KATEDRA CYBERNETYKI I ROBOTYKI
WYDZIAŁ ELEKTRONIKI
POLITECHNIKA WROCŁAWSKA
Notatki do wykładów z dziedziny automatyki i robotyki

Krzysztof Tchoń
Robert Muszyński

Mechanika analityczna

Wrocław 2018

Krzysztof Tchoń Robert Muszyński

Mechanika analityczna

Notatki do wykładów z dziedziny automatyki i robotyki

Kompilacja: 11 lutego 2023

Wrocław 2018

Krzysztof Tchoń, Robert Muszyński
Wrocław 2018

Autorzy
Krzysztof Tchoń
Robert Muszyński
Katedra Cybernetyki i Robotyki,
Wydział Elektroniki,
Politechnika Wrocławska

Komputerowy skład tekstu
Robert Muszyński
Krzysztof Tchoń

Spis treści

Do składu książki wykorzystano system przygotowania dokumentów LaTeX, opracowany przez L. Lamporta [Lam94], będący nakładką systemu TeX [Knu86a,Knu86b]. Matematyczne czcionki o nazwie AMS Euler, których używamy w tej książce, zostały opracowane przez H. Zapfa [KZ86] na zlecenie Amerykańskiego Towarzystwa Matematycznego, i użyte do składu książki [GKP96]. Wybrane czcionki składu tekstu, Antykwa Toruńska [Now97] – jeden z nielicznych krojów pisma zaprojektowany specjalnie dla języka polskiego w sposób uwzględniający jego rytm – w odczuciu autorów doskonale współgrają z kształtem czcionki AMS Euler, pozwalając na uzyskanie harmonijnej całości.

[GKP96] R. L. Graham, D. E. Knuth i O. Patashnik, Matematyka konkretna. PWN, Warszawa, 1996.

[Knu86a] D. E. Knuth, The TeXbook, volume A of Computers and Typesetting. Addison-Wesley, Reading, 1986.

[Knu86b] D. E. Knuth, TeX: The Program, volume B of Computers and Typesetting. Addison-Wesley, Reading, 1986.

[KZ86] D. E. Knuth i H. Zapf, AMS Euler — A new typeface for mathematics. Scholary Publishing, **20**:131–157, 1986.

[Lam94] L. Lamport, LaTeX: A Document Preparation System. Addison-Wesley, Reading, 1994.

[Now97] J. Nowacki, Antykwa Toruńska — od początku do końca polska czcionka. *Biuletyn Polskiej Grupy Użytkowników Systemu TeX*, 9:26–27, 1997.

Spis oznaczeń

$[\,]$	nawias Liego (104)
$\{\,\}$	nawias Poissona (61)
$A(q)$	macierz Pfaffa (94)
$C(q,\dot{q})$	macierz sił Coriolisa (48)
$c_{ij}^{k}(q)$	symbole Christoffela I rodzaju (48)
$\Gamma_{ij}^{k}(q)$	symbole Christoffela II rodzaju (48)
div	dywergencja (65)
$\varphi(t,x)$	strumień (64)
(φ,θ,ψ)	kąty Eulera (74)
$H(q,p)$	hamiltonian (57)
$I(q(\cdot))$	działanie (43)
K	krzywizna (13)
$K(q,\dot{q})$	energia kinematyczna (43)
$\mathcal{L}$	algebra Liego (105)
$L(q,\dot{q})$	lagranżian (43)
M	moment pędu układu (22)
P	pęd układu (21)
$Q(q)$	macierz inercji (47)
R	macierz obrotu (71)
$\mathbb{R}$	zbiór liczb rzeczywistych (8)
$\mathbb{R}^3$	3-wymiarowa przestrzeń rzeczywista (8)
$R(X,\alpha)$, $R(Y,\beta)$, $R(Z,\gamma)$	obroty elementarne (74)
$\mathbb{S}^1$	okrąg jednostkowy (67)
$\mathbb{S}^2$	sfera jednostkowa (50)
$SE(3)$	specjalna grupa euklidesowa (72)
$SO(3)$	specjalna grupa ortogonalna (74)
T	skręcenie (torsja) (13)

T	wektor przesunięcia (71)
$\mathbb{T}^2$	torus (67)
$V(q)$	energia potencjalna (43)
$v^T Q(q) w$	metryka Riemanna (50)
D	pochodna funkcji (29)
$\mathcal{X}$	przestrzeń Banacha (29)
$X(x)$	pole wektorowe (64)
Ω	macierzowa prędkość kątowa (75)
ω	wektorowa prędkość kątowa (76)

Rozdział 0

Preludium

Celem niniejszego wykładu jest przedstawienie metod tworzenia opisów matematycznych ruchu układów mechanicznych spotykanych w automatyce i robotyce. W kolejnych rozdziałach notatek pokażemy trzy ujęcia mechaniki: mechanikę newtonowską, mechanikę lagranżowską i mechanikę hamiltonowską, a następnie zajmiemy się kinematyką i dynamiką układów z więzami.

Dla zorientowania Czytelnika w przedmiocie, metodach i wynikach mechaniki analitycznej, w tym rozdziale zajmiemy się wyprowadzeniem I Prawa Keplera ruchu Planet. Prawo to mówi, że Planety poruszają się wokół Słońca po orbitach eliptycznych; w jednym z ognisk tej elipsy znajduje się Słońce. Założymy przy tym, że Czytelnik zna II Zasadę Dynamiki Newtona dla ruchu punktu materialnego i Prawo Powszechnego Ciążenia. Przedstawione wyprowadzenie pokazuje metody, jakimi posługuje się mechanika analityczna: prawa ruchu, przekształcenia współrzędnych, poszukiwanie niezmienników ruchu, dążenie do rozwiązania równań ruchu przez kwadratury, wyznaczenie orbit lub trajektorii.

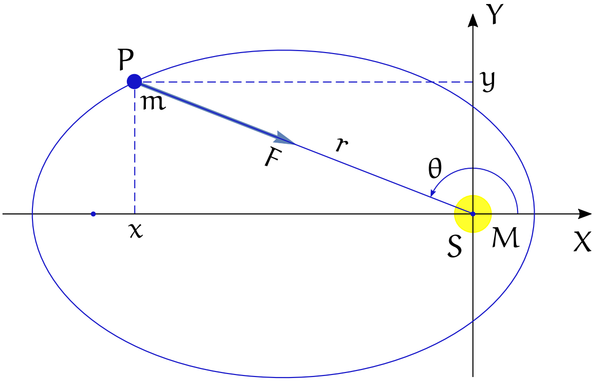
0.1. Równania ruchu

Zakładamy, że trajektoria ruchu Planety wokół Słońca leży na płaszczyźnie. Zarówno Słońce, jak i Planetę traktujemy jako punkty materialne. Umieszczamy początek układu współrzędnych w środku Słońca i opisujemy położenie Planety względem Słońca za pomocą współrzędnych kartezjańskich $(x, y)^T$, patrz Rysunek 1. Niech M oznacza masę Słońca, a m masę Planety.

W celu uzyskania równań ruchu Planety przywołujemy II Zasadę Dynamiki Newtona,

$$ma = F,$$

gdzie F oznacza siłę przyciągania grawitacyjnego Planety zadaną przez Prawo Powszechnego Ciążenia, zaś a jest jej przyśpieszeniem. Jeżeli położenie Planety w chwili t wynosi $(x(t), y(t))^T$, łącząc wymienione dane



Rysunek 1: Położenie Planety P wokół Słońca S

otrzymujemy następujące równania ruchu we współrzędnych kartezjańskich*

$$m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix} = -\frac{GMm}{x^2+y^2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}. \tag{1}$$

Dla uproszczenia zapisu, w dalszym ciągu będziemy zakładać, że współczynnik $GM = 1$.

Równania kartezjańskie nie odznaczają się prostotą, z tego powodu wyrazimy je w innych współrzędnych. Naturalnym kandydatem są współrzędne biegunowe

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}.$$

Po obliczeniu pochodnych i wykonaniu odpowiednich przekształceń otrzymujemy następujące równania ruchu określone we współrzędnych biegunowych

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{1}{r^2} = 0 \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 \end{cases}. \tag{2}$$

Naszym celem jest wyznaczenia trajektorii Planety, $(r(t), \theta(t))^T$.

0.2. Niezmienniki

Klasyczne zastosowanie metod mechaniki analitycznej przy rozwiązywaniu równań ruchu polega na wyznaczeniu tzw. niezmienników (stałych

*Podążając za Isaakiem Newtonem, do oznaczania pochodnych funkcji/zmiennych po czasie będziemy używali w tych notatkach kropek umieszczanych nad symbolami tychże – tak więc, podwójne kropki zapisane poniżej oznaczają drugą pochodną położenia po czasie, czyli przyspieszenie.

ruchu). Są to wielkości zależne od położeń i prędkości, które pozostają stałe podczas ruchu.

Rozważmy moment pędu Planety $h = mr^2\dot{\theta}$. Pochodna wzdłuż trajektorii równań (2) wynosi

$$\dot{h} = 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} = mr\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right) = 0.$$

W ten sposób pokazaliśmy, że moment pędu h jest niezmiennikiem ruchu.

Drugim kandydatem na niezmiennik jest energia całkowita planety (kinetyczna i potencjalna)

$$E = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - \frac{m}{r} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}h\dot{\theta} - \frac{m}{r},$$

gdzie ostatnia składowa wyraża energię potencjalną w polu grawitacyjnym. Pochodna energii względem czasu jest równa

$$\dot{E} = m\dot{r}\ddot{r} + \frac{1}{2}h\ddot{\theta} + \frac{m}{r^2}\dot{r}.$$

Wzdłuż trajektorii równań (2) mamy

$$\dot{E} = m\dot{r}\left(\ddot{r} + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{2}h\ddot{\theta} = m\dot{r}r\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}h\ddot{\theta} = \frac{1}{2}\frac{h}{r}\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right) = 0,$$

co oznacza, że energia jest także niezmiennikiem.

0.3. Orbity

Okazuje się, że te dwa niezmienniki pozwolą na rozwiązanie równań ruchu Planety wokół Słońca. Tymczasowo zrezygnujemy jednak z wyznaczenia trajektorii $(r(t), \theta(t))^T$, a zamiast niej poprzestaniemy na wyliczeniu orbity ruchu $r = r(\theta)$, a dokładniej funkcji $u(\theta) = r^{-1}(\theta)$. W celu wyrażenia energii poprzez funkcję $u(\theta)$ obliczamy

$$\begin{cases} \dot{r} = (\dot{u^{-1}}) = -u^{-2}\dfrac{du}{d\theta}\dot{\theta} = -r^2\dot{\theta}\dfrac{du}{d\theta} \\ \dot{\theta} = \dfrac{h}{m}u^2 \end{cases}$$

oraz

$$E = \frac{1}{2}\frac{h^2}{m}\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right) - mu.$$

Przedstawiając to ostatnie wyrażenie w postaci

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = \frac{2m}{h^2}(E + mu) \tag{3}$$

i różniczkując względem czasu otrzymujemy

$$\dot{\theta}\frac{du}{d\theta}\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u - \frac{m^2}{h^2}\right) = 0.$$

Widzimy, że z matematycznego punktu widzenia Planeta może wykonywać trzy rodzaje ruchów: $\theta = \text{const}$ – ruch prostoliniowy wzdłuż promienia r, $u = \text{const}$ – ruch po orbicie kołowej i ruch opisany równaniem różniczkowym

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{m^2}{h^2}. \tag{4}$$

Dwa pierwsze rodzaje ruchu nie są obserwowane doświadczalnie, pozostaje zatem ruch trzeci.

Równanie (4) jest liniowe, rzędu II, ze stałą prawą stroną, wiadomo więc, że jego rozwiązanie ma postać

$$u(\theta) = r^{-1}(\theta) = \frac{m^2}{h^2} + C\cos(\theta + \theta_0)$$

dla pewnych stałych C i θ_0. Zakładając, że $\theta_0 = 0$ stałą C wyliczymy ze wzoru (3) dla kąta $\theta = \pi/2$. Daje to $u = \frac{m^2}{h^2}$, $\frac{du}{d\theta} = -C$ i w efekcie

$$C = \frac{m^2}{h^2}\left(1 + \frac{2Eh^2}{m^3}\right)^{1/2}.$$

Po podstawieniu uzyskujemy wzór na orbitę Planety wokół Słońca

$$r(1 + \varepsilon\cos\theta) = l, \tag{5}$$

gdzie $\varepsilon = \left(1 + \frac{2Eh^2}{m^3}\right)^{1/2}$ i $l = \frac{h^2}{m^2}$. Otrzymane równanie jest równaniem elipsy we współrzędnych biegunowych. Stanowi ono kwintesencję I Prawa Keplera. Współczynnik ε nazywa się mimośrodem, a współczynnik l parametrem elipsy. Współczynniki ε i l wyznaczają jednoznacznie dłuższą a i krótszą b półoś elipsy, występujące w równaniu elipsy we współrzędnych kartezjańskich

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Korzystając z definicji elipsy (miejsce geometryczne wszystkich punktów płaszczyzny, dla których suma odległości od dwóch, ustalonych punktów, ognisk, jest stała) można pokazać, że

$$a = \frac{l}{1-\varepsilon^2}, \; b = \frac{l}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \; b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}. \tag{6}$$

Należy zauważyć, orbity eliptyczne otrzymamy dla wartości mimośrodu ϵ mniejszych od 1, co oznacza, że energia E Planety musi być ujemna.

0.4. Trajektorie

Wykorzystując istnienie niezmienników w poprzednim rozdziale wyznaczyliśmy orbitę Planety wokół Słońca. Mając dany kąt θ byliśmy w stanie określić położenie Planety $r(\theta)$. W niektórych zastosowaniach astronomii, takich jak na przykład w zadaniu określenia daty Wielkanocy, znajomość orbity jest jednak niewystarczająca i potrzebna jest trajektoria $(r(t), \theta(t))^T$ Planety. W celu jej wyznaczenia odwołamy się znowu do niezmienników. Mamy mianowicie

$$h = mr^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{const},$$

co po wykorzystaniu równania orbity (5) pozwala napisać następujące równanie różniczkowe

$$\frac{h}{ml^2} dt = \frac{d\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2}.$$

Równanie to pozwala wyznaczyć zależność

$$t(\theta) = \frac{ml^2}{h} \int_0^\theta \frac{d\vartheta}{(1+\varepsilon\cos\vartheta)^2}. \tag{7}$$

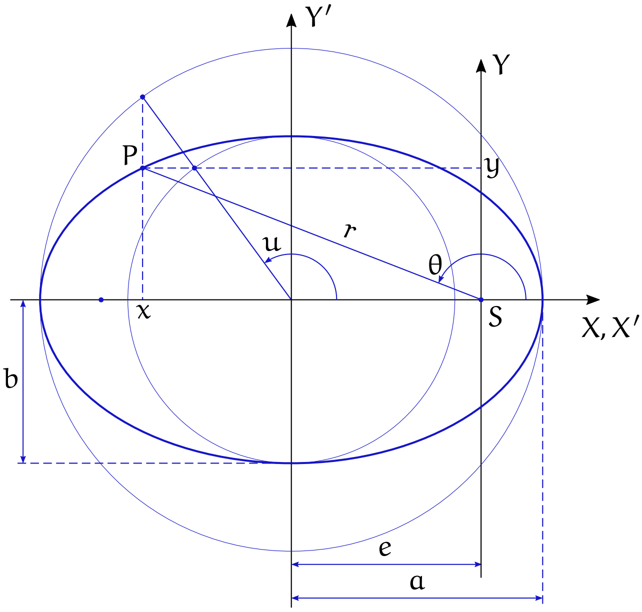
Funkcja odwrotna $\theta(t) = t^{-1}(\theta)$ daje równanie trajektorii Planety we współrzędnych biegunowych

$$\left(r(t) = \frac{l}{1+\varepsilon\cos\theta(t)}, \; \theta(t) \right)^T$$

i kartezjańskich

$$\begin{cases} x(t) = r(t)\cos\theta(t) \\ y(t) = r(t)\sin\theta(t) \end{cases}.$$

W celu wyznaczenia funkcji (7) wykorzystamy parametryczne równania elipsy (zob. Rysunkek 2). Oznaczając parametr literą u możemy napisać



Rysunek 2: Elipsa

następujący związek

$$\begin{cases} x = a\cos u - e = r\cos\theta \\ y = b\sin u = r\sin\theta \end{cases}, \tag{8}$$

gdzie e oznacza odległość ogniska elipsy od jej środka. Nietrudno pokazać, że

$$e = a - r(0) = a\varepsilon,$$

skąd wynika, że $x = a(\cos u - \varepsilon)$. Na podstawie Rysunku 2 i (8) otrzymujemy wzór

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = a(1 - \varepsilon\cos u).$$

Ponieważ jednocześnie

$$r = \frac{l}{1 + \varepsilon\cos\theta},$$

wzięcie różniczek prawych stron dwóch ostatnich wzorów, po odpowiednich podstawieniach z (8), prowadzi do zależności

$$\frac{l d\theta}{(1 + \varepsilon\cos\theta)^2} = \frac{a\sin u}{\sin\theta} du = \frac{la^2}{b}(1 - \varepsilon\cos u) du.$$

Ostatecznie, poszukiwana całka jest opisana przez tzw. równanie Keplera

$$t(u) = \frac{mab}{h}(u - \varepsilon\sin u),$$

z którego należy wyznaczyć funkcję $u(t)$. Związek między kątem θ a parametrem u wynika z zależności (8)

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{b\sin u}{a(\cos u - \varepsilon)}.$$

0.5. Zadania

Zadanie 0.1 Korzystając z definicji elipsy wyprowadzić zależność (6).

Zadanie 0.2 Na podstawie I Prawa Keplera wyprowadzić II Prawo Keplera: Prędkość polowa Planety (pole zakreślone przez promień r w jednostce czasu) jest stała.

Zadanie 0.3 Na podstawie I i II Prawa Keplera wyprowadzić III Prawo Keplera: Stosunek kwadratów okresów obiegu dwóch dwóch Planet wokół Słońca jest równy stosunkowi sześcianów dłuższych półosi ich orbit,

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}.$$

0.6. Komentarze i odniesienia literaturowe

Prawa Keplera zostały opublikowane w dwóch księgach Johannesa Keplera: [Kep09] zawiera prawo I i II, zaś [Kep19] podaje prawo III. Istnieją przekłady angielskie tych dzieł, natomiast nie ma tłumaczenia na język polski. Nasze wyprowadzenie I Prawa Keplera jest wzorowane na rozdziale 2 monografii [RK95].

Literatura

[Kep09] J. Kepler, *Astronomia nova.* Voegelin, Heidelberg, 1609.

[Kep19] J. Kepler, *Harmonices mundi.* J. Planck, Linz, 1619.

[RK95] W. Rubinowicz, W. Królikowski, *Mechanika teoretyczna.* PWN, Warszawa, 1995.

Rozdział 1

Mechanika newtonowska: kinematyka punktu materialnego

Mechanika newtonowska zajmuje się ruchem punktu materialnego lub układu punktów materialnych. Punkt materialny będziemy traktować jako pojęcie pierwotne, niedefiniowane. Scenerię ruchu punktu materialnego stanowią czas i przestrzeń.

1.1. Czas, przestrzeń i ruch

Matematycznym opisem czasu jest zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Zbiór $\mathbb{R}$ jest nieskończony, nieograniczony, uporządkowany w sposób liniowy, spójny i ciągły; ta ostatnia własność oznacza, że między dowolnymi dwoma chwilami znajduje się trzecia chwila. Przestrzeń będziemy utożsamiać z 3-wymiarową przestrzenią rzeczywistą $\mathbb{R}^3$. Elementami $\mathbb{R}^3$ są trójki liczb rzeczywistych postaci $u = (u_1, u_2, u_3)^T$, $v = (v_1, v_2, v_3)^T$, które interpretujemy jako współrzędne punktu materialnego względem pewnego układu odniesienia. Elementy przestrzeni możemy dodawać,

$$u + v = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{pmatrix},$$

a także mnożyć przez liczby rzeczywiste, dla $\alpha \in \mathbb{R}$ mamy

$$\alpha u = \begin{pmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha u_2 \\ \alpha u_3 \end{pmatrix},$$

co oznacza, że $\mathbb{R}^3$ jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$. Co więcej, wektory $u, v \in \mathbb{R}^3$ możemy także mnożyć przez siebie. Wynikiem mnożenia skalarnego jest liczba,

$$(u, v) = u^T v = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i \in \mathbb{R},$$

natomiast mnożenie wektorowe daje wektor

$$u \times v = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = i(u_2v_3 - v_2u_3) - j(u_1v_3 - v_1u_3) + \\ + k(u_1v_2 - v_1u_2) \in \mathbb{R}^3,$$

przy czym i, j, k symbolizują wektory jednostkowe w $\mathbb{R}^3$. Zdefiniowany powyżej iloczyn skalarny będziemy nazywać euklidesowym. Nietrudno pokazać, że iloczyn skalarny jest przemienny, $(u, v) = (v, u)$ i dwuliniowy, tzn. dla liczb $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ i wektorów $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ zachodzi wzór $(\alpha_1 u + \alpha_2 v, w) = \alpha_1(u, w) + \alpha_2(v, w)$. Inaczej niż iloczyn skalarny, iloczyn wektorowy jest antysymetryczny, $u \times v = -v \times u$ (zatem antyzwrotny $u \times u = 0$); jest on także niełączny, bowiem $(u \times v) \times w = u \times (v \times w) + v \times (w \times u) \neq u \times (v \times w)$.

Za pomocą iloczynu skalarnego definiujemy długość (normę) wektora

$$\|u\| = (u, u)^{1/2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} u_i^2}.$$

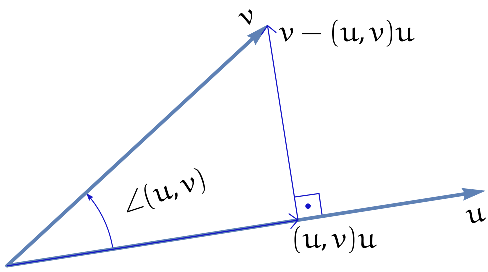
Tak określoną normę nazywamy normą euklidesową. Przestrzeń $\mathbb{R}^3$ z normą euklidesową będziemy nazywać przestrzenią euklidesową. Przypomnijmy własności normy $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$, dla $\alpha \in \mathbb{R}$ $\|\alpha u\| = |\alpha|\,\|u\|$ i nierówność trójkąta $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$.

Oprócz iloczynu skalarnego i wektorowego wprowadzimy iloczyn mieszany wektorów. Dla trzech wektorów $u, v, w \in \mathbb{R}^3$

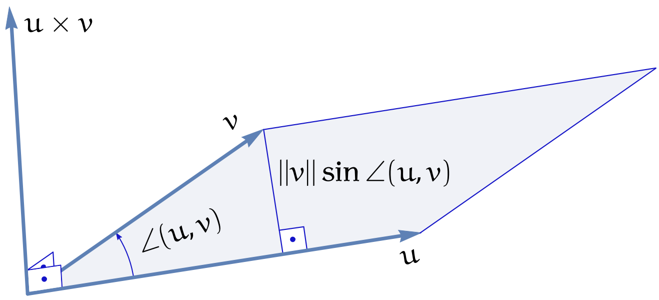
$$(u \times v, w) = \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix}.$$

Wprowadzone iloczyny wektorów z $\mathbb{R}^3$ mają przemawiającą do wyobraźni interpretację geometryczną:

1. iloczyn skalarny:
$$(u, v) = \|u\|\,\|v\| \cos \angle(u, v)$$
   — jeżeli $\|u\| = 1$, to $(u, v) = \|v\| \cos \angle(u, v)$ wyznacza rzut wektora v na wektor u,
   — jeżeli $(u, v) = 0$, to $\|u\| = 0$ lub $\|v\| = 0$ lub $\cos \angle(u, v) = 0$; ta ostatnia własność oznacza, ze wektory u i v są prostopadłe, $u \perp v$; interpretację iloczynu skalarnego ilustruje Rysunek 1.1;
2. iloczyn wektorowy:
$$\|u \times v\| = \|u\|\,\|v\| \sin \angle(u, v)$$



Rysunek 1.1: Iloczyn skalarny



Rysunek 1.2: Iloczyn wektorowy

- — długość (norma) iloczynu wektorowego jest równa polu równoległoboku rozpiętego na wektorach u i v,
- — kierunek iloczynu wektorowego jest prostopadły do płaszczyzny rozpiętej przez wektory u i v i skierowany zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej; interpretację iloczynu wektorowego pokazuje Rysunek 1.2;

3. iloczyn mieszany:

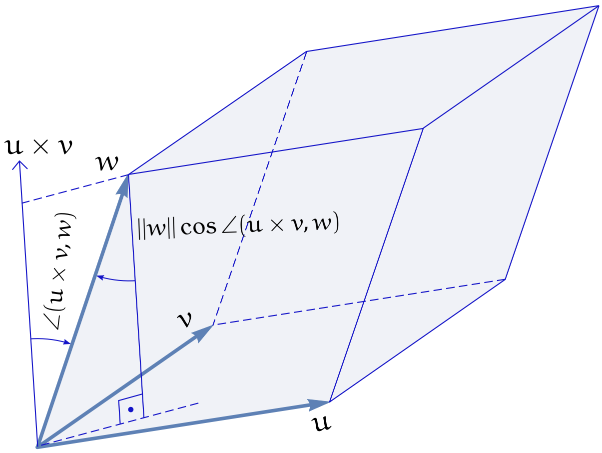
$$(u \times v, w) = \|u \times v\| \, \|w\| \cos \angle(u \times v, w)$$

jest równy objętości równoległościanu rozpiętego na wektorach u, v, w; ilustruje to Rysunek 1.3.

Czas i przestrzeń stanowiące scenerię ruchu nazywamy czasoprzestrzenią Galileusza. Mając daną scenerię ruchu, ruch punktu materialnego zdefiniujemy w następujący sposób.

Definicja 1.1.1 *Ruch punktu materialnego jest to odwzorowanie czasu w przestrzeń euklidesową*

$$c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad c(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ c_3(t) \end{pmatrix}.$$



Rysunek 1.3: Iloczyn mieszany

Odwzorowanie $c(t)$ *powinno być ciągłe i mieć ciągłe pochodne co najmniej do rzędu drugiego włącznie.*

Wymóg ciągłości ruchu jest poparty doświadczeniem; w skali makro nie obserwujemy nieciągłych ruchów (wyklucza się teleportację). Założenie o ciągłości pochodnych pozwoli zaś na zastosowanie do opisu mechaniki ruchu narzędzi analizy (można rozluźnić to założenie przyjmując, że własność ta jest spełniona prawie wszędzie, dopuszczając tym samym ruch z uderzeniami). Co więcej, zamiast prowadzenia analizy ruchu dla całej osi czasu $\mathbb{R}$ możemy ją ograniczyć do wybranego, skończonego przedziału $[t_0, t_1]$.

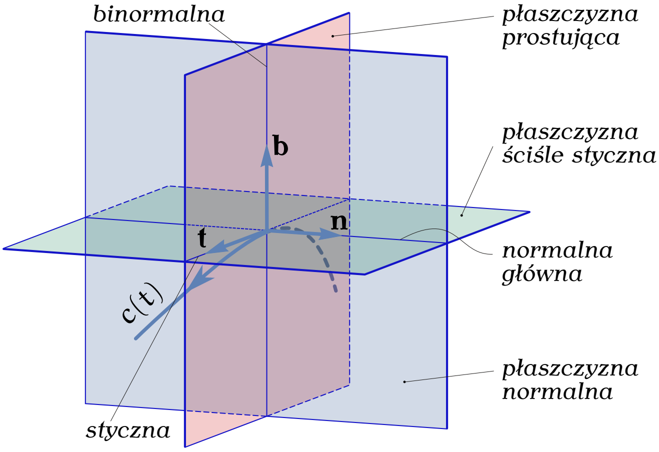
Jak wynika z podanej definicji, ruch punktu materialnego utożsamiamy z trajektorią punktu w przestrzeni. Mając ruch $c(t)$ definiujemy prędkość ruchu jako pochodną

$$\dot{c}(t) = \begin{pmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \dot{c}_2(t) \\ \dot{c}_3(t) \end{pmatrix}.$$

1.2. Trójścian Freneta

Zajmiemy się teraz bliżej geometrią ruchu. Mając wektor prędkości ruchu definiujemy wektor styczny do trajektorii ruchu w punkcie $c(t)$

$$\mathbf{t} = \frac{\dot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|}.$$



Rysunek 1.4: Trójścian Freneta

Wektor styczny wyznacza w punkcie $c(t)$ płaszczyznę prostopadłą do $\mathbf{t}$, zwaną płaszczyzną normalną. Oznaczmy przez P punkt $c(t)$ i weźmy dwa inne punkty P_1 i P_2 leżące na trajektorii po obu stronach punktu P. Poprowadźmy przez punkty P_1, P, P_2 płaszczyznę i przejdźmy z nią do granicy, przy P_1 i P_2 dążących do P. Otrzymana w granicy płaszczyzna, na której leży wektor styczny $\mathbf{t}$, nazywa się płaszczyzną ściśle styczną. Przecięcie płaszczyzny stycznej i płaszczyzny normalnej definiuje wektor normalny $\mathbf{n}$, o długości jednostkowej, skierowany w stronę zakrzywienia się trajektorii. Wektory styczny i normalny uzupełniamy do bazy ortogonalnej wprowadzając wektor binormalny $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$. Wektory styczny, normalny i binormalny definiują w punkcie $c(t)$ tzw. trójścian Freneta przedstawiony na Rysunku 1.4. Trójścian Freneta przemieszcza się z czasem wzdłuż trajektorii punktu materialnego i służy do opisu jej własności.

Dalszą analizę rozpoczniemy od przypomnienia wzoru na element długości trajektorii, $ds = \|\dot{c}(t)\|dt$, skąd wynika, że jeżeli $s(0) = 0$, to długość trajektorii przebytej od chwili 0 do chwili t wynosi

$$s(t) = \int_0^t \|\dot{c}(\tau)\|d\tau.$$

1.3. Krzywizna i skręcenie

Ustalmy teraz na trajektorii $c(t)$ pewien punkt odniesienia i weźmy punkt P odległy od niego o s. Wyznaczmy wektor styczny $\mathbf{t}(s)$ do trajektorii w punkcie P i wektor styczny $\mathbf{t}(s + \Delta s)$ w punkcie P' przesuniętym względem P o odległość Δs. Obliczmy przyrost wektora stycznego przy przesunięciu o Δs i utwórzmy iloraz różnicowy

$$\mathbf{K}(s) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\mathbf{t}(s + \Delta s) - \mathbf{t}(s)}{\Delta s} = \frac{d\mathbf{t}(s)}{ds}.$$

Normę euklidesową tego wektora,

$$K(s) = \left\| \frac{d\mathbf{t}(s)}{ds} \right\|,$$

nazywamy krzywizną trajektorii $c(t)$ w punkcie P, a wektor

$$\frac{d\mathbf{t}(s)}{ds} = K(s)\mathbf{n}(s) = \mathbf{K}(s)$$

nazywamy odpowiednio wektorem krzywizny. Odwrotność krzywizny

$$R(s) = \frac{1}{K(s)}$$

nazywa się promieniem krzywizny trajektorii $c(t)$ w punkcie P. Jak wynika z definicji, krzywizna trajektorii określa jak nieprostoliniowa jest trajektoria, jak dalece odbiega od linii prostej. Na podstawie definicji można wyprowadzić następujący wzór na krzywiznę trajektorii ruchu w punkcie $c(t)$ odległym od punktu odniesienia o $s = \int_0^t ||\dot{c}(\tau)|| d\tau$

$$K(s) = \frac{\sqrt{||\dot{c}||^2 ||\ddot{c}||^2 - (\dot{c}, \ddot{c})^2}}{||\dot{c}||^3}. \tag{1.1}$$

Analogicznie do pojęcia krzywizny definiujemy pojęcie skręcenia lub torsji trajektorii. W tym celu, zamiast wektora stycznego badamy zmienność wzdłuż trajektorii wektora binormalnego

$$\mathbf{T}(s) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\mathbf{b}(s + \Delta s) - \mathbf{b}(s)}{\Delta s} = \frac{d\mathbf{b}(s)}{ds}.$$

Normę euklidesową tego wektora nazywamy skręceniem lub torsją

$$T(s) = \left\| \frac{d\mathbf{b}(s)}{ds} \right\|.$$

Na mocy definicji, skręcenie określa jak niepłaska jest trajektoria ruchu. Trajektorie płaskie leżą na płaszczyźnie stycznej i mają skręcenie równe zeru. W celu wyznaczenia skręcenia obliczamy najpierw wektor binormalny

$$\mathbf{b} = \frac{1}{K} \frac{1}{||\dot{c}||^3} \dot{c} \times \ddot{c},$$

a następnie uzyskujemy wzór

$$T(s) = \frac{1}{K^2(s)} \frac{(\dot{c} \times \ddot{c}, c^{(3)})}{||\dot{c}||^6} \tag{1.2}$$

określający skręcenie trajektorii $c(t)$ w punkcie P odległym od punktu odniesienia o odległość $s = \int_0^t ||\dot{c}(\tau)||d\tau$.

1.4. Równania Freneta-Serreta

Jak zauważyliśmy, w każdym punkcie trajektorii punktu materialnego możemy zdefiniować układ trzech ortogonalnych wektorów jednostkowych $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$ poruszających się wzdłuż trajektorii. Wektory te można utożsamiać z trójścianem Freneta. Zbadamy teraz ruch trójścianu Freneta. Zauważmy, że wektor styczny, normalny i binormalny tworzą bazę, a zatem pochodne tych wektorów muszą mieć jednoznaczny rozkład względem tej bazy. Oznacza to, że istnieją funkcje $\alpha_i(s)$, $\beta_i(s)$ i $\gamma_i(s)$, $i = 1, 2, 3$, takie że

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \alpha_1 \mathbf{t} + \alpha_2 \mathbf{n} + \alpha_3 \mathbf{b}, \tag{1.3}$$

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = \beta_1 \mathbf{t} + \beta_2 \mathbf{n} + \beta_3 \mathbf{b}, \tag{1.4}$$

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \gamma_1 \mathbf{t} + \gamma_2 \mathbf{n} + \gamma_3 \mathbf{b}. \tag{1.5}$$

Naszym zadaniem jest wyznaczenie tego rozkładu. Zauważmy od razu, że $\frac{d\mathbf{t}}{ds} = K\mathbf{n}$, zatem $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$ i $\alpha_2 = K$. Wiemy także, że wektory $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n}(s)$ i $\mathbf{b}(s))$ mają długość 1, $(\mathbf{t}, \mathbf{t}) = (\mathbf{n}, \mathbf{n}) = (\mathbf{b}, \mathbf{b}) = 1$, i są ortogonalne, tzn. $(\mathbf{t}, \mathbf{n}) = (\mathbf{t}, \mathbf{b}) = (\mathbf{n}, \mathbf{b}) = 0$. Po zróżniczkowaniu, z pierwszego zestawu równości otrzymamy

$$\left(\frac{d\mathbf{t}}{ds}, \mathbf{t}\right) = \left(\frac{d\mathbf{n}}{ds}, \mathbf{n}\right) = \left(\frac{d\mathbf{b}}{ds}, \mathbf{b}\right) = 0, \tag{1.6}$$

natomiast z drugiego wynika

$$\left(\frac{d\mathbf{t}}{ds}, \mathbf{n}\right) + \left(\mathbf{t}, \frac{d\mathbf{n}}{ds}\right) = \left(\frac{d\mathbf{t}}{ds}, \mathbf{b}\right) + \left(\mathbf{t}, \frac{d\mathbf{b}}{ds}\right) = \left(\frac{d\mathbf{n}}{ds}, \mathbf{b}\right) + \left(\mathbf{n}, \frac{d\mathbf{b}}{ds}\right) = 0. \tag{1.7}$$

Mnożąc skalarnie wyrażenia (1.4) i (1.5) odpowiednio przez $\mathbf{n}$ i $\mathbf{b}$ i korzystając z (1.6) otrzymujemy $\beta_2 = \gamma_3 = 0$. Z kolei, biorąc pod uwagę, że $\left(\frac{d\mathbf{t}}{ds}, \mathbf{n}\right) = K$ i pierwszy z wzorów (1.7) wyliczamy $\beta_1 = K$. Podobnie, z faktu że $\left(\frac{d\mathbf{t}}{ds}, \mathbf{b}\right) = 0$ i z drugiej identyczności (1.7) wynika, że $\gamma_1 = 0$.

Daje to w rezultacie $\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \gamma_2 \mathbf{n}$. Z definicji skręcenia $||\frac{d\mathbf{b}}{ds}|| = |\gamma_2| = T$, a zatem $\gamma_2 = \pm T$. W końcu, z ostatniej zależności (1.7) wyliczamy $\beta_3 = -\gamma_2$. Wybierając $\gamma_2 = -T$ otrzymujemy $\beta_3 = T$ i dochodzimy do następującego układu równań, który będziemy nazywać układem równań Freneta-Serreta

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{t}}{ds} = K\mathbf{n} \\ \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -K\mathbf{t} + T\mathbf{b} \\ \frac{d\mathbf{b}}{ds} = -T\mathbf{n} \end{cases}. \tag{1.8}$$

Niech $R(s) = [\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)]$ oznacza macierz, której kolumnami są wektory styczny, normalny i binormalny. Łatwo pokazać, że równaniom (1.8) można nadać następującą postać macierzową

$$\frac{dR(s)}{ds} = R(s)A(s), \tag{1.9}$$

gdzie $A(s) = \begin{bmatrix} 0 & -K(s) & 0 \\ K(s) & 0 & -T(s) \\ 0 & T(s) & 0 \end{bmatrix}$ jest macierzą skośnie symetryczną, $A^T = -A$, zadaną przez funkcje krzywizny i skręcenia. Z twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania równania różniczkowego wynika, że równanie macierzowe (1.9) ma rozwiązanie $R(s)$ zależne od warunku początkowego $R(0)$. Biorąc pierwszą kolumnę macierzy $R(s)$ otrzymujemy wektor styczny $\mathbf{t}(s)$. Zakładając, że trajektoria ruchu jest sparametryzowana długością łuku s, tzn. $c = c(s)$, otrzymujemy

$$\frac{dc(s)}{ds} = \frac{\dot{c}}{||\dot{c}||} = \mathbf{t}(s).$$

Całkując to równanie wyznaczamy

$$c(s) = c(0) + \int_0^s \mathbf{t}(\tau)d\tau, \tag{1.10}$$

a zatem otrzymujemy zreparametryzowaną trajektorię ruchu. Pokazaliśmy, że krzywizna i skręcenie trajektorii determinują trajektorię punktu materialnego z dokładnością do parametryzacji.

1.5. Przykłady

1.5.1. Przyspieszenie

W celu pokazania roli, jaką odgrywają wektor styczny i wektor normalny, wyznaczymy przyspieszenie punktu materialnego. Z definicji mamy $\dot{c} = ||\dot{c}||\mathbf{t}$. Stąd wyznaczamy przyspieszenie

$$\ddot{c} = \frac{d||\dot{c}||}{dt}\mathbf{t} + ||\dot{c}||\frac{d\mathbf{t}}{dt}.$$

Podstawiając do powyższego wzoru $\frac{d\mathbf{t}}{dt} = \frac{d\mathbf{t}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{d\mathbf{t}}{ds}||\dot{c}||$ i korzystając z tego, że $\frac{d\mathbf{t}}{ds} = K\mathbf{n}$ otrzymujemy zależność

$$\ddot{c} = \frac{d||\dot{c}||}{dt}\mathbf{t} + ||\dot{c}||^2 K\mathbf{n},$$

z której wynika, że wektor przyspieszenia leży na płaszczyźnie stycznej.

1.5.2. Krzywa płaska o stałej krzywiźnie

Jako przykład wykorzystania układu równań Freneta-Serreta określimy kształt krzywej o stałej krzywiźnie K, bez skręcenia. Niech zatem będzie dane równanie (1.9) ze stałą macierzą

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -K & 0 \\ K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie tego równania ma postać $R(s) = R(0)\exp(sA)$, gdzie macierzowa funkcja wykładnicza jest zadana wzorem $\exp(sA) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(sA)^i}{i!}$, a $R(0) = [\mathbf{t}(0), \mathbf{n}(0), \mathbf{b}(0)]$ oznacza warunek początkowy. Załóżmy, że $\mathbf{t}(0) = e_1$, $\mathbf{n}(0) = e_2$ i $\mathbf{b}(0) = e_3$. Korzystając z definicji obliczamy

$$R(s) = R(0) \begin{bmatrix} \cos Ks & -\sin Ks & 0 \\ \sin Ks & \cos Ks & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

skąd wynika, że

$$\mathbf{t}(s) = \begin{pmatrix} \cos Ks \\ \sin Ks \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Przyjmując $c(0) = 0$, z zależności (1.10) otrzymujemy

$$\begin{cases} c_1(s) = \frac{1}{K}\sin Ks \\ c_2(s) = \frac{1}{K} - \frac{1}{K}\cos Ks \\ c_3(s) = 0 \end{cases}.$$

Nietrudno zauważyć, że krzywa o stałej krzywiźnie K jest okręgiem o równaniu

$$c_1^2 + \left(c_2 - \frac{1}{K}\right)^2 = \frac{1}{K^2}.$$

1.6. Zadania

Zadanie 1.1 Korzystając z równań parametrycznych wyznaczyć krzywiznę i skręcenie okręgu, elipsy, cykloidy i linii śrubowej.

Zadanie 1.2 Wyprowadzić wzory na krzywiznę (1.1) i skręcenie (1.2).

Zadanie 1.3 Pokazać, że dla płaskiej trajektorii $c(t) = (x(t), y(t))^T$ krzywizna jest wyrażona wzorem

$$K(s) = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}.$$

1.7. Komentarze i odniesienia literaturowe

Istotę pojęcia pierwotnego, za jakie uznajemy pojęcie punktu materialnego, dobrze oddaje definicja konia podana w pierwszej polskiej encyklopedii opracowanej przez ks. Benedykta Chmielowskiego [Chm45]: „Koń jaki jest, każdy widzi”. Sama encyklopedia jak i jej autor przywoływani są wielokrotnie przez polską noblistkę Olgę Tokarczuk w jej *opus magnum* „Księgi Jakubowe”. Zauważmy na marginesie, że tytuł tej encyklopedii może służyć za wzór wszystkim autorom poszukującym tytułu dla swojego dzieła. Dodatkowe wiadomości na temat geometrii krzywych w $\mathbb{R}^3$, w tym dotyczące równań Freneta-Serreta, można znaleźć w książce [Goe65].

Literatura

[Chm45] B. Chmielowski, *Nowe Ateny Albo Akademiia Wszelkiej Scyencyi Pełna, Na Różne Tytuły Jak Na Classes Podzielona, Mądrym Dla Memoryjału, Idiotom Dla Nauki, Politykom Dla Praktyki, Melankolikom Dla Rozrywki Erygowana.* P. J. Golczewski, Lwów, 1745.

[Goe65] A. Goetz, *Geometria różniczkowa.* PWN, Warszawa, 1965.

Rozdział 2

Mechanika newtonowska: dynamika układu punktów materialnych

Rozważmy układ n punktów materialnych w przestrzeni euklidesowej. Przez ruch układu punktów będziemy rozumieć ciągłą i różniczkowalną funkcję

$$c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^N, \quad c(t) = \begin{pmatrix} c^1(t) \\ c^2(t) \\ \vdots \\ c^n(t) \end{pmatrix},$$

gdzie c^i oznacza położenie punktu i a $N = 3n$. Zgodnie z dynamiką newtonowską ruch układu punktów podlega dwóm zasadom: Zasadzie Determinizmu i Zasadzie Niezmienniczości (względności). Zasada Determinizmu orzeka, że ruch jest zdefiniowany przez położenie i prędkość początkową. Matematycznie oznacza to, że ruch można opisać równaniem różniczkowym rzędu drugiego,

$$\ddot{c} = F(c, \dot{c}, t), \quad \ddot{c}_i = F_i(c, \dot{c}, t), \ i = 1, 2 \ldots, n,$$

skąd wynika, że $c(t) = \varphi(t, c(0), \dot{c}(0))$. Funkcję F nazywamy prawem ruchu. Zakładamy domyślnie, że rozwiązanie równań ruchu istnieje i jest jednoznaczne. Prawo ruchu w mechanice newtonowskiej podlega Zasadzie Niezmienniczości, która orzeka, że prawo ruchu jest:

— niezmiennicze ze względu na przesunięcie w czasie,

$$F(c, \dot{c}, t + s) = F(c, \dot{c}, t), \quad s \in \mathbb{R},$$

(tzn. F nie zależy jawnie od czasu, $\ddot{c} = F(c, \dot{c})$),

— niezmiennicze ze względu na przesunięcie w przestrzeni,

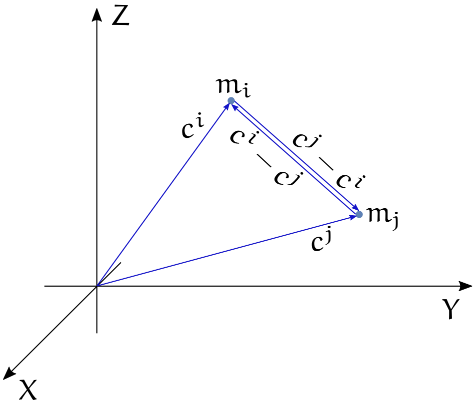
$$F(c^1 + u, c^2 + u, \ldots, c^n + u, \dot{c}) = F(c^1, c^2, \ldots, c^n, \dot{c}), \quad u \in \mathbb{R}^3,$$

(co znaczy, że F zależy od względnych położeń),

— niezmiennicze ze względu na ruch jednostajny,

$$F(c, \dot{c}^1 + v, \dot{c}^2 + v, \ldots, \dot{c}^n + v) = F(c, \dot{c}^1, \dot{c}^2, \ldots, \dot{c}^n), \quad v \in \mathbb{R}^3,$$

(F zależy do względnych prędkości),



Rysunek 2.1: Dwa punkty materialne

— niezmiennicze ze względu na obroty w przestrzeni,

$$F_i\left(Rc^1, Rc^2, \dots, Rc^n, R\dot{c}^1, R\dot{c}^2, \dots, R\dot{c}^n\right) = \\ = RF_i\left(c^1, c^2, \dots, c^n, \dot{c}^1, \dot{c}^2, \dots, \dot{c}^n\right),$$

dla $i = 1, 2 \dots, n$ i macierzy obrotu R, tzn. takiej macierzy 3×3, że $RR^T = R^T R = I_3$, $\det R = 1$. Niezmienniczość ze względu na obroty oznacza izotropowość przestrzeni.

2.1. Prawo Powszechnego Ciążenia

Przykładem prawa ruchu, które spełnia warunki niezmienniczości jest Prawo Powszechnego Ciążenia. Wybierzmy dwa punkty o masach m_i i m_j i położeniach c^i i c^j pokazane na Rysunku 2.1. W myśl Prawa Powszechnego Ciążenia siła, z jaką masa m_i działa na masę m_j, jest dana wzorem

$$F_{ij} = \frac{Gm_i m_j}{||c^i - c^j||^2} \frac{c^i - c^j}{||c^i - c^j||},$$

gdzie G oznacza stałą grawitacji. We wzorze pierwszy czynnik określa wielkość siły, a drugi jej kierunek; jak łatwo zauważyć, siła jest skierowana w stronę masy m_i.

Widzimy, że siła oddziaływania grawitacyjnego nie zależy od czasu, zależy od względnego położenia punktów i w ogóle nie zależy od prędkości punktów. Trzy pierwsze niezmienniczości są zatem zagwarantowane w sposób oczywisty. Aby sprawdzić niezmienniczość ze względu na obroty w przestrzeni zastosujmy obroty wektorów położenia, $c^i \mapsto Rc^i$

i $c^j \mapsto Rc^j$, gdzie R jest macierzą obrotu. Z definicji macierzy obrotu wynika, że $||Rc^i - Rc^j|| = ||R(c^i - c^j)|| = ||c^i - c^j||$ (przy obrocie długość wektora nie zmienia się), mamy także $Rc^i - Rc^j = R(c^i - c^j)$, a zatem

$$\frac{Gm_i m_j}{||Rc^i - Rc^j||^2}\frac{Rc^i - Rc^j}{||Rc^i - Rc^j||} = R\frac{Gm_i m_j}{||c^i - c^j||^2}\frac{c^i - c^j}{||c^i - c^j||}.$$

2.2. Zasady Dynamiki Newtona

Jest rzeczą dobrze znaną, że mechanika newtonowska opiera się na trzech następujących zasadach.

1. Każde ciało zachowuje swój stan spoczynku lub ruchu jednostajnego wzdłuż linii prostej, chyba że jest zmuszone do zmiany tego stanu przez przyłożone do niego siły.

2. Zmiana ruchu (przyspieszenie) jest proporcjonalna do czynnej siły przyłożonej i ma kierunek wzdłuż linii prostej, wzdłuż której ta siła jest przyłożona,

$$\ddot{c}^i = \frac{1}{m_i}F_i, \quad m_i\ddot{c}^i = F_i.$$

3. Do każdej akcji zawsze istnieje przeciwna i równa co do wielkości reakcja, wzajemne oddziaływania na siebie dwóch ciał są zawsze równe co do kierunku i wielkości i zawsze przeciwne co do zwrotu.

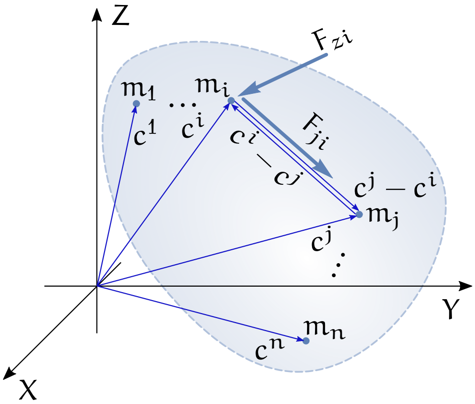
2.3. Pęd, moment pędu, energia

Przy opisie ruchu układu punktów materialnych w ramach mechaniki newtonowskiej pożyteczne jest wykorzystanie takich pojęć, jak pęd, moment pędu i energia. W celu ich wprowadzenia rozważmy układ n punktów materialnych oddziałujących na siebie siłami grawitacyjnymi i podlegających działaniu sił zewnętrznych, przedstawiony na Rysunku 2.2. Z drugiej Zasady Dynamiki Newtona wynika, że ruch masy m_i jest opisany wzorem

$$m_i\ddot{c}^i = F_i = F_{wi} + F_{zi},$$

gdzie F_{wi} oznacza siły wewnętrzne, a F_{zi} siły zewnętrzne (tzn. siły pochodzące z zewnątrz układu) działające na m_i. Siły wewnętrzne mają charakter grawitacyjny

$$F_{wi} = \sum_{j\neq i} F_{ji},$$



Rysunek 2.2: Układ punktów materialnych

przy czym F_{ji} oznacza siłę, z jaką masa m_j działa na masę m_i. Zgodnie z Prawem Powszechnego Ciążenia

$$F_{ji} = \frac{G m_j m_i}{||c^j - c^i||^2} \frac{c^j - c^i}{||c^j - c^i||}.$$

W tym kontekście pęd masy m_i definiujemy jako

$$p_i = m_i \dot{c}^i,$$

a pęd układu

$$P = \sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{c}^i.$$

Obliczmy pochodną pędu układu po czasie

$$\dot{P} = \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{c}^i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} F_{ji} + \sum_{i=1}^{n} F_{zi} = \sum_{i=1}^{n} F_{zi},$$

gdzie ostatnia równość wynika z III Zasady Dynamiki Newtona ($F_{ji} = -F_{ij}$). Uzyskaliśmy w ten sposób następujące stwierdzenie.

Stwierdzenie 2.3.1 *Prędkość zmiany pędu układu jest równa sumie sił zewnętrznych działających na układ. Jeżeli suma sił zewnętrznych wynosi* 0*, to pęd układu jest stały.*

Ostatnie zdanie powyższego Stwierdzenia jest sformułowaniem Zasady Zachowania Pędu.

Momentem pędu masy m_i nazywamy iloczyn wektorowy

$$M_i = c^i \times p_i = m_i c^i \times \dot{c}^i.$$

Konsekwentnie, moment pędu układu

$$M = \sum_{i=1}^{n} M_i = \sum_{i=1}^{n} m_i c^i \times \dot{c}^i.$$

Obliczamy pochodną momentu pędu układu względem czasu

$$\dot{M} = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{c}^i \times \dot{c}^i + \sum_{i=1}^{n} m_i c^i \times \ddot{c}^i = \sum_{i=1}^{n} c^i \times m_i \ddot{c}^i,$$

gdzie skorzystaliśmy z własności iloczynu wektorowego. Na podstawie II Zasady Dynamiki Newtona dla ruchu masy m_i otrzymujemy

$$\dot{M} = \sum_{i=1}^{n} c^i \times \sum_{j=1}^{n} F_{ji} + \sum_{i=1}^{n} c^i \times F_{zi}.$$

W pierwszym składniku sumy pojawiają się elementy postaci

$$c^i \times F_{ji} + c^j \times F_{ij} = c^i \times F_{ji} - c^j \times F_{ji} = \left(c^i - c^j\right) \times F_{ji} = 0,$$

co wynika z III Zasady Dynamiki Newtona i współliniowości wektorów $c^i - c^j$ i F_{ji}. W rezultacie

$$\dot{M} = \sum_{i=1}^{n} c^i \times F_{zi},$$

co można wyrazić słownie jako

Stwierdzenie 2.3.2 *Prędkość zmiany momentu pędu układu jest równa sumie momentów sił zewnętrznych działających na układ. Jeżeli suma momentów sił zewnętrznych jest równa* 0, *to moment pędu układu jest stały.*

Ostatnie sformułowanie nosi nazwę Zasady Zachowania Momentu Pędu.

Kolejnym pojęciem jest energia kinetyczna masy m_i,

$$K_i = \frac{1}{2} m_i \left(\dot{c}^i, \dot{c}^i\right)$$

i energia kinetyczna układu

$$K = \sum_{i=i}^{n} K_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\dot{c}^i, \dot{c}^i\right).$$

Pochodna energii kinetycznej układu względem czasu jest równa sumie mocy wszystkich (wewnętrznych i zewnętrznych) sił działających w układzie,

$$\dot{K} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\dot{c}^i, \dot{c}^i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\dot{c}^i, m_i\ddot{c}^i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\dot{c}^i, F_i\right).$$

Ostatnim rozważanym pojęciem będzie energia całkowita układu

$$E = K + V,$$

gdzie $V(c)$ oznacza energię potencjalną. Mając daną energię potencjalną, siłę F_i nazwiemy potencjalną, jeżeli

$$F_i = -\frac{\partial V}{\partial c^i}.$$

Obliczmy pochodną względem czasu energii całkowitej układu

$$\dot{E} = \dot{K} + \dot{V} = \sum_{i=1}^{n}\left(\dot{c}^i, F_i\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial V}{\partial c^i}, \dot{c}^i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\dot{c}^i, F_i + \frac{\partial V}{\partial c^i}\right).$$

Nietrudno zauważyć, że jeżeli $F_i = -\frac{\partial V}{\partial c^i}$, to $\dot{E} = 0$. Uzyskaliśmy w ten sposób Zasadę Zachowania Energii.

Stwierdzenie 2.3.3 *Jeżeli wszystkie siły działające w układzie są potencjalne, to energia całkowita układu jest stała.*

Można pokazać, że każda siła wewnętrzna F_{wi} działająca w układzie przedstawionym na Rysunku 2.2 jest potencjalna, z potencjałem grawitacyjnym

$$V_i(c) = -Gm_i\sum_{j\neq i}\frac{m_j}{\|c^j - c^i\|}.$$

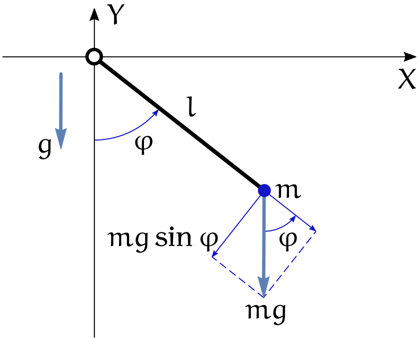
2.4. Przykłady

2.4.1. Niejednoznaczność rozwiązania równań ruchu

Poniższy przykład zawdzięczamy uprzejmości Prof. Marka Kusia z Instytutu Fizyki Teoretycznej PAN.

Rozważmy funkcję potencjału

$$V(r) = -\frac{2}{3}r^{3/2}$$



Rysunek 2.3: Wahadło matematyczne

i niech ruch zachodzi pod działaniem siły $F = -\frac{dV}{dr}$, a zatem

$$\ddot{r} = r^{1/2}.$$

Nietrudno sprawdzić, że przez punkt $r(0) = 0$, $\dot{r}(0) = 0$ przechodzą dwie trajektorie ruchu,

$$r(t) = 0 \quad \text{i} \quad r(t) = \frac{1}{9 \cdot 16} t^4.$$

W tym przypadku ruch nie jest zdeterminowany przez położenie i prędkość początkową.

2.4.2. Wahadło matematyczne

Jako przykład wyprowadzenia równań ruchu metodami mechaniki newtonowskiej rozważymy wahadło matematyczne przedstawione na Rysunku 2.3. Przy tej okazji pokażemy także pewien sposób analizy i reprezentacji zachowania układu dynamicznego, zwany metodą płaszczyzny fazowej.

W oparciu o II Zasadę Dynamiki Newtona równanie ruchu wahadła przyjmuje następującą postać

$$ml^2\ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi,$$

gdzie m oznacza masę wahadła, l jego długość, g przyspieszenie ziemskie, a φ kąt wychylenia. Zakładając dla uproszczenia, że $\frac{g}{l} = 1$ otrzymujemy równanie różniczkowe rzędu II,

$$\ddot{\varphi} = -\sin \varphi.$$

Standardowy sposób postępowania z takim równaniem jest przekształcenie go do dwóch równań rzędu I. Dokonujemy tego przez podstawienie

$$\begin{cases} q = \varphi \\ p = \dot{\varphi} \end{cases},$$

co prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -\sin q \end{cases}.$$

Zakładając, że szukamy zależności $p = p(q)$ (orbity), z uzyskanych równań wynika równanie o zmiennych rozdzielonych

$$p\,dp = -\sin q\,dq,$$

którego rozwiązaniem jest

$$p^2 = 2\cos q + C,$$

gdzie C oznacza stałą całkowania. Zauważmy, że rozwiązanie istnieje pod warunkiem, że $C \geqslant -2$.

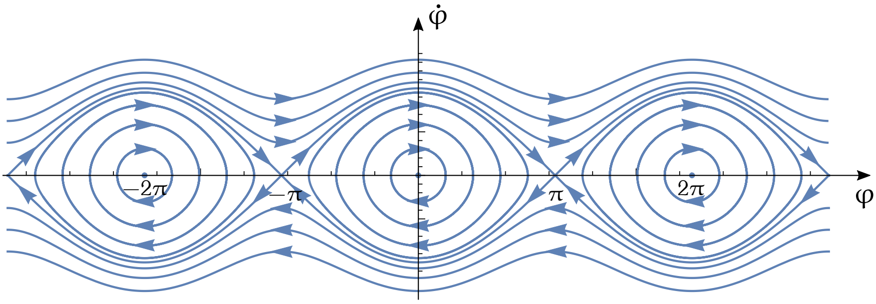
W celu uzyskania trajektorii $q(t)$ powinniśmy teraz rozwiązać równanie

$$\dot{q} = \pm\sqrt{2\cos q + C}.$$

Zamiast tego posłużymy się tzw. metodą płaszczyzny fazowej, a więc przedstawimy na płaszczyźnie wykres zależności $p(q)$ dla różnych wartości stałej C. Taki wykres nazywa się portretem fazowym układu. Zauważmy, że portret fazowy można uzyskać rysując w przestrzeni powierzchnię $z = p^2 - 2\cos q$, a następnie biorąc jej przekroje płaszczyzną prostopadłą do osi z i rzutując te przekroje na płaszczyznę (q, p). Zadanie to zrealizujemy częściowo analizując krzywe fazowe dla wybranych wartości stałej C.

Zauważmy, że dla $C = -2$ mamy $p^2 = 2\cos q - 2$, co daje zbiór punktów $q = k2\pi$, $p = 0$, gdzie $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ Weźmy z kolei $C = 2$, co daje zależność $p^2 = 2\cos q + 2 = 4\cos^2\frac{1}{2}q$. Krzywe fazowe mają postać $p = \pm2|\cos\frac{1}{2}q|$. Krzywe te dzielą płaszczyznę fazową na dwa obszary: wewnętrzny i zewnętrzny różniące się zachowaniem układu. Z tego powodu nazywa się je separatrysą. Na zewnątrz separatrysy $C > 2$, czyli $p^2 = 2\cos q + C > 0$. Krzywe fazowe są otwartymi krzywymi rozciągającymi się od $-\infty$ do $+\infty$, położonymi powyżej lub poniżej osi q. Inaczej wygląda portret fazowy wewnątrz separatrysy, dla $-2 \leqslant C \leqslant 2$. Załóżmy, że q i p są w pobliżu zera. Rozwijając zależność $p^2 = 2\cos q + C$ w szereg Taylora otrzymujemy $p^2 \cong 2\left(1 - \frac{1}{2}q^2\right) + C$, a zatem $q^2 + p^2 = C + 2$, co oznacza, że krzywe fazowe są zamknięte (im bliżej zera, tym bardziej przypominają one okręgi).

W wyniku naszej analizy uzyskaliśmy następującą charakterystykę zachowania wahadła matematycznego:



Rysunek 2.4: Portret fazowy

— Punkty równowagi $q = k\pi$, $p = 0$. Punkt równowagi nazywamy stabilnym, jeżeli krzywa fazowa zapoczątkowana w pobliżu tego punktu nie oddala się od niego zbytnio i niestabilnym w przeciwnym wypadku. Wynika stąd, że punkty równowagi postaci $q = k2\pi$, $p = 0$ są stabilne, natomiast punkty $q = (2k+1)\pi$, $p = 0$ niestabilne.

— Wewnątrz separatrysy $p = \pm|\cos\frac{1}{2}q|$ występują zamknięte krzywe fazowe, co oznacza, że wahadło oscyluje tam i z powrotem.

— Na zewnątrz separatrysy krzywe fazowe są otwarte i wyglądają jak zdeformowana oś liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$, co oznacza, że wahadło obraca się w jednym kierunku.

— Separatysa składa się z punktów równowagi i zdeformowanych, otwartych odcinków osi $\mathbb{R}$ – warto zauważyć, że układ nie jest w stanie podążać wzdłuż separatysy przekraczając punkty równowagi.

Na krzywych fazowych zachodzi warunek $\dot q = p$, z którego wynika kierunek ruchu wzdłuż tych krzywych. Jeżeli $p > 0$, to współrzędna q rośnie, a jeżeli $p < 0$ – maleje. Portret fazowy wahadła matematycznego pokazujący wymienione wyżej własności został przedstawiony na Rysunku 2.4.

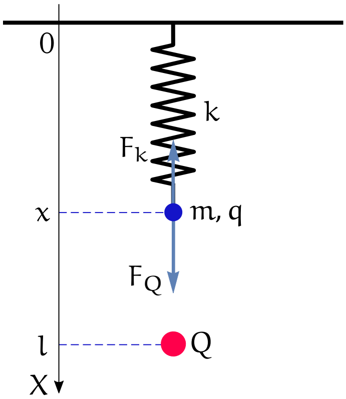
2.5. Zadania

Zadanie 2.1 Wyznaczyć trajektorie rozważane w podrozdziale 2.4.1.

Zadanie 2.2 Znaleźć trajektorię ruchu układu poddanego działaniu siły potencjalnej z potencjałem

$$V(r) = r^2 + \frac{1}{2}r^4,$$

dla warunków początkowych $r(0) = 0$, $\dot r(0) = 1$. Pokazać, że w skończonym czasie trajektoria „ucieka” do ∞.



Rysunek 2.5: Układ elektromechaniczny

Zadanie 2.3 Wykaż, że każda siła wewnętrzna F_{wi} działająca w układzie punktów materialnych, pokazanym na Rysunku 2.2 jest potencjalna z funkcją potencjału grawitacyjnego postaci

$$V_i(c) = -Gm_i \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{\|c^j - c^i\|}.$$

Zadanie 2.4 Rozważmy prosty układ elektromechaniczny przedstawiony na Rysunku 2.5, w którym naładowana kulka o masie m i ładunku q została umieszczona na sprężynie o stałej k nad ładunkiem punktowym Q przeciwnym do ładunku q, odległym o l od punktu zawieszenia sprężyny. Pomijamy wpływ grawitacji. Należy napisać równanie ruchu kulki i przeanalizować zachowanie układu metodą płaszczyzny fazowej.

2.6. Komentarze i odniesienia literaturowe

O mechanice newtonowskiej punktu i układu punktów materialnych traktują, odpowiednio, rozdziały 1 i 2 książki [RK95], a także rozdział 1 tomu I podręcznika [Tay12]. Zasady Dynamiki Newtona przedstawione w podrozdziale 2.2 pochodzą z polskiego przekładu [New11] fundamentalnego dzieła *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* Isaaca Newtona. Tam również można znaleźć sformułowanie Prawa Powszechnego Ciążenia. Prezentacja zasad zachowania zamieszczona w Rozdziale 2.3 jest wzorowana na rozdziale 2 książki [RK95]. Można je także znaleźć w rozdziale 3, t. I [Tay12].

Literatura

[New11] I. Newton, *Matematyczne zasady filozofii przyrody*. Copernicus Center, Kraków, 2011.

[RK95] W. Rubinowicz, W. Królikowski, *Mechanika teoretyczna*. PWN, Warszawa, 1995.

[Tay12] J. R. Taylor, *Mechanika klasyczna: t. I, II*. PWN, Warszawa, 2012.

Rozdział 3

Elementy rachunku wariacyjnego

Podstawą mechaniki newtonowskiej jest rachunek różniczkowy w przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Podobną rolę w stosunku do mechaniki lagranżowskiej odgrywa rachunek wariacyjny, w którym różniczkowanie wykonuje się w pewnej nieskończenie wymiarowej przestrzeni Banacha. Przypominamy, że przestrzeń Banacha jest to przestrzeń liniowa, unormowana i zupełna. Niech $\mathcal{X}$ oznacza przestrzeń Banacha. Liniowość $\mathcal{X}$ oznacza, że dla dowolnych elementów $x, y \in \mathcal{X}$ i dowolnych liczb $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ kombinacja liniowa $\alpha x + \beta y \in \mathcal{X}$. Norma, albo długość elementu przestrzeni Banacha jest funkcją $\|\cdot\| : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$, taką że dla $x, y \in \mathcal{X}$ i $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\|x\| \geqslant 0,\ \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0, \quad \|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|, \quad \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

Trzecia z własności definiujących przestrzeń Banacha, zupełność, polega na tym, że każdy zbieżny ciąg elementów przestrzeni ma granicę należącą do tej przestrzeni – oznacza to, że przestrzeń Banacha jest domknięta względem granicy zbieżnych ciągów jej elementów.

3.1. Pochodna

Niech w przestrzeni Banacha $\mathcal{X}$ będzie dana funkcja $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$. Szczególnym przypadkiem funkcji f jest funkcja liniowa, dla której $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$. Pochodną funkcji f definiujemy w następujący sposób.

Definicja 3.1.1 *Pochodna* $Df(x) : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ *funkcji* f *w punkcie* $x \in \mathcal{X}$ *jest to funkcja liniowa, taka że*

$$\lim_{v \to 0} \frac{\|f(x + v) - f(x) - Df(x)v\|}{\|v\|} = 0.$$

Tak zdefiniowaną pochodną nazywamy pochodną Frécheta. Do obliczeń, zamiast pochodnej Frécheta, używamy pochodnej Gâteaux, która jest pewnego rodzaju pochodną kierunkową, określonej formułą

$$Df(x)v = \left.\frac{d}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} f(x + \alpha v). \tag{3.1}$$

Znaczenie powyższego wzoru wynika z faktu, że jeżeli pochodna Frécheta istnieje i jest ciągła, to jest równa pochodnej Gâteaux. Oczywiście, dla funkcji $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ zachodzi $Df(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x}$; przewaga nowo wprowadzonej pochodnej ujawni się, gdy przestrzeń $\mathcal{X}$ będzie nieskończenie wymiarowa. W rozdziale poświęconym przykładom wyliczymy pochodne Gâteaux wybranych funkcji.

3.2. Funkcjonały

Rozważmy przestrzeń funkcji określonych na interwale czasu $[t_0, t_1]$, o wartościach w $\mathbb{R}^n$, mających ciągłe pochodne do rzędu $k \geqslant 0$

$$\mathcal{X} = \{x : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^n\}.$$

Elementami tej przestrzeni są krzywe $x(\cdot) = \{(t, x(t)) | t_0 \leqslant t \leqslant t_1\}$, gdzie $x(t) \in \mathbb{R}^n$. Przestrzeń $\mathcal{X}$ jest przestrzenią Banacha z normą

$$||x(\cdot)||_k = \max_{t\in[t_0,t_1]} ||x(t)|| + \max_{t\in[t_0,t_1]} ||\dot{x}(t)|| + \ldots + \max_{t\in[t_0,t_1]} ||x^{(k)}(t)||,$$

gdzie norma w $\mathbb{R}^n$ jest normą euklidesową, $||v|| = \left(\sum_{i=1}^n v_i^2\right)^{1/2}$.

Tradycyjnie funkcję $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ będziemy nazywali funkcjonałem. Poniżej podajemy kilka przykładów funkcjonałów dla $n = 2$:

1. długość krzywej $x(\cdot)$ na płaszczyźnie

$$f_1(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}_1^2(t) + \dot{x}_2^2(t)}\,dt,$$

2. pole pod krzywą $x(\cdot)$ na płaszczyźnie

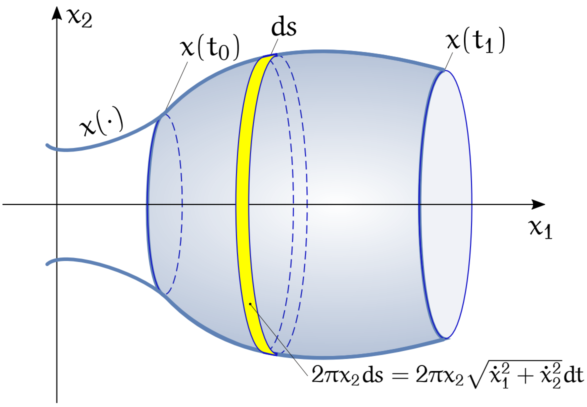
$$f_2(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} x_2(t)\dot{x}_1(t)\,dt,$$

3. pole figury obrotowej powstałej przez obrót krzywej $x(\cdot)$ wokół osi x, zob. Rysunek 3.1,

$$f_3(x(\cdot)) = 2\pi \int_{t_0}^{t_1} x_2(t)\sqrt{\dot{x}_1^2(t) + \dot{x}_2^2(t)}\,dt,$$

4. średniokwadratowa krzywizna krzywej $x(\cdot)$

$$f_4(x(\cdot)) = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} \frac{(\dot{x}_1(t)\ddot{x}_2(t) - \ddot{x}_1(t)\dot{x}_2)^2}{(\dot{x}_1^2(t) + \dot{x}_2^2(t))^3}\,dt.$$



Rysunek 3.1: Figura obrotowa

Zauważmy, że z wyjątkiem funkcjonału f_4, wszystkie pozostałe funkcjonały są zależne od krzywej i jej pochodnych rzędu pierwszego; możemy zatem powiedzieć, że mają postać

$$f(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt, \tag{3.2}$$

gdzie L oznacza pewną funkcję różniczkowalną. Okaże się, że funkcjonał postaci (3.2) odgrywa podstawową rolę w mechanice lagranżowskiej.

3.3. Ekstremum funkcjonału

Podobnie jak w rachunku różniczkowym w przestrzeni $\mathbb{R}^n$, zerowanie się pochodnej Frécheta (Gâteaux) stanowi warunek konieczny na ekstremum funkcjonału. Znalezienie ekstremum funkcjonałów f_1–f_4 ma oczywisty sens praktyczny. Z tego powodu wyprowadzimy wzór na pochodną funkcjonału (3.2).

Weźmy krzywą $x(\cdot) \in \mathcal{X}$ i jej przyrost (wariację) $v(\cdot) \in \mathcal{X}$. Pochodna Gâteaux wynosi

$$\begin{aligned} Df(x(\cdot))v(\cdot) &= \frac{d}{d\alpha}\bigg|_{\alpha=0} \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t) + \alpha v(t), \dot{x}(t) + \alpha\dot{v}(t))dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L(t, x, \dot{x})}{\partial x} v(t)dt + \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L(t, x, \dot{x})}{\partial \dot{x}} \dot{v}(t)dt. \end{aligned}$$

Po zastosowaniu do drugiego składnika wzoru na całkowanie przez części

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L(t,x,\dot{x})}{\partial \dot{x}} \dot{\nu}(t) dt = \left(\frac{\partial L(t,x,\dot{x})}{\partial \dot{x}} \nu(t) \right) \Bigg|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \frac{\partial L(t,x,\dot{x})}{\partial \dot{x}} \nu(t) dt$$

i przyjęciu założenia, że wariacja $\nu(\cdot)$ znika na końcach przedziału całkowania, $\nu(t_0) = \nu(t_1) = 0$, otrzymujemy następujące wyrażenie na pochodną funkcjonału (3.2)

$$Df(x(\cdot))\nu(\cdot) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L(t,x,\dot{x})}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(t,x,\dot{x})}{\partial \dot{x}} \right) \nu(t) dt. \tag{3.3}$$

Z warunku, że wyrażenie (3.3) powinno się zerować dla każdej wariacji $\nu(\cdot)$ wynika następujący warunek konieczny na ekstremum zwany równaniami Eulera-Lagrange'a.

Twierdzenie 3.3.1 (Równania Eulera-Lagrange'a) *Załóżmy, że krzywa $x(\cdot)$ stanowi ekstremum funkcjonału (3.2). Wówczas, krzywa ta spełnia równania Eulera-Lagrange'a*

$$\frac{\partial L(t,x,\dot{x})}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(t,x,\dot{x})}{\partial \dot{x}} = 0. \tag{3.4}$$

Krzywą $x(\cdot)$ spełniającą równania Eulera-Lagrange'a będziemy nazywać ekstremalą funkcjonału (3.2). W tym rozumieniu, równanie (3.4) stanowi warunek konieczny i wystarczający na ekstremum funkcjonału (3.2).

Równanie Eulera-Lagrange'a jest równaniem różniczkowym rzędu II

$$\frac{\partial^2 L(t,x,\dot{x})}{\partial \dot{x}^2} \ddot{x} + \frac{\partial^2 L(t,x,\dot{x})}{\partial x \partial \dot{x}} \dot{x} + \frac{\partial^2 L(t,x,\dot{x})}{\partial t \partial \dot{x}} - \frac{\partial L(t,x,\dot{x})}{\partial x} = 0.$$

Ponieważ zmienna x jest zwykle wektorem, równanie Eulera-Lagrange'a jest w istocie układem równań, dlatego w dalszym ciągu będziemy używać terminu w liczbie mnogiej: „równania Eulera-Lagrange'a".

W podobny sposób można uzyskać równanie ekstremali funkcjonału typu f_4, który zależy od pochodnych rzędu drugiego. Załóżmy, że $h(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t,x,\dot{x},\ddot{x}) dt$. Mamy wówczas

Twierdzenie 3.3.2 (Równania Eulera-Poissona) *Ekstremala funkcjonału $h(x(\cdot))$ spełnia równania Eulera-Poissona*

$$\frac{\partial L(t,x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(t,x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \dot{x}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial L(t,x,\dot{x},\ddot{x})}{\partial \ddot{x}} = 0. \tag{3.5}$$

3.4. Ekstrema warunkowe

Podobnie, jak w przypadku funkcji zmiennej należącej do $\mathbb{R}^n$, możemy rozważać zadanie na ekstremum warunkowe funkcjonału. Wyróżniamy dwa rodzaje takich zadań.

1. Zadanie izoperymetryczne: znaleźć ekstremum funkcjonału

$$f(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x}) dt,$$

pod warunkiem, że funkcjonał

$$h(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} K(t, x, \dot{x}) dt = \text{const}.$$

2. Zadanie wakonomiczne: znaleźć ekstremum funkcjonału

$$f(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x}) dt,$$

pod warunkiem, że dla każdej chwili t funkcja

$$G(t, x, \dot{x}) = 0.$$

Następujące twierdzenie podaje warunki konieczne na ekstrema warunkowe.

Twierdzenie 3.4.1 (O ekstremum warunkowym)

1. Zadanie izoperymetryczne: Definiujemy funkcję

$$\mathcal{L} = L(t, x, \dot{x}) + \lambda K(t, x, \dot{x}),$$

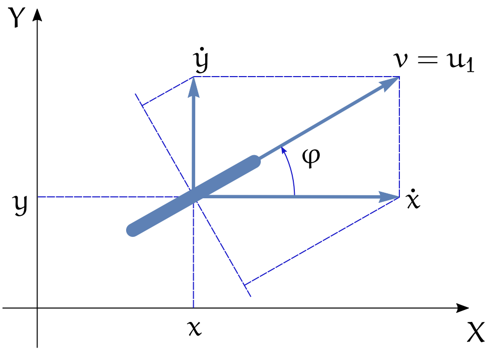
$\lambda \in \mathbb{R}$ *i piszemy równania Eulera-Lagrange'a (3.4) dla funkcji* $\mathcal{L}$*. Mnożnik* λ *(mnożnik Lagrange'a) eliminujemy korzystając z warunku* $h(x(\cdot)) = \text{const}$.

2. Zadanie wakonomiczne: Definiujemy funkcję

$$\mathcal{L} = L(t, x, \dot{x}) + \lambda G(t, x, \dot{x}),$$

gdzie $\lambda = \lambda(t)$ *jest pewną funkcją czasu i piszemy równania Eulera-Lagrange'a (3.4) dla funkcji* $\mathcal{L}$*.*

Ograniczenia, jakie się pojawiły w zadaniu wakonomicznym można spotkać przy analizie ruchu kołowych robotów mobilnych poruszających się bez poślizgu lub w zadaniach sterowania. Jako przykład rozważmy



Rysunek 3.2: Ruch bez poślizgu bocznego

koło, łyżwę lub nartę poruszające się bez poślizgu bocznego, przedstawione w widoku z góry na Rysunku 3.2. Współrzędne potrzebne do opisu ruchu obejmują położenie punktu kontaktu z podłożem i orientację, $q = (x, y, \varphi)^T$. Warunek braku poślizgu bocznego oznacza, że rzuty prędkości $\dot{x}$, $\dot{y}$ na kierunek prostopadły do powierzchni koła (kierunek jego osi) znoszą się. Oznacza to, że podczas ruchu, w każdej chwili jest spełniony warunek

$$G(t, q, \dot{q}) = \dot{x}\sin\varphi - \dot{y}\cos\varphi = 0.$$

W następnym rozdziale podamy rozwiązania przykładowych zadań na ekstremum (bezwarunkowe i warunkowe) funkcjonału.

3.5. Przykłady

3.5.1. Pochodna Gâteaux względem wektora i macierzy

1. $f(x) = x^T Q x$, $x \in \mathbb{R}^n$, Q – macierz $n \times n$. Pochodna

$$Df(x)v = \left.\frac{d}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} (x + \alpha v)^T Q(x + \alpha v) = v^T Q x + x^T Q v = x^T (Q + Q^T)v.$$

2. $f(X) = \operatorname{tr} X^T X$, X – macierz $n \times n$, tr – ślad. Pochodna

$$Df(X)V = \left.\frac{d}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} \operatorname{tr}(X + \alpha V)^T (X + \alpha V) = \operatorname{tr} V^T X + \operatorname{tr} X^T V = 2 \operatorname{tr} X^T V.$$

3. $f(X) = \det X$, X – macierz $n \times n$. Pochodna

$$\begin{aligned} Df(X)V &= \frac{d}{d\alpha}\bigg|_{\alpha=0} \det(X + \alpha V) = \\ &= \frac{d}{d\alpha}\bigg|_{\alpha=0} \det[X_1 = \alpha V_1, X_2 + \alpha V_2, \ldots, X_n + \alpha V_n] = \\ = \det[V_1, X_2, \ldots, X_n] &+ \det[X_1, V_2, \ldots, X_n] + \cdots + \det[X_1, X_2, \ldots, V_n], \end{aligned}$$

gdzie symbole X_i i V_i oznaczają i-tą kolumnę macierzy X i V.

3.5.2. Najkrótsza linia na płaszczyźnie

Niech $x(\cdot)$ oznacza krzywą w $\mathbb{R}^2$, $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$. Szukamy najkrótszej krzywej łączącej dwa zadane punkty, a więc minimalizującej funkcjonał f_1. Mamy $L(t, x, \dot{x}) = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}$. Równania Eulera-Lagrange'a

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

przy $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = \frac{\dot{x}_1}{L}$, $\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = \frac{\dot{x}_2}{L}$, $\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0$ daje

$$\begin{cases} \frac{\dot{x}_1}{L} = C_1 \\ \frac{\dot{x}_2}{L} = C_2 \end{cases}$$

dla pewnych stałych C_1 i C_2. Po wyeliminowaniu czasu otrzymujemy $\frac{dx_2}{dx_1} = C$, a zatem

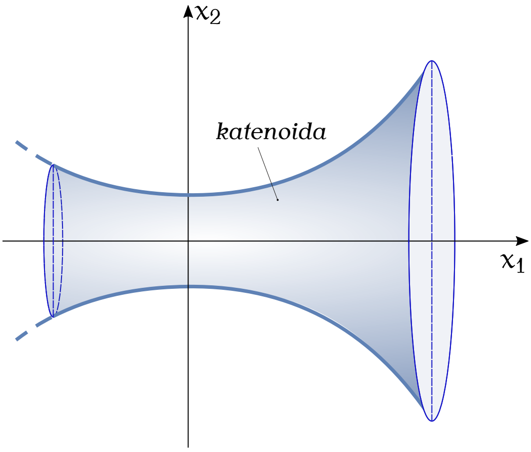
$$x_2 = Cx_1 + D, \quad C, D \text{ – stałe.}$$

Szukaną najkrótszą krzywą jest odcinek linii prostej.

3.5.3. Krzywa dająca najmniejsze pole powierzchni bocznej figury obrotowej

Rozważmy funkcjonał f_3; szukamy krzywej $x(\cdot)$, $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$, takiej żeby pole powierzchni bocznej figury obrotowej było najmniejsze. Po opuszczeniu współczynnika 2π otrzymujemy $L(t, x, \dot{x}) = x_2\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}$. Obliczenia wynikające z równania Eulera-Lagrange'a dają następujące wyniki: $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = \frac{x_2\dot{x}_1}{\sqrt{\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2}}$, $\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = \frac{x_2\dot{x}_2}{\sqrt{\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2}}$, $\frac{\partial L}{\partial x_2} = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}$. W konsekwencji otrzymujemy dwa równania różniczkowe

$$\begin{cases} \frac{x_2\dot{x}_1}{\sqrt{\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2}} = C \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{x_2\dot{x}_2}{\sqrt{\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2}}\right) - \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} = 0 \end{cases} .$$



Rysunek 3.3: Krzywa łańcuchowa

Wyznaczając z pierwszego z nich $\frac{x_2}{\sqrt{\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2}} = \frac{C}{\dot{x}_1}$ i podstawiając do drugiego równania uzyskujemy

$$\frac{d}{dt}\frac{C\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} = \frac{x_2\dot{x}_1}{C},$$

a zatem

$$\frac{d}{dt}\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{d^2x_2}{dx_1^2}\dot{x}_1 = a^2x_2\dot{x}_1,$$

gdzie $a = \frac{1}{C}$. Nietrudno zauważyć, że są dwie kandydatury na ekstremalę: prosta pionowa o równaniu $x_1 = \text{const}$ i krzywa spełniająca równanie $\frac{d^2x_2}{dx_1^2} = a^2x_2$. Pierwsze rozwiązanie odrzucamy jako dające zerowe pole powierzchni bocznej. Rozwiązaniem drugiego z równań jest krzywa

$$x_2 = c\cosh(ax_1 + b), \quad a, b, c - \text{stałe},$$

przedstawiona na Rysunku 3.3, od kształtu zawieszonego łańcucha zwana krzywą łańcuchową, dająca najmniejsze pole powierzchni bocznej. Figura powstała przez obrót krzywej łańcuchowej nazywa się katenoidą*.

3.5.4. Zadanie Dydony

Zadanie Dydony polega na znalezieniu krzywej zamkniętej $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$ o zadanym obwodzie ograniczającej największe pole. Za-

***catena* po łacinie oznacza łańcuch

danie Dydony jest przykładem zadania izoperymetrycznego, z funkcjonałem ekstremalizowanym zdefiniowanym przez funkcję

$$L(t, x, \dot{x}) = x_2 \dot{x}_1$$

i funkcjonałem ograniczeń opisanym przez funkcję

$$K(t, x, \dot{x}) = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}.$$

W celu rozwiązania zadania Dydony korzystamy z Twierdzenia 3.4.1 i definiujemy funkcję

$$\mathcal{L} = x_2 \dot{x}_1 + \lambda \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2},$$

gdzie $\lambda \in \mathbb{R}$ oznacza mnożnik Lagrange'a. Aby otrzymać równania Eulera-Lagrange'a obliczamy pochodne

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1} &= x_2 + \tfrac{\lambda \dot{x}_1}{K}, \\ \tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_2} &= \tfrac{\lambda \dot{x}_2}{K}, \\ \tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} &= 0, \\ \tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} &= \dot{x}_1 \end{aligned}$$

co prowadzi do równań

$$\begin{cases} x_2 + \tfrac{\lambda \dot{x}_1}{K} = C \\ \tfrac{d}{dt} \tfrac{\lambda \dot{x}_2}{K} = \dot{x}_1 = \tfrac{d}{dt} x_1 \end{cases}.$$

Z pierwszego z tych równań wynika zależność

$$\frac{\lambda \dot{x}_1}{K} = C - x_2,$$

natomiast po scałkowaniu drugiego otrzymujemy

$$\frac{\lambda \dot{x}_2}{K} = x_1 + D,$$

dla pewnych stałych C i D. Dzieląc te równania stronami eliminujemy stałą λ i uzyskujemy równanie różniczkowe

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{D + x_1}{C - x_2},$$

którego rozwiązaniem jest okrąg

$$(x_1 + D)^2 + (x_2 - C)^2 = R^2.$$

W ten sposób pokazaliśmy, że rozwiązaniem zadania Dydony jest okrąg. Stałe C, D i R można wyznaczyć mając zadany pewien punkt na okręgu i jego długość.

3.5.5. Integrator Brocketta

Integrator Brocketta jest układem sterowania postaci

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 \\ \dot{x}_2 = u_2 \\ \dot{x}_3 = x_1 u_2 - x_2 u_1 \end{cases},$$

z wektorem stanu $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ i wektorem sterowań $u = (u_1, u_2)^T \in \mathbb{R}^2$. Należy znaleźć sterowanie $u(t)$ przeprowadzające układ ze stanu początkowego $x(0) = x_0$ do stanu końcowego $x(1) = x_d$ w czasie $T = 1$ i minimalizujące energię sterowań $\int_0^1 (u_1^2(t) + u_2^2(t))dt$.

Nietrudno zauważyć, że zadanie sterowania optymalnego integratora Brocketta można sformułować jako zadanie wakonomiczne, w którym

$$L(t, x, \dot{x}) = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2, \quad G(t, x, \dot{x}) = \dot{x}_3 - x_1\dot{x}_2 + x_2\dot{x}_1.$$

Zgodnie z brzmieniem Twierdzenia 3.4.1, definiujemy funkcję

$$\mathcal{L} = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \lambda(\dot{x}_3 - x_1\dot{x}_2 + x_2\dot{x}_1),$$

gdzie $\lambda = \lambda(t)$ jest pewną funkcją czasu. W celu otrzymania równań Eulera-Lagrange'a obliczamy pochodne

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1} = 2\dot{x}_1 + \lambda x_2, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_2} = 2\dot{x}_2 - \lambda x_1, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_3} = \lambda$$

oraz

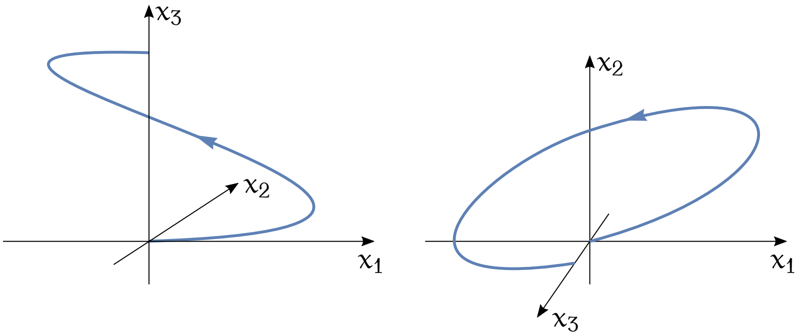
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = -\lambda\dot{x}_2, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = \lambda\dot{x}_1, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_3} = 0,$$

co daje $\lambda = \text{const}$ i

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \lambda\dot{x}_2 = \dot{u}_1 + \lambda u_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 - \lambda\dot{x}_2 = \dot{u}_2 - \lambda u_1 = 0 \end{cases}.$$

Oba uzyskane równania różniczkowe sprowadzają się do równania liniowego rzędu II, a zatem

$$\begin{cases} \ddot{u}_1 + \lambda^2 u_1 = 0 \\ \ddot{u}_2 + \lambda^2 u_2 = 0 \end{cases},$$



Rysunek 3.4: Optymalna orbita integratora Brocketta (widok z boku i z góry)

których rozwiązania są postaci

$$\begin{cases} u_1(t) = A_1 \cos \lambda t + B_1 \sin \lambda t \\ u_2(t) = A_2 \cos \lambda t + B_2 \sin \lambda t \end{cases}.$$

Przez rozwiązanie zadania wakonomicznego pokazaliśmy, że optymalne energetycznie sterowania integratora Brocketta są sinusoidalne. Przy założeniu $x_1(0) = x_1(1) = 0$ i $x_2(0) = x_2(1) = 0$ współczynnik $\lambda = 2k\pi$, dla całkowitego k.

Mając sterowania wyliczamy trajektorię przechodzącą przez punkt $x(0) = 0$,

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{\lambda}(A_1 \sin \lambda t - B_1 \cos \lambda t + B_1) \\ x_2(t) = \frac{1}{\lambda}(A_2 \sin \lambda t - B_2 \cos \lambda t + B_2) \\ x_3(t) = \frac{1}{\lambda^2}(A_1 B_2 - A_2 B_1)(\lambda t - \sin \lambda t) \end{cases}.$$

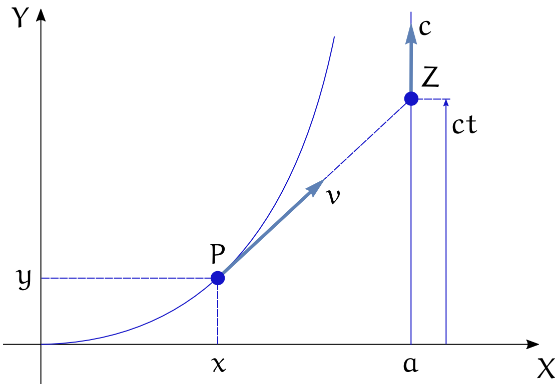
W szczególnym przypadku $A_1 = B_2 = C$ i $A_2 = B_1 = 0$ ruch na płaszczyźnie (x_1, x_2) zachodzi po okręgu

$$x_1^2 + \left(x_2 - \frac{C}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{C}{\lambda}\right)^2,$$

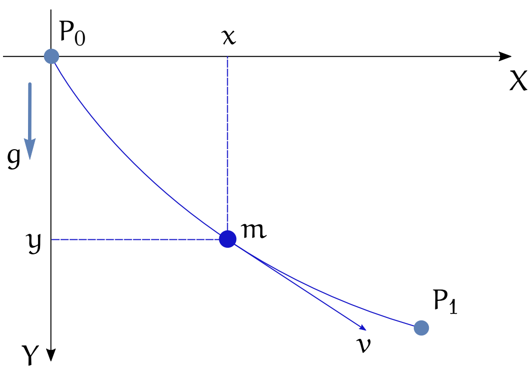
$C = \text{const}$, natomiast współrzędna $x_3(t) \cong t^3$. Optymalną trajektorię (orbitę) integratora Brocketta pokazuje Rysunek 3.4.

3.6. Zadania

Zadanie 3.1 (Zadanie pościgu) Pies biegnie z prędkością o stałej wartości v i goni zająca, który ucieka wzdłuż linii prostej $x = a$, ze stałą



Rysunek 3.5: Zadanie pościgu



Rysunek 3.6: Zadanie brachistochrony

prędkością c, zob. Rysunek 3.5. Wyprowadzić równanie krzywej pościgu $y(x)$ zakładając, że kierunek prędkości psa jest w każdej chwili wyznaczony przez położenie zająca. Rozwiązać to równanie i wyznaczyć krzywą pościgu. Określić warunek skuteczności pościgu i wyznaczyć czas, po upływie którego pies dogoni zająca. Wskazówka: zauważyć, że w każdej chwili

$$vt = \int_0^x \sqrt{1 + (y_u')^2}du, \quad y_x' = \frac{dy}{dx}.$$

Zadanie 3.2 (Zadanie brachistochrony) Znaleźć równanie krzywej, po której powinien się poruszać w polu grawitacyjnym punkt materialny o masie m, między punktem P_0 a punktem P_1, tak aby czas potrzebny na przemieszczenie był najkrótszy, zob. Rysunek 3.6.

Wskazówka: zauważyć, że prędkość ruchu punktu można obliczyć ze wzoru

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy, \quad v = \frac{ds}{dt}.$$

3.7. Komentarze i odniesienia literaturowe

Podstawowe wiadomości na temat rachunku wariacyjnego można znaleźć w różnych podręcznikach, na przykład w klasycznej książce [GF79], a także w rozdziale 6, t. I książki [Tay12]. Pouczające może być też sięgnięcie do współczesnego podręcznika [Kom09]. Termin „zadanie izoperymetryczne" pochodzi od greckich słów *isos* – równy i *perimetron* – obwód. Klasycznym przykładem tego zadania jest zadanie Dydony. Zadanie Dydony (Dydona – wędrowniczka) zawdzięcza swoją nazwę starożytnej księżniczce Tyru, fenickiego państwa-miasta (obecnie w Libanie), Dydonie, która, zmuszona do opuszczenia ojczyzny dotarła do wybrzeży Numidii, państwa leżącego w północnej Afryce (obecnie w Tunezji). Numidyjczycy zaproponowali Dydonie kawałek ziemi na brzegu morza, taki jaki obejmie skóra wołu. Dydona pocięła skórę na wąskie paski, a na objętym przez nie obszarze założyła miasto Kartagina i została jego królową. Jedną z wersji historii Dydony opisał Wergiliusz w IV księdze poematu *Eneida* [Mar80]. Termin „wakonomiczny" wprowadził V. V. Kozlov na określenie pojęcia „mechanics of variational axiomatic kind". Układ sterowania zwany integratorem Brocketta został zdefiniowany i zbadany przez Rogera Brocketta, profesora Uniwersytetu Harvarda i autora fundamentalnych prac z dziedziny teorii sterowania. Zadanie brachistochrony zostało sformułowane w roku 1696 przez Johanna Bernoulliego. Nazwa „brachistochrona" wywodzi się od greckich słów *brachistos*, co znaczy najkrótszy i *chronos* – czas. Brachistochrona jest także zwana tautochroną (*tautos* – taki sam), ponieważ ma tę właściwość, że czas przebycia każdego jej odcinka zawierającego punkt końcowy jest taki sam, jak czas przejścia całej brachistochrony. Zadanie pościgu pochodzi z książki [RK95].

Literatura

[GF79] I. M. Gelfand, S. W. Fomin, *Rachunek wariacyjny*. PWN, Warszawa, 1979.

[Kom09] L. Komzsik, *Applied Calculus of Variations for Engineers*. CRC Press, Boca Raton, 2009.

[Mar80] Publiusz Wergiliusz Maro, *Eneida*. Ossolineum, Wrocław, 1980.

[RK95] W. Rubinowicz, W. Królikowski, *Mechanika teoretyczna*. PWN, Warszawa, 1995.

[Tay12] J. R. Taylor, *Mechanika klasyczna: t. I, II.* PWN, Warszawa, 2012.

Rozdział 4

Mechanika lagranżowska

Rachunek wariacyjny wykorzystamy jako środek do wprowadzenia podstawowych pojęć mechaniki lagranżowskiej. Jej sformułowanie opiera się na następujących elementach. Zakładamy, że ruch układu został opisany współrzędnymi uogólnionymi $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)^T \in \mathbb{R}^n$ i prędkościami uogólnionymi $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Współrzędne mogą oznaczać położenia liniowe lub kątowe, natomiast prędkości są pochodnymi współrzędnych względem czasu.

Mając określone wielkości q i $\dot{q}$ definiujemy lagranżian układu

$$L(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - V(q)$$

rozumiany jako różnica energii kinetycznej i potencjalnej układu. Przyjmiemy, że ruch układu odbywa się na przedziale czasu $[t_0, t_1]$ i podlega zasadzie wariacyjnej zwanej Zasadą Najmniejszego Działania. Zasada ta orzeka, że trajektoria układu jest ekstremalą funkcjonału

$$I(q(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(q(t), \dot{q}(t)) dt$$

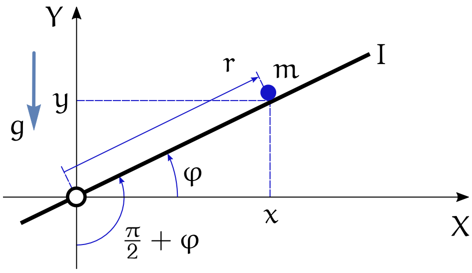
zwanego działaniem. Równania ruchu układu otrzymuje się z równań Eulera-Lagrange'a

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = F. \tag{4.1}$$

Symbol F występujący po prawej stronie równania (4.1) oznacza siły niepotencjalne (nie będące pochodną/gradientem energii potencjalnej) występujące w układzie. Do sił niepotencjalnych zaliczamy siły tarcia, przyczepności, siły sterujące itp. Jeżeli siły niepotencjalne nie występują, podstawiamy $F = 0$.

Nietrudno zauważyć, że równanie (4.1) prowadzi do układu równań różniczkowych drugiego rzędu postaci

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}\ddot{q} + \frac{\partial^2 L}{\partial q \partial \dot{q}}\dot{q} - \frac{\partial L}{\partial q} = F.$$



Rysunek 4.1: Belka i kula

W powyższym równaniu występuje macierz drugich pochodnych $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}$. Jeżeli macierz ta jest nieosobliwa, to równanie możemy rozwikłać ze względu na drugą pochodną otrzymując

$$\ddot{q} = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}\right)^{-1}\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial^2 L}{\partial q \partial \dot{q}}\dot{q} + F\right). \tag{4.2}$$

Rozwiązanie równania (4.2) przy zadanych warunkach początkowych $q(t_0)$ i $\dot{q}(t_0)$ określa ruch (trajektorię) $q(t)$ układu.

4.1. Przykłady

Dla zilustrowania sposobu tworzenia lagranżowskich równań ruchu rozważymy dwa przykłady.

4.1.1. Belka i kula

Niech będzie dany układ złożony z obracającej się belki, po której toczy się kula, pokazany na Rysunku 4.1. Zakładamy, że belka ma moment bezwładności I, a kula jest punktem materialnym o masie m. Jako współrzędne uogólnione wybieramy kąt obrotu belki φ i położenie kuli wzdłuż belki r, zatem $q = (r, \varphi)^T$, $\dot{q} = (\dot{r}, \dot{\varphi})^T$.

Energia kinetyczna układu składa się z energii kinetycznej ruchu obrotowego belki i energii kinetycznej kuli, tzn.

$$K = \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mv^2,$$

gdzie v jest prędkością kuli. Oznaczając współrzędne kuli jako x i y, otrzymujemy $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$. Jak wynika z Rysunku 4.1

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases},$$

a po zróżniczkowaniu

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi \end{cases}.$$

Oznacza to, że kwadrat prędkości kuli $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$, a energia kinetyczna układu złożonego z belki i kuli

$$K = \frac{1}{2}(I + mr^2)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\dot{r}^2.$$

Energia potencjalna układu pochodzi od siły grawitacji działającej na kulę; obliczymy ją ze wzoru

$$V = -m(\mathbf{r}, \mathbf{g}) = mgr\sin\varphi,$$

gdzie pogrubionym drukiem zaznaczyliśmy wektor położenia kuli i wektor przyspieszenia ziemskiego, oba wyrażone w układzie współrzędnych (x, y). Łącząc otrzymane wyniki otrzymujemy lagranżian

$$L = K - V = \frac{1}{2}(I + mr^2)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - mgr\sin\varphi.$$

Aby napisać równania Eulera-Lagrange'a (4.1), wyliczamy najpierw pochodne

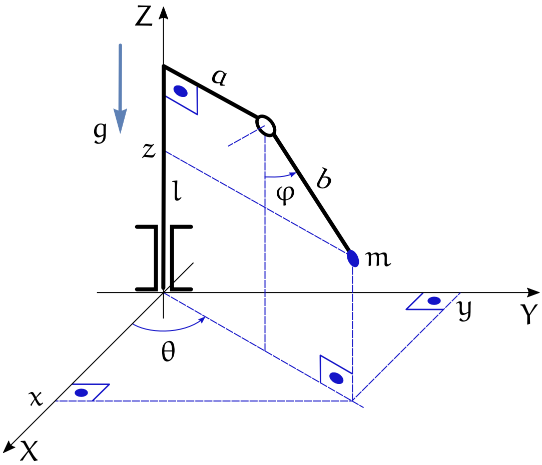
$$\begin{aligned} \tfrac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= m\dot{r}, \\ \tfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= (I + mr^2)\dot{\varphi}, \\ \tfrac{\partial L}{\partial r} &= mr\dot{\varphi}^2 - mg\sin\varphi, \\ \tfrac{\partial L}{\partial \varphi} &= -mgr\cos\varphi \end{aligned}$$

i przy założeniu, że w układzie nie występują siły niepotencjalne otrzymujemy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 + mg\sin\varphi = 0 \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = (I + mr^2)\ddot{\varphi} + 2mr\dot{r}\dot{\varphi} + mgr\cos\varphi = 0 \end{cases}.$$

4.1.2. Wahadło Furuty

Wahadło Furuty składa się z pionowej kolumny obrotowej o długości l połączonej z prostopadłym ramieniem o długości a, do którego zostało przymocowane wahadło o długości b zakończone masą m, zob. Rysunek 4.2. Wahadło Furuty można potraktować jako model człowieka obracającego się wokół osi pionowej, z wyprostowanym ramieniem, trzymającego przedmiot w wyciągniętej ręce lub jako model robota o dwóch



Rysunek 4.2: Wahadło Furuty

stopniach swobody typu obrotowego. Przy analizie pomijamy masę kolumny i ramion. Do opisu wahadła Furuty wykorzystamy kąt obrotu kolumny i kąt wychylenia wahadła, $q = (\theta, \varphi)^T$.

Energia kinetyczna jest energią ruchu masy m i wynosi $K = \frac{1}{2}mv^2$. Oznaczając współrzędne kartezjańskie masy m przez $(x, y, z)^T$ otrzymujemy $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$. Z Rysunku obliczamy

$$\begin{cases} x = (a + b\sin\varphi)\cos\theta \\ y = (a + b\sin\varphi)\sin\theta \\ z = l - b\cos\varphi \end{cases}.$$

Po zróżniczkowaniu mamy

$$\begin{cases} \dot{x} = -(a + b\sin\varphi)\dot{\theta}\sin\theta + b\cos\varphi\dot{\varphi}\cos\theta \\ \dot{y} = (a + b\sin\varphi)\dot{\theta}\cos\theta + b\cos\varphi\dot{\varphi}\sin\theta \\ \dot{z} = b\dot{\varphi}\sin\varphi \end{cases},$$

skąd wynika wzór na prędkość

$$v^2 = (a + b\sin\varphi)^2\dot{\theta}^2 + b^2\dot{\varphi}^2.$$

Energia potencjalna układu pochodzi od sił grawitacyjnych działających na masę m i wyraża się wzorem $V = -m(\mathbf{r}, \mathbf{g})$. Ponieważ $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$, a $\mathbf{g} = (0, 0, -g)^T$, wyliczamy $V = mgz = mg(l - b\cos\varphi)$. Ze względu na to, że stały składnik energii potencjalnej nie ma znaczenia przy wyprowadzeniu równań Eulera-Lagrange'a, pominiemy składnik mgl. W rezultacie otrzymujemy lagranżian

$$L = \frac{1}{2}m(a + b\sin\varphi)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mb^2\dot{\varphi}^2 + mgb\cos\varphi.$$

Ostatnim etapem przed napisaniem równań Eulera-Lagrange'a jest wyliczenie pochodnych

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} &= m(a + b\sin\varphi)^2\dot{\theta}, \\ \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} &= mb^2\dot{\varphi}, \\ \frac{\partial L}{\partial\theta} &= 0, \\ \frac{\partial L}{\partial\varphi} &= m(a + b\sin\varphi)b\dot{\theta}^2\cos\varphi - mgb\sin\varphi. \end{aligned}$$

Równania Eulera-Lagrange'a mają postać

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - 0 = 0 \Rightarrow m(a + b\sin\varphi)^2\dot{\theta} = const, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = mb^2\ddot{\varphi} - m(a + b\sin\varphi)b\dot{\theta}^2\cos\varphi + mgb\sin\varphi = 0. \end{cases}$$

Jak widać, pierwsze równanie ruchu jest równoważne zachowaniu momentu pędu przy obrocie wokół osi pionowej.

4.2. Ogólna postać równań ruchu

Dla typowych układów energia kinetyczna ma postać formy kwadratowej zależnej od prędkości uogólnionych, z macierzą formy zależną od współrzędnych uogólnionych, tzn.

$$K(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T Q(q)\dot{q} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} Q_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j.$$

Macierz formy Q nazywa się macierzą inercji układu. Macierz inercji jest symetryczna, $Q^T = Q$ i dodatnio określona, $v^T Q v > 0$ dla $v \neq 0$.

Z postaci energii kinetycznej wynika, że lagranżian

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} Q_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j - V(q). \tag{4.3}$$

Po wykonaniu odpowiednich operacji matematycznych otrzymujemy następujące równania Eulera-Lagrange'a dla $k = 1, 2, \ldots, n$

$$\sum_{i=1}^{n} Q_{ki}(q)\ddot{q}_i + \sum_{i,j=1}^{n} c^k_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j + \frac{\partial V(q)}{\partial q_k} = F_k. \tag{4.4}$$

W uzyskanym równaniu współczynniki

$$c^k_{ij}(q) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Q_{ik}(q)}{\partial q_j} + \frac{\partial Q_{kj}(q)}{\partial q_i} - \frac{\partial Q_{ij}(q)}{\partial q_k}\right)$$

noszą nazwę symboli Christoffela I rodzaju, natomiast F_k oznacza siłę działającą na współrzędną k. Równania (4.4) wygodnie jest zapisać w postaci macierzowej,

$$Q(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + D(q) = F, \tag{4.5}$$

gdzie $Q(q)$ jest macierzą inercji, $C(q,\dot{q})$ oznacza macierz sił odśrodkowych i Coriolisa, $D(q)$ jest wektorem sił potencjalnych, a F wektorem sił niepotencjalnych. Mając symbole Christoffela I rodzaju macierz sił odśrodkowych i Coriolisa wyznaczamy ze wzoru

$$C(q,\dot{q})_{kj} = \sum_{i=1}^{n} c^k_{ij}(q)\dot{q}_i.$$

Oczywiście

$$D_k(q) = \frac{\partial V(q)}{\partial q_k} \quad \text{i} \quad F = (F_1, F_2, \ldots, F_n)^T.$$

Równania (4.4) przedstawia się niekiedy w alternatywnej postaci, rozwikłane ze względu na przyspieszenie,

$$\ddot{q}_k + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma^k_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j + \bar{D}_k(q) = \bar{F}_k, \tag{4.6}$$

gdzie $\Gamma^k_{ij}(q)$ jest symbolem Christoffela II rodzaju oraz

$$\bar{D}_k = \sum_{l=1}^{n} Q^{-1}_{kl}(q)D_l(q), \quad \bar{F}_k = \sum_{l=1}^{n} Q^{-1}_{kl}(q)F_l.$$

Nietrudno pokazać, że symbole Christoffela II rodzaju można wyliczyć ze wzoru

$$\Gamma^k_{ij}(q) = \sum_{l=1}^{n} Q^{-1}_{kl}(q)c^l_{ij}(q).$$

W powyższych wzorach $Q^{-1}_{ij}(q)$ oznacza (ij)-ty element odwrotności macierzy inercji.

Na mocy definicji symbole Christoffela I rodzaju są symetryczne ze względu na dolne wskaźniki, tzn.

$$c^k_{ij}(q) = c^k_{ji}(q).$$

Mamy także następującą własność. Wzdłuż trajektorii $q(t)$ zachodzi

$$\dot{Q}(q) = C(q,\dot{q}) + C^T(q,\dot{q}). \tag{4.7}$$

4.3. Interpretacja geometryczna mechaniki lagranżowskiej

Załóżmy, że lagranżian układu składa się wyłącznie z energii kinetycznej,

$$L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T Q(q)\dot{q}. \tag{4.8}$$

Równania Eulera-Lagrange'a przyjmą wówczas postać

$$Q(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} = 0. \tag{4.9}$$

Pokażemy, ze wzdłuż trajektorii $q(t)$ tak określony lagranżian jest stały,

$$\frac{dL(q(t),\dot{q}(t))}{dt} = 0.$$

W tym celu obliczamy

$$\frac{dL(q(t),\dot{q}(t))}{dt} = \dot{q}^T Q(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}\dot{q}^T \dot{Q}(q)\dot{q}.$$

Po wykorzystaniu równań ruchu, a następnie wzięciu pod uwagę własności (4.7) prawa strona tego równania staje się równa

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\dot{q}^T\dot{Q}(q)\dot{q} - \dot{q}^T C(q,\dot{q})\dot{q} &= \frac{1}{2}\dot{q}^T\left(\dot{Q}(q) - 2C(q,\dot{q})\right)\dot{q} = \\ &= \frac{1}{2}\dot{q}^T\left(C^T(q,\dot{q}) - C(q,\dot{q})\right)\dot{q} = 0,\end{aligned}$$

przy czym ostatnia równość wynika z faktu, że forma kwadratowa, której macierz jest skośnie symetryczna znika.

Pozostańmy przy założeniu (4.8) i równaniach Eulera-Lagrange'a (4.9). Z mechaniki lagranżowskiej wynika, że trajektoria układu spełniająca te równania jest ekstremalą funkcjonału działania

$$2I = \int_{t_0}^{t_1} \dot{q}^T Q(q)\dot{q}\,dt = \int_{t_0}^{t_1} L(q,\dot{q})dt, \tag{4.10}$$

ponieważ ekstremale funkcjonałów I i $2I$ są identyczne. Rozważmy teraz funkcjonał

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{q}^T Q(q)\dot{q}}\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{L(q,\dot{q})}dt. \tag{4.11}$$

i wyznaczmy dla niego równania Eulera-Lagrange'a

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\sqrt{L}}{\partial\dot{q}} - \frac{\partial\sqrt{L}}{\partial q} = \frac{d}{dt}\frac{1}{2\sqrt{L}}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}} - \frac{1}{2\sqrt{L}}\frac{\partial L}{\partial q}.$$

Ponieważ lagranżian L jest stały w czasie, po zróżniczkowaniu otrzymujemy

$$\frac{1}{2\sqrt{L}}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q}\right) = 0$$

gdyż $q(t)$ jest ekstremalą działania I. Przedstawiony wywód można by podsumować w następujący sposób

Stwierdzenie 4.3.1 *Ekstremale funkcjonału działania są ekstremalami funkcjonału* J.

Zauważmy podobieństwo między funkcjonałem J a długością trajektorii $q(t)$, która jest opisana wzorem $\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\dot{q}^T\dot{q}}dt$ zawierającym euklidesowy iloczyn skalarny prędkości. Na podstawie tego podobieństwa można uznać, że funkcjonał J także wyznacza długość tej trajektorii, z tą różnicą, ze iloczyn skalarny prędkości $\dot{q}$ wylicza się z wykorzystaniem macierzy bezwładności $Q(q)$, a więc w każdym punkcie q sposób mnożenia wektorów jest inny. Iloczyn skalarny

$$(v, w)_Q = v^T Q(q) w$$

definiuje metrykę Riemanna w przestrzeni współrzędnych uogólnionych. Krzywa stanowiąca ekstremalę funkcjonału długości nazywa się geodezyjną. W tym kontekście, Spostrzeżenie 4.3.1 prowadzi do następującego wniosku.

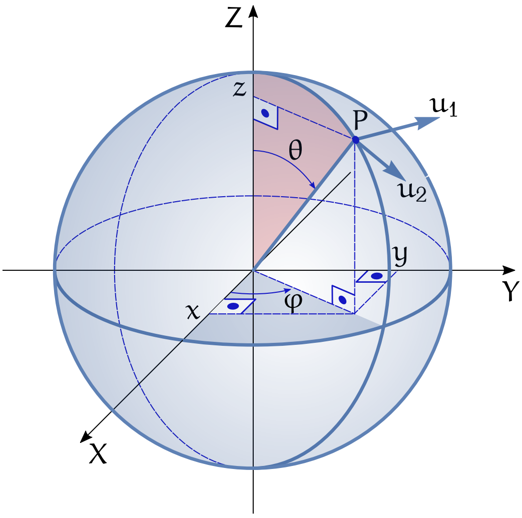
Twierdzenie 4.3.1 (O geodezyjnych metryki Riemanna) *Jeżeli lagranżian ma postać (4.8) to układ porusza się wzdłuż geodezyjnych metryki Riemanna wyznaczonej przez macierz bezwładności.*

Twierdzenie 4.3.1 traktujemy jako interpretację geometryczną mechaniki lagranżowskiej.

4.4. Przykłady cd.

W celu przybliżenia Czytelnikowi pojęcia metryki Riemanna wyznaczymy teraz tę metrykę dla sfery $\mathbb{S}^2$ pokazanej na Rysunku 4.3. Wprowadzamy na sferze współrzędne sferyczne $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $F(\varphi, \theta) = (x, y, z)^T$, gdzie

$$\begin{cases} x = \sin\theta\cos\varphi \\ y = \sin\theta\sin\varphi \\ z = \cos\theta \end{cases} .$$



Rysunek 4.3: Sfera $\mathbb{S}^2$

Pochodna $DF(\varphi, \theta)$ działa na wektorach stycznych do sfery w punkcie o współrzędnych (φ, θ). Weźmy obrazy wektorów stycznych u_1 i u_2 pokazanych na Rysunku, więc niech

$$v_1 = DF(\varphi, \theta)u_1, \quad \text{i} \quad v_2 = DF(\varphi, \theta)u_2.$$

Wektory v_1 i v_2 należą do przestrzeni $\mathbb{R}^3$ z euklidesowym iloczynem skalarnym $(v_1, v_2) = v_1^T v_2$. Metryka Riemanna na $\mathbb{S}^2$ powinna być określona w taki sposób, żeby

$$(u_1, u_2)_Q = u_1^T Q u_2 = v_1^T v_2.$$

Obliczamy

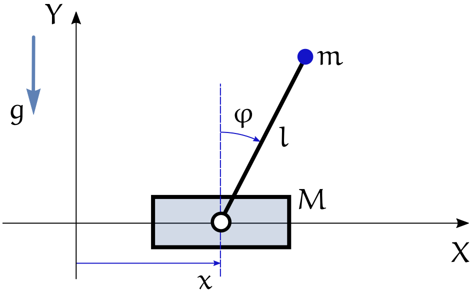
$$v_1^T v_2 = u_1^T \underbrace{(DF(\varphi, \theta))^T DF(\varphi, \theta)}_{Q} u_2,$$

skąd wynika, że metryka Riemanna na sferze jest określona przez macierz

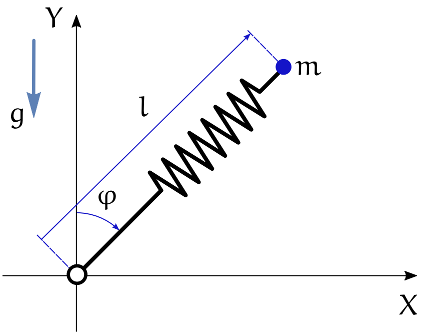
$$Q(\varphi, \theta) = \begin{bmatrix} \sin^2\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4.5. Zadania

Zadanie 4.1 Wykazać zależność (4.7).



Rysunek 4.4: Odwrócone wahadło

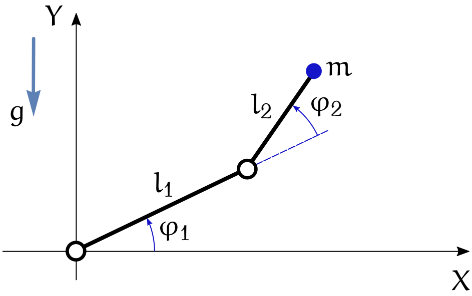


Rysunek 4.5: Noga robota

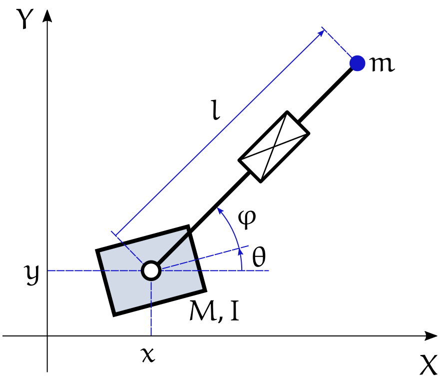
Zadanie 4.2 Korzystając z metod mechaniki lagranżowskiej wyprowadzić równania ruchu odwróconego wahadła przedstawionego na Rysunku 4.4. Odwrócone wahadło składa się z punktowej masy M poruszającej się wzdłuż osi X i zamocowanego do niej wahadła o długości l i masie m.

Zadanie 4.3 Korzystając z metod mechaniki lagranżowskiej wyprowadzić równania ruchu nogi robota skaczącego w fazie kontaktu z podłożem przedstawionej na Rysunku 4.5. Założyć, że noga składa się z masy m zamocowanej na sprężynie o długości l. Przyjąć, że energia sprężystości sprężyny jest równa $\frac{1}{2}kl^2$. Podczas ruchu punkt kontaktu nogi z podłożem nie zmienia swojego położenia.

Zadanie 4.4 Korzystając z metod mechaniki lagranżowskiej wyprowadzić równania ruchu planarnego manipulatora typu 2R przedstawionego na Rysunku 4.6. Pominąć masy ramion i przyjąć, że przedmiot manipulacji ma masę m.



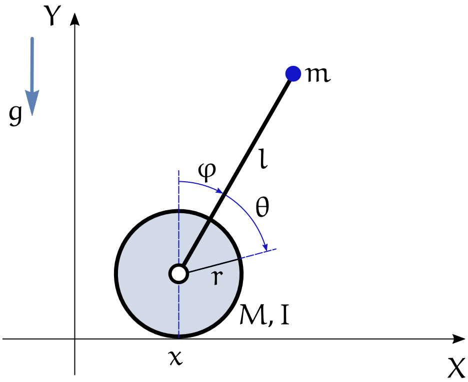
Rysunek 4.6: Manipulator 2R



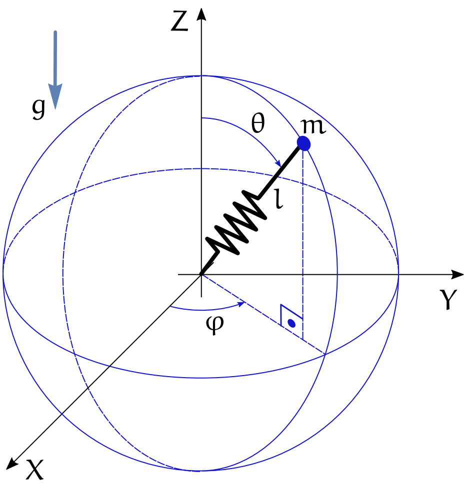
Rysunek 4.7: Robot kosmiczny

Zadanie 4.5 Korzystając z metod mechaniki lagranżowskiej wyprowadzić równania ruchu płaskiego robota kosmicznego przedstawionego na Rysunku 4.7. Robot składa się z bazy o masie M i momencie bezwładności I oraz ramienia o zmiennej długości l zakończonego masą m połączonego z bazą przegubem obrotowym. Kąt θ opisuje orientację bazy, a kąt φ położenie przegubu obrotowego. Założyć zerowe przyspieszenie ziemskie i pominąć masę ramienia robota.

Zadanie 4.6 Metodami mechaniki lagranżowskiej wyprowadzić równania ruchu płaskiego robota typu „Ballbot” przedstawionego na Rysunku 4.8. Robot ma postać odwróconego wahadła (korpusu) zamontowanego na kole toczącym się wzdłuż osi X. Długość i masa wahadła są równe l i m. Koło ma promień r, masę M i moment bezwładności I. Kąt obrotu koła względem korpusu wynosi θ, a orientacja korpusu jest opisana kątem φ. Przyjąć, że koło toczy się bez poślizgu, co oznacza, że jego droga $x = r(\varphi + \theta)$.



Rysunek 4.8: Robot Ballbot



Rysunek 4.9: Elastyczne wahadło sferyczne

Zadanie 4.7 Metodami mechaniki lagranżowskiej wyprowadzić równania ruchu elastycznego wahadła sferycznego pokazanego na Rysunku 4.9. Wahadło ma ramię w postaci teleskopu o zmienne długości l i stałej sprężystości k. Końcówka wahadła o masie m może przyjmować położenia na sferze o promieniu l. Pominąć masę ramienia wahadła. Przyjąć wzór na energię potencjalną sprężystości $V_s = \frac{1}{2}kl^2$.

4.6. Komentarze i odniesienia literaturowe

Uzupełniające wiadomości na temat mechaniki lagranżowskiej można znaleźć w podrozdziale 14 rozdziału 2 książki [RK95]; został jej także poświęcony rozdział 7, t. I książki [Tay12]. Zasada Najmniejszego Działania należy do całkowych zasad wariacyjnych mechaniki analitycznej, zob. rozdział 3 książki [Gut71]. Teorię i przykłady wyprowadzenia równań Eulera-Lagrange'a zawiera rozdział 4 tej książki.

Literatura

[Gut71] R. Gutowski, *Mechanika analityczna*. PWN, Warszawa, 1971.

[RK95] W. Rubinowicz, W. Królikowski, *Mechanika teoretyczna*. PWN, Warszawa, 1995.

[Tay12] J. R. Taylor, *Mechanika klasyczna: t. I, II*. PWN, Warszawa, 2012.

Rozdział 5

Mechanika hamiltonowska

Alternatywnym sposobem sformułowania równań ruchu jest wykorzystanie pojęć mechaniki hamiltonowskiej. Pojęcia te wyprowadzimy z pojęć mechaniki lagranżowskiej, będziemy więc zakładać, że mamy dane współrzędne i prędkości uogólnione, a także lagranżian i równania Eulera-Lagrange'a. Wprowadzenie pojęć mechaniki hamiltonowskiej poprzedzimy krótkim wstępem matematycznym.

5.1. Przekształcenie Legendre'a

Niech będzie dana funkcja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zadana wzorem $y = f(v)$. Definiujemy nową funkcję $F(p)$ w następujący sposób

$$F(p) = \max_{v}(pv - f(v)).$$

Funkcję $F(p)$ nazywamy przekształceniem Legendre'a funkcji $f(v)$. Zakładając, że funkcja $f(v)$ ma ciągłe pochodne, z warunku na maksimum otrzymujemy

$$\frac{d}{dv}(pv - f(v)) = 0,$$

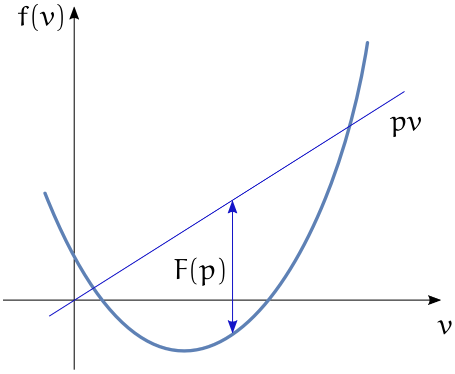
czyli $p = \frac{df(v)}{dv}$. Po obliczeniu z tej równości argumentu maksimum $v = v(p)$ otrzymujemy wartość maksimum

$$F(p) = pv(p) - f(v(p)).$$

Obrazowo istotę przekształcenia Legendre'a ilustruje Rysunek 5.1. Widać z niego, że nie każda funkcja ma przekształcenie Legendre'a; jest ono dobrze określone na przykład dla funkcji $f(v) = v^2$ lub $f(v) = v^4$, natomiast nie istnieje dla funkcji $f(v) = v^3$.

Definicja przekształcenie Legendre'a w naturalny sposób rozszerza się do funkcji zależnej od zmiennej wektorowej, $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Wówczas $p \in \mathbb{R}^n$ i

$$F(p) = \max_{v}\left(p^T v - f(v)\right).$$



Rysunek 5.1: Przekształcenie Legendre'a

Argument maksimum $v(p)$ spełnia równanie

$$p = \frac{\partial f(v)}{\partial v},$$

czyli

$$F(p) = p^T v(p) - f(v(p)).$$

5.2. Hamiltonian

Niech będzie dany lagranżian $L(q, v) = K(q, v) - V(q)$, $q, v \in \mathbb{R}^n$, w którym przez v oznaczyliśmy prędkość $\dot{q}$. Wprowadzamy następującą definicję.

Definicja 5.2.1 *Hamiltonianem układu opisanego przez lagranżian* $L(q, v)$ *nazywamy przekształcenie Legendre'a lagranżianu ze względu na prędkość* v*, przy* q *traktowanym jako parametr,*

$$H(q, p) = \max_v \left(p^T v - L(q, v)\right).$$

Argument maksimum $v(q, p)$ obliczamy z warunku

$$p = \frac{\partial L(q, v)}{\partial v},$$

i w konsekwencji hamiltonian

$$H(q, p) = p^T v(q, p) - L(q, v(q, p)). \tag{5.1}$$

Zmienną p nazywamy uogólnionym pędem układu. Przy założeniu, że energia kinetyczna jest zadana formą kwadratową $K(q,v) = \frac{1}{2}v^T Q(q)v$ otrzymujemy

$$p = \frac{\partial L(q,v)}{\partial v} = Q(q)v,$$

zatem

$$v(q,p) = Q^{-1}(q)p.$$

Podstawienie do wzoru (5.1) daje następującą formułę na hamiltonian

$$H(q,p) = \frac{1}{2}p^T Q^{-1}(q)p + V(q). \tag{5.2}$$

Z formuły tej wynika, że hamiltonian jest całkowitą energią układu, sumą energii kinetycznej (wyrażonej za pomocą pędu) i energii potencjalnej.

5.3. Równania kanoniczne Hamiltona

Jak pokazaliśmy w poprzednim rozdziale, mechanika lagranżowska opiera się na pojęciu współrzędnych i prędkości uogólnionych

$$q, \dot{q} \in \mathbb{R}^n,$$

lagranżianu

$$L(q,\dot{q}) = K(q,\dot{q}) - V(q)$$

i równaniach Eulera-Lagrange'a

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L(q.\dot{q})}{\partial q} = F.$$

Analogicznymi kategoriami dla mechaniki hamiltonowskiej są współrzędne i pędy uogólnione

$$q, p \in \mathbb{R}^n,\ p = \frac{\partial L(q,v)}{\partial v}$$

i hamiltonian

$$H(q,p) = p^T v(q,p) - L(q, v(q,p)).$$

W celu otrzymania równań ruchu układu obliczamy pochodne hamiltonianu

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = p^T \frac{\partial v}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} - \left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)^T \frac{\partial v}{\partial q_i}.$$

Korzystając z definicji pędu $p = \frac{\partial L}{\partial v}$ otrzymujemy

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}.$$

Na koniec, z równań Eulera-Lagrange'a wynika, że

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \dot{p}_i - F_i,$$

a zatem

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + F_i.$$

Podobnie obliczamy

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = v_i + p^T \frac{\partial v}{\partial p_i} - \left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)^T \frac{\partial v}{\partial p_i}.$$

Ponownie jak poprzednio, z definicji pędu wynika wzór

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = v_i,$$

czyli

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}.$$

Równania dla $\dot{q}_i$ i $\dot{p}_i$ noszą nazwę kanonicznych równań Hamiltona. W zapisie wektorowym można im nadać postać

$$\begin{cases} \dot{q} = \dfrac{\partial H(q,p)}{\partial p} \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H(q,p)}{\partial q} + F \end{cases}, \tag{5.3}$$

gdzie F oznacza siły niepotencjalne działające w układzie. Przy braku sił F, z równań kanonicznych wynika następująca własność hamiltonianu

Twierdzenie 5.3.1 (O niezmienniczości hamiltonianu) *Na trajektoriach układu równań kanonicznych Hamiltona hamiltonian jest stały,*

$$\frac{dH(q(t),p(t))}{dt} = \left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)^T \dot{q} + \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^T \dot{p} = -\dot{p}^T\dot{q} + \dot{q}^T\dot{p} = 0.$$

5.4. Przykłady

5.4.1. Belka i kula

Napiszemy hamiltonowskie równania ruchu dla układu belka i kula analizowanego w poprzednim rozdziale. Mamy $q = (r, \varphi)^T$, $p = (p_1, p_2)^T$. Lagranżian

$$L = K - V = \frac{1}{2}\left(I + mr^2\right)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - mgr\sin\varphi.$$

W celu wyznaczenia hamiltonianu wykorzystamy macierz bezwładności

$$Q = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I + mr^2 \end{bmatrix}.$$

Macierz odwrotna

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{I+mr^2} \end{bmatrix},$$

na mocy (5.2) definiuje hamiltonian

$$H(q,p) = \frac{1}{2}\left(\frac{p_1^2}{m} + \frac{p_2^2}{I + mr^2}\right) + mgr\sin\varphi.$$

Równania kanoniczne Hamiltona związane z tym hamiltonianem są następujące

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{m} \\ \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2}{I+mr^2} \\ \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{mrp_2^2}{(I+mr^2)^2} - mg\sin\varphi \\ \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -mgr\cos\varphi \end{cases}.$$

5.4.2. Wahadło Furuty

Wahadło Furuty zostało opisane dwoma kątami $q = (\theta, \varphi)^T$. Odpowiadający im wektor pędów $p = (p_1, p_2)^T$. W poprzednim rozdziale wyznaczyliśmy lagranżian

$$L = \frac{1}{2}m(a + b\sin\varphi)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mb^2\dot{\varphi}^2 + mgb\cos\varphi.$$

Z postaci energii kinetycznej otrzymujemy macierz inercji

$$Q = \begin{bmatrix} m(a + b\sin\varphi)^2 & 0 \\ 0 & mb^2 \end{bmatrix}.$$

Macierz odwrotna

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m(a+b\sin\varphi)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{mb^2} \end{bmatrix}$$

pozwala zdefiniować hamiltonian

$$H(q,p) = \frac{1}{2}\left(\frac{p_1^2}{m(a+b\sin\varphi)^2} + \frac{p_2^2}{mb^2}\right) - mgb\cos\varphi.$$

Równania kanoniczne Hamiltona wahadła Furuty mają postać

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{m(a+b\sin\varphi)^2} \\ \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2}{mb^2} \\ \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \\ \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = \frac{bp_1^2\cos\varphi}{m(a+b\sin\varphi)^3} - mgb\sin\varphi \end{cases}.$$

5.5. Niezmienniki. Nawias Poissona

Niech będzie dany układ opisany współrzędnymi $q \in \mathbb{R}^n$ i pędami $p \in \mathbb{R}^n$, z hamiltonianem $H(q,p)$. Funkcję $F(q,p)$ nazywamy niezmiennikiem, stałą ruchu lub całką pierwszą układu, jeżeli $F(q(t),p(t)) = \text{const}$ na trajektoriach $q(t), p(t)$. Oznacza to, że

$$\frac{dF(q(t),p(t))}{dt} = 0.$$

W Twierdzeniu 5.3.1 ustaliliśmy, że hamiltonian jest przykładem niezmiennika. W celu sprawdzenia, czy zadana funkcja $F(q,p)$ jest niezmiennikiem, wyliczamy

$$\frac{dF(q(t),p(t))}{dt} = \left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)^T \dot{q} + \left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)^T \dot{p} = \left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)^T \frac{\partial H}{\partial p} - \left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)^T \frac{\partial H}{\partial q} = \{F, H\}.$$

Wyrażenie stojące po prawej stronie powyższego wzoru nazywamy nawiasem Poissona funkcji F i hamiltonianu H. Wynika z niego, że warunkiem, żeby F było niezmiennikiem jest znikanie nawiasu Poissona

$$\{F, H\} = 0.$$

Nawias Poissona można zdefiniować dla dowolnych (odpowiednio gładkich) funkcji $F_1(q,p)$ i $F_2(q,p)$

$$\{F_1, F_2\} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial q}\right)^T \frac{\partial F_2}{\partial p} - \left(\frac{\partial F_1}{\partial p}\right)^T \frac{\partial F_2}{\partial q}. \tag{5.4}$$

Nawias Poissona jest rodzajem mnożenia funkcji, przypisującym funkcjom F_1 i F_2 funkcję $\{F_1, F_2\}$, o następujących własnościach:

1. $\{F, F\} = 0$ – antyzwrotność,
2. $\{F_2, F_1\} = -\{F_1, F_2\}$ – antysymetria,
3. $\{F_1, \{F_2, F_3\}\} + \{F_2, \{F_3, F_1\}\} + \{F_3, \{F_1, F_2\}\} = 0$ – tożsamość Jacobiego.

Zauważmy, że z tożsamości Jacobiego wynika niełączność nawiasu Poissona, w sumie więc nawias Poissona przypomina iloczyn wektorowy w $\mathbb{R}^3$.

Znaczenie nawiasu Poissona dla mechaniki hamiltonowskiej polega na tym, ze przy jego pomocy można generować niezmienniki. Opisuje to następujące

Twierdzenie 5.5.1 (O nawiasie Poissona) *Jeżeli* F_1 *i* F_2 *są niezmiennikami, to nawias Poissona* $\{F_1, F_2\}$ *jest także niezmiennikiem.*

5.6. Twierdzenie Liouville'a o niezmiennikach

W Rozdziale 0 zwróciliśmy uwagę na znaczenie niezmienników przy rozwiązywaniu równań ruchu; zobaczyliśmy, że dzięki temu, że moment pędu i energia ruchu Planety wokół Słońca okazały się niezmiennikami, potrafiliśmy rozwiązać równania ruchu i wyprowadzić I Prawo Keplera. W odniesieniu do rozwiązania równania różniczkowego uzyskanego w sposób analityczny (symboliczny), tak jak to miało miejsce w przypadku równań ruchu Planety wokół Słońca, będziemy używać terminu „rozwiązanie przez kwadratury". Możliwość rozwiązania równań ruchu przez kwadratury jest okolicznością bardzo pożądaną. Warunki wystarczające rozwiązalności przez kwadratury podaje

Twierdzenie 5.6.1 (Liouville'a o niezmiennikach) *Załóżmy, że układ równań kanonicznych Hamiltona*

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases},$$

$q, p \in \mathbb{R}^n$, *ma* n *niezmienników* $\{F_1 = H, F_2, \ldots, F_n\}$, *niezależnych i pozostających w inwolucji. Wówczas*

1. *trajektoria* $q(t), p(t)$ *układu leży na* n*-wymiarowej rozmaitości*

$$M_\alpha = \left\{ (q, p) \in \mathbb{R}^{2n} \middle| \; F_1(q, p) = \alpha_1, F_2(q, p) = \alpha_2, \ldots, F_n(q, p) = \alpha_n \right\},$$

2. *równania kanoniczne Hamiltona można rozwiązać przez kwadratury.*

W powyższym twierdzeniu $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^T$ oznacza wektor stałych. Jeżeli jest dany warunek początkowy (q_0, p_0), to $\alpha_i = F_i(q_0, p_0)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Niezależność niezmienników należy rozumieć jako niezależność funkcji $F_1, F_2, \ldots, F_n$, co oznacza, że dla $(q, p) \in M_\alpha$

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial q_n} & \frac{\partial F_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial p_n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial q_n} & \frac{\partial F_n}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial p_n} \end{bmatrix}(q, p) = n.$$

Wymaganie, żeby niezmienniki były w inwolucji oznacza, że dla każdego $i, j = 1, 2, \ldots, n$ nawias Poissona $\{F_i, F_j\} = 0$. Niezmienniki w Twierdzeniu 5.6.1 tworzą więc układ maksymalny, w tym sensie, że nie da się z nich wygenerować nowych niezmienników. Przypominamy, że przez k-wymiarową rozmaitość w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ rozumiemy podzbiór $\mathbb{R}^n$, na którym się zeruje $n - k$ niezależnych funkcji.

5.7. Przykłady: niezmienniki

Powróćmy jeszcze raz do wahadła Furuty. Mamy $n = 2$. Na podstawie równań ruchu uzyskanych w podrozdziale 5.4.2 wnioskujemy, że istnieją dwa niezmienniki: hamiltonian H i pęd p_1. W celu zbadania ich niezależności tworzymy macierz

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial \theta} & \frac{\partial H}{\partial \varphi} & \frac{\partial H}{\partial p_1} & \frac{\partial H}{\partial p_2} \\ \frac{\partial p_1}{\partial \theta} & \frac{\partial p_1}{\partial \varphi} & \frac{\partial p_1}{\partial p_1} & \frac{\partial p_1}{\partial p_2} \end{bmatrix}$$

Z równań kanonicznych, a także z niezależności składowych pędu od siebie i od współrzędnych, warunek niezależności niezmienników przyjmuje postać

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} 0 & -\dot{p}_2 & \dot{\theta} & \dot{\varphi} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2.$$

Niezmienniki są zatem niezależne, pod warunkiem, że albo $\dot{\varphi} \neq 0$, albo $\dot{p}_2 \neq 0$. Ponieważ $p_2 = mb^2\dot{\varphi}$, niezmienniki będą niezależne, jeżeli $\dot{\varphi} \neq 0$ lub $\ddot{\varphi} \neq 0$. Wymaga to, żeby ramię wahadła poruszało się, a w punktach zatrzymania miało niezerowe przyspieszenie. Możemy uznać, że przy „naturalnym" ruchu wahadła Furuty niezmienniki są niezależne. Do sprawdzenia warunku inwolucji wystarczy policzyć nawias Poissona $\{H, p_1\}$. Mamy

$$\{H, p_1\} = \left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)^T \frac{\partial p_1}{\partial p} - \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^T \frac{\partial p_1}{\partial q}.$$

Ponieważ $\frac{\partial H}{\partial q} = (0, *)^T$, gwiazdka oznacza element, którego wartość nie jest istotna, $\frac{\partial p_1}{\partial p} = (1, 0)^T$ i $\frac{\partial p_1}{\partial q} = (0, 0)^T$, otrzymujemy

$$\{H, p_1\} = 0.$$

Pokazaliśmy, ze hamiltonowskie równania ruchu wahadła Furuty mają dwa niezmienniki, które są niezależne i w inwolucji, dlatego na podstawie Twierdzenia 5.6.1 stwierdzamy, ze równania te są rozwiązalne przez kwadratury.

5.8. Twierdzenie Liouville'a o dywergencji

Układ równań kanonicznych Hamiltona (5.3) bez sił niepotencjalnych można potraktować jako układ równań różniczkowych lub jako układ dynamiczny

$$\dot{x} = X(x), \quad x = (q, p)^T, \quad X(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial H(q,p)}{\partial p} \\ -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q} \end{pmatrix}$$

w przestrzeni $\mathbb{R}^{2n}$. Taki układ nazywa się hamiltonowskim. Niech $2n = s$. Funkcję $X(x)$ nazywamy polem wektorowym. Mając dany stan początkowy x układu dynamicznego, jego trajektoria $x(t) = \varphi(t, x)$. Funkcję

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}^s$$

nazywamy strumieniem układu dynamicznego. Strumień wyznacza stan układu w chwili t przy znanym stanie początkowym x w chwili 0. Jeżeli ustalimy t, strumień definiuje funkcję

$$\varphi_t : \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}^s, \quad \varphi_t(x) = \varphi(t, x).$$

Funkcja ta ma następujące własności:

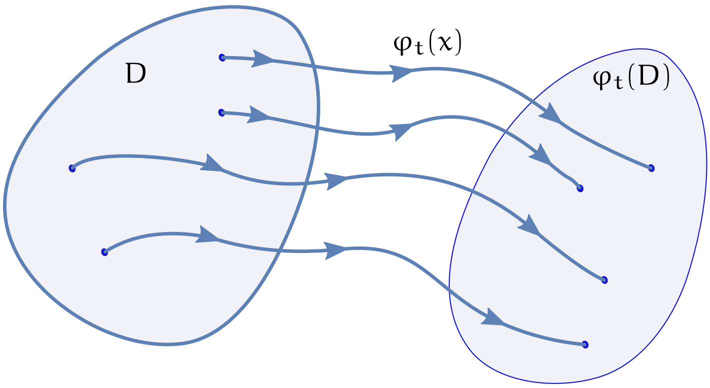
1. $\varphi_0(x) = x$ – własność identyczności,
2. $\varphi_{t+s}(x) = \varphi_t(\varphi_s(x))$ – własność półgrupowości.

Z własności tych wynika, że $\varphi_t^{-1}(x) = \varphi_{-t}(x)$.

Weźmy zbiór stanów początkowych $D \subset \mathbb{R}^s$ i wyznaczmy jego obraz $\varphi_t(D)$ w chwili t, zob. Rysunek 5.2. Sposób, w jaki funkcja φ_t przekształca zbiór D (a więc, w jaki strumień „płynie”) dostarcza informacji o zachowaniu układu dynamicznego. Niech V_t oznacza objętość obrazu $\varphi_t(D)$,

$$V_t = \mathrm{vol}(\varphi_t(D)).$$

Z definicji, $V_0 = \mathrm{vol}(D)$. Interesujące są trzy relacje między V_t a V_0:



Rysunek 5.2: Strumień układu dynamicznego

1. $V_t < V_0$ – strumień układu jest kontrakcją (strumień zwężający),
2. $V_t > V_0$ – strumień układu jest ekspansją (strumień rozszerzający),
3. $V_t = V_0$ – strumień układu zachowuje objętość (strumień izochoryczny).

Oczywiście, wymienione sytuacje nie wyczerpują wszystkich możliwości; może być tak, że w pewnej chwili objętość rośnie, a w innej maleje. Niewątpliwie jednak ustalenie którejś z nich jest warte zachodu.

W tym celu wprowadźmy pojęcie dywergencji. Dla układu dynamicznego z polem wektorowym $X(x)$ dywergencja pola

$$\operatorname{div} X(x) = \operatorname{tr} \frac{\partial X(x)}{\partial x},$$

gdzie $\operatorname{tr} M$ oznacza ślad macierzy M. Korzystając ze zmiany współrzędnych przy liczeniu całki można pokazać, że

$$\frac{dV(t)}{dt} = \int_{\varphi_t(D)} \operatorname{div} X(x)\, dx. \tag{5.5}$$

Warunek wystarczający zachowania objętości podaje

Twierdzenie 5.8.1 (Lioville'a o dywergencji) *Jeżeli dywergencja*

$$\operatorname{div} X(x) = 0,$$

to strumień układu zachowuje objętość. Strumień układu hamiltonowskiego zachowuje objętość.

Sprawdzenie, że pole wektorowe układu hamiltonowskiego ma zerową dywergencję jest natychmiastowe. Mamy bowiem

$$\frac{\partial X(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial q \partial p} & \frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p^2} \\ -\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial q^2} & -\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p \partial q} \end{bmatrix},$$

a zatem

$$\operatorname{div} X(x) = \operatorname{tr}\left[\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial q \partial p}\right] - \operatorname{tr}\left[\frac{\partial^2 H(q,p)}{\partial p \partial q}\right] = 0$$

na mocy równości pochodnych mieszanych.

5.9. Przykłady: dywergencja

W celu objaśnienia pojęcia dywergencji rozważymy dwa przykłady.

5.9.1. Przykład 1

Jak pokazano w podrozdziale 2.4.2, równanie ruchu wahadła

$$\ddot{x} = -\sin x$$

można przedstawić w formie układu dynamicznego

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\sin x_1 \end{cases},$$

a zatem pole $X(x) = (x_2, -\sin x_1)^T$. Obliczamy pochodną

$$DX(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x_1 & 0 \end{bmatrix},$$

skąd wynika, że $\operatorname{div} X(q) = \operatorname{tr} DX(x) = 0$. Strumień układu zachowuje objętość.

5.9.2. Przykład 2

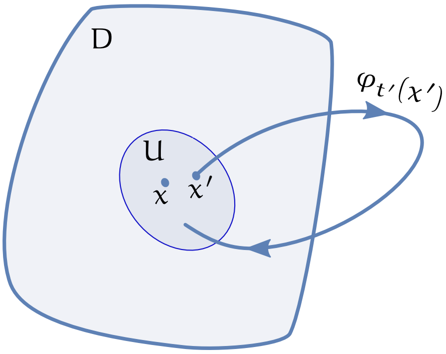
Weźmy układ dynamiczny

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_1^3 \end{cases}.$$

Mamy $X(x) = (x_1 + x_2^2, x_1^3)^T$. Dywergencja

$$\operatorname{div} X(x) = \operatorname{tr}\begin{bmatrix} 1 & 2x_2 \\ 3x_1^2 & 0 \end{bmatrix} = 1,$$

co oznacza, ze strumień układu ma cechy ekspansji.



Rysunek 5.3: Twierdzenie o powrocie

5.10. Twierdzenie Poincaré o powrocie

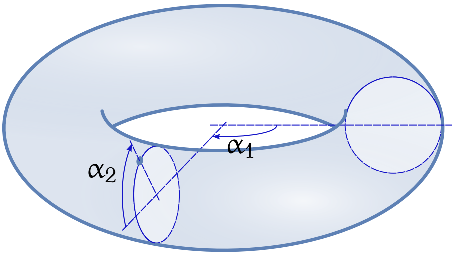
Konsekwencją Twierdzenia Liouville'a o dywergencji jest następujące twierdzenie, które charakteryzuje trajektorie układu hamiltonowskiego.

Twierdzenie 5.10.1 (Poincaré o powrocie) *Załóżmy, że układ dynamiczny* $\dot{x} = X(x)$, $x \in \mathbb{R}^s$, *ze strumieniem* $\varphi_t(x)$ *ma zerową dywergencję,* $\operatorname{div} X(x) = 0$. *Niech* $D \subset \mathbb{R}^s$ *oznacza podzbiór niezmienniczy* ($\varphi_t(D) \subset D$) *i ograniczony* ($\mathrm{vol}(D) < \infty$). *Wówczas, w każdym otoczeniu* U *punktu* $x \in D$ *istnieje punkt* $x' \in U$, *taki że w pewnej chwili* t' *zachodzi* $\varphi_{t'}(x') \in U$, *albo* $\varphi_{t'}(U) \cap U \neq \emptyset$, *zob. Rysunek 5.3.*

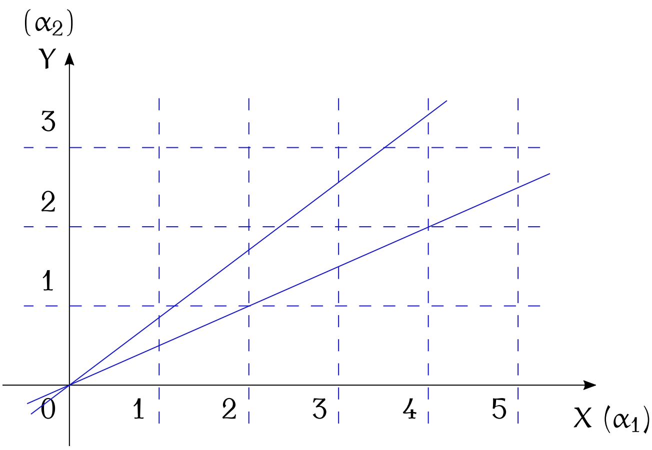
Ponieważ dywergencja układu hamiltonowskiego wynosi zero, twierdzenie o powrocie zachodzi dla układów hamiltonowskich określonych na ograniczonym podzbiorze przestrzeni położeń i pędów.

5.11. Przykłady: układ dynamiczny na torusie

Dobrą ilustracją Twierdzenia Poincaré o powrocie jest następujący układ dynamiczny określony na torusie $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Jak pokazuje Rysunek 5.4, jako współrzędne określające położenie punktu na torusie można wziąć kąty (α_1, α_2). Torus $\mathbb{T}^2$ powstaje przez utożsamienie na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ punktów o współrzędnych całkowitych, zob. Rysunek 5.5. Mówiąc obrazowo, najpierw „zwijamy" płaszczyznę $\mathbb{R}^2$ w kierunku pionowym, tak żeby pokryły się linie poziome o współrzędnych będących liczbami całkowitymi, a następnie tak otrzymany nieskończenie długi rulon „zwijamy" wzdłuż osi pionowej w taki sposób, żeby pokryły się



Rysunek 5.4: Torus $\mathbb{T}^2$



Rysunek 5.5: Definiowanie torusa $\mathbb{T}^2$

linie pionowe o współrzędnych całkowitych. Z definicji torus jest zbiorem ograniczonym; jego powierzchnia jest równa $4\pi^2$. Zdefiniujmy na $\mathbb{T}^2$ układ dynamiczny

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_1 = a \\ \dot{\alpha}_2 = b \end{cases},$$

gdzie $a \in \mathbb{R}$ i $b \in \mathbb{R}$ są liczbami rzeczywistymi. Jest oczywiste, że dywergencja tego układu jest zerowa, a trajektorie układu nie opuszczają torusa, co oznacza, że jest on zbiorem niezmienniczym. Warunki Twierdzenia Poincaré o powrocie są zatem spełnione. Z równań układu wynika, że przy założeniu $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = 0$ jego trajektorie spełniają warunek

$$\frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} = \frac{b}{a},$$

co daje linie proste $\alpha_2 = \frac{b}{a}\alpha_1$ jak pokazano na Rysunku 5.5. Zauważmy, że przebieg takiej linii na torusie zależy od typu liczby $\frac{b}{a}$. Gdy ułamek

$\frac{b}{a}$ jest liczbą wymierną, wtedy prosta $\alpha_2 = \frac{b}{a}\alpha_1$ przechodzi przez pewien punkt o współrzędnych całkowitych, a zatem na torusie powstanie orbita zamknięta. Każdy punkt tej orbity powraca nieskończenie wiele razy. W przypadku, gdy ułamek $\frac{b}{a}$ jest liczbą niewymierną, prosta $\alpha_2 = \frac{b}{a}\alpha_1$ nie przechodzi przez żaden punkt o współrzędnych całkowitych. Orbita na torusie nawija się nieprzerwanie, jak nitka na szpulce. Powroty następują do coraz to innych punktów. Przykład ten pokazuje w sposób obrazowy, jakiego rodzaju trajektorii można się spodziewać w układzie hamiltonowskim, a więc, jak mogą wyglądać rozwiązania równań ruchu.

5.12. Zadania

Zadanie 5.1 Wyznaczyć przekształcenie Legendre'a funkcji $f(\nu) = \nu^2$ i $f(\nu) = \nu^4$.

Zadanie 5.2 Korzystając z metod mechaniki hamiltonowskiej wyprowadzić równania ruchu Planety wokół Słońca. Wskazówka: skorzystać z ustaleń zawartych w Rozdziale 0.

Zadanie 5.3 Korzystając z metod mechaniki hamiltonowskiej wyprowadzić równania ruchu odwróconego wahadła i nogi robota skaczącego z zestawu zadań dołączonego do poprzedniego Rozdziału.

Zadanie 5.4 Korzystając z metod mechaniki hamiltonowskiej napisać równania ruchu wahadła sferycznego przedstawionego na Rysunku 5.6. Końcówka wahadła przyjmuje położenia na sferze S^2.

Zadanie 5.5 Korzystając z metod mechaniki hamiltonowskiej wyprowadzić równania ruchu robota kosmicznego opisanego w zestawie zadań z poprzedniego rozdziału. Pominąć ruch postępowy bazy robota i przyjąć trzy współrzędne uogólnione $q = (\phi, \theta, l)^T$.

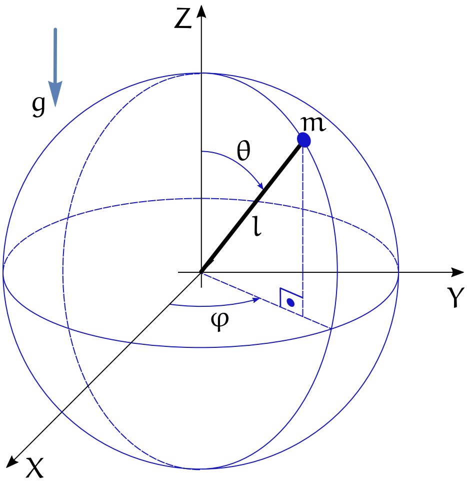
Zadanie 5.6 Korzystając z metod mechaniki hamiltonowskiej napisać równania ruchu robota typu „Ballbot" opisanego w zestawie zadań dołączonym do poprzedniego Rozdziału.

Zadanie 5.7 Udowodnić Twierdzenie 5.5.1. Wskazówka: wykorzystać tożsamość Jacobiego.

Zadanie 5.8 Udowodnić zależność (5.5). Wskazówka: zauważyć, że

$$\frac{dV(t)}{dt} = \left.\frac{dV(t+s)}{ds}\right|_{s=0}$$

i zapoznać się z rodziałem 3 pracy [Arn81].



Rysunek 5.6: Wahadło sferyczne

5.13. Komentarze i odniesienia literaturowe

Podstawom mechaniki hamiltonowskiej jest poświęcony rozdział 3 książki [RK95] i rozdział 13, t. II książki [Tay12]. Przekształcenie Legendre'a i wyprowadzenie równań kanonicznych Hamiltona zawiera rozdział 7 pracy [Gut71]. Dodatkowe wiadomości na temat mechaniki hamiltonowskiej można znaleźć w książce [Arn81]. Tamże, w rozdziale 10, podano pełne sformułowanie Twierdzenia Liouville'a o niezmiennikach, wraz z dowodem; niekiedy w stosunku do tego twierdzenia używane jest określenie Twierdzenie Liouville'a-Arnolda. Dowód Twierdzenia Liouville'a o dywergencji można znaleźć w rozdziale 3 książki [Arn81]. W tym samym rozdziale został podany prosty dowód Twierdzenia Poincaré o powrocie i przykład (5.11).

Literatura

[Arn81] W. I. Arnold, *Metody matematyczne mechaniki klasycznej.* PWN, Warszawa, 1981.

[Gut71] R. Gutowski, *Mechanika analityczna.* PWN, Warszawa, 1971.

[RK95] W. Rubinowicz, W. Królikowski, *Mechanika teoretyczna.* PWN, Warszawa, 1995.

[Tay12] J. R. Taylor, *Mechanika klasyczna: t. I, II.* PWN, Warszawa, 2012.

Rozdział 6

Kinematyka i dynamika ciała sztywnego

6.1. Ruch

Ciało sztywne definiujemy jako zwarty (domknięty i ograniczony) podzbiór $B \subset \mathbb{R}^3$. Przypominamy, że zbiór domknięty to taki, że każdy zbieżny ciąg jego elementów ma granicę leżącą w tym zbiorze, a ograniczony oznacza, że B można zamknąć w kuli o skończonej objętości. Podczas przemieszczenia ciała sztywnego zachowane są odległości i kąty; w odniesieniu do Rysunku 6.1 oznacza to, że norma euklidesowa wektorów $\|u-w\|$ i $\|v-w\|$ i kąt między wektorami $u-w$ i $v-w$ nie zmieniają się.

Załóżmy, że dany jest układ współrzędnych (X_S, Y_S, Z_S) zwany układem przestrzeni. Z ciałem sztywnym B wiążemy drugi układ współrzędnych (X_B, Y_B, Z_B), który będziemy nazywać układem ciała. Oba układy pokazano na Rysunku 6.2. Przemieszczenie ciała sztywnego opisujemy jako przekształcenie układu (X_S, Y_S, Z_S) w układ (X_B, Y_B, Z_B) realizowane przez 4×4 macierz przekształceń jednorodnych

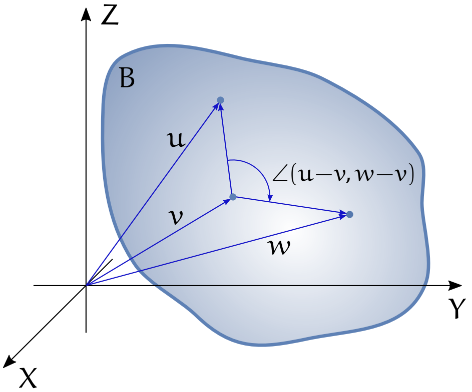
$$A = \begin{bmatrix} R & T \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}, \tag{6.1}$$

w której skład wchodzi macierz obrotu R rozmiaru 3×3, spełniająca warunek ortogonalności $RR^T = R^TR = I_3$ (I_3 – macierz jednostkowa 3×3) i warunek $\det R = +1$, i wektor przesunięcia $T \in \mathbb{R}^3$.

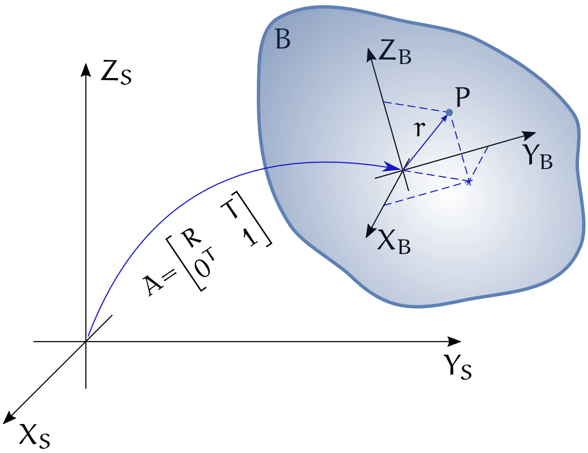
Niech będzie dany punkt P w ciele B, którego położenie względem układu ciała jest opisane wektorem $r \in \mathbb{R}^3$. Współrzędne jednorodne punktu P definiujemy jako parę $(r, 1) \in \mathbb{R}^4$. Przekształcenie A pozwala wyznaczyć współrzędne jednorodne punktu P względem układu przestrzeni jako

$$\begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} R & T \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Rr + T \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ponieważ początek układu ciała ma w układzie ciała współrzędne jednorodne $(0, 1)$, widzimy że jego współrzędne w układzie przestrzeni są



Rysunek 6.1: Ciało sztywne



Rysunek 6.2: Przemieszczenie ciała sztywnego

$(T, 1)$, co oznacza, że wektor T określa położenie początku układu ciała względem układu przestrzeni.

Załóżmy teraz $T = 0$, co oznacza, że początki obu układów pokrywają się i niech r_1, r_2 i r_3 będą kolumnami macierzy obrotu R. Obrazy wersorów osi e_1, e_2, e_3 układu ciała w układzie przestrzeni mają postać $s_1 = Re_1 = r_1$, $s_2 = Re_2 = r_2$ i $s_3 = Re_3 = r_3$. Stwierdzamy, że macierz R opisuje orientację ciała sztywnego, a wektor T jego położenie. Zbiór macierzy (6.1) opisujących przemieszczenie ciała sztywnego tworzy tzw. specjalną grupę euklidesową $SE(3)$. Jeżeli

$$A_1 = \begin{bmatrix} R_1 & T_1 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} R_2 & T_2 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

oznaczają dwa elementy $SE(3)$, to mnożenie definiujemy jako mnożenie macierzy blokowych, zatem

$$A_1A_2 = \begin{bmatrix} R_1R_2 & R_1T_2 + T_1 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}.$$

$SE(3)$ jest tzw. grupą macierzową, z elementem neutralnym I_4 i elementem odwrotnym

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^TT \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}.$$

Przez analogię do ruchu punktu materialnego, ruch ciała sztywnego określamy jako przekształcenie czasu w specjalną grupę euklidesową,

$$c : \mathbb{R} \longrightarrow SE(3), \quad c(t) = \begin{bmatrix} R(t) & T(t) \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

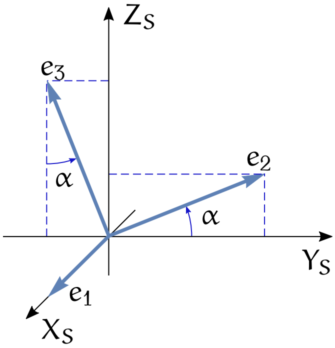
ciągłe i różniczkowalne w sposób ciągły co najmniej do rzędu 2. Powiemy, że scenerię ruchu ciała sztywnego stanowi czas $\mathbb{R}$ i specjalna grupa euklidesowa $SE(3)$. Opis ruchu ciała sztywnego wymaga podania w każdej chwili położenia i orientacji układu ciała względem układu przestrzeni. Możemy mieć na myśli przykładowo opis ruchu samolotu względem układu związanego z lotniskiem.

6.2. Obroty elementarne

Załóżmy, że układ ciała pokrywa się z układem przestrzeni i że układ ciała obraca się względem układu przestrzeni. Obrotami elementarnymi nazywamy obroty wokół osi X_S, Y_S i Z_S. Chcemy znaleźć postać macierzy obrotu $R(X, \alpha)$, $R(Y, \beta)$ i $R(Z, \gamma)$ opisujących obroty elementarne, odpowiednio wokół osi X o kąt α, wokół osi Y o kąt β i wokół osi Z o kąt γ. Dla przykładu zajmiemy się wyprowadzeniem postaci macierzy $R(X, \alpha)$, zob. Rysunek 6.3, pozostałe obroty elementarne uzyskuje się analogicznie.

Weźmy wersory osi układu ciała. Ich obrazy w układzie przestrzeni są kolumnami szukanej macierzy obrotu. Oznaczmy je jako r_1, r_2, r_3. Przy obrocie wokół osi X wersor e_1 nie zmienia się, dlatego $r_1 = e_1$. Współrzędne wersora e_2 są równe $(0, \cos\alpha, \sin\alpha)^T$, a współrzędne wersora e_3 wynoszą $(0, -\sin\alpha, \cos\alpha)^T$. W ten sposób otrzymaliśmy wzór

$$R(X, \alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$



Rysunek 6.3: Obrót elementarny wokół osi X

Dwa pozostałe obroty elementarne są opisane macierzami

$$R(Y,\beta) = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}, \quad R(Z,\gamma) = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

6.3. Współrzędne w $SE(3)$

Niech będzie dana macierz

$$A = \begin{bmatrix} R & T \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \in SE(3)$$

opisująca położenie i orientację ciała sztywnego. Macierz obrotu R ma 9 elementów, które spełniają 6 warunków ortogonalności $RR^T = I_3$. W efekcie macierze obrotu tworzą w $\mathbb{R}^9$ trójwymiarową rozmaitość. Oznaczamy ją symbolem $SO(3)$ i nazywamy grupą obrotów. Wektor $T \in \mathbb{R}^3$ jest dowolny, dlatego cała grupa $SE(3)$ jest rozmaitością 6-wymiarową zawartą w $\mathbb{R}^{12}$.

Ze względów obliczeniowych punkty rozmaitości opisujemy za pomocą współrzędnych; w przypadku grupy $SE(3)$ potrzebnych jest zestaw 6 współrzędnych. W dalszym ciągu zajmiemy się jednym z nich. Dla wektora położenia $T = (T_1, T_2, T_3)^T$ będziemy używać współrzędnych kartezjańskich, tożsamych ze składowymi tego wektora. Dla macierzy obrotu przyjmiemy jako współrzędne tzw. kąty Eulera ZYZ, wyznaczone dla zadanej macierzy R z zależności

$$R = R(Z,\varphi)R(Y,\theta)R(Z,\psi) = E(\varphi,\theta,\psi) =$$
$$= \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\theta\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi & -\cos\varphi\cos\theta\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi & \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\cos\theta\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi & -\sin\varphi\cos\theta\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi & \sin\varphi\sin\theta \\ -\sin\theta\cos\psi & \sin\theta\sin\psi & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Kąty Eulera jako współrzędne są określone lokalnie, zauważmy, że jeżeli $\theta = 0$ lub $\theta = \pm\pi$, to nie da się w sposób jednoznaczny wyznaczyć pozostałych dwóch kątów. Nie istnieją globalne współrzędne na $SO(3)$, a więc także na $SE(3)$.

6.4. Prędkość ruchu

W odróżnieniu od prędkości ruchu punktu materialnego, zdefiniowanie prędkości ruchu ciała sztywnego nie jest rzeczą oczywistą. W dalszym ciągu ograniczymy się wyłącznie do zmiany orientacji i założymy, że

$$c(t) = R(t).$$

Ponieważ $R(t)$ jest macierzą ortogonalną, w każdej chwili zachodzi

$$R(t)R^T(t) = R^T(t)R(t) = I_3,$$

z czego wynika, że

$$\dot{R}(t)R^T(t) + R(t)\dot{R}^T(t) = \dot{R}^T(t)R(t) + R^T(t)\dot{R}(t) = 0. \tag{6.2}$$

Otrzymujemy w ten sposób dwie macierzowe prędkości kątowe ciała sztywnego:

1. $\Omega_S = \dot{R}R^T$ – prędkość w przestrzeni,
2. $\Omega_B = R^T\dot{R}$ – prędkość w ciele.

Jak wynika z tej definicji,

$$\dot{R} = \Omega_S R = R\Omega_B,$$

to znaczy

$$\Omega_S = R\Omega_B R^T.$$

Przez podstawienie do wzoru (6.2) stwierdzamy, że obie macierzowe prędkości kątowe spełniają warunek

$$\Omega + \Omega^T = 0,$$

co oznacza, że macierze Ω_S i Ω_B są skośnie symetryczne. Z algebry linowej wiadomo, ze macierz skośnie symetryczna rozmiaru 3×3 jest zdefiniowana przez 3 swoje elementy. Przyjmuje się, że wektorowi $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ odpowiada macierz

$$\Omega = [\omega] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rozmieszczenie składowych wektora ω jest takie, żeby

$$\Omega v = \omega \times v,$$

gdzie $v \in \mathbb{R}^3$, a $\times$ oznacza iloczyn wektorowy. Stosując to do obu macierzowych prędkości kątowych możemy zdefiniować wektorową prędkość w przestrzeni ω_S i wektorową prędkość w ciele ω_B, w taki sposób że

$$\Omega_S = [\omega_S], \quad \Omega_B = [\omega_B].$$

Pokazaliśmy, że z własności macierzy obrotu wynikają dwa pojęcia prędkości kątowej. Prędkość ω_B rezyduje w układzie ciała, a prędkość ω_S w układzie przestrzeni. Związek między nimi jest następujący

$$\omega_S = R\omega_B.$$

Prędkość w przestrzeni oznacza prędkość kątową ciała względem układu przestrzeni. Oczywiście, prędkość w ciele nie jest prędkością ciała względem układu ciała, bo ciało względem tego układu jest nieruchome. Prędkość ω_B można interpretować jako prędkość ω_S przeniesioną do układu ciała. Niezależnie od ich bezpośredniego sensu fizycznego, z formalnego punktu widzenia obie prędkości są równoważne. Zobaczymy, że przy tworzeniu równań ruchu ciała sztywnego pojęcie prędkości w ciele jest nawet wygodniejsze w użyciu niż prędkości w przestrzeni.

Na podstawie definicji kątów Eulera możemy uzyskać następujący związek między prędkością kątową w ciele a prędkościami zmian kątów Eulera $e = (\varphi, \theta, \psi)$

$$E^T(\varphi, \theta, \psi)\dot{E}(\varphi, \theta, \psi) = [\omega_B], \tag{6.3}$$

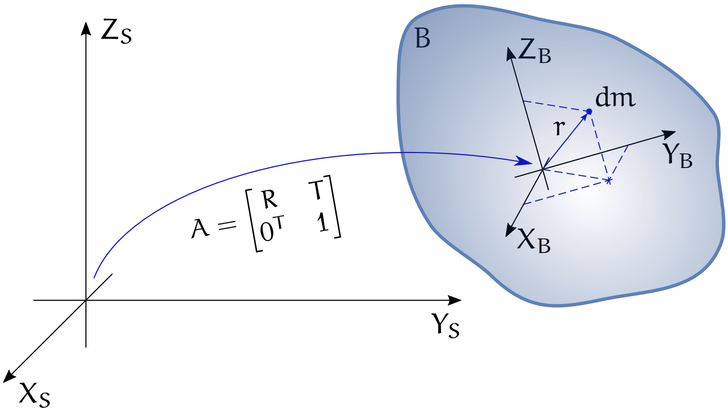
gdzie wektor ω_B

$$\omega_B = M_E \dot{e} = \begin{bmatrix} -\sin\theta\cos\psi & \sin\psi & 0 \\ \sin\theta\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ \cos\theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}.$$

6.5. Dynamika lagranżowska

Ciało sztywne B z układem ciała (X_B, Y_B, Z_B) porusza się względem układu przestrzeni (X_S, Y_S, Z_S). Przekształcenie układów opisuje macierz

$$A = \begin{bmatrix} R & T \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}.$$



Rysunek 6.4: Ruch elementu masy dm

Niech będzie dany element masy dm ciała B, którego położenie w układzie ciała opisuje wektor $r \in \mathbb{R}^3$, zob. Rysunek 6.4. Do uzyskania modelu dynamiki ciała B zastosujemy formalizm lagranżowski. Niech v oznacza prędkość elementu masy dm względem układu przestrzeni. Energia kinetyczna masy dm wynosi

$$dK = \frac{1}{2} dm v^T v = \frac{1}{2} dm \, \mathrm{tr}(vv^T),$$

gdzie skorzystaliśmy z własności, że dla liczby $\alpha \in \mathbb{R}$ $\mathrm{tr}\,\alpha = \alpha$ i że $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. Położenie s masy dm w układzie przestrzeni wynosi $s = Rr + T$, zatem prędkość

$$v = \dot{s} = \dot{R}r + \dot{T},$$

ponieważ r nie zmienia się w czasie. Korzystając z postaci prędkości otrzymujemy

$$dK = \frac{1}{2} dm \, \mathrm{tr} \left(\left(\dot{R}r + \dot{T} \right) \left(r^T \dot{R}^T + \dot{T}^T \right) \right).$$

Rozwijając powyższy wzór wyliczamy

$$dK = \frac{1}{2} dm \, \mathrm{tr}(\dot{R}rr^T\dot{R}^T) + \frac{1}{2} dm \, \mathrm{tr}(\dot{R}r\dot{T}^T) + \frac{1}{2} dm \, \mathrm{tr}(\dot{T}r^T\dot{R}^T) + \frac{1}{2} dm \, \mathrm{tr}(\dot{T}\dot{T}^T).$$

Biorąc jeszcze raz pod uwagę, że $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, a także że $\mathrm{tr}\, A = \mathrm{tr}\, A^T$ i $\mathrm{tr}\,\alpha = \alpha$ uzyskujemy następujący wzór

$$dK = \frac{1}{2} dm \, \mathrm{tr} \left(\dot{R}rr^T\dot{R}^T \right) + dm \dot{T}^T \dot{R} r + \frac{1}{2} dm ||\dot{T}||^2.$$

Energię kinetyczną ciała B wyznaczymy całkując dK,

$$K = \int_B dK = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\dot{R}\int_B rr^T dm\dot{R}^T) + \dot{T}^T\dot{R}\int_B r dm + \frac{1}{2}m_B\|\dot{T}\|^2,$$

gdzie m_B oznacza masę ciała. Całka, która się pojawiła w pierwszym składniku sumy nazywa się macierzą pseudoinercji ciała B. Przy oznaczeniu $r = (x, y, z)^T$

$$J_B = \int_B rr^T dm = \begin{bmatrix} \int_B x^2 dm & \int_B xy dm & \int_B xz dm \\ \int_B yx dm & \int_B y^2 dm & \int_B yz dm \\ \int_B zx dm & \int_B zy dm & \int_B z^2 dm \end{bmatrix}. \tag{6.4}$$

Zauważmy także, że w drugim składniku pojawiły się współrzędne środka ciężkości ciała B,

$$r_B = \frac{1}{m_B}\int_B r dm,$$

wyrażone w układzie ciała. Korzystając z tych spostrzeżeń energię kinetyczną ciała możemy zapisać w postaci

$$K = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left(\dot{R}J_B\dot{R}^T\right) + m_B\dot{T}^T\dot{R}r_B + \frac{1}{2}m_B\|\dot{T}\|^2.$$

Jak wiadomo, pochodna macierzy obrotu występująca w tym wzorze może być wyrażona za pomocą macierzowej prędkości w przestrzeni lub w ciele, $\dot{R} = \Omega_S R$ lub $\dot{R} = R\Omega_B$. Wybierzmy tę drugą możliwość. Mamy wówczas

$$\mathrm{tr}\left(\dot{R}J_B\dot{R}^T\right) = \mathrm{tr}\left(R\Omega_B J_B \Omega_B^T R^T\right) = -\,\mathrm{tr}\left(J_B\Omega_B^2\right),$$

gdzie po raz kolejny skorzystaliśmy z własności $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ i ze skośnej symetrii macierzy Ω_B. Wyliczamy także

$$m_B\dot{T}^T\dot{R}r_B = m_B\dot{T}^T R\Omega_B r_B = m_B\dot{T}^T R(\omega_B \times r_B).$$

W efekcie tych przekształceń energia kinetyczna

$$K = -\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(J_B\Omega_B^2) + m_B\dot{T}^T R(\omega_B \times r_B) + \frac{1}{2}m_B\|\dot{T}\|^2.$$

W celu wyznaczenia energii potencjalnej ciała B założymy, że jego masa jest skupiona w środku ciężkości, a zatem

$$V = -m_B(\mathbf{g}, s_B) = -m_B(\mathbf{g}, Rr_B + T).$$

Symbol s_B odnosi się do położenia środka ciężkości w układzie przestrzeni, a $\mathbf{g}$ oznacza wektor grawitacji wyrażony w tym układzie.

Łącząc uzyskane wyniki uzyskujemy lagranżian

$$L = K - V = -\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(J_B\Omega_B^2\right) + m_B\dot{T}^T R(\omega_B \times r_B) + \frac{1}{2}m_B\|\dot{T}\|^2 + m_B(\mathbf{g}, Rr_B + T).$$

Formuła lagranżianu staje się jeszcze bardziej przejrzysta, jeżeli wprowadzimy macierz inercji ciała B

$$I_B = \begin{bmatrix} J_{B22} + J_{B33} & -J_{B12} & -J_{B13} \\ -J_{B21} & J_{B11} + J_{B33} & -J_{B23} \\ -J_{B31} & -J_{B32} & J_{B11} + J_{B22} \end{bmatrix}.$$

Przy pomocy macierzy inercji lagranżian można zapisać w następującej postaci

$$L = \frac{1}{2}\omega_B^T I_B \omega_B + m_B\dot{T}^T R(\omega_B \times r_B) + \frac{1}{2}m_B\|\dot{T}\|^2 + m_B(\mathbf{g}, Rr_B + T). \quad (6.5)$$

6.6. Równania Eulera-Lagrange'a

Przed wyprowadzeniem równań Eulera-Lagrange'a ruchu ciała sztywnego musimy wyrazić lagranżian (6.5) we współrzędnych. Wykorzystamy w tym celu współrzędne kartezjańskie dla położenia i kąty Eulera ZYZ $e = (\varphi, \theta, \psi)$ dla orientacji. Załóżmy, że układ ciała został umieszczony w środku ciężkości ciała, zatem $r_B = 0$. Po uwzględnieniu wzoru (6.3) otrzymamy

$$L = \frac{1}{2}\dot{e}^T M_E^T I_B M_E \dot{e} + \frac{1}{2}m_B(\dot{T}_1^2 + \dot{T}_2^2 + \dot{T}_3^2) + m_B(\mathbf{g}, T).$$

Przyjmijmy, że macierz bezwładności jest diagonalna, $I_B = \operatorname{diag}\{I_{B1}, I_{B2}, I_{B3}\}$, a wektor przyspieszenia Ziemskiego skierowany wzdłuż osi Z_S, tzn. $\mathbf{g} = -ge_3$. Przy takich założeniach lagranżian we współrzędnych jest równy

$$\begin{aligned} L = \frac{1}{2}(I_{B1}\sin^2\theta\cos^2\psi + I_{B2}\sin^2\theta\sin^2\psi + I_{B3}\cos^2\theta)\dot{\varphi}^2 + \\ + \frac{1}{2}(I_{B1}\sin^2\psi + I_{B2}\cos^2\psi)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_{B3}\dot{\psi}^2 + \\ - (I_{B1} - I_{B2})\sin\theta\sin\psi\cos\psi\dot{\varphi}\dot{\theta} + I_{B3}\cos\theta\dot{\varphi}\dot{\psi} + \\ + \frac{1}{2}m_B(\dot{T}_1^2 + \dot{T}_2^2 + \dot{T}_3^2) - m_B g T_3. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Mając lagranżian (6.6), równania ruchu ciała sztywnego uzyskujemy w sposób standardowy.

6.7. Równania Eulera-Newtona

Alternatywnym do lagranżowskiego jest opis ruchu ciała sztywnego za pomocą równań Eulera-Newtona. Załóżmy, że są dane układy przestrzeni i ciała, i że układ ciała został umieszczony w jego środku ciężkości. Ruch ciała jest opisany za pomocą macierzy obrotu R i wektora położenia T. Niech I_B oznacza macierz bezwładności ciała względem układu ciała a v_B i ω_B prędkość liniową i kątową w ciele. W układzie ciała wyliczamy pęd i moment pędu

$$\begin{aligned} p_B &= m_B v_B, \\ M_B &= I_B \omega_B, \end{aligned}$$

i przedstawiamy je w układzie przestrzeni

$$\begin{aligned} p_S &= R p_B = m_B R v_B, \\ M_S &= R M_B = R I_B \omega_B. \end{aligned}$$

Jeżeli na ciało nie działają siły zewnętrzne, w układzie przestrzeni obowiązuje Zasada Zachowania Pędu i Zasada Zachowania Momentu Pędu, tzn.

$$\begin{aligned} \dot{p}_S &= m_B \dot{R} v_B + m_B R \dot{v}_B = 0, \\ \dot{M}_S &= \dot{R} I_B \omega_B + R I_B \dot{\omega}_B = 0. \end{aligned}$$

Stosujemy podstawienie $\dot{R} = R\Omega_B = R[\omega_B]$, które daje

$$\begin{aligned} m_B R \Omega_B v_B + m_B R \dot{v}_B &= R(m_B \omega_B \times v_B + m_B \dot{v}_B) = 0 \\ R \Omega_B I_B \omega_B + R I_B \dot{\omega}_B &= R(\omega_B \times (I_B \omega_B) + I_B \dot{\omega}_B) = 0. \end{aligned}$$

Po lewostronnym pomnożeniu obu równań przez macierz R^T otrzymujemy równania Eulera-Newtona

$$\begin{cases} \dot{v}_B = v_B \times \omega_B \\ I_B \dot{\omega}_B = (I_B \omega_B) \times \omega_B \end{cases} . \tag{6.7}$$

Jeżeli w układzie ciała działają siły F_B lub momenty sił τ_B, należy je dodać do prawej strony równań (6.7). Po rozwiązaniu równań Eulera-Newtona ze względu na prędkości v_B i ω_B, z równania $\dot{R} = R[\omega_B]$ wyznaczamy macierz orientacji ciała R. Następnie wyliczamy prędkość w przestrzeni $v_S = R v_B$. W końcu położenie ciała sztywnego znajdziemy z równania $\dot{T} = v_S$.

6.8. Przykłady

Jako ilustrację równań Eulera-Newtona przedstawimy tzw. równania Eulera ruchu obrotowego ciała sztywnego. Zakładamy, ze macierz momentów bezwładności ciała jest diagonalna

$$I = \mathrm{diag}\{I_1, I_2, I_3\}.$$

Z drugiego z równań (6.7) wynika, że

$$I\dot{\omega} = (I\omega) \times \omega.$$

Biorąc pod uwagę postać macierzy bezwładności otrzymujemy równania Eulera dla prędkości kątowej $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = \frac{I_2 - I_3}{I_1}\omega_2\omega_3 \\ \dot{\omega}_2 = \frac{I_3 - I_1}{I_2}\omega_1\omega_3 \\ \dot{\omega}_3 = \frac{I_1 - I_2}{I_3}\omega_1\omega_2 \end{cases}.$$

6.9. Zadania

Zadanie 6.1 Zdefiniować mnożenie, element neutralny i element odwrotny w specjalnej grupie ortogonalnej $SO(3)$ i specjalnej grupie euklidesowej $SE(3)$.

Zadanie 6.2 Wyprowadzić wzory na macierze obrotów elementarnych wokół osi Y i Z.

Zadanie 6.3 Korzystając z tego, że $\Omega v = [\omega]v = \omega \times v$ pokazać, że

$$R[\omega]R^T = [R\omega].$$

Zadanie 6.4 Niech będzie dana macierz pseudoinercji J_B opisana wzorem (6.4). Zakładając, że r_B oznacza położenie środka ciężkości ciała w układzie ciała, a wektor $T \in \mathbb{R}^3$ i macierz $R \in SO(3)$ opisują położenie i orientację układu ciała względem układu przestrzeni pokazać, że macierz pseudoinercji w układzie przestrzeni można wyrazić uogólnionym wzorem Steinera

$$J_S = RJ_BR^T + m_B(Rr_BT^T + Tr_B^TR^T) + m_B\|T\|^2.$$

Zadanie 6.5 Wyprowadzić formułę (6.5).

Zadanie 6.6 Napisać równania Eulera-Lagrange'a ruchu ciała sztywnego odpowiadające lagranżianowi (6.6).

Zadanie 6.7 Pokazać, że przy $I_1 = I_2$ norma $||\omega||$ prędkości kątowej spełniającej równania Eulera jest stała. Rozwiązać równania i wyznaczyć w tym przypadku $\omega_1(t)$ i $\omega_2(t)$.

6.10. Komentarze i odniesienia literaturowe

Dodatkowe informacje na temat ruchu ciała sztywnego można znaleźć w rozdziale 6 książki [Arn81]. Tam też wyprowadzono równania Eulera-Newtona dotyczące orientacji. Ruch obrotowy ciała sztywnego jest przedmiotem rozdziału 10, t. I książki [Tay12]. Zastosowanie metod mechaniki lagranżowskiej do modelowania dynamiki robotów opisano w [TMD+00] i w notatkach do wykładu [TM18].

Literatura

[Arn81] W. I. Arnold, *Metody matematyczne mechaniki klasycznej.* PWN, Warszawa, 1981.

[Tay12] J. R. Taylor, *Mechanika klasyczna: t. I, II.* PWN, Warszawa, 2012.

[TM18] K. Tchoń, R. Muszyński, *Robotyka.* Politechnika Wrocławska, projekt AZON, 2018.

[TMD+00] K. Tchoń, A. Mazur, I. Dulęba, R. Hossa, R. Muszyński, *Manipulatory i roboty mobilne: modele, planowanie ruchu, sterowanie.* Akademicka Oficyna Wydawnicza PLJ, Warszawa, 2000. (Politechnika Wrocławska, projekt AZON, 2018).

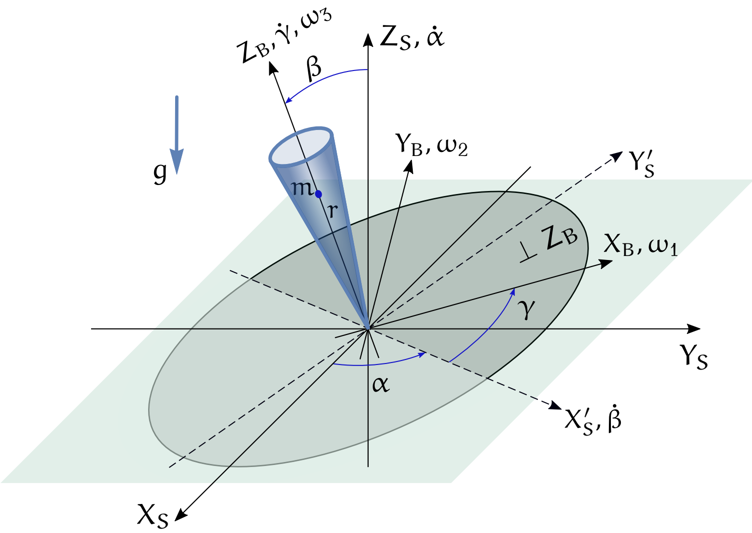
Rozdział 7

Bąk Lagrange'a

Bąk Lagrange'a jest ciałem sztywnym w kształcie stożka przedstawionym na Rysunku 7.1. Zakładamy, że bąk wiruje na poziomej płaszczyźnie wokół swojej osi w taki sposób, że położenie jego punktu kontaktu z podłożem nie zmienia się. Naszym zadaniem jest wyprowadzenie równań ruchu bąka metodami mechaniki lagranżowskiej i hamiltonowskiej, a następnie przeprowadzenie analizy tego ruchu. W tym celu definiujemy układ przestrzeni (X_S, Y_S, Z_S) i układ (X_B, Y_B, Z_B) związany z bąkiem, w sposób przedstawiony na Rysunku. Zakładamy, że masa bąka wynosi m, a jego momenty bezwładności względem osi układu bąka są I_1, I_2 i I_3. Z uwagi na symetrię bąka, momenty względem osi X_B i Y_B są jednakowe, $I_1 = I_2$. Środek ciężkości bąka znajduje się na osi Z_B, w odległości r od początku układu. Zauważmy, że układ ciała nie został umieszczony w środku ciężkości bąka, ale w nieruchomym punkcie kontaktu bąka z podłożem. Dzięki takiemu wyborowi położenie bąka jest opisane wektorem $T = 0$.

Do opisu orientacji bąka wygodnie jest użyć kątów (α, β, γ) przedstawionych na Rysunku. Kąty te określają ciąg obrotów elementarnych, jakie należy wykonać, żeby układ przestrzeni pokrył się z układem ciała: zaczynamy od obrotu wokół osi Z_S, tak aby oś X_S stała się prostopadła do płaszczyzny Z_S, Z_B, następnie wykonujemy obrót wokół chwilowej osi X'_S, w wyniku którego oś Z_S pokryje się z osią Z_B i kończymy obrotem wokół osi $Z_S = Z_B$, po którym oś X'_S pokryje się z osią X_B. Współrzędne orientacji definiują wektor $q = (\alpha, \beta, \gamma)^T$ współrzędnych uogólnionych bąka Lagrange'a. W terminach kątów Eulera (φ, θ, ψ) obrotu wokół osi ZYZ, których używaliśmy do opisu orientacji ciała sztywnego w poprzednim Rozdziale, otrzymujemy

$$\begin{cases} \varphi = \alpha - \pi/2 \\ \theta = \beta \\ \psi = \gamma + \pi/2 \end{cases} .$$



Rysunek 7.1: Bąk Lagrange'a

7.1. Równania Eulera-Lagrange'a

W poprzednim rozdziale otrzymaliśmy formułę dla lagranżianu ciała sztywnego z diagonalną macierzą bezwładności, którego orientacja jest wyrażona za pomocą kątów Eulera ZYZ. Zauważmy, że co prawda w naszym przypadku układ ciała nie leży w jego środku ciężkości, niemniej jednak drugi składnik we wzorze (6.5)

$$L = \frac{1}{2}\omega_B^T I_B \omega_B + m\dot{T}^T R(\omega_B \times r_B) + \frac{1}{2}m_B\|\dot{T}\|^2 + m_B(\mathbf{g}, Rr_B + T)$$

znika z względu na stałość wektora $T = 0$, co pociąga za sobą $\dot{T} = 0$. Znika także składnik trzeci. Biorąc to pod uwagę możemy skorzystać z formuły (6.6) z dodaną energią potencjalną według (6.5)

$$\begin{aligned} L = \frac{1}{2}(I_{B1}\sin^2\theta\cos^2\psi + I_{B2}\sin^2\theta\sin^2\psi + I_{B3}\cos^2\theta)\dot\varphi^2 + \\ + \frac{1}{2}(I_{B1}\sin^2\psi + I_{B2}\cos^2\psi)\dot\theta^2 + \frac{1}{2}I_{B3}\dot\psi^2 + \\ -(I_{B1} - I_{B2})\sin\theta\sin\psi\cos\psi\dot\varphi\dot\theta + \\ + I_{B3}\cos\theta\dot\varphi\dot\psi + m_B(\mathbf{g}, Rr_B). \end{aligned}$$

Występująca w ostatnim składniku sumy macierz R jest macierzą kątów Eulera $E(\varphi, \theta, \psi)$ opisaną w podrozdziale 6.3. Ponieważ $r_B = (0, 0, r)^T$, $m_B = m$, a także $\mathbf{g} = (0, 0, -g)^T$, wyliczamy

$$m_B(\mathbf{g}, Rr_B) = -mgr\cos\theta.$$

Wykorzystując równość momentów bezwładności $I_1 = I_2$ otrzymujemy

$$L = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 - mgr \cos \theta.$$

Po wstawieniu kątów α, β, γ lagranżian bąka Lagrange'a przyjmie postać

$$L = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}^2 \sin^2 \beta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \cos \beta)^2 - mgr \cos \beta.$$

Wyznaczymy teraz równania Eulera-Lagrange'a przy założeniu, że nie działają siły niepotencjalne

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

Wyliczamy

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} &= I_1 \dot{\alpha} \sin^2 \beta + I_3 (\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \cos \beta) \cos \beta, \\
\tfrac{\partial L}{\partial \alpha} &= 0, \\
\tfrac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} &= I_1 \dot{\beta}, \\
\tfrac{\partial L}{\partial \beta} &= I_1 \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta - I_3 (\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \cos \beta) \dot{\alpha} \sin \beta + mgr \sin \beta, \\
\tfrac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}} &= I_3 (\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \cos \beta), \\
\tfrac{\partial L}{\partial \gamma} &= 0.
\end{aligned}$$

Korzystając z tych wyliczeń uzyskujemy następujące równania ruchu bąka

$$\begin{cases} (I_1 \sin^2 \beta + I_3 \cos^2 \beta) \dot{\alpha} + I_3 \dot{\gamma} \cos \beta = \text{const} \\ I_1 \ddot{\beta} + (I_3 - I_1) \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta + I_3 \dot{\alpha} \dot{\gamma} \sin \beta - mgr \sin \beta = 0 \\ I_3 (\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \cos \beta) = \text{const} \end{cases}. \tag{7.1}$$

7.2. Równania kanoniczne Hamiltona

W celu wyznaczenia hamiltonianu obliczymy najpierw macierz bezwładności, która definiuje energię kinetyczną bąka

$$Q(q) = \begin{bmatrix} I_1 \sin^2 \beta + I_3 \cos^2 \beta & 0 & I_3 \cos \beta \\ 0 & I_1 & 0 \\ I_3 \cos \beta & 0 & I_3 \end{bmatrix}.$$

Macierz odwrotna

$$Q^{-1}(q) = \frac{1}{I_1^2 I_3 \sin^2 \beta} \begin{bmatrix} I_1 I_3 & 0 & -I_1 I_3 \cos \beta \\ 0 & I_1 I_3 \sin^2 \beta & 0 \\ -I_1 I_3 \cos \beta & 0 & I_1 (I_1 \sin^2 \beta + I_3 \cos^2 \beta) \end{bmatrix}.$$

Niech $p = (p_1, p_2.p_3)^T$ oznacza wektor pędów. Hamiltonian

$$H(q,p) = \frac{1}{2}p^T Q^{-1}(q)p + V(q),$$

zatem dla bąka Lagrange'a

$$H(q,p) = \frac{1}{2}\frac{p_1^2}{I_1 \sin^2\beta} + \frac{1}{2}\frac{p_2^2}{I_1} + \frac{1}{2}p_3^2\frac{I_1\sin^2\beta + I_3\cos^2\beta}{I_1 I_3 \sin^2\beta} + \\ - \frac{p_1 p_3 \cos\beta}{I_1\sin^2\beta} + mgr\cos\beta.$$

Równania kanoniczne Hamiltona związane z tym hamiltonianem są następujące

$$\begin{cases} \dot\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1 - p_3\cos\beta}{I_1\sin^2\beta} \\ \dot\beta = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2}{I_1} \\ \dot\gamma = \frac{\partial H}{\partial p_3} = \frac{p_3(I_1\sin^2\beta + I_3\cos^2\beta) - p_1 I_3\cos\beta}{I_1 I_3 \sin^2\beta} \\ \dot p_1 = -\frac{\partial H}{\partial\alpha} = 0 \\ \dot p_2 = -\frac{\partial H}{\partial\beta} = -\frac{p_1^2\cos\beta + p_3^2\cos\beta + p_1p_3(1+\cos^2\beta)}{I_1\sin^3\beta} + mgr\sin\beta \\ \dot p_3 = -\frac{\partial H}{\partial\gamma} = 0 \end{cases}. \tag{7.2}$$

7.3. Niezmienniki i kwadratury

Jak wiadomo, hamiltonian jest zawsze niezmiennikiem równań kanonicznych Hamiltona; dodatkowo z czwartego i szóstego równania w (7.2) wynika, że pędy p_1 i p_3 są także niezmiennikami. Liczba niezmienników jest taka, jak wymaga Twierdzenie Liouville'a o niezmiennikach. Pozostaje zbadać ich niezależność i sprawdzić warunek inwolucji. W tym celu najpierw obliczymy macierz

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial\alpha} & \frac{\partial H}{\partial\beta} & \frac{\partial H}{\partial\gamma} & \frac{\partial H}{\partial p_1} & \frac{\partial H}{\partial p_2} & \frac{\partial H}{\partial p_3} \\ \frac{\partial p_1}{\partial\alpha} & \frac{\partial p_1}{\partial\beta} & \frac{\partial p_1}{\partial\gamma} & \frac{\partial p_1}{\partial p_1} & \frac{\partial p_1}{\partial p_2} & \frac{\partial p_1}{\partial p_3} \\ \frac{\partial p_3}{\partial\alpha} & \frac{\partial p_3}{\partial\beta} & \frac{\partial p_3}{\partial\gamma} & \frac{\partial p_3}{\partial p_1} & \frac{\partial p_3}{\partial p_2} & \frac{\partial p_3}{\partial p_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot p_2 = -I_1\ddot\beta & 0 & \dot\alpha & \dot\beta & \dot\gamma \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Łatwo zauważyć, że niezmienniki są niezależne, pod warunkiem że prędkość zmiany lub przyspieszenie kąta β są różne od zera. Wyliczymy teraz nawiasy Poissona niezmienników:

$$\{H, p_1\} = \left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)^T \frac{\partial p_1}{\partial p} - \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^T \frac{\partial p_1}{\partial q} = -\frac{\partial H}{\partial\alpha} = 0,$$
$$\{H, p_3\} = \left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)^T \frac{\partial p_3}{\partial p} - \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^T \frac{\partial p_3}{\partial q} = -\frac{\partial H}{\partial\gamma} = 0,$$
$$\{p_1, p_3\} = \left(\frac{\partial p_1}{\partial q}\right)^T \frac{\partial p_3}{\partial p} - \left(\frac{\partial p_1}{\partial p}\right)^T \frac{\partial p_3}{\partial q} = 0.$$

Pokazaliśmy, że niezmienniki są niezależne i w inwolucji, a zatem równania (7.2) można rozwiązać przez kwadratury.

7.4. Ruch bąka Lagrange'a

Korzystając z niezmienników przeanalizujemy teraz ruch bąka Lagrange'a. Ponieważ podczas ruchu zmienia się tylko orientacja bąka, jego ruch składa się z trzech obrotów nazywanych, odpowiednio, precesją (kąt α), nutacją (kąt β) i wirowaniem (kąt γ). Jako punkt wyjścia przyjmiemy hamiltonian

$$H(q,p) = \frac{1}{2}\frac{p_1^2}{I_1 \sin^2\beta} + \frac{1}{2}\frac{p_2^2}{I_1} + \frac{1}{2}p_3^2 \frac{I_1 \sin^2\beta + I_3 \cos^2\beta}{I_1 I_3 \sin^2\beta} + \\ - \frac{p_1 p_3 \cos\beta}{I_1 \sin^2\beta} + mgr\cos\beta.$$

Oczywiście, hamiltonian ten jest dobrze określony dla kątów $\beta \neq 0, \pi$. Składnik numer 3 przedstawiamy jako sumę dwóch składników

$$\frac{1}{2}\frac{p_3^2}{I_3} + \frac{1}{2}\frac{p_3^2 \cos^2\beta}{I_1 \sin^2\beta}.$$

Korzystając teraz z tego, że H, p_1 i p_3 są niezmiennikami, możemy hamiltonian przepisać w następujący sposób

$$E = H - \frac{1}{2}\frac{p_3^2}{I_3} = \frac{1}{2}\frac{(p_1 - p_3\cos\beta)^2}{I_1 \sin^2\beta} + \frac{1}{2}I_1\dot{\beta}^2 + mgr\cos\beta = \text{const}.$$

Zauważmy, że w powyższej formule występują tylko dwie zmienne, β i $\dot{\beta}$. Zastosujmy podstawienie $u = \cos\beta$, takie że $\dot{u} = -\sin\beta\,\dot{\beta}$, a zatem

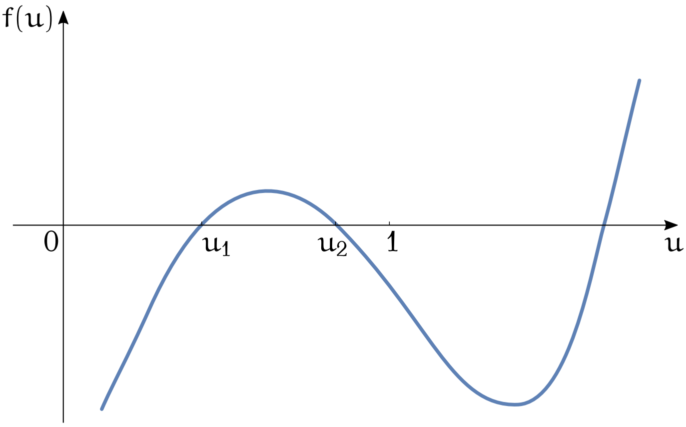
$$\dot{u}^2 = \sin^2\beta\,\dot{\beta}^2 = (1-u^2)\dot{\beta}^2.$$

Z drugiej strony mamy

$$\dot{\beta}^2 = \frac{2E}{I_1} - \frac{(p_1 - p_3 u)^2}{I_1^2(1-u^2)} - \frac{2mgru}{I_1}.$$

Ostatnie dwa równania prowadzą do równania różniczkowego dla zmiennej u,

$$\dot{u}^2 = (1-u^2)\frac{2(E - mgru)}{I_1} - \frac{(p_1 - p_3 u)^2}{I_1^2} = \\ = (a - bu)(1-u^2) - (c - du)^2 = f(u), \quad (7.3)$$



Rysunek 7.2: Funkcja $f(u)$

gdzie

$$a = \frac{2E}{I_1}, \quad b = \frac{2mgr}{I_1}, \quad c = \frac{p_1}{I_1}, \quad d = \frac{p_3}{I_1}.$$

Pierwsze i trzecie równanie z (7.2) pozwalają na wyrażenie za pomocą zmiennej u prędkości kątowych bąka Lagrange'a,

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = \frac{c-du}{1-u^2} \\ \dot{\gamma} = \frac{(d-e)u^2-cu+e}{1-u^2} \end{cases},$$

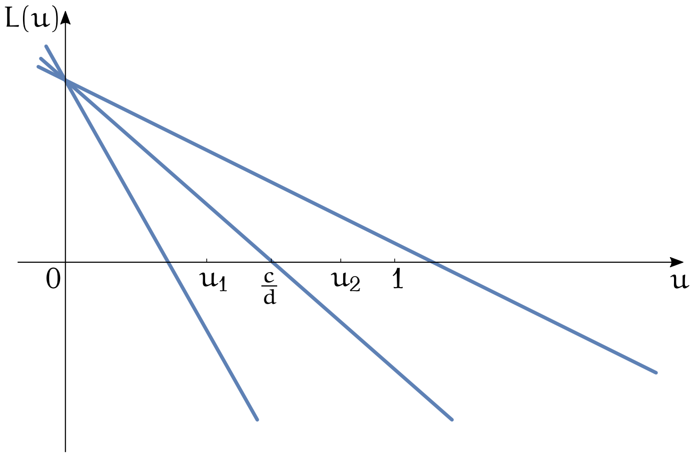
przy oznaczeniu $e = \frac{p_3}{I_3}$.

Zdefiniowana w równaniu (7.3) funkcja $f(u)$ jest wielomianem stopnia 3; załóżmy, że jej wykres wygląda tak, jak na Rysunku 7.2. Ponieważ $\dot{u}^2 \geqslant 0$, interesuje nas przebieg $f(u)$ między punktami u_1 i u_2. Jeżeli $u_i = \cos\beta_i$, $i = 1, 2$, oznacza to, że $\beta_2 \leqslant \beta \leqslant \beta_1$. Nachylenie osi Z_B bąka może się zmieniać wyłącznie w tym zakresie.

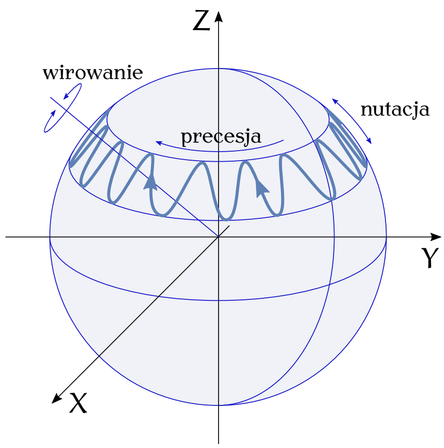
Pokazaliśmy, że prędkość zmiany kąta α wynosi

$$\dot{\alpha} = \frac{c - du}{1 - u^2} = \frac{L(u)}{1 - u^2}.$$

Mianownik tego wyrażenia jest zawsze dodatni, zatem kierunek zmian kąta α zależy od licznika $L(u)$. Możliwe położenia prostej $L(u)$ pokazuje Rysunek 7.3. W przypadku, gdy w przedziale $[u_1, u_2]$ zachodzi $L < 0$, prędkość zmiany α jest ujemna i oś Z_B bąka obraca się w lewo. Jeżeli w tym przedziale $L > 0$, oś bąka obraca się w prawo. Gdy w przedziale $[u_1, u_2]$ wyrażenie L zmienia znak, oś bąka zmienia kierunek obrotu. Sytuacje te przedstawiają Rysunki 7.4, 7.5 i 7.6.



Rysunek 7.3: Funkcja $L(u)$

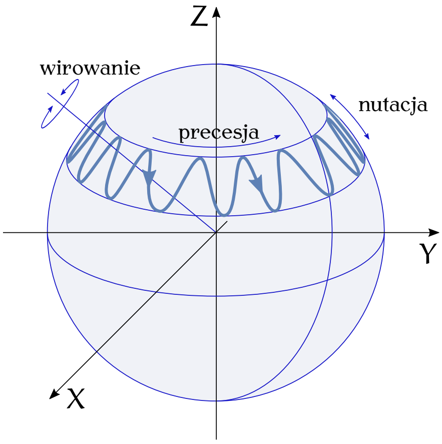


Rysunek 7.4: $L(u) < 0$

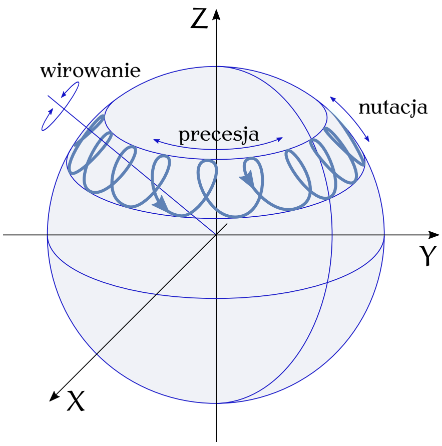
Prędkość zmiany kąta γ wyraziliśmy jako

$$\dot{\gamma} = \frac{(d-e)u^2 - cu + e}{1-u^2} = \frac{\bar{L}(u)}{1-u^2}.$$

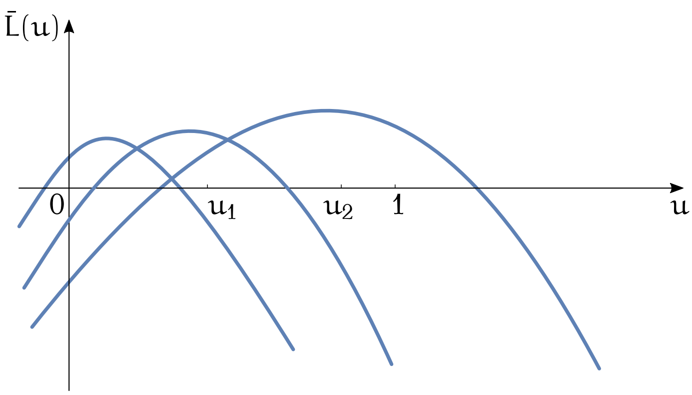
Licznik $\bar{L}(u)$ tego wyrażenia jest kwadratową funkcją zmiennej u, której możliwe przebiegi przy $I_1 > I_3$ i $p_3 > 0$ przedstawia Rysunek 7.7. Widzimy, ze podobnie jak w przypadku kąta α, w przedziale $[u_1, u_2]$ wyrażenie $\bar{L}$ może być ujemne, dodatnie lub zmieniać znak. Stosownie do tego bąk wiruje wokół osi Z_B w lewo, w prawo lub zmienia kierunek wirowania.



Rysunek 7.5: $L(u) > 0$



Rysunek 7.6: $L(u)$ zmienia znak



Rysunek 7.7: Funkcja $\bar{L}(u)$

7.5. Zadania

Zadanie 7.1 Zakładając, że układ ciała został umieszczony w środku ciężkości bąka Lagrange'a napisać równania Eulera-Newtona ruchu obrotowego bąka.

7.6. Komentarze i odniesienia literaturowe

Materiał na temat bąka Lagrange'a przedstawiony w tym Rozdziale bazuje na rozdziale 6 książki [Arn81]. Rozliczne aspekty ruchu bąka są analizowane w rozdziale IV, par. 8 książki [RK95]. Określenie „nutacja" pochodzi od łacińskiego słowa *nutare*, które oznacza chwiać się. Termin „precesja" wywodzi się z łacińskiego *precedere*, czyli iść przed, poprzedzać.

Literatura

[Arn81] W. I. Arnold, *Metody matematyczne mechaniki klasycznej*. PWN, Warszawa, 1981.

[RK95] W. Rubinowicz, W. Królikowski, *Mechanika teoretyczna*. PWN, Warszawa, 1995.

Rozdział 8

Układy z więzami

Do tej pory przyjmowaliśmy założenie, że ruch układów, dla których wyprowadzaliśmy równania ruchu nie podlega żadnym ograniczeniom, a współrzędne i prędkości uogólnione mogły przyjmować dowolne wartości z przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Jednak ruch wielu układów podlega ograniczeniom (więzom) i naszym zadaniem w tym rozdziale będzie uzyskanie równań ruchu takich układów. Jako punkt wyjścia przyjmiemy formalizm lagranżowski. Niech zatem będzie dany układ opisany współrzędnymi $q \in \mathbb{R}^n$ i prędkościami $\dot{q} \in \mathbb{R}^n$, z lagranżianem $L(q, \dot{q})$. Będziemy rozważać dwa rodzaje więzów nałożonych na ruch układu: więzy konfiguracyjne i więzy fazowe.

8.1. Więzy konfiguracyjne

Więzy konfiguracyjne dotyczą współrzędnych układu. Przyjmujemy, że mają one postać układu niezależnych równań

$$F(q) = (F_1(q), F_2(q), \ldots, F_l(q)) = 0, \tag{8.1}$$

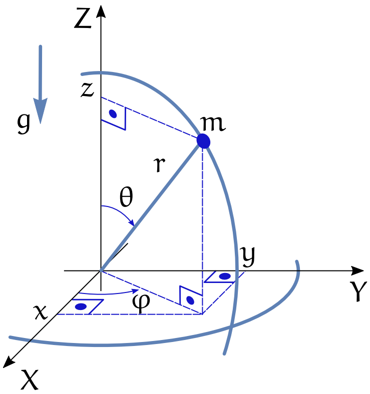
gdzie liczba równań $l \leqslant n$. Funkcje $F_i(q)$ mają ciągłe pochodne cząstkowe do odpowiedniego rzędu, a ich niezależność oznacza, że

$$\operatorname{rank} DF(q) = l.$$

Nałożenie więzów konfiguracyjnych powoduje, że układ porusza się w obrębie rozmaitości konfiguracyjnej

$$M_F = \{q \in \mathbb{R}^n | \, F(q) = 0\}$$

zawartej w $\mathbb{R}^n$. Wymiar rozmaitości M_F wynosi $m = n - l$. W celu otrzymania równań ruchu układu na rozmaitości wprowadzamy na rozmaitości współrzędne $\tilde{q} \in \mathbb{R}^m$, wyrażamy lagranżian w nowych współrzędnych i piszemy odpowiednie równania Eulera-Lagrange'a. Należy pamiętać, że współrzędne na rozmaitości mają zwykle charakter lokalny (rozmaitość



Rysunek 8.1: Więzy konfiguracyjne

M_F ma topologię inną niż przestrzeń linowa $\mathbb{R}^m$), dlatego otrzymane równania ruchu będą obowiązywać na tej części rozmaitości, na której wprowadzono współrzędne. Przykładem współrzędnych na rozmaitości $SO(3)$ są kąty Eulera wykorzystywane w rozdziale dotyczącym ciała sztywnego. Dla ilustracji sposobu uwzględnienia w równaniach ruchu więzów konfiguracyjnych rozważymy następujący przykład.

8.1.1. Wahadło sferyczne

Będziemy badać ruch punktu materialnego o masie m w przestrzeni $\mathbb{R}^3$, zob. Rysunek 8.1. Niech $q = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ oznacza położenie punktu, a $\dot{q} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})^T$ jego prędkość. Energia kinetyczna ruchu punktu $K = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$, a jego energia potencjalna $V = mgz$, zatem lagranżian jest równy

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - mgz.$$

Załóżmy teraz, że na położenia punktu zostało nałożone ograniczenie

$$F(q) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0,$$

które oznacza, że masa m porusza się po sferze o promieniu r i stanowi wahadło sferyczne. Rozmaitość konfiguracyjna

$$M_F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0 \right\}$$

jest sferą o promieniu r. Wymiar rozmaitości $m = 2$. Niezależność ograniczenia oznacza, że w punktach $q \in M_F$ wektor $DF(q) = 2(x, y, z)^T \neq 0$.

Zgodnie z przedstawionym wyżej sposobem postępowania definiujemy współrzędne sferyczne $\tilde{q} = (\theta, \varphi)$, takie że

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}.$$

Obliczamy prędkości

$$\begin{cases} \dot{x} = r\dot{\theta}\cos\theta\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi \\ \dot{y} = r\dot{\theta}\cos\theta\sin\varphi + r\dot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi \\ \dot{z} = -r\dot{\theta}\sin\theta \end{cases}$$

i wyrażamy lagranżian za pomocą współrzędnych $\tilde{q}$ i prędkości $\dot{\tilde{q}}$

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}\left(mr^2\dot{\theta}^2 + mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right) - mgr\cos\theta.$$

Wyliczamy pochodne

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \\ &\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\theta} = mr^2\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 + mgr\sin\theta, \\ &\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{\varphi}} = mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi}, \\ &\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\varphi} = 0 \end{aligned}$$

i otrzymujemy równania Eulera-Lagrange'a ruchu wahadła sferycznego

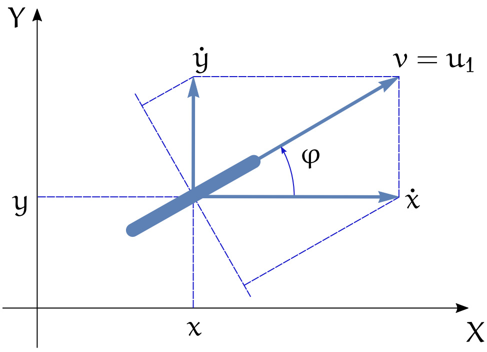
$$\begin{cases} mr^2\ddot{\theta} - mr^2\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 - mgr\sin\theta = 0 \\ mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi} = \text{const} \end{cases}.$$

8.2. Więzy fazowe

Drugi rodzaj ograniczeń, jakim podlega ruch układu dotyczy jednocześnie współrzędnych i prędkości. Takie ograniczenia nazywamy więzami fazowymi. Będziemy rozważać więzy fazowe w postaci Pfaffa, tzn. liniowe ze względu na prędkość,

$$A(q)\dot{q} = 0, \tag{8.2}$$

gdzie $A(q)$ oznacza macierz wymiaru $l \times n$, $l \leqslant n$, która jest pełnego rzędu, $\operatorname{rank} A(q) = l$, zwaną macierzą Pfaffa. Formuła (8.2) oznacza, że



Rysunek 8.2: Koło toczące się bez poślizgu bocznego

przy zadanym położeniu q dopuszczalne prędkości układu należą do jądra macierzy $A(q)$, tzn. $\dot{q} \in \mathrm{Ker}A(q)$, które jest $m = n - l$-wymiarową podprzestrzenią liniową przestrzeni prędkości $\mathbb{R}^n$. Zakładając, że wektory (ściślej: pola wektorowe) $g_1(q), g_2(q), \ldots, g_m(q)$ rozpinają tę podprzestrzeń, $A(q)g_i(q) = 0$, więzy w postaci Pfaffa możemy przedstawić w postaci układu sterowania

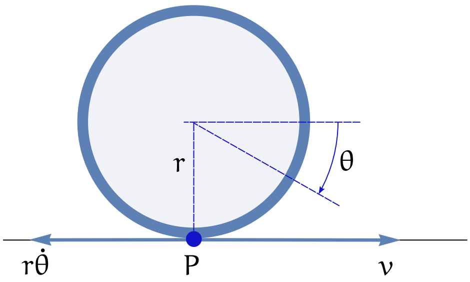
$$\dot{q} = G(q)u = \sum_{i=1}^{m} g_i(q)u_i. \tag{8.3}$$

Układ (8.3) będziemy nazywać układem sterowania stowarzyszonym z więzami fazowymi lub, po prostu, układem stowarzyszonym. Pomimo, że w każdym położeniu prędkości układu są ograniczone do pewnej podprzestrzeni, nie musi to ograniczać osiągalnych położeń układu. Pytanie, czy układ podlegający więzom (8.2) może osiągnąć każde położenie $q \in \mathbb{R}^n$ jest równoważne pytaniu o sterowalność układu sterowania (8.3).

Więzy fazowe w postaci Pfaffa pojawiają się przy analizie ruchu kołowych robotów mobilnych poruszających się bez poślizgu kół. Zapoznamy się teraz z kilkoma przykładami takich układów i wyprowadzimy dla nich więzy (8.2).

8.2.1. Koło, łyżwa, narta

Na Rysunku 8.2 został przedstawiony widok z góry koła toczącego się po płaszczyźnie XY. Ponieważ nie bierzemy pod uwagę kąta obrotu koła, Rysunek ten może również reprezentować widok z góry ślizgającej się łyżwy lub narty. Zakładamy, że koło porusza się bez poślizgu bocznego. Jako współrzędne uogólnione wybieramy położenie punktu kontaktu koła z podłożem i orientację koła, $q = (x, y, \varphi)^T$. Prędkość w punkcie kontaktu ma składowe $\dot{x}$ i $\dot{y}$. Warunek braku poślizgu bocznego oznacza, że



Rysunek 8.3: Koło toczące się

prędkość w kierunku poprzecznym do koła (wzdłuż osi koła) jest równa zero. Jak wynika z Rysunku, warunek ten można zapisać w postaci

$$\dot{x}\sin\varphi - \dot{y}\cos\varphi = 0$$

czyli

$$A(q)\dot{q} = 0,$$

z macierzą Pfaffa

$$A(q) = \begin{bmatrix}\sin\varphi & -\cos\varphi & 0\end{bmatrix}.$$

W rozważanym przykładzie $n = 3$ i $l = 1$, stąd jądro macierzy $A(q)$ jest dwuwymiarowe, $m = 2$. Jako generatory jądra można wybrać pola wektorowe $g_1(q) = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)^T$ i $g_2(q) = (0, 0, 1)^T$. Układ stowarzyszony (8.3) ma zatem postać

$$\begin{cases}\dot{x} = u_1\cos\varphi \\ \dot{y} = u_1\sin\varphi \\ \dot{\varphi} = u_2\end{cases}.$$

Sterowanie u_1 ma sens prędkości liniowej przemieszczania się koła, a sterowanie u_2 jest prędkością skręcania koła.

8.2.2. Koło toczące się

Załóżymy teraz, że koło toczy się po płaszczyźnie i oznaczymy przez θ jego kąt obrotu. Do widoku z góry z Rysunku 8.2 dodamy widok koła z boku, Rysunek 8.3, ukazujący punkt kontaktu koła z podłożem. Wektor współrzędnych będzie miał 4 składowe, $q = (x, y, \varphi, \theta)^T$. Toczenie się koła polega na ruchu bez poślizgu bocznego i bez poślizgu wzdłużnego. Warunek braku poślizgu bocznego jest taki sam, jak w poprzednim przykładzie

$$\dot{x}\sin\varphi - \dot{y}\cos\varphi = 0.$$

Poślizg wzdłużny koła pojawia się w dwóch przypadkach: jeżeli prędkość przemieszczania się koła jest mniejsza od prędkości toczenia się koła, mamy do czynienia z tzw. buksowaniem koła; w przypadku, gdy prędkość przemieszczania się jest większa od prędkości toczenia się, koło jest przyblokowane. Na Rysunku 8.3 pierwsza z wymienionych prędkości została oznaczona jako v, a druga jako $r\dot{\theta}$. Brak poślizgu wzdłużnego oznacza zatem równość

$$v = r\dot{\theta}.$$

Z Rysunku 8.2 wynika, że

$$\begin{cases} \dot{x} = v\cos\varphi \\ \dot{y} = v\sin\varphi \end{cases}.$$

Mnożąc stronami pierwszą równość przez $\cos\varphi$ a drugą przez $\sin\varphi$ i dodając stronami otrzymamy

$$v = \dot{x}\cos\varphi + \dot{y}\sin\varphi,$$

a zatem warunek braku poślizgu wzdłużnego przyjmuje postać

$$\dot{x}\cos\varphi + \dot{y}\sin\varphi - r\dot{\theta} = 0.$$

Stąd macierz Pfaffa dla koła toczącego się

$$A(q) = \begin{bmatrix} \sin\varphi & -\cos\varphi & 0 & 0 \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & -r \end{bmatrix}.$$

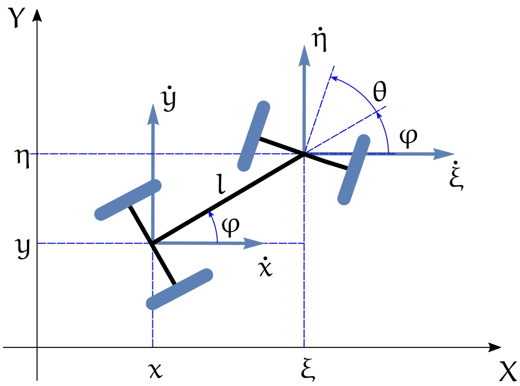
Mamy $n = 4$, $l = 2$, $m = 2$. Pola sterujące układu (8.3) można wybrać jako $g_1(q) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, 0, 1)^T$ i $g_2(q) = (0, 0, 1, 0)^T$. Układ stowarzyszony reprezentujący toczenie się koła ma postać

$$\begin{cases} \dot{x} = u_1 r\cos\varphi \\ \dot{y} = u_1 r\sin\varphi \\ \dot{\varphi} = u_2 \\ \dot{\theta} = u_1 \end{cases}.$$

Sterowania występujące w tym układzie mają sens prędkości kątowej toczenia się koła u_1 i prędkości skręcania koła u_2.

8.2.3. Samochód kinematyczny

Widok z góry samochodu kinematycznego przedstawia Rysunek 8.4. Przednie koła samochodu są skrętne; długość samochodu wynosi l.



Rysunek 8.4: Samochód kinematyczny

Wektor współrzędnych $q = (x, y, \varphi, \theta)^T$ zawiera położenie środka tylnej osi, orientację samochodu i kąt skręcenia osi przedniej (kierownicy), wektor prędkości $\dot{q} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{\varphi}, \dot{\theta})^T$. Zakładamy, że samochód porusza się bez poślizgu bocznego kół tylnych i przednich. Przy takim założeniu oba tylne koła, jak również oba przednie koła można utożsamić i traktować samochód kinematyczny jak dwukołowy rower. Jeżeli występuje poślizg boczny jest on taki sam zarówno w punktach kontaktu kół z podłożem, jak i w każdym innym punkcie na osi tylnej i przedniej; dlatego wystarczy wyeliminować poślizg środka każdej osi.

W przypadku osi tylnej, warunek braku poślizgu bocznego ma znaną postać

$$\dot{x} \sin \varphi - \dot{y} \cos \varphi = 0.$$

Oznaczając przez (ξ, η) współrzędne środka osi przedniej otrzymamy analogiczny warunek

$$\dot{\xi} \sin(\varphi + \theta) - \dot{\eta} \cos(\varphi + \theta) = 0.$$

Pozostaje tylko wyrazić pochodne współrzędnych ξ i η przez prędkości $\dot{q}$. Na podstawie Rysunku obliczamy

$$\begin{cases} \xi = x + l \cos \varphi \\ \eta = y + l \sin \varphi \end{cases},$$

a zatem

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \dot{x} - l\dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{\eta} = \dot{y} + l\dot{\varphi} \cos \varphi \end{cases}.$$

Podstawienie do warunku braku poślizgu bocznego daje

$$\dot{x} \sin(\varphi + \theta) - \dot{y} \cos(\varphi + \theta) - l\dot{\varphi} \cos \theta = 0.$$

Macierz więzów Pfaffa dla samochodu kinematycznego ma postać

$$A(q) = \begin{bmatrix} \sin\varphi & -\cos\varphi & 0 & 0 \\ \sin(\varphi+\theta) & -\cos(\varphi+\theta) & -l\cos\theta & 0 \end{bmatrix}.$$

Nietrudno sprawdzić, że generatory jądra macierzy $A(q)$ można wybrać w postaci $g_1(q) = (l\cos\varphi\cos\theta, l\sin\varphi\cos\theta, \sin\theta, 0)^T$, $g_2(q) = (0, 0, 0, 1)^T$. Definiują one następujący stowarzyszony układ sterowania reprezentujący ruch samochodu kinematycznego bez poślizgu bocznego

$$\begin{cases} \dot{x} = u_1 l\cos\varphi\cos\theta \\ \dot{y} = u_1 l\sin\varphi\cos\theta \\ \dot{\varphi} = u_1\sin\theta \\ \dot{\theta} = u_2 \end{cases}.$$

Występujące w powyższym układzie sterowania u_1, u_2 mają jasną interpretację fizyczną. Sterowanie u_1 jest skalowaną przez l prędkością postępową środka przedniej osi samochodu, co można utożsamić z założeniem, że samochód ma napęd na przednie koła*. Sterowanie u_2 jest prędkością skręcania kierownicy.

8.3. Więzy dla ruchu ciała sztywnego

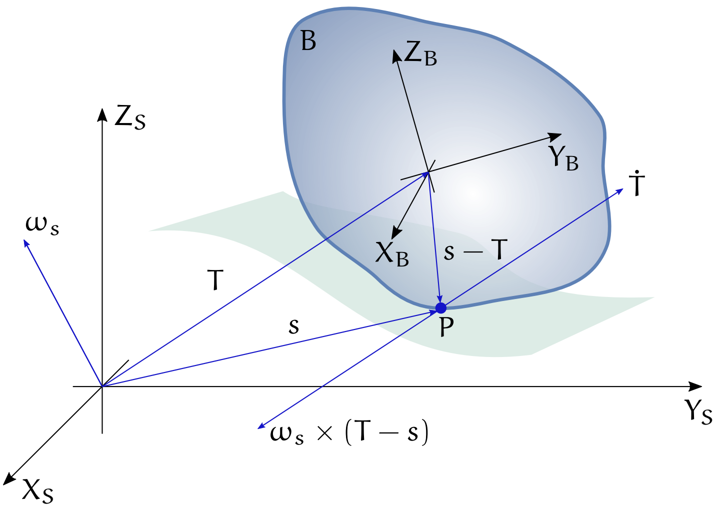
W rozważanych dotąd przykładach więzy fazowe uzyskaliśmy w sposób intuicyjny i bezpośredni. Więzy te były szczególnym przypadkiem więzów fazowych ruchu ciała sztywnego, które wyprowadzimy w tym rozdziale. Załóżmy, że ciało sztywne B porusza się względem nieruchomego układu przestrzeni (X_S, Y_S, Z_S). Niech (X_B, Y_B, Z_B) oznacza układ ciała, zob. Rysunek 8.5. Załóżmy, że orientacja ciała jest opisana przez macierz obrotu $R \in SO(3)$, a położenie przez wektor $T \in \mathbb{R}^3$. Przyjmijmy, że $p \in \mathbb{R}^3$ oznacza położenie punktu P kontaktu ciała z podłożem w układzie ciała. Na podstawie analizy przeprowadzonej w rozdziale 6, współrzędne s punktu kontaktu w układzie przestrzeni wyrażają się wzorem

$$s = Rp + T.$$

Więzy fazowe ruchu ciała wywodzą się z żądania, by prędkość punktu kontaktu względem układu przestrzeni wynosiła zero. Oznacza to, że

$$\dot{s} = \dot{R}p + \dot{T} = 0.$$

*Wybierając alternatywnie wektor $g_1(q)$ w postaci $g_1(q) = \left(\cos\varphi, \sin\varphi, \frac{\sin\theta}{l\cos\theta}, 0\right)^T$ otrzymamy model ruchu samochodu kinematycznego, w którym u_1 będzie miało interpretację prędkości postępowej środka tylnej osi samochodu (samochód z tylnym napędem).



Rysunek 8.5: Więzy fazowe

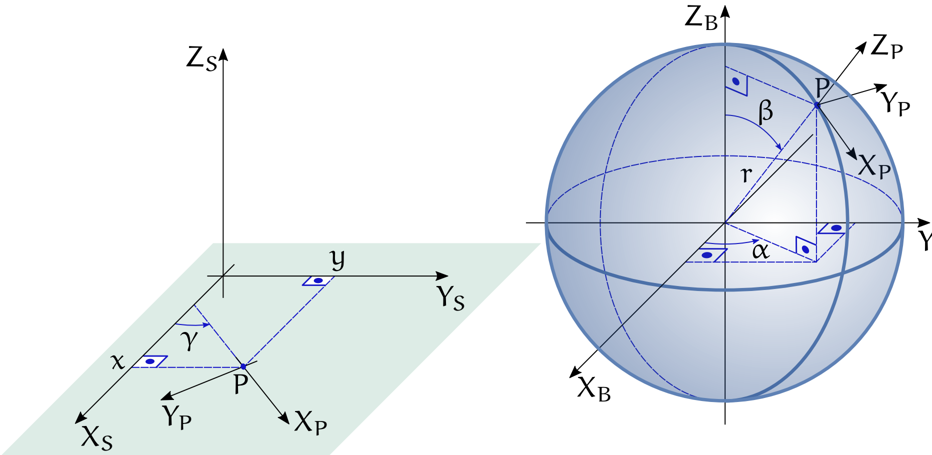
Wykorzystując definicję macierzowej i wektorowej prędkości kątowej w przestrzeni, $\dot{R} = \Omega_S R = [\omega_s]R$, biorąc pod uwagę, że $\Omega_S Rp = \omega_S \times Rp$, a następnie podstawiając $Rp = s - T$ otrzymujemy ogólną formułę na więzy fazowe przy ruchu ciała sztywnego

$$\omega_S \times (s - T) + \dot{T} = 0. \tag{8.4}$$

W formule tej ω_S oznacza prędkość kątową w układzie przestrzeni, a s, T oznaczają współrzędne punktu kontaktu i początku układu ciała względem układu przestrzeni.

8.3.1. Kula tocząca się

Dla ilustracji przydatności wzoru (8.4) wyznaczymy więzy fazowe dla kuli toczącej się po płaszczyźnie, przedstawionej na Rysunku 8.6. Przyjmiemy, że jest dany układ przestrzeni (X_S, Y_S, Z_S), układ ciała (X_B, Y_B, Z_B) związany z kulą i dodatkowo układ (X_P, Y_P, Z_P) umieszczony w punkcie kontaktu kuli z podłożem. Niech kula ma promień r. Do opisu ruchu kuli zastosujemy współrzędne $q = (x, y, \alpha, \beta, \gamma)^T$, które oznaczają odpowiednio położenie (x, y) (współrzędne kartezjańskie) punktu kontaktu kuli z podłożem w układzie przestrzeni, położenie (α, β) (współrzędne sferyczne) punktu kontaktu w układzie ciała i orientację kuli rozumianą jako kąt między osią X_P a osią X_S, zob. Rysunek. Intuicyjnie, przez toczenie się kuli rozumiemy ruch bez poślizgu wzdłuż południka i równoleżnika, i bez wirowania kuli w miejscu, tzn. wirowania niezwiązanego z przemieszczeniem się kuli.



Rysunek 8.6: Kula tocząca się

W celu uzyskania więzów fazowych wynikających z definicji toczenia wykorzystamy formułę (8.4). Zaczynamy of wyznaczenia położenia i orientacji kuli. Oczywiście, położenie początku układu ciała $T = (x, y, r)^T$. Położenie punktu kontaktu w układzie przestrzeni $s = (x, y, 0)^T$. Aby wyznaczyć prędkość kątowa ω_S wykorzystamy wzór $\Omega_S = \dot{R}R^T$, gdzie R oznacza macierz orientacji kuli zdefiniowaną jako ciąg obrotów elementarnych, jakim należy podać układ przestrzeni, aby pokrył się z układem ciała. Zamiast macierzy R łatwiej wyznaczyć macierz R^T, tzn. ciąg obrotów przekształcających układ ciała w układ przestrzeni. Na podstawie Rysunku 8.6 otrzymujemy

$$R^T = R(Z, \alpha)R(Y, \beta)R(X, \pi)R(Z, -\gamma),$$

czyli, korzystając z własności $R(\text{oś, -kąt}) = R^T(\text{oś, kąt})$ i $R^T(X, \pi) = R(X, \pi)$, macierz orientacji

$$R = R(Z, \gamma)R(X, \pi)R(Y, -\beta)R(Z, -\alpha).$$

Obliczymy teraz macierzową prędkość kątową w przestrzeni

$$\begin{aligned}\Omega_S = \dot{R}R^T = (\dot{R}(Z, \gamma)R(X, \pi)R(Y, -\beta)R(Z, -\alpha)+ \\ + R(Z, \gamma)R(X, \pi)\dot{R}(Y, -\beta)R(Z, -\alpha)+ \\ + R(Z, \gamma)R(X, \pi)R(Y, -\beta)\dot{R}(Z, -\alpha))R(Z, \alpha)R(Y, \beta)R(X, \pi)R(Z, -\gamma).\end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę wzory na elementarne obroty wyprowadzone w Rozdziale 6, a także zależność $R\Omega R^T = R[\omega]R = [R\omega]$ (zob. Zadanie 6.3), otrzymujemy następujący wzór na wektorową prędkość kątową kuli w przestrzeni

$$\omega_S = \begin{pmatrix} \dot{\alpha}\cos\gamma\sin\beta - \dot{\beta}\sin\gamma \\ \dot{\alpha}\sin\gamma\sin\beta + \dot{\beta}\cos\gamma \\ \dot{\alpha}\cos\beta + \dot{\gamma} \end{pmatrix}.$$

Po podstawieniu niezbędnych danych do wzoru (8.4) wyznaczamy warunki braku poślizgu wzdłuż południka i równoleżnika

$$\begin{cases} \dot{x} - r\dot{\alpha}\sin\gamma\sin\beta - r\dot{\beta}\cos\gamma = 0 \\ \dot{y} + r\dot{\alpha}\cos\gamma\sin\beta - r\dot{\beta}\sin\gamma = 0 \end{cases}.$$

Zakaz wirowania w miejscu oznacza, że trzecia składowa prędkości kątowej ω_s powinna być równa 0,

$$\dot{\alpha}\cos\beta + \dot{\gamma} = 0.$$

Połączenie ze sobą wszystkich trzech ograniczeń toczenia się prowadzi do macierzy Pfaffa

$$A(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -r\sin\gamma\sin\beta & -r\cos\gamma & 0 \\ 0 & 1 & r\cos\gamma\sin\beta & -r\sin\gamma & 0 \\ 0 & 0 & \cos\beta & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pola wektorowe anihilowane przez macierz Pfaffa są równe $g_1(q) = (r\sin\gamma\sin\beta, -r\cos\gamma\sin\beta, 1, 0, -\cos\beta)^T$, $g_2(q) = (r\cos\gamma, r\sin\gamma, 0, 1, 0)^T$, a stowarzyszony układ sterowania ma postać

$$\begin{cases} \dot{x} = u_1 r\sin\gamma\sin\beta + u_2 r\cos\gamma \\ \dot{y} = -u_1 r\cos\gamma\sin\beta + u_2 r\sin\gamma \\ \dot{\alpha} = u_1 \\ \dot{\beta} = u_2 \\ \dot{\gamma} = -u_1\cos\beta \end{cases}.$$

8.4. Więzy holonomiczne i nieholonomiczne

Więzy fazowe typu Pfaffa mogą mieć szczególną postać, jak na przykład

$$q = (x, y, z)^T, \quad A(q) = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}.$$

Mamy wtedy

$$A(q)\dot{q} = x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = 0,$$

co jest równoważne

$$x^2 + y^2 + z^2 = \text{const}.$$

Ostatnie ograniczenie ma charakter konfiguracyjny. Jego spełnienie oznacza, że układ porusza się po 2-wymiarowej sferze. Przykład ten pokazuje, że istnieją więzy fazowe, które można sprowadzić do więzów konfiguracyjnych przez scałkowanie. Takie więzy nazywają się holonomicznymi lub całkowalnymi. Więzy fazowe, które nie są całkowalne nazywają się nieholonomicznymi.

Holonomiczność więzów można scharakteryzować w następujący sposób. Weźmy więzy fazowe opisane równością $A(q)\dot{q} = 0$. Więzy te nie ulegną zmianie po pomnożeniu z lewej strony przez nieosobliwą macierz $M(q)$ wymiaru $l \times l$, ich równoważna postać jest zatem $M(q)A(q)\dot{q} = 0$. Załóżmy, że potrafimy dobrać macierz $M(q)$ w taki sposób, że

$$M(q)A(q) = DF(q)$$

dla pewnej funkcji $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^l$, różniczkowalnej w sposób ciągły co najmniej do rzędu 2. Jeżeli tak jest, otrzymujemy

$$M(q)A(q)\dot{q} = DF(q)\dot{q} = \frac{d}{dt}F(q(t)) = 0,$$

wzdłuż trajektorii $q(t)$. Wynika stąd, że na trajektoriach funkcja $F(q) = \text{const}$, a zatem więzy są holonomiczne. Powyższy wywód dostarcza definicji holonomiczności. Powiemy, że więzy fazowe $A(q)\dot{q} = 0$ są holonomiczne, jeżeli istnieje nieosobliwa macierz $M(q)$ i funkcja $F(q)$, takie że $M(q)A(q) = DF(q)$. Sprawdzenie holonomiczności/nieholonomiczności z definicji może być trudne. W następnym podrozdziale podajemy przykład, gdy takie sprawdzenie doprowadziło do rozstrzygnięcia.

8.4.1. Koło poruszające się bez poślizgu bocznego

Jak pokazaliśmy, koło toczące się bez poślizgu bocznego jest opisane współrzędnymi $q = (x, y, \varphi)^T$ i podlega więzom fazowym zdefiniowanym przez macierz $A(q) = \begin{bmatrix}\sin\varphi & -\cos\varphi & 0\end{bmatrix}$. Pytamy, czy tak zdefiniowane więzy są holonomiczne. Załóżmy, że odpowiedź jest pozytywna. Oznaczałoby to, że istnieje nieosobliwa macierz wymiaru 1×1 (czyli funkcja $m(q) \neq 0$) i funkcja $F(q)$, takie że

$$m(q)A(q) = \left(\frac{\partial F(q)}{\partial x}, \frac{\partial F(q)}{\partial y}, \frac{\partial F(q)}{\partial \varphi}\right).$$

Biorąc pod uwagę postać macierzy $A(q)$ wyprowadzamy z tego warunku trzy równania

$$\begin{cases} m(q)\sin\varphi = \frac{\partial F(q)}{\partial x} \\ m(q)\cos\varphi = -\frac{\partial F(q)}{\partial y} \\ 0 = \frac{\partial F(q)}{\partial \varphi} \end{cases}.$$

Ponieważ funkcja $F(q)$ ma ciągłe pochodne cząstkowe rzędu 2, pochodne mieszane są równe, a więc

$$\frac{\partial^2 F(q)}{\partial x \partial \varphi} = 0, \quad \text{a także} \quad \frac{\partial^2 F(q)}{\partial y \partial \varphi} = 0.$$

Wynika z tego układ równań liniowych

$$\begin{bmatrix} \sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\varphi & -\sin\varphi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial m(q)}{\partial \varphi} \\ m(q) \end{pmatrix} = 0,$$

którego rozwiązaniem jest $\frac{\partial m(q)}{\partial \varphi} = 0$ i $m(q) = 0$. Uzyskaliśmy sprzeczność z założeniem, że $m(q) \neq 0$, zatem więzy fazowe, jakie spełnia ruch koła, są nieholonomiczne.

8.4.2. Warunek nieholonomiczności

Warunek nieholonomiczności więzów w postaci Pfaffa, ze stowarzyszonym układem sterowania

$$\dot{q} = G(q)u = \sum_{i=1}^{m} g_i(q)u_i$$

można wyrazić za pośrednictwem pewnych operacji na polach wektorowych $g_1(q), g_2(q), \ldots, g_m(q)$. Dla dwóch pól wektorowych $g_i(q)$ i $g_j(q)$ definiujemy rodzaj operacji mnożenia, zwany nawiasem Liego, w następujący sposób

$$[g_i, g_j](q) = Dg_j(q)g_i(q) - Dg_i(q)g_j(q).$$

Nawias Liego ma własności podobne jak nawias Poissona, który poznaliśmy w rozdziale dotyczącym mechaniki hamiltonowskiej. Oznacza to, że

— $[g_i, g_i] = 0$ – antyzwrotność

— $[g_j, g_i] = -[g_i, g_j]$ – antysymetria,

— $[g_i, [g_j, g_k]] + [g_j, [g_k, g_i]] + [g_k, [g_i, g_j]] = 0$ – tożsamość Jacobiego.

Dla układu stowarzyszonego definiujemy algebrę Liego układu $\mathcal{L}$ jako najmniejszą przestrzeń liniową nad zbiorem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$, która zawiera pola sterujące układu g_i i jest zamknięta ze względu na operację nawiasu Liego. W tym kontekście formułujemy następujące

Twierdzenie 8.4.1 (O nieholonomiczności więzów) *Jeżeli w każdym punkcie* $q \in \mathbb{R}^n$ *rząd algebry Liego układu stowarzyszonego jest równy* n*,*

$$\operatorname{rank} \mathcal{L}(q) = n,$$

to więzy fazowe są nieholonomiczne.

Rząd algebry Liego w punkcie q jest to wymiar przestrzeni liniowej rozpiętej w tym punkcie przez pola wektorowe należące do algebry. Chociaż algebra Liego jest z reguły nieskończenie wymiarowa, to do sprawdzenia warunku rzędu wystarczy zwykle wziąć pola sterujące i policzyć kilka nawiasów Liego.

8.4.3. Przykład

Pokażemy na prostym przykładzie, jak posługiwać się warunkiem nieholonomiczności. Niech będzie dane koło toczące się analizowane w podrozdziale 8.2.2. Wektor współrzędnych $q = (x, y, \varphi, \theta)^T$. Pola sterujące układu stowarzyszonego są następujące

$$g_1(q) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g_2(q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obliczamy nawias Liego tych pól

$$[g_1, g_2](q) = Dg_2(q)g_1(q) - Dg_1(q)g_2(q) = -Dg_1(q)g_2(q) = \\ = -\frac{\partial g_1(q)}{\partial \varphi} = r(\sin\varphi, -\cos\varphi, 0, 0)^T.$$

Przestrzeń liniowa rozpięta przez pola g_1, g_2, $g_{12} = [g_1, g_2]$ ma wymiar równy rzędowi macierzy

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} r\cos\varphi & 0 & r\sin\varphi \\ r\sin\varphi & 0 & -r\cos\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3.$$

Na mocy definicji, do algebry Liego układu stowarzyszonego należą również pola $g_{112}(q) = [g_1, g_{12}]$ i $g_{212}(q) = [g_2, g_{12}]$. Obliczmy je

$$g_{112}(q) = Dg_{12}(q)g_1(q) - Dg_1(q)g_{12}(q) = r\sin\varphi\frac{\partial g_{12}(q)}{\partial x} + \\ + r\sin\varphi\frac{\partial g_{12}(q)}{\partial y} + \frac{\partial g_{12}(q)}{\partial \theta} - r\sin\varphi\frac{\partial g_1(q)}{\partial x} + r\cos\varphi\frac{\partial g_1(q)}{\partial y} = 0,$$

$$g_{212}(q) = Dg_{12}(q)g_2(q) - Dg_2(q)g_{12}(q) = \\ = \frac{\partial g_{12}(q)}{\partial \varphi} = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, 0, 0)^T.$$

Wymiar przestrzeni liniowej rozpiętej przez pola g_1, g_2, g_{12} i g_{212} jest równy rzędowi macierzy

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} r\cos\varphi & 0 & r\sin\varphi & r\cos\varphi \\ r\sin\varphi & 0 & -r\cos\varphi & r\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 4.$$

Ponieważ wymiar przestrzeni generowanej przez wskazane 4 pola jest równy $n = 4$, rząd algebry Liego układu stowarzyszonego jest także równy 4, a więc więzy fazowe są nieholonomiczne. W podobny sposób można wykazać nieholonomiczność więzów dla innych przykładów.

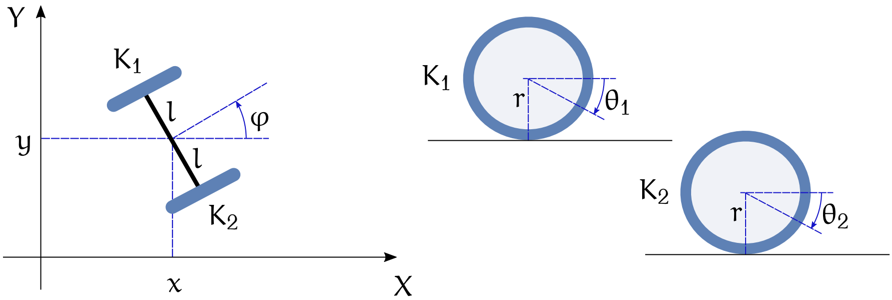
8.5. Zadania

Zadanie 8.1 Korzystając ze wzoru (8.4) uzyskać wzór na ograniczenia fazowe dla koła toczącego się.

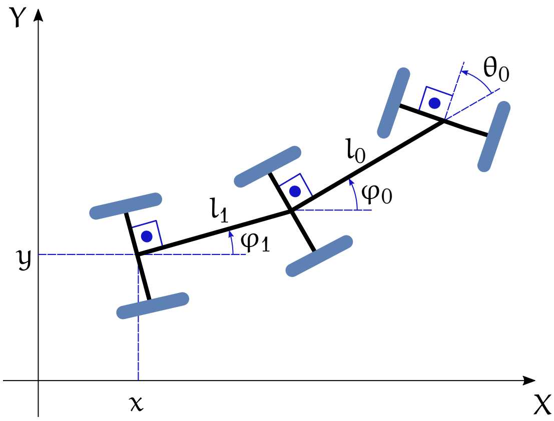
Zadanie 8.2 Uzupełnić szczegóły wyprowadzenia wzoru na prędkość kątową w przestrzeni dla kuli toczącej się.

Zadanie 8.3 Opisać ograniczenia fazowe dla ruchu dwukołowego robota mobilnego przedstawionego na Rysunku 8.7. Założyć brak poślizgu bocznego i wzdłużnego obu kół. Przyjąć długość osi równą $2l$.

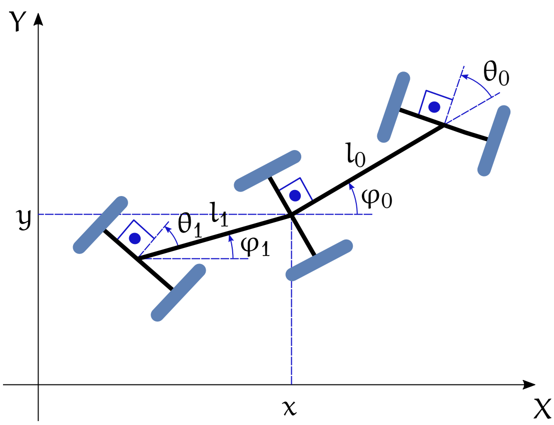
Zadanie 8.4 Wyprowadzić wzór na ograniczenia fazowe dla samochodu z przyczepą poruszającego się bez poślizgu bocznego kół, przedstawionego na Rysunku 8.8.



Rysunek 8.7: Kołowy robot mobilny



Rysunek 8.8: Samochód z przyczepą



Rysunek 8.9: Samochód pożarniczy

Zadanie 8.5 Wyprowadzić wzór na ograniczenia fazowe dla samochodu pożarniczego przedstawionego na Rysunku 8.9, poruszającego się bez poślizgu bocznego kół. Zauważyć, że zarówno koła przednie, jak i tylne są skrętne.

Zadanie 8.6 Zbadać nieholonomiczność ograniczeń fazowych dla wybranych układów.

8.6. Komentarze i odniesienia literaturowe

Układy z więzami są analizowane w rozdziale 2 książki [RK95], a także w rozdziale 1 książki [Gut71], gdzie używa się terminów: więzy geometryczne i więzy kinematyczne. Punkt widzenia dominujący w robotyce został przedstawiony w rozdziale 11 pracy [TMD+00], w notatkach do wykładów [TM17] i rozdziale 7 monografii [MZS94]. Z tejże monografii pochodzi zadanie 8.5. Sterowaniu nieholonomicznych manipulatorów mobilnych jest poświęcona monografia [Maz09]. Termin „holonomiczny”, utworzony przez Hertza, wywodzi się od greckich słów *holos* czyli całość i *nomos* – prawo.

Literatura

[Gut71] R. Gutowski, *Mechanika analityczna*. PWN, Warszawa, 1971.

[Maz09] A. Mazur, *Sterowanie oparte na modelu dla nieholonomicznych manipulatorów mobilnych*. Oficyna Wydawnicza PWr, Wrocław, 2009.

[MZS94] R. Murray, Li Zexiang, S. Sastry, *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. CRC Press, Boca Raton, 1994.

[RK95] W. Rubinowicz, W. Królikowski, *Mechanika teoretyczna*. PWN, Warszawa, 1995.

[TM17] K. Tchoń, R. Muszyński, *Metody matematyczne automatyki i robotyki*. Politechnika Wrocławska, projekt AZON, 2017.

[TMD+00] K. Tchoń, A. Mazur, I. Dulęba, R. Hossa, R. Muszyński, *Manipulatory i roboty mobilne: modele, planowanie ruchu, sterowanie*. Akademicka Oficyna Wydawnicza PLJ, Warszawa, 2000. (Politechnika Wrocławska, projekt AZON, 2018).

Rozdział 9

Dynamika układów nieholonomicznych

W poprzednim rozdziale wyróżniliśmy ograniczenia konfiguracyjne i fazowe, a te ostatnie podzieliliśmy na holonomiczne, równoważne konfiguracyjnym, i nieholonomiczne. Pokazaliśmy, jak należy układać równania dynamiki układów z ograniczeniami konfiguracyjnymi. Zajmiemy się teraz dynamiką układów podlegających ograniczeniom nieholonomicznym.

Niech będzie dany taki układ, opisany współrzędnymi i prędkościami uogólnionymi $q \in \mathbb{R}^n$, $\dot{q} \in \mathbb{R}^n$, z lagranżianem $L(q, \dot{q})$, podlegający $l \leqslant n$ nieholonomicznym ograniczeniom fazowym w postaci Pfaffa, $A(q)\dot{q} = 0$. Zakładamy, że te ograniczenia fazowe są wynikiem działania sił niepotencjalnych F, które nazwiemy siłami przyczepności. Procedura tworzenia równań ruchu takiego układu jest następująca:

1. Piszemy równania Eulera-Lagrange'a w postaci

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = Q(q)\ddot{q} + P(q, \dot{q}) = F,$$

gdzie $P(q, \dot{q})$ oznacza siły odśrodkowe, Coriolisa i potencjalne, a F – siły przyczepności.

2. Siły przyczepności wyznaczamy na podstawie Zasady d'Alemberta, która orzeka, że siły przyczepności nie wykonują pracy na dopuszczalnych przesunięciach. Dopuszczalnymi przesunięciami są przesunięcia z prędkością spełniającą ograniczenia fazowe, czyli takie, że $A(q)\dot{q} = 0$. Z Zasady d'Alemberta wynika, że

$$A(q)\dot{q} = 0 \to (F, \dot{q}) = F^T\dot{q} = 0.$$

Geometrycznie, z Zasady d'Alemberta wynika, że siła przyczepności ma być prostopadła do prędkości, podobnie jak wiersze macierzy $A(q)$. Wynika stąd, że istnieje wektor $\lambda \in \mathbb{R}^l$ (zależny od q i $\dot{q}$), taki że

$$F^T = \lambda^T A(q), \quad \text{i.e.} \quad F = A^T(q)\lambda.$$

3. Równania dynamiki przedstawiamy w postaci

$$Q(q)\ddot{q} + P(q, \dot{q}) = A^T(q)\lambda. \tag{9.1}$$

4. Korzystając z przedstawienia ograniczeń fazowych w postaci stowarzyszonego układu sterowania

$$\dot{q} = G(q)\eta,$$

$\eta \in \mathbb{R}^{m=n-l}$, $A(q)G(q) = 0$, eliminujemy wektor λ mnożąc lewostronnie równanie (9.1) przez macierz $G^T(q)$,

$$G^T(q)Q(q)\ddot{q} + G^T(q)P(q,\dot{q}) = 0.$$

5. Wyliczamy przyspieszenie jako

$$\ddot{q} = G(q)\dot{\eta} + \dot{G}(q)\eta,$$

gdzie $\dot{G}(q)$ oznacza pochodną macierzy $G(q)$ względem czasu wzdłuż trajektorii $q(t)$, i podstawiamy do otrzymanego równania

$$G^T(q)Q(q)G(q)\dot{\eta} + G^T(q)Q(q)\dot{G}(q)\eta + G^T(q)P(q,\dot{q}) = 0.$$

Ze względu na niezależność ograniczeń fazowych, macierz $G(q)$ wymiaru $n \times m$ ma pełny rząd m. Macierz bezwładności $Q(q)$ jest nieosobliwa, stąd $m \times m$ macierz G^TQG ma macierz odwrotną.

6. Korzystając z odwrotności macierzy G^TQG otrzymujemy następujące równania ruchu układu podlegającego nieholonomicznym ograniczeniom fazowym

$$\begin{cases} \dot{q} = G(q)\eta \\ \dot{\eta} = -(G^T(q)Q(q)G(q))^{-1}G^T(q)(Q(q)\dot{G}(q)\eta + P(q,\dot{q})) \end{cases}. \tag{9.2}$$

Stwierdzenie 9.1 *Zamiast eliminować wektor λ z równania (9.1) możemy go wyliczyć i wyznaczyć siły przyczepności. W tym celu mnożymy obie strony równania przez macierz $A(q)$,*

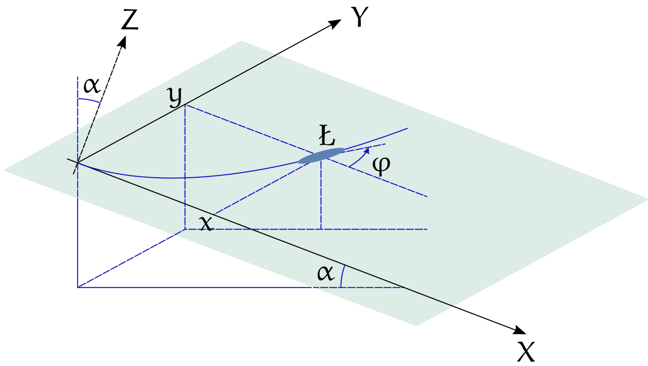
$$A(q)Q(q)\ddot{q} + A(q)P(q,\dot{q}) = A(q)A^T(q)\lambda,$$

i korzystając z odwracalności macierzy AA^T, otrzymujemy

$$F = A^T(q)\lambda = A^T(q)\left(A(q)A^T(q)\right)^{-1}A(q)(Q(q)\ddot{q} + P(q,\dot{q})). \tag{9.3}$$

Równanie (9.3) pozwala sprawdzić, czy siły tarcia działające na układ są wystarczające do spełnienia ograniczeń nieholonomicznych.

Procedurę wyprowadzania równań ruchu układów nieholonomicznych przeanalizujemy na kilku przykładach.



Rysunek 9.1: Łyżwiarz Czapłygina

9.1. Przykłady

9.1.1. Łyżwiarz Czapłygina

Rozważmy łyżwiarza (narciarza) zjeżdżającego po stoku o nachyleniu α, przedstawionego na Rysunku 9.1. Jako współrzędne $q = (x, y, \varphi)^T$ łyżwiarza Ł przyjmiemy jego położenie i orientację względem układu (X, Y) wyznaczającego płaszczyznę stoku. Zakładamy, że łyżwiarz zjeżdża z punktu o współrzędnych $(0, 0, 0)^T$, z zerową początkową prędkością liniową i pewną prędkością kątową ω, i porusza się bez poślizgu bocznego; odpowiednia macierz Pfaffa

$$A(q) = \begin{bmatrix} \sin\varphi & -\cos\varphi & 0 \end{bmatrix}.$$

Jak pokazaliśmy w Rozdziale 8, ograniczenia fazowe nałożone na ruch łyżwiarza są nieholonomiczne. Macierz sterowań układu stowarzyszonego

$$G(q) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 \\ \sin\varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

została również wyznaczona w poprzednim Rozdziale.

Dla uproszczenia obliczeń zakładamy, że masa i moment bezwładności łyżwiarza zostały tak dobrane, że energia kinetyczna $K = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{\varphi}^2)$, a nachylenie stoku jest takie, że energia potencjalna łyżwiarza $V = -x$. Przy takich założeniach lagranżian łyżwiarza

$$L = K - V = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{\varphi}^2\right) + x.$$

Równania dynamiki łyżwiarza wyprowadzimy zgodnie z procedurą przedstawioną w poprzednim podrozdziale. Zaczynamy od równania (9.1)

$$\begin{cases} \ddot{x} - 1 = \lambda \sin\varphi \\ \ddot{y} = -\lambda\cos\varphi \\ \ddot{\varphi} = 0 \end{cases}, \tag{9.4}$$

w którym mnożnik $\lambda \in \mathbb{R}$.

Występujący w kroku 4 procedury stowarzyszony układ sterowania $\dot{q} = G(q)\eta$ ma postać

$$\begin{cases} \dot{x} = \eta_1 \cos\varphi \\ \dot{y} = \eta_1 \sin\varphi \\ \dot{\varphi} = \eta_2 \end{cases}. \tag{9.5}$$

W celu wyeliminowanie skalarnego w naszym przypadku mnożnika λ mnożymy lewostronnie równania (9.4) przez $G^T(q)$: pierwsze z nich przez $\cos\varphi$, drugie przez $\sin\varphi$ i dodajemy stronami

$$\ddot{x}\cos\varphi - \cos\varphi + \ddot{y}\sin\varphi = 0. \tag{9.6}$$

Trzecie równanie w (9.4) pozostaje bez zmian a wynika z niego, że przyspieszenie kątowe łyżwiarza jest zero. Z trzeciego równania w (9.5) otrzymujemy więc $\dot{\eta}_2 = \ddot{\varphi} = 0$ i stąd $\eta_2 = \text{const} = \omega$, a zatem orientacja łyżwiarza

$$\varphi(t) = \omega t.$$

Różniczkując dwa pierwsze równania z (9.5) otrzymujemy wyrażenia na przyspieszenia liniowe równe

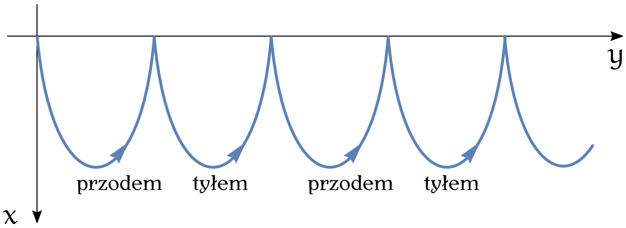
$$\begin{cases} \ddot{x} = \dot{\eta}_1 \cos\varphi - \eta_1\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \ddot{y} = \dot{\eta}_1 \sin\varphi + \eta_1\dot{\varphi}\cos\varphi \end{cases},$$

a ich podstawienie do równania (9.6) daje

$$\dot{\eta}_1 = \cos\varphi = \cos\omega t.$$

Mając wyliczone $\dot{\eta}_1$ i $\dot{\eta}_2$ możemy zapisać równania ruchu (9.2) łyżwiarza

$$\begin{cases} \dot{x} = \eta_1 \cos\varphi \\ \dot{y} = \eta_1 \sin\varphi \\ \dot{\varphi} = \eta_2 \\ \dot{\eta}_1 = \cos\varphi \\ \dot{\eta}_2 = 0 \end{cases}.$$



Rysunek 9.2: Tor ruchu łyżwiarza

Zerowa liniowa prędkość początkowa łyżwiarza oznacza, że $\eta_1(0) = 0$, a zatem

$$\eta_1(t) = \frac{1}{\omega}\sin\omega t.$$

Całkowanie równań (9.5) na prędkość liniową, które po podstawieniach przyjmują postać

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{1}{2\omega}\sin 2\omega t \\ \dot{y}(t) = \frac{1}{2\omega}(1 - \cos 2\omega t) \end{cases},$$

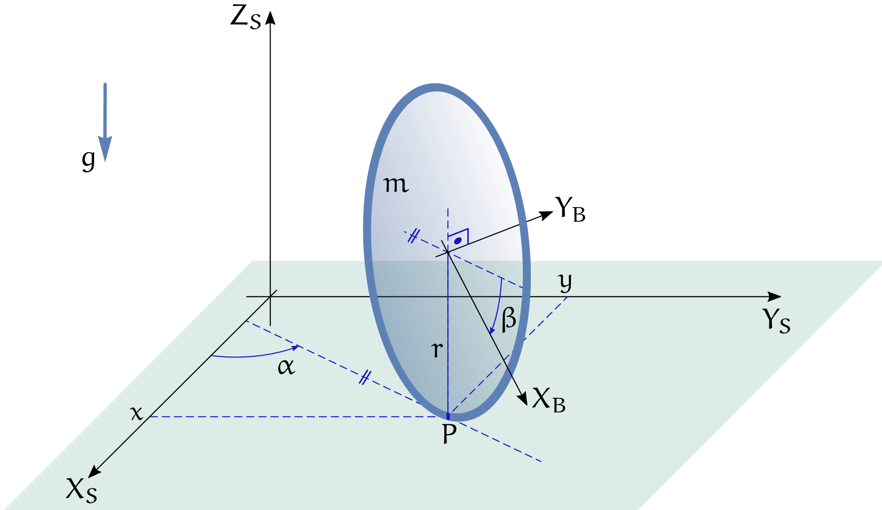
przy zerowych warunkach początkowych pozwala wyznaczyć trajektorię łyżwiarza

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{4\omega^2}(1 - \cos 2\omega t) \\ y(t) = \frac{1}{4\omega^2}(2\omega t - \sin 2\omega t) \end{cases}.$$

Otrzymaliśmy równania parametryczne cykloidy rozwijającej się w kierunku osi Y układu współrzędnych umieszczonego na stoku, zob. Rysunek 9.2. Okazuje się, że łyżwiarz Czapłygina, któremu nadano niezerową początkowa prędkość kątowa („łyżwiarz zakręcony"), nie zjeżdża w dół stoku, ale przemieszcza się wzdłuż jego górnej krawędzi, jadąc na przemian przodem i tyłem.

9.1.2. Koło toczące się pionowo

Wyprowadzimy teraz równania ruchu koła o promieniu r toczącego się po poziomej płaszczyźnie (X_S, Y_S), ustawionego prostopadle do tej płaszczyzny, zob. Rysunek 9.3. Zakładamy, że koło jest cienkie i jednorodne. Układ ciała umieszczamy w środku koła w taki sposób, że oś X_B leży w płaszczyźnie koła, a oś Y_B jest osią obrotu koła. Jako współrzędne $q = (x, y, \alpha, \beta)^T$ wybieramy położenie punktu kontaktu koła z podłożem, orientację koła i kąt obrotu koła.



Rysunek 9.3: Koło pionowe

Ponieważ podczas ruchu koło nie odrywa się od podłoża, jego energia potencjalna jest stała; możemy przyjąć, że $V = 0$. Wynika stąd, że lagranżian jest równy energii kinetycznej koła, a zatem

$$L = K = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + \frac{1}{2}I_2\dot{\beta}^2 + \frac{1}{2}I_3\dot{\alpha}^2,$$

gdzie m oznacza masę koła, $I_2 = \frac{1}{2}mr^2$ moment bezwładności koła względem osi Y_B, a $I_3 = \frac{1}{4}mr^2$ jest momentem bezwładności koła względem osi Z_B.

W poprzednim rozdziale pokazaliśmy, że ograniczenia fazowe odpowiadające toczeniu się koła są opisane macierzą Pfaffa

$$A(q) = \begin{bmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha & 0 & 0 \\ \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & -r \end{bmatrix}.$$

Wektory rozpinające jądro macierzy $A(q)$ definiują kolumny macierzy sterowań

$$G(q) = \begin{bmatrix} r\cos\alpha & 0 \\ r\sin\alpha & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

układu stowarzyszonego.

Równanie (9.1) dla koła toczącego się wyglądają następująco

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \lambda_1 \sin\alpha + \lambda_2 \cos\alpha \\ m\ddot{y} = -\lambda_1 \cos\alpha + \lambda_2 \sin\alpha \\ I_3\ddot{\alpha} = 0 \\ I_2\ddot{\beta} = -\lambda_2 r \end{cases}.$$

Po pomnożeniu uzyskanych równań przez macierz G^T otrzymujemy dwa równania

$$\begin{cases} mr\ddot{x}\cos\alpha + mr\ddot{y}\sin\alpha + I_2\ddot{\beta} = 0 \\ I_3\ddot{\alpha} = 0 \end{cases}. \tag{9.7}$$

Z drugiego z tych równań wynika, że $\dot{\alpha} = \text{const} = \omega$, co przy zerowej początkowej orientacji koła, $\alpha(0) = 0$, daje

$$\alpha(t) = \omega t.$$

Układ stowarzyszony jest zdefiniowany przez macierz $G(q)$ i ma postać

$$\begin{cases} \dot{x} = \eta_1 r\cos\alpha \\ \dot{y} = \eta_1 r\sin\alpha \\ \dot{\alpha} = \eta_2 \\ \dot{\beta} = \eta_1 \end{cases}.$$

Biorąc pod uwagę, że $\dot{\alpha} = \omega$ z trzeciego równania otrzymujemy $\eta_2 = \omega$. Pozostałe równania pozwalają wyliczyć przyspieszenia

$$\begin{cases} \ddot{x} = \dot{\eta}_1 r\cos\alpha - \eta_1 r\dot{\alpha}\sin\alpha \\ \ddot{y} = \dot{\eta}_1 r\sin\alpha + \eta_1 r\dot{\alpha}\cos\alpha \\ \ddot{\beta} = \dot{\eta}_1 \end{cases}.$$

Podstawienie tych przyspieszeń do pierwszego z równań (9.7) daje zależność

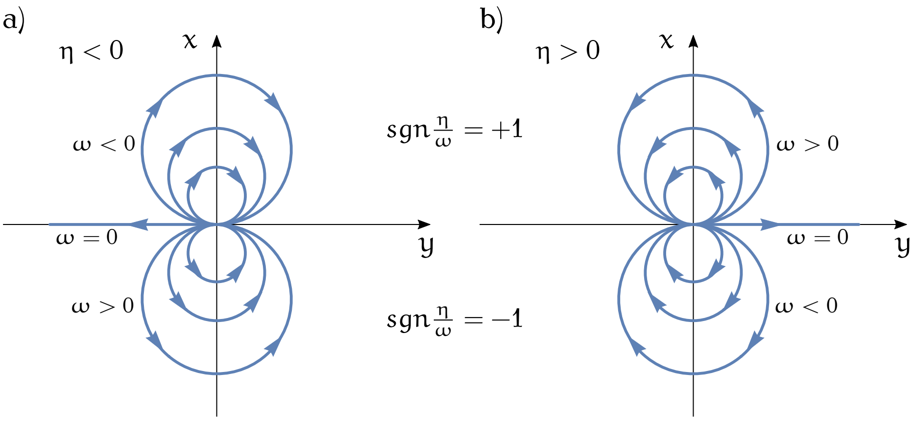
$$(mr^2 + I_2)\dot{\eta}_1 = 0 \Rightarrow \eta_1 = \text{const} = \eta,$$

z której wynika natychmiast, że przy $\beta(0) = 0$, trajektoria

$$\beta(t) = \eta t.$$

Trajektorie współrzędnych położenia punktu kontaktu znajdziemy z równań

$$\begin{cases} \dot{x} = \eta r\cos\omega t \\ \dot{y} = \eta r\sin\omega t \end{cases}.$$



Rysunek 9.4: Tor ruchu koła: a) $\eta < 0$, b) $\eta > 0$

Po scałkowaniu przy zerowych warunkach początkowych $x(0) = y(0) = 0$ otrzymujemy

$$\begin{cases} x(t) = \frac{\eta r}{\omega} \sin \omega t \\ y(t) = \frac{\eta r}{\omega}(1 - \cos \omega t) \end{cases}.$$

Tory ruchu punktu kontaktu są okręgami

$$x^2 + \left(y - \frac{\eta r}{\omega}\right)^2 = \left(\frac{\eta r}{\omega}\right)^2$$

o środku w punkcie $\left(0, \frac{\eta r}{\omega}\right)$ i promieniu $\frac{\eta r}{\omega}$. Przedstawia je Rysunek 9.4.

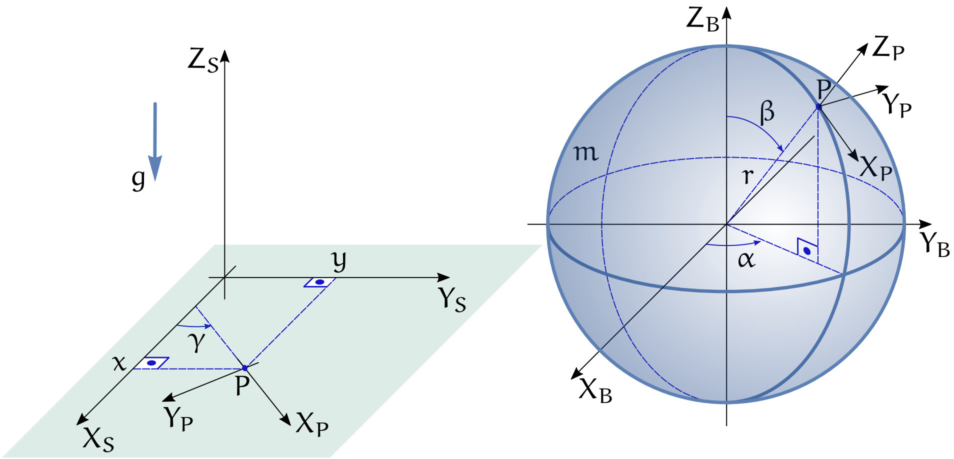
9.1.3. Kula tocząca się

Jako kolejny przykład tworzenia równań ruchu układu poddanego ograniczeniom nieholonomicznym rozważymy kulę toczącą się po płaszczyźnie, przedstawioną na Rysunku 9.5. Przyjmiemy, że kula ma masę m i moment bezwładności $I_1 = I_2 = I_3 = I$. Współrzędne opisujące ruch kuli będą takie same, jak w podrozdziale 8.3.1, ale dla odróżnienia od kątów Eulera przyjmiemy oznaczenie $q = (x, y, \alpha, \beta, \gamma)^T$. Macierz Pfaffa

$$A(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -r\sin\beta\sin\gamma & -r\cos\gamma & 0 \\ 0 & 1 & r\sin\beta\cos\gamma & -r\sin\gamma & 0 \\ 0 & 0 & \cos\beta & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a macierz układu stowarzyszonego

$$G(q) = \begin{bmatrix} r\sin\beta\sin\gamma & r\cos\gamma \\ -r\sin\beta\cos\gamma & r\sin\gamma \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\cos\beta & 0 \end{bmatrix}.$$



Rysunek 9.5: Kula tocząca się

Biorąc pod uwagę postać macierzy R orientacji kuli, wyznaczoną w podrozdziale 8.3.1, można pokazać, że

$$R = R(Z,\gamma)R(X,\pi)R(Y,-\beta)R(Z,-\alpha) = E(\varphi,\theta,\psi)$$

dla kątów Eulera $e = (\pi+\gamma, \pi-\beta, -\alpha)^T$. Zauważmy także, że wektor T oznacza położenie środka ciężkości kuli w układzie przestrzeni, zatem $T = (x, y, r)^T$. Kąty Eulera e i współrzędne T wstawiamy do wzoru na lagranżian (6.6) i otrzymujemy

$$L = \frac{1}{2}I\left(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 + \dot{\gamma}^2\right) + I\dot{\alpha}\dot{\gamma}\cos\beta + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - mgr.$$

Ostatni składnik lagranżianu odnosi się do energii potencjalnej kuli, która jest stała, a więc nie odgrywa roli w równaniach Eulera-Lagrange'a i dlatego może zostać pominięty.

Punktem wyjścia do napisania równań ruchu kuli jest wzór (9.1). W przypadku kuli przyjmuje on następującą postać

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \lambda_1 \\ m\ddot{y} = \lambda_2 \\ I\ddot{\alpha} + I\ddot{\gamma}\cos\beta - I\dot{\beta}\dot{\gamma}\sin\beta = -\lambda_1 r\sin\beta\sin\gamma + \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \lambda_2 r\sin\beta\cos\gamma + \lambda_3\cos\beta \\ I\ddot{\beta} + I\dot{\alpha}\dot{\gamma}\sin\beta = -\lambda_1 r\cos\gamma - \lambda_2 r\sin\gamma \\ I\ddot{\gamma} + I\ddot{\alpha}\cos\beta - I\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\beta = \lambda_3 \end{cases}.$$

W celu eliminacji mnożników λ otrzymane równania mnożymy lewostronnie przez macierz G^T uzyskując dwa następujące równania

$$\begin{cases} mr\ddot{x}\sin\beta\sin\gamma - mr\ddot{y}\sin\beta\cos\gamma + I\ddot{\alpha}\sin^2\beta + \\ \qquad\qquad -I\dot{\beta}\dot{\gamma}\sin\beta + I\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\beta\cos\beta = 0 \\ mr\ddot{x}\cos\gamma + mr\ddot{y}\sin\gamma + I\ddot{\beta} + I\dot{\alpha}\dot{\gamma}\sin\beta = 0 \end{cases}.$$

Następny krok polega na wyznaczeniu przyspieszeń z równań stowarzyszonego układu sterowania $\dot{q} = G(q)\eta$

$$\begin{cases} \dot{x} = \eta_1 r\sin\beta\sin\gamma + \eta_2 r\cos\gamma \\ \dot{y} = -\eta_1 r\sin\beta\cos\gamma + \eta_2 r\sin\gamma \\ \dot{\alpha} = \eta_1 \\ \dot{\beta} = \eta_2 \\ \dot{\gamma} = -\eta_1\cos\beta \end{cases}.$$

Na podstawie tych równań otrzymujemy

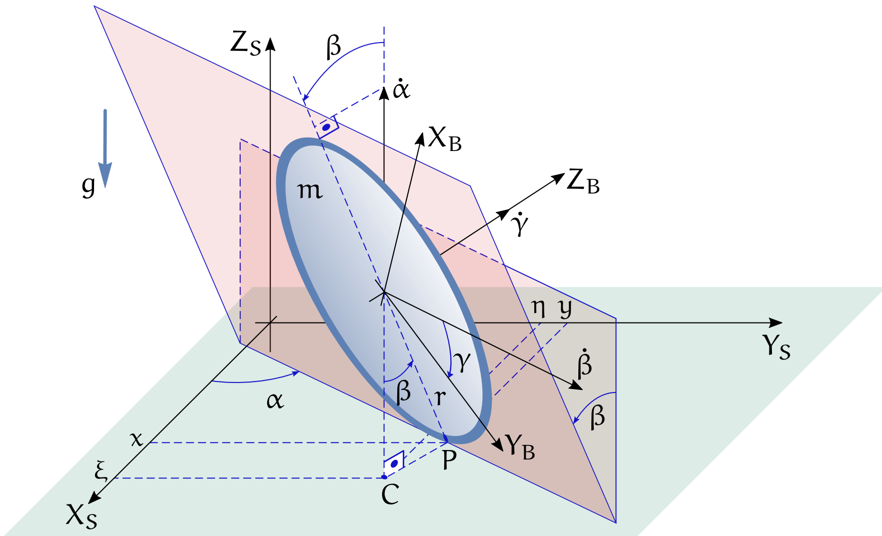
$$\begin{cases} \ddot{x} = \dot{\eta}_1 r\sin\beta\sin\gamma + \eta_1 r\dot{\gamma}\sin\beta\cos\gamma + \\ \qquad\qquad +\eta_1 r\dot{\beta}\cos\beta\sin\gamma + \dot{\eta}_2 r\cos\gamma - \eta_2 r\dot{\gamma}\sin\gamma \\ \ddot{y} = -\dot{\eta}_1 r\sin\beta\cos\gamma + \eta_1 r\dot{\gamma}\sin\beta\sin\gamma + \\ \qquad\qquad -\eta_1 r\dot{\beta}\cos\beta\cos\gamma + \dot{\eta}_2 r\sin\gamma - \eta_2 r\dot{\gamma}\cos\gamma \\ \ddot{\alpha} = \dot{\eta}_1 \\ \ddot{\beta} = \dot{\eta}_2 \\ \ddot{\gamma} = -\dot{\eta}_1\cos\beta + \eta_1\dot{\beta}\sin\beta \end{cases}.$$

Połączenie dwóch ostatnich równań zawierających przyspieszenia, po odpowiednio starannych przekształceniach, prowadzi do końcowych równań dynamiki

$$\begin{cases} \left(mr^2 + I\right)\dot{\eta}_1\sin^2\beta + 2\left(mr^2 + I\right)\eta_1\eta_2\sin\beta\cos\beta = 0 \\ \left(mr^2 + I\right)\dot{\eta}_2 - \left(mr^2 + I\right)\eta_1^2\sin\beta\cos\beta = 0 \end{cases}.$$

Pełne równania ruchu kuli toczącej się można zapisać w następującej postaci

$$\begin{cases} \dot{x} = \eta_1 r\sin\beta\sin\gamma + \eta_2 r\cos\gamma \\ \dot{y} = -\eta_1 r\sin\beta\cos\gamma + \eta_2 r\sin\gamma \\ \dot{\alpha} = \eta_1 \\ \dot{\gamma} = -\eta_1\cos\beta \\ \dot{\beta} = \eta_2 \\ \dot{\eta}_1\sin^2\beta + 2\eta_1\eta_2\sin\beta\cos\beta = 0 \\ \dot{\eta}_2 - \eta_1^2\sin\beta\cos\beta = 0 \end{cases}.$$



Rysunek 9.6: Koło pochylone

Struktura równań ruchu pokazuje, że trzy ostatnie równania są niezależne od pozostałych.

9.1.4. Koło pochylone

Ostatnim z analizowanych wyprowadzeń równań ruchu układów nieholonomicznych będzie koło pochylone, toczące się ukośnie w stosunku do płaszczyzny, przedstawione na Rysunku 9.6. Jest to naturalne uogólnienie przykładu badanego w podrozdziale 9.1.2, zobaczymy jednak, że wyprowadzenie równań ruchu koła pochylonego jest technicznie dość skomplikowane. Załóżymy, że koło ma promień r, masę m, a jego momenty bezwładności względem układu ciała są równe $I_1 = I_2 = \frac{1}{4}mr^2$ oraz $I_3 = \frac{1}{2}mr^2$. Niech $q = (x, y, \alpha, \beta, \gamma)^T$ oznacza wektor współrzędnych koła, w którym x, y są współrzędnymi punktu kontaktu koła z podłożem, α jest orientacją koła, β – jego pochyleniem, a γ oznacza kąt obrotu koła. Ruch koła podlega ograniczeniom nieholonomicznym zadanym przez macierz Pfaffa

$$A(q) = \begin{bmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha & 0 & 0 & 0 \\ \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & -r \end{bmatrix}.$$

Stowarzyszony układ sterowania ma macierz sterowań

$$G(q) = \begin{bmatrix} r\cos\alpha & 0 & 0 \\ r\sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Jak wynika z Rysunku, kąty Eulera ZYZ opisujące orientację koła pochylonego są równe

$$\varphi = \alpha - \frac{\pi}{2}, \quad \theta = \beta - \frac{\pi}{2}, \quad \psi = \gamma.$$

Z Rysunku można także wyznaczyć położenie środka ciężkości koła względem układu przestrzeni

$$T = \begin{pmatrix} x + r\sin\alpha\sin\beta \\ y - r\cos\alpha\sin\beta \\ r\cos\beta \end{pmatrix},$$

skąd otrzymujemy prędkości

$$\begin{cases} \dot{T}_1 = \dot{x} + r\dot{\alpha}\cos\alpha\sin\beta + r\dot{\beta}\sin\alpha\cos\beta \\ \dot{T}_2 = \dot{y} + r\dot{\alpha}\sin\alpha\sin\beta - r\dot{\beta}\cos\alpha\cos\beta \\ \dot{T}_3 = -r\dot{\beta}\sin\beta \end{cases}.$$

Mając te dane, lagranżian koła pochylonego wyznaczymy ze wzoru (6.6),

$$\begin{aligned} L = {} & \frac{1}{2}I_1\left(\dot{\alpha}^2\cos^2\beta + \dot{\beta}^2\right) + \frac{1}{2}I_3\left(\dot{\alpha}\sin\beta + \dot{\gamma}\right)^2 + \\ & + \frac{1}{2}m\left(\dot{x} + r\dot{\alpha}\cos\alpha\sin\beta\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{y} + r\dot{\alpha}\sin\alpha\sin\beta\right)^2 + \\ & + \frac{1}{2}mr^2\dot{\beta}^2 + mr\dot{\beta}\left(\dot{x}\sin\alpha - \dot{y}\cos\alpha\right)\cos\beta - mgr\cos\beta. \end{aligned}$$

Wyprowadzenie równań ruchu rozpoczynamy od wzoru (9.1),

$$\begin{cases} m\ddot{x} + mr\ddot{\alpha}\cos\alpha\sin\beta + mr\ddot{\beta}\sin\alpha\cos\beta + \\ \qquad +2mr\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos\alpha\cos\beta - mr\dot{\alpha}^2\sin\alpha\sin\beta + \\ \qquad\qquad -mr\left(\dot{\alpha}^2+\dot{\beta}^2\right)\sin\alpha\sin\beta = \lambda_1\sin\alpha + \lambda_2\cos\alpha \\ m\ddot{y} + mr\ddot{\alpha}\sin\alpha\sin\beta - mr\ddot{\beta}\cos\alpha\cos\beta + \\ \qquad +2mr\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\alpha\cos\beta + mr\dot{\alpha}^2\sin\alpha\sin\beta + \\ \qquad\qquad -mr\left(\dot{\alpha}^2+\dot{\beta}^2\right)\cos\alpha\sin\beta = -\lambda_1\cos\alpha + \lambda_2\sin\alpha \\ mr\left(\ddot{x}\cos\alpha + \ddot{y}\sin\alpha\right)\sin\beta + \left(I_1\cos^2\beta + \left(I_3 + mr^2\right)\sin^2\beta\right)\ddot{\alpha} + \\ \qquad +I_3\ddot{\gamma}\sin\beta + 2\left(I_3 - I_1 + mr^2\right)\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\alpha\cos\alpha + I_2\dot{\beta}\dot{\gamma}\cos\beta = 0 \\ mr\left(\ddot{x}\sin\alpha - \ddot{y}\cos\alpha\right)\cos\beta + \left(I_1 + mr^2\right)\ddot{\beta} + \\ \qquad -\left(I_3 - I_1 + mr^2\right)\dot{\alpha}^2\sin\beta\cos\beta - I_3\dot{\alpha}\dot{\gamma}\cos\beta - mgr\sin\beta = 0 \\ I_3\left(\ddot{\alpha}\sin\beta + \ddot{\gamma}\right) + I_3\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos\beta = -\lambda_2 r \end{cases}.$$

W celu wyeliminowania mnożników λ mnożymy otrzymane równania przez macierz G^T i otrzymujemy

$$\begin{cases} mr\ddot{x}\cos\alpha + mr\ddot{y}\sin\alpha + \left(I_3 + mr^2\right)\ddot{\alpha}\sin\beta + \\ \qquad\qquad +I_3\ddot{\gamma} + \left(I_3 + 2mr^2\right)\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos\beta = 0 \\ mr\ddot{x}\cos\alpha\sin\beta + mr\ddot{y}\sin\alpha\cos\beta + \\ \qquad +\left(mr^2\sin^2\beta + I_1\cos^2\beta + I_3\sin^2\beta\right)\ddot{\alpha} + I_3\ddot{\gamma}\sin\beta + \\ \qquad\qquad +2\left(mr^2 + I_3 - I_1\right)\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\beta\cos\beta - I_3\dot{\beta}\dot{\gamma}\cos\beta = 0 \\ mr\left(\ddot{x}\sin\alpha - \ddot{y}\cos\alpha\right)\cos\beta + \left(I_1 + mr^2\right)\ddot{\beta} + \\ \qquad -\left(mr^2 + I_3 - I_1\right)\dot{\alpha}^2\sin\beta\cos\beta - I_3\dot{\alpha}\dot{\gamma}\cos\beta + mgr\sin\beta = 0 \end{cases}.$$

Stowarzyszony układ sterowania jest postaci

$$\begin{cases} \dot{x} = \eta_1 r\cos\alpha \\ \dot{y} = \eta_1 r\sin\alpha \\ \dot{\alpha} = \eta_2 \\ \dot{\beta} = \eta_3 \\ \dot{\gamma} = \eta_1 \end{cases}.$$

Wyliczamy z niego przyspieszenia

$$\begin{cases} \ddot{x} = \dot{\eta}_1 r\cos\alpha - \eta_1 r\dot{\alpha}\sin\alpha \\ \ddot{y} = \dot{\eta}_1 r\sin\alpha + \eta_1 r\dot{\alpha}\cos\alpha \\ \ddot{\alpha} = \dot{\eta}_2 \\ \ddot{\beta} = \dot{\eta}_3 \\ \ddot{\gamma} = \dot{\eta}_1 \end{cases}$$

i wstawiamy je do wcześniej otrzymanych równań. W efekcie, równania ruchu koła pochylonego przyjmują następująca formę

$$\begin{cases} \dot{x} = \eta_1 r \cos\alpha \\ \dot{y} = \eta_1 r \sin\alpha \\ \dot{\alpha} = \eta_2 \\ \dot{\beta} = \eta_3 \\ \dot{\gamma} = \eta_1 \\ \left(mr^2 + I_3\right)\dot{\eta}_1 + \left(mr^2 + I_3\right)\dot{\eta}_2 \sin\beta + \left(I_3 + 2mr^2\right)\eta_2\eta_3 \cos\beta = 0 \\ \left(mr^2 + I_3\right)\dot{\eta}_1 \sin\beta + \left(\left(mr^2 + I_3\right)\sin^2\beta + I_1\cos^2\beta\right)\dot{\eta}_2 + \\ \qquad\qquad +2\left(mr^2 + I_3 - I_1\right)\eta_2\eta_3 \sin\beta\cos\beta - I_3\eta_1\eta_3\cos\beta = 0 \\ \left(mr^2 + I_1\right)\dot{\eta}_3 - mr^2\eta_1\eta_2\cos\beta + \\ \qquad -\left(mr^2 + I_3 - I_1\right)\eta_2^2 \sin\beta\cos\beta - I_3\eta_1\eta_2\cos\beta + mgr\sin\beta = 0 \end{cases} .$$

9.2. Zadania

Zadanie 9.1 Pokazać, że przy zerowym pochyleniu, $\beta = 0$, lagranżian dla koła pochylonego jest taki sam, jak lagranżian dla koła toczącego się pionowo.

9.3. Komentarze i odniesienia literaturowe

Klasyczną pozycją literatury traktującą o dynamice układów nieholonomicznych jest książka [NF71]. Kompendium wiadomości na ten temat zawiera rozdział 9 monografii [Gut71]. Modele dynamiki robotów mobilnych omawia praca [TMD+00]. O sterowaniu na poziomie dynamiki traktuje praca [Maz09].

Literatura

[Gut71] R. Gutowski, *Mechanika analityczna.* PWN, Warszawa, 1971.

[Maz09] A. Mazur, *Sterowanie oparte na modelu dla nieholonomicznych manipulatorów mobilnych.* Oficyna Wydawnicza PWr, Wrocław, 2009.

[NF71] J. I. Nejmark, N. A. Fufajew, *Dynamika układów nieholonomicznych.* PWN, Warszawa, 1971.

[TMD+00] K. Tchoń, A. Mazur, I. Dulęba, R. Hossa, R. Muszyński, *Manipulatory i roboty mobilne: modele, planowanie ruchu, sterowanie.* Akademicka Oficyna Wydawnicza PLJ, Warszawa, 2000. (Politechnika Wrocławska, projekt AZON, 2018).

Skorowidz

Spis rysunków

Spis twierdzeń