcia 196
 uogólnione 195
 skręcenie toru 27
 skrętnik 52, 77, 89
 spadający kot 267
 specjalna grupa
 euklidesowa 29, 41, 63, 88
 obrotów 28, 88
 sprzężenie zwrotne
 dynamiczne 212, 250, 261
 statyczne 203, 213, 253, 261, 369, 370, 392
 stabilizowalność 369, 408

stabilność
 asymptotyczna 224, 234
 globalna 225, 230
 półglobalna 216, 221, 228, 260
 eksponencjalna ... 213, 216–218, 229,
 253, 378, 384
 stała ruchu 406
 sterowalność 273, 369, 407
 lokalna 407
 w krótkim czasie 273, 407
 w krótkim czasie 84, 407
 sterowanie 406
 adaptacyjne 210
 nieosobliwe 183, 185
 odcinkami stałe 288
 odporne 210
 optymalne 86
 osobliwe 86, 88, 186
 sinusoidalne 303
 stopień
 anizotropii 129
 mobilności 361, 367
 nawiasu Liego 276
 redundancji 132, 134, 136
 sterowalności 361
 swobody 36
 uwarunkowania 130
 stratyfikacja Whitneya 80
 strumień pola wektorowego 278, 404
 suriekcja liniowa 79
 symbole Christoffela I rodzaju 195

Ś

ścieżka ruchu 26
 ślad macierzy 34
 śledzenie trajektorii 213

T

toczenie się koła
 bez poślizgu 355
 bocznego 356
 wzdlużnego 356
 tor ruchu 26
 torsja toru 27
 tożsamość Jacobiego 276, 277, 335
 trajektoria
 optymalna 325
 przegubowa 104, 166, 194, 214

ruchu 26
 zadaniowa 95, 194
 traktor 351, 358
 trójkątowy 359, 364
 model dynamiki 367
 model kinematyki 364
 ograniczenia fazowe 359
 trójścian Freneta 26
 twierdzenie
 Brocketta 392
 Chow 89, 187, 275, 297
 Frobeniusa 89
 La Salle'a-Yoshizawy 234, 241, 258,
 388, 413
 o funkcji odwrotnej 133, 404
 o postaci normalnej 145, 146
 o prostowaniu 405
 o uśrednianiu 292
 o wartości średniej 220, 404
 Stokesa 317

U

układ
 2-łańcuchowy 335
 2-wejściowy generowanie kierunków
 301
 Brocketta 275, 280, 331
 estymacji 211
 łańcuchowy 333, 348
 napędowy 196, 246
 nieholonomiczny 39, 293, 393
 nilpotentny 277
 robotyczny 36, 83, 352
 uniwersalny 394
 współrzędnych 30
 układ dynamiczny 404
 autonomiczny 405
 hamiltonowski ... 134, 174, 406, 408
 nieautonomiczny . 104, 405, 412, 413
 ruchu własnego 132, 134, 166
 strumień 404
 układ sterowania 39, 369, 406, 408
 afiniczny 203, 377
 autonomiczny 407
 liniowy 406
 nieautonomiczny 406
 niestacjonarny 406

niezależny od czasu.....	407
afiniczny.....	407
bezdryfowy.....	83, 407
liniowy.....	407
stacjonarny.....	407
uniwersalny.....	211, 239
zależny od czasu.....	406
liniowy.....	406

układy hamiltonowskie.....	136
----------------------------	-----

uniwersum

fazowe.....	36, 39, 83
konfiguracyjne.....	36, 89

W

warstwa pól wektorowych.....	276
------------------------------	-----

warunek

amplitudowy.....	304
częstotliwościowy.....	304
fazowy.....	304
Lipschitza.....	403
rzędu algebry Liego.....	275
transwersalności.....	163, 167

warunki Moore'a-Penrose'a.....	402
--------------------------------	-----

wektor wzrostu dystrybucji.....	38
---------------------------------	----

wiązka styczna.....	30
---------------------	----

własność osiągalności.....	369
----------------------------	-----

współrzędne

jednorodne.....	28, 196
kartezjańskie.....	33, 71
konfiguracyjne.....	55
linearyzujące.....	379, 384
oś-kąt.....	33
przegubowe.....	55, 61, 133
sferyczne.....	33
uogólnione.....	36, 246
walcowe.....	33
wykładnicze w $SE(3)$	35
wykładnicze w $SO(3)$	34
wykładnicze w $SE(3)$	89
zadaniowe.....	55, 61, 126

wyjścia linearyzujące.....	374, 382
----------------------------	----------

wymiar rozmaitości.....	30
-------------------------	----

Z

zadanie

λ -śledzenia.....	389
czaso-optymalne.....	319
Dubinsa.....	318, 347

izoperymetryczne.....	182
-----------------------	-----

odwrotne.....	140
---------------	-----

ciągłe.....	95
-------------	----

dla manipulatora IRb-6.....	100, 109, 114, 118, 121, 123, 161, 172
-----------------------------	--

dla manipulatora SCARA.....	103
-----------------------------	-----

dla podwójnego wahadła.....	98, 102, 104, 151, 156, 165, 167, 170
-----------------------------	---------------------------------------

dla potrójnego wahadła.....	112, 126
-----------------------------	----------

kinematyki manipulatora.....	95, 117, 121, 126, 164
------------------------------	------------------------

kinematyki robota mobilnego.....	182
----------------------------------	-----

osobliwe.....	97, 131
---------------	---------

punktowe.....	96, 122, 125
---------------	--------------

regularne.....	97
----------------	----

optymalizacji.....	112, 126
--------------------	----------

planowania ruchu.....	269
-----------------------	-----

holonomiczne.....	269
-------------------	-----

nieholonomiczne.....	269
----------------------	-----

robota mobilnego.....	182
-----------------------	-----

proste kinematyki manipulatora.....	95
-------------------------------------	----

Reedsa-Sheppa.....	318, 347
--------------------	----------

śledzenia trajektorii.....	202
----------------------------	-----

sterowania.....	408
-----------------	-----

adaptacyjnego robota mobilnego.....	386
-------------------------------------	-----

optymalnego.....	86
------------------	----

robota mobilnego.....	384
-----------------------	-----

Zasada

d'Alemberta.....	352, 380, 392
------------------	---------------

Maksimum Pontriagina.....	86, 90, 286, 332, 408
---------------------------	-----------------------

Najmniejszego Działania.....	195, 392
------------------------------	----------

Niezmienniczości La Salle'a.....	411, 419
----------------------------------	----------

zbiór

I kategorii.....	80
------------------	----

analityczny.....	80
------------------	----

niezmienniczy.....	137, 405, 411, 420
--------------------	--------------------

zmienna dołączona.....	87, 286, 408
------------------------	--------------

zręczność manipulatora.....	79, 129, 174
-----------------------------	--------------

Problemy Współczesnej Nauki

Teoria i Zastosowania

Informatyka

Wykaz książek, które ukazały się w tej serii:

1. A. Mykowiecka, *Podstawy przetwarzania języka naturalnego. Metody generowania tekstów*
2. E. Dobryjanowicz, *Podstawy przetwarzania języka naturalnego. Wybrane metody analizy składniowej*
3. L. Bolc, A. Mykowiecka, *Podstawy przetwarzania języka naturalnego. Wybrane metody formalnego zapisu składni*
4. L. Bolc, J. Zaremba, *Wprowadzenie do uczenia się maszyn*
5. A. Szałas, *Zarys dedukcyjnych metod automatycznego wnioskowania*
6. R. Tadeusiewicz, *Sieci neuronowe*
7. W. Mokrzycki, *Encyklopedia przetwarzania obrazów*
8. M. Muraszkiewicz, H. Rybiński, *Bazy danych*
9. W. Skarbek, *Metody reprezentacji obrazów cyfrowych*
10. E. Gatnar, *Metody modelowania jakościowego*
11. M. Byrska, *Ochrona programu komputerowego w nowym prawie autorskim*
12. K. Subieta, *Ingres — system zarządzania relacyjną bazą danych*
13. J. Korbicz, A. Obuchowicz, D. Uciński, *Sztuczne sieci neuronowe — podstawy i zastosowania*
14. Z. Suraj, B. Komarek, *GRAF — Graficzny system konstruowania i symulowania sieci Petriego*
15. J. Chromiec, E. Strzemieczna, *Sztuczna inteligencja. Metody konstrukcji i analizy systemów eksperckich*
16. J. Cytowski, *Algorytmy genetyczne*
17. A. Wakulicz-Deja, *Podstawy systemów wyszukiwania informacji. Analiza metod*
18. L. Polkowski, M. Szczuka, *Elementy matematyki dla studentów kierunków informatycznych*
19. L. Bolc, K. Dziewicki, P. Rychlik, A. Szałas, *Wnioskowanie w logikach nieklasycznych. Podstawy teoretyczne*
20. Z. Vetulani, W. Abramowicz, G. Vetulani, *Język i technologia*
21. G. Bryll, *Metody odrzucania wyrażeń*
22. E. Rafajłowicz, W. Myszka, *LATEX — zaawansowane narzędzia*
23. D. Figura, *Obiektowe bazy danych*
24. E. Hajnicz, *Reprezentacja logiczna wiedzy zmieniającej się w czasie*
25. D. Rutkowska, *Inteligentne systemy obliczeniowe. Algorytmy genetyczne i sieci neuronowe w systemach rozmytych*
26. L. Banachowski, *Bazy danych. Tworzenie aplikacji*
27. W. Skarbek (Red.), *Multimedia. Algorytmy i standardy kompresji*
28. P. Zieliński, *Systemy informatyczne dla bankowości w zarysie*
29. P. Adamczewski, *Wdrożeniowe uwarunkowania zintegrowanych systemów informatycznych*
30. K. Wojciechowski, *System z niepewnością ograniczoną. Model, analiza i modyfikacja. Podejmowanie decyzji i reguły decyzyjne*
31. A. Czyżewski, *Dźwięk cyfrowy. Wybrane zagadnienia teoretyczne, technologia, zastosowania*

32. K. Subieta, *Obiektywność w projektowaniu i bazach danych*
33. L. Bolc, K. Dziewicki, P. Rychlik, A. Szałas, *Wnioskowanie w logikach nieklasycznych. Automatyzacja wnioskowania*
34. K. Subieta, *Słownik terminów z zakresu obiektywności*
35. M. Nieniewski, *Morfologia matematyczna w przetwarzaniu obrazów*
36. E. Lipowska-Nadolska, M. Morawski, *Tablice systoliczne. Problemy wybrane*
37. R. Tadeusiewicz, *Elementarne wprowadzenie do techniki sieci neuronowych z przykładowymi programami*
38. A. Mrózek, L. Płonka, *Analiza danych metodą zbiorów przybliżonych. Zastosowania w ekonomii, medycynie i sterowaniu*
39. A. Piegat, *Modelowanie i sterowanie rozmyte*
40. A. Janiak, *Wybrane problemy i algorytmy szeregowania zadań i rozdziału zasobów*
41. W. Skarbek, *Multimedia. Sprzęt i oprogramowanie*
42. J. Cytowski, *Metody i algorytmy sztucznej inteligencji w cyfrowym przetwarzaniu sygnałów*

Statystyka

Wykaz książek, które ukazały się w tej serii:

1. J. R. Thompson, J. Koronacki, *Statystyczne sterowanie procesem. Metoda Deminga etapowej optymalizacji jakości*
2. E. Rafajłowicz, *Algorytmy planowania eksperymentu z implementacjami w środowisku MATHEMATICA*

Zarządzanie

Wykaz książek, które ukazały się w tej serii:

1. R. Janikowski, *Zarządzanie ekologiczne*

W przygotowaniu znajdują się następujące pozycje:

1. J. Doroszewski, *Struktura wiedzy i rozwiązywania problemów medycznych*
2. M. A. Kłopotek, *Konstrukcja systemów bazodanowych w światowej sieci komputerowej WWW*
3. J. Kulikowski, *Komputerowe przetwarzanie obrazów biomedycznych*
4. H. Kwaśnicka, *Obliczenia ewolucyjne w sztucznej inteligencji*
5. J. Mańdziuk, *Sieci neuronowe typu Hopfielda. Teoria i przykłady zastosowań*
6. R. Pruchnik, *Algorytmy odwracalnej kompresji danych*
7. A. Skowron, *Podstawy sztucznej inteligencji*
8. J. Stokłosa, T. Bilski, T. Pankowski, *Bezpieczeństwo danych w systemach informatycznych*
9. J. Wywił, *Elementy metody reprezentacyjnej z wykorzystaniem statystycznego pakietu SPSS*