

KATEDRA CYBERNETYKI I ROBOTYKI
WYDZIAŁ ELEKTRONIKI
POLITECHNIKA WROCŁAWSKA
Notatki do wykładów z dziedziny automatyki i robotyki

Krzysztof Tchoń
Robert Muszyński

Metody matematyczne automatyki i robotyki

Wrocław 2017

Krzysztof Tchoń Robert Muszyński

Metody matematyczne automatyki i robotyki

Notatki do wykładów
z dziedziny automatyki i robotyki

Kompilacja: 3 lipca 2020

Wrocław 2017

Krzysztof Tchoń, Robert Muszyński
Wrocław 2017



Podręcznik jest dostępny na licencji Creative Commons: *Uznanie autorstwa-Na tych samych warunkach 4.0 Polska*

Utwór udostępniany na licencji Creative Commons: uznanie autorstwa, na tych samych warunkach. Udziela się zezwolenia do kopiowania, rozpowszechniania i/lub modyfikacji treści utworu zgodnie z zasadami w/w licencji opublikowanej przez Creative Commons. Licencja wymaga podania oryginalnego autora utworu, a dystrybucja materiałów pochodnych może odbywać się tylko na tych samych warunkach (nie można zastrzec, w jakikolwiek sposób ograniczyć, ani rozszerzyć praw do nich). Tekst licencji jest dostępny pod adresem: <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/legalcode.pl>.

Autorzy

Krzysztof Tchoń

Robert Muszyński

Katedra Cybernetyki i Robotyki,

Wydział Elektroniki,

Politechnika Wroclawska

Komputerowy skład tekstu

Robert Muszyński

Krzysztof Tchoń

Spis treści

Spis oznaczeń	VIII
Rozdział 0. Preludium	1
0.1. Pojęcia podstawowe	1
0.1.1. Teoria mnogości	1
0.1.2. Algebra	2
0.1.3. Topologia	3
0.1.4. Analiza	4
0.2. Liniowe układy sterowania	4
0.2.1. Sterowalność	5
0.2.2. Równoważność	6
0.2.3. Klasyfikacja i postacie normalne	7
0.3. Twierdzenie Brunowskiego	10
0.4. Koncepcja wykładu	13
0.5. Dowody	14
0.5.1. Twierdzenie o rozmieszczaniu biegunów	14
0.6. Zadania	16
0.7. Odniesienia literaturowe	17
Literatura	17
Rozdział 1. Funkcje	18
1.1. Rodzaje funkcji	18
1.2. Struktury algebraiczne w zbiorze funkcji	20
1.3. Twierdzenie o Funkcji Odwrotnej	21
1.4. Twierdzenie o Funkcji Uwikłanej	22
1.5. Obliczanie funkcji odwrotnej	23
1.5.1. Algorytm Newtona	23
1.5.2. Algorytm Najszybszego Spadku	24
1.6. Dowody	25
1.6.1. Twierdzenie o Funkcji Uwikłanej	25
1.7. Zadania	25
1.8. Odniesienia literaturowe	26
Literatura	27

Rozdział 2. Funkcje liniowe. Równoważność funkcji	28
2.1. Funkcje liniowe	28
2.2. Macierze i normy macierzy	29
2.3. Równoważność typu LR	31
2.4. Submersje i immersje	31
2.5. Dowody	33
2.5.1. Twierdzenie o Submersjach	33
2.5.2. Twierdzenie o Immersjach	33
2.6. Zadania	34
2.7. Odniesienia literaturowe	35
Literatura	35
Rozdział 3. Funkcje Morse'a. Twierdzenie o Punkcie Stałym	36
3.1. Punkty i wartości krytyczne	36
3.2. Funkcje Morse'a, Twierdzenie Morse'a	37
3.3. Lemat Hadamarda	38
3.4. Klasyfikacja funkcji: podsumowanie	39
3.5. Twierdzenie o Punkcie Stałym	39
3.6. Dowody	40
3.6.1. Lemat Hadamarda	40
3.6.2. Twierdzenie o Punkcie Stałym	41
3.7. Zadania	41
3.8. Odniesienia literaturowe	42
Literatura	42
Rozdział 4. Układy dynamiczne zależne od czasu	43
4.1. Równania różniczkowe. Twierdzenie o Istnieniu i Jednoznaczności rozwiązania	43
4.2. Lemat Bellmana-Gronwalla, zależność od warunków początkowych	44
4.3. Układy liniowe zależne od czasu	45
4.4. Wzór Peano-Bakera	46
4.5. Nierówność Ważewskiego	46
4.6. Dowody	47
4.6.1. Twierdzenie o Istnieniu i Jednoznaczności	47
4.6.2. Wzór Peano-Bakera	49
4.6.3. Nierówność Ważewskiego	49
4.7. Zadania	50
4.8. Odniesienia literaturowe	51
Literatura	51
Rozdział 5. Stabilność	52
5.1. Stabilność, stabilność jednostajna, stabilność asymptotyczna	52
5.2. Funkcje klasy K i K_∞	54

5.3. Twierdzenie o Funkcji Lapunowa	54
5.4. Lemat Barbalata	55
5.5. Ocena zbieżności	56
5.6. Zadania	57
5.7. Odniesienia literaturowe	58
Literatura	58
Rozdział 6. Układy dynamiczne niezależne od czasu	59
6.1. Strumień układu	59
6.2. Równoważność układów dynamicznych	61
6.3. Twierdzenie o Równoważności Różniczkowej	61
6.4. Twierdzenie o Prostowaniu	62
6.5. Punkty równowagi	62
6.6. Linearyzacja układów dynamicznych	63
6.7. Równoważność układów liniowych	64
6.8. Klasyfikacja układów dynamicznych: podsumowanie	65
6.9. Dowody	66
6.9.1. Twierdzenie o Równoważności Różniczkowej	66
6.9.2. Twierdzenie o Prostowaniu	67
6.10. Zadania	68
6.11. Odniesienia literaturowe	69
Literatura	69
Rozdział 7. Twierdzenie Frobeniusa	70
7.1. Pola wektorowe, duży operator dołączony	70
7.2. Nawias Liego	71
7.3. Twierdzenia o Nawiasie Liego	72
7.4. Twierdzenie o Jednoczesnym Prostowaniu	72
7.5. Dystrybucja i rozmaitość całkowita	73
7.6. Twierdzenie Frobeniusa	73
7.7. Dowody	74
7.7.1. Twierdzenie o Przemienności	74
7.7.2. Twierdzenie o Jednoczesnym Prostowaniu	75
7.7.3. Twierdzenie Frobeniusa	76
7.8. Zadania	78
7.9. Odniesienia literaturowe	78
Literatura	79
Rozdział 8. Układy sterowania	80
8.1. Układy afiniczne i bezdryfowe	81
8.2. Różniczkowanie odwzorowania końcowego	82
8.3. Osiągalność i sterowalność	83
8.4. Twierdzenia o sterowalności	85
8.5. Sprawdzanie sterowalności	86

8.6. Przykłady	88
8.7. Zadania	92
8.8. Odniesienia literaturowe	93
Literatura	93
Rozdział 9. Równoważność układów sterowania	94
9.1. Równoważność w przestrzeni stanu i przez sprzężenie zwrotne .	94
9.2. Linearyzacja w przestrzeni stanu i przez sprzężenie zwrotne . .	96
9.3. Równania równoważności	97
9.4. Znaczenie linearyzowalności dla syntezy algorytmów sterowania	98
9.5. Przykłady	100
9.6. Zadania	105
9.7. Odniesienia literaturowe	106
Literatura	106
Rozdział 10. Odsprężanie odwzorowania we/wy i linearyzacja	108
10.1. Stopień różniczkowy	108
10.2. Odsprężanie	109
10.3. Dynamika układu odsprężonego	110
10.4. Przykłady	113
10.5. Zadania	115
10.6. Odniesienia literaturowe	116
Literatura	116
Rozdział 11. Układy w postaci łańcuchowej	117
11.1. Postać łańcuchowa	117
11.2. Twierdzenie Murraya	117
11.3. Całkowanie wsteczne	118
11.4. Przykłady	120
11.5. Odniesienia literaturowe	125
Literatura	126
Rozdział 12. Dynamiczne sprzężenie zwrotne, linearyzacja	127
12.1. Motywacja	127
12.2. Dynamiczne sprzężenie zwrotne	130
12.3. Twierdzenia o dynamicznej linearyzacji	131
12.3.1. Kompensator Brunowskiego	131
12.4. Płaskość różniczkowa	133
12.5. Przykłady	134
12.6. Odniesienia literaturowe	139
Literatura	140
Rozdział 13. Ograniczenia sprzężenia zwrotnego	141
13.1. Układy liniowe	141

13.2. Twierdzenie Brocketta	141
13.3. Twierdzenie Lizárragi	143
13.4. Odniesienia literaturowe	145
Literatura	145
Skorowidz	146
Spis rysunków	150
Spis twierdzeń	152

Do składu książki wykorzystano system przygotowania dokumentów \LaTeX , opracowany przez L. Lamport [Lam94], będący nakładką systemu \TeX [Knu86a,Knu86b]. Matematyczne czcionki o nazwie AMS Euler, których używamy w tej książce, zostały opracowane przez H. Zapfa [KZ86] na zlecenie Amerykańskiego Towarzystwa Matematycznego, i użyte do składu książki [GKP96]. Wybrane czcionki składu tekstu, Antykw Toruńska [Now97] – jeden z nielicznych krojów pisma zaprojektowany specjalnie dla języka polskiego w sposób uwzględniający jego rytm – w odczuciu autorów doskonale współgrają z kształtem czcionki AMS Euler, pozwalając na uzyskanie harmonijnej całości.

- [GKP96] R. L. Graham, D. E. Knuth i O. Patashnik, *Matematyka konkretna*. PWN, Warszawa, 1996.
- [Knu86a] D. E. Knuth, *The \TeX book, volume A of Computers and Typesetting*. Addison-Wesley, Reading, 1986.
- [Knu86b] D. E. Knuth, *\TeX : The Program, volume B of Computers and Typesetting*. Addison-Wesley, Reading, 1986.
- [KZ86] D. E. Knuth i H. Zapf, *AMS Euler — A new typeface for mathematics*. Scholarly Publishing, 20:131–157, 1986.
- [Lam94] L. Lamport, *\LaTeX : A Document Preparation System*. Addison-Wesley, Reading, 1994.
- [Now97] J. Nowacki, Antykw Toruńska — od początku do końca polska czcionka. *Biuletyn Polskiej Grupy Użytkowników Systemu \TeX* , 9:26–27, 1997.

Spis oznaczeń

Ad	duży operator dołączony (70)
ad	mały operator dołączony (70)
C^0	klasa funkcji ciągłych (18)
\mathcal{C}_f	zbiór punktów krytycznych (36)
C^k	klasa funkcji różniczkowalnych (18)
C^∞	klasa funkcji gładkich (18)
C^ω	klasa funkcji analitycznych (18)
e_i	wektor jednostkowy (72)
f, g	funkcja (1)
L	pochodna Liego (72)
$[\cdot, \cdot]_{\mathbb{R}^n}$	nawias Liego (70)
\mathbb{R}^n	przestrzeń euklidesowa (18)
S^1	okrąg jednostkowy (60)
X, Y, Z	pole wektorowe (70)
$\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$	zbiór (1)

Rozdział 0

Preludium

0.1. Pojęcia podstawowe

Zacniemy od objaśnienia kilku podstawowych pojęć z teorii mnogości, algebry, topologii i analizy matematycznej, które pojawią się w tych notatkach. Zakładamy, że Czytelnik spotkał się z językiem logiki matematycznej, operacjami teoriomnogościowymi na zbiorach, a także ma wiadomości z analizy, algebry i rachunku różniczkowego ujęte w programie kształcenia na studiach technicznych (inżynierskich). Oczekujemy, że jeżeli jakieś pojęcie nie zostało omówione w tych notatkach, Czytelnik potrafi je znaleźć w literaturze.

0.1.1. Teoria mnogości

Zbiór traktujemy jako pojęcie pierwotne. Niech X, Y oznaczają pewne uniwersa (zbiory), o elementach x, y, z . Podzbiór $\mathcal{R} \subset X \times Y$ nazywamy dwuargumentową relacją. Mówimy, że x jest w relacji \mathcal{R} z y , $x\mathcal{R}y$, jeżeli $(x, y) \in \mathcal{R}$.

Definicja 0.1.1 Relację $\mathcal{R} \subset X \times Y$ nazywamy funkcją, jeżeli

$$(x, y), (x, z) \in \mathcal{R} \implies y = z.$$

Funkcję zapisujemy formułą $f : X \longrightarrow Y$. Zbiór $G_f = \{(x, y) | (x, y) \in f\}$ nazywamy wykresem funkcji.

Definicja 0.1.2 Niech będzie dane uniwersum X . Funkcję

$$f : X \times X \longrightarrow X$$

będziemy nazywać (dwuargumentową) operacją (działaniem) w X .

Definicja 0.1.3 Relację $\mathcal{R} \subset X \times X$ nazywamy relacją równoważności, jeżeli zachodzą następujące warunki:

- zwrotność: $x\mathcal{R}x$,
- symetria: $x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$,

— przechodność: $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}z$.

Każda relacja równoważności dzieli uniwersum na niepuste i rozłączne klasy równoważności definiowane jako

$$[x] = \{y \in X | y\mathcal{R}x\}.$$

Podział ten jest wyczerpujący, tzn. $\bigcup_{x \in X} [x] = X$, a więc każdy element uniwersum należy do pewnej klasy równoważności. Klasyfikacja elementów uniwersum polega na wprowadzeniu relacji równoważności i scharakteryzowaniu każdej klasy równoważności za pomocą pewnego rodzaju etykiety, którą jest charakterystyczny element tej klasy. Element ten nazywamy postacią normalną lub, niekiedy, postacią kanoniczną elementów z klasy. Zatem, celem klasyfikacji jest wyznaczenie klas równoważności i przyporządkowanie każdej z nich postaci normalnej. Z uwagi na efektywność klasyfikacji jest rzeczą pożądaną, żeby liczba klas była skończona. Z drugiej strony, klasyfikacja nie powinna być trywialna, na przykład zaliczająca wszystkie obiekty uniwersum do jednej klasy. Lejtmotywem niniejszego cyklu wykładów jest klasyfikacja trzech uniwersów matematycznych: funkcji, układów dynamicznych i układów sterowania.

0.1.2. Algebra

Definicja 0.1.4 Niech będzie dane uniwersum X z operacją \circ . Układ (X, \circ) nazywamy grupą, jeżeli w X istnieje element neutralny e , taki że $x \circ e = e \circ x = x$ i każdy element $x \in X$ posiada element odwrotny $x^{-1} \in X$, taki że $x^{-1} \circ x = x \circ x^{-1} = e$. Jeżeli operacja grupowa jest przemienna, $x \circ y = y \circ x$, to grupę nazywamy przemienną (komutatywną). Jeżeli operacja grupowa jest łączna, $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$, to grupę nazywamy łączną (asocjatywną).

Definicja 0.1.5 Jeżeli w uniwersum X są zdefiniowane dwie operacje: \circ , względem której X jest grupą i druga operacja $*$, takie że zachodzi własność rozdzielności $x * (y \circ z) = (x * y) \circ (x * z)$, a także $(y \circ z) * x = (y * x) \circ (z * x)$, to X nazywamy pierścieniem. Jeżeli istnieje w pierścieniu element 1 , taki że $1 * x = x$, to pierścień nazywamy pierścieniem z jedyneką.

Definicja 0.1.6 Uniwersum X nazywamy przestrzenią liniową nad zbiorem liczb rzeczywistych \mathbb{R} , jeżeli grupa (X, \circ) jest przemienna i łączna, i jest określone mnożenie elementów X przez liczby $\alpha, \beta, 1 \in \mathbb{R}$, o własnościach $(\alpha + \beta) \circ x = \alpha x \circ \beta x$, $\alpha(x \circ y) = \alpha x \circ \alpha y$, $(\alpha\beta) \circ x = \alpha(\beta \circ x)$

i $1x = x$. Jeżeli zamiast R weźmiemy pewien pierścień z jedynką \mathcal{R} , to \mathcal{X} nazywa się modułem nad tym pierścieniem.

Definicja 0.1.7 *Uniwersum \mathcal{X} z dwiema operacjami $\circ, *$, takie że (\mathcal{X}, \circ) jest przestrzenią liniową nad R i $(\mathcal{X}, *)$ jest pierścieniem, a wprowadzone operacje spełniają warunki $(x \circ y) * z = (x * z) \circ (y * z)$ i $x * (y \circ z) = (x * y) \circ (x * z)$, nazywamy algebrą.*

0.1.3. Topologia

Pojęcie przestrzeni topologicznej wprowadzimy za pomocą rodziny zbiorów otwartych.

Definicja 0.1.8 *Niech \mathcal{X} oznacza pewne uniwersum. Topologią \mathcal{X} nazywamy rodzinę \mathcal{O} podzbiorów \mathcal{X} , zwanych zbiorami otwartymi, mających następujące własności:*

- zbiór pusty i całe uniwersum należą do \mathcal{O} ,
- iloczyn dwóch zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym,
- suma dowolnie wielu zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.

Parę $(\mathcal{X}, \mathcal{O})$ nazywamy przestrzenią topologiczną. Przez otoczenie punktu $x \in \mathcal{X}$ rozumiemy dowolny podzbiór otwarty \mathcal{X} , którego elementem jest x .

Definicja 0.1.9 *Niech będzie dana funkcja $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ między dwiema przestrzeniami topologicznymi. Funkcję f nazywamy ciągłą, jeżeli przeciwobraz każdego podzbioru otwartego w \mathcal{Y} jest otwarty w \mathcal{X} . W języku ciągów ciągłość oznacza, że dla każdego ciągu $\{x_n\}$ elementów przestrzeni \mathcal{X} zachodzi*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n\right).$$

W trakcie wykładu będziemy używać charakterystyki topologicznej pewnych zbiorów. W tym celu definiujemy.

Definicja 0.1.10 *Zbiorem domkniętym nazywamy dopełnienie zbioru otwartego. Wnętrzem $\text{int } A$ podzbioru $A \subset \mathcal{X}$ nazywamy największy zbiór otwarty zawarty w A . Podzbiór A nazywamy brzegowym, jeżeli ma puste wnętrze. Zbiór A nazywamy nigdziegęstym, jeżeli jest domknięty i brzegowy. Podzbiór A nazywamy gęstym w \mathcal{X} , jeżeli w każdym otoczeniu każdego punktu $x \in \mathcal{X}$ znajdują się punkty A . Przestrzeń topologiczną nazywamy zupełną, jeżeli każdy ciąg elementów tej przestrzeni ma granicę w tej przestrzeni.*

0.1.4. Analiza

Podstawowym narzędziem wykorzystywanym w dalszym ciągu wykładu jest rachunek różniczkowy. Z tego względu wprowadzimy pojęcie pochodnej. Wygodną do tego scenerią są przestrzenie Banacha.

Definicja 0.1.11 *Przestrzeń topologiczną \mathcal{X} nazywamy przestrzenią Banacha, jeżeli jest przestrzenią liniową (nad \mathbb{R}), unormowaną i zupełną. Topologia przestrzeni Banacha jest zdefiniowana za pomocą normy. Jeżeli $\|\cdot\|$ oznacza normę, to otoczenie o promieniu r punktu x w przestrzeni Banacha ma postać*

$$\{y \in \mathcal{X} \mid \|y - x\| < r\},$$

a kulę domkniętą o środku w x_0 i promieniu r definiujemy jako

$$B_r(x_0) = \{y \in \mathcal{X} \mid \|y - x_0\| = r\}.$$

Definicja 0.1.12 *Niech $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ oznacza przekształcenie przestrzeni Banacha. Pochodną Fréchéta funkcji f w punkcie x nazywamy funkcję liniową $Df(x) : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ spełniającą warunek*

$$f(x + v) = f(x) + Df(x)v + O(v^2),$$

gdzie symbol Landaua $O(\epsilon^2)$ składniki rzędu ≥ 2 . Pochodna Gateaux funkcji f definiujemy następująco

$$Df(x)v = \left. \frac{d}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} f(x + \alpha v) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} v.$$

Pochodną Gateaux można efektywnie obliczyć. Jej znaczenie wynika z faktu, że jeżeli pochodna Gateaux istnieje i jest ciągła, to jest równa pochodnej Fréchéta.

0.2. Liniowe układy sterowania

Przez liniowy układ sterowania będziemy rozumieć układ opisany przy pomocy układu liniowych równań różniczkowych

$$\sigma : \dot{x} = Ax(t) + Bu(t), \tag{1}$$

gdzie $x \in \mathbb{R}^n$ – zmienna stanu, $u \in \mathbb{R}^m$ – zmienna sterująca, a A i B są odpowiednio, macierzami dynamiki i sterowania rozmiarów $n \times n$ i $n \times m$.

Przestrzenie \mathbb{R}^n i \mathbb{R}^m nazywamy przestrzenią stanu i przestrzenią sterowań. Dla układu sterowania zadanie sterowania polega na znalezieniu takiego sterowania, które zapewni realizację celu sterowania.

Każdy układ liniowy możemy utożsamić z parą macierzy, $\sigma = (A, B)$, zatem zbiór układów liniowych $\Sigma \cong \mathbb{R}^{n^2+n^m}$. Przy zadanym sterowaniu $u(t)$ i stanie początkowym x_0 trajektoria układu może być wyznaczona jako rozwiązanie równania różniczkowego (1). Korzystając z metody uzmienniania stałej otrzymujemy

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds. \quad (2)$$

Macierzowa funkcja wykładnicza występująca we wzorze (2) jest zdefiniowana jako suma nieskończonego szeregu

$$e^{tA} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(tA)^i}{i!}.$$

Istnieje kilka sposobów wyliczenia tej funkcji bez uciekania się do sumowania nieskończonego szeregu.

0.2.1. Sterowalność

Podstawową własnością układu sterowania, jego *raison d'être*, jest możliwość osiągnięcia każdego punktu w przestrzeni stanu przez odpowiedni dobór sterowania. Tę własność układu nazywamy sterowalnością. Ścisłej mówiąc, przyjmujemy następującą definicję sterowalności

Definicja 0.2.1 Układ (1) jest sterowalny, jeżeli dla każdego stanu początkowego x_0 i każdego stanu docelowego x_d istnieje sterowanie $u(t)$ i czas $T \geq 0$, taki że

$$x(T) = e^{TA}x_0 + \int_0^T e^{(T-s)A}Bu(s)ds = x_d.$$

Ponieważ x_0 i x_d są dowolne, a macierz e^{TA} jest odwracalna, formuła sterowalności oznacza, że całka

$$I = \int_0^T e^{-sA}Bu(s)ds \quad (3)$$

przyjmuje wszystkie wartości w \mathbb{R}^n . Mając zdefiniowane pojęcie sterowalności pytamy, jak sprawdzić, czy dany układ liniowy jest sterowalny.

Okazuje się, że dla liniowych układów sterowania odpowiedź na to pytanie jest stosunkowo prosta i prowadzi do efektywnych kryteriów sterowalności. Przy zadanym stanie x zdefiniujemy sterowanie w następujący sposób

$$u(t) = B^T e^{-tA^T} G_T^{-1} x, \quad (4)$$

gdzie

$$G_T = \int_0^T e^{-sA} B B^T e^{-sA^T} ds$$

nazywa się macierzą Grama układu (1). Sterowanie (4) jest dobrze określone, pod warunkiem że macierz Grama jest odwracalna. Nietrudno sprawdzić, że podstawienie tego sterowania do wzoru (3) daje $I = x$. Korzystając z tych obserwacji formułujemy następujący warunek konieczny i wystarczający sterowalności liniowego układu sterowania.

Twierdzenie 0.2.1 *Układ (1) jest sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnego $T > 0$ macierz Grama $G_T = \int_0^T e^{-sA} B B^T e^{-sA^T} ds$ jest odwracalna ($\det G_T \neq 0$). Co więcej, sterowanie przeprowadzające układ ze stanu x_0 do stanu x_d w czasie T ma postać*

$$u(t) = B^T e^{-tA^T} G_T^{-1} (e^{-TA} x_d - x_0).$$

Sprawdzenie warunków Twierdzenia 0.2.1 nie jest łatwe, dlatego do efektywnego orzekania sterowalności układu liniowego używamy następującego kryterium Kalmana.

Twierdzenie 0.2.2 *Dla układu $\sigma = (A, B)$ opisanego wzorem (1) definiujemy macierz Kalmana*

$$\Omega = [B, AB, \dots, A^{n-1}B].$$

Układ (1) jest sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy macierz Kalmana ma rząd n ,

$$\text{rank } \Omega = n.$$

0.2.2. Równoważność

Niech będą dane dwa układy liniowe postaci (1) zadane jako

$$\begin{aligned} \sigma : \dot{x} &= Ax(t) + Bu(t), \\ \sigma' : \dot{\xi} &= F\xi(t) + Gv(t), \end{aligned}$$

gdzie $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ $u, v \in \mathbb{R}^m$. Układy sterowania będziemy uważać za równoważne, jeżeli zachodzi wzajemnie jednoznaczna zależność ich trajektorii. Mówiąc bardziej precyzyjnie, wyróżniamy dwa rodzaje równoważności układów liniowych, S-równoważność i F-równoważność, zdefiniowane w następujący sposób.

Definicja 0.2.2 *Dwa układy liniowe są S-równoważne (równoważne w przestrzeni stanu), tzn.*

$$\sigma \underset{S}{\cong} \sigma' \iff u = v \text{ i } (\exists P, \det P \neq 0)(\xi = Px, \text{ tzn. } PA = FP, PB = G).$$

Definicja 0.2.3 *Dwa układy liniowe są F-równoważne (równoważne przez sprzężenie zwrotne), tzn.*

$$\sigma \underset{F}{\cong} \sigma' \iff (\exists P, \det P \neq 0, K, Q, \det Q \neq 0)(\xi = Px, u = Kx + Qv, \text{ tzn. } PA + PKB = FP, PBQ = G).$$

Obie równoważności są relacjami równoważności, tzn. są zwrotne, symetryczne i przechodnie. Łatwo zauważyć, że S-równoważność jest szczególnym przypadkiem F-równoważności przy $K = 0$ i $Q = I_m$. Związek między sterowalnością a równoważnością układów opisuje następujące

Twierdzenie 0.2.3 *Sterowalność jest niezmiennikiem równoważności układów, tzn. jeżeli $\sigma \underset{F}{\cong} \sigma'$ i σ jest sterowalny, to również σ' jest sterowalny. A fortiori, to samo dotyczy S-równoważności.*

0.2.3. Klasyfikacja i postacie normalne

Niech będzie dany sterowalny liniowy układ sterowania o jednym wejściu

$$\sigma : \dot{x} = Ax(t) + bu(t),$$

gdzie $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$. Pokażemy, że przy specyficznym wyborze macierzy P układ σ jest S-równoważny tzw. układowi w postaci normalnej sterowalności. Ponieważ σ jest sterowalny, spełnia kryterium Kalmana, co oznacza, że kwadratowa macierz

$$\Omega = [b, Ab, \dots, A^{n-1}b]$$

jest odwracalna. Weźmy $P = \Omega^{-1}$. Szukamy macierzy F , takiej że $PA = FP$, czyli $A\Omega = R\Omega$. Obliczamy

$$A\Omega = [Ab, A^2b, \dots, A^nb].$$

Na mocy Twierdzenia Cayleya-Hamiltona otrzymujemy

$$A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - a_{n-2}A^{n-2} - \dots - a_0I_n,$$

gdzie a_i oznaczają współczynniki wielomianu charakterystycznego macierzy A , $\det(\lambda I_n - A) = 0$. Korzystając z warunku S-równoważności, $A\Omega = \Omega F$, otrzymujemy równanie

$$\begin{aligned} A\Omega &= \begin{bmatrix} Ab & A^2b & \dots & -\sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} b & Ab & \dots & A^{n-1}b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & -a_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} = \Omega F. \end{aligned}$$

Wektor sterowań g postaci normalnej wyznaczamy z równości $Pb = g$, czyli $b = \Omega g$, otrzymując $g = (1, 0, \dots, 0)^T$. Wykazaliśmy w ten sposób S-równoważność układu σ z układem w postaci normalnej sterowalności

$$\sigma' : \dot{\xi} = F\xi(t) + gu(t), \quad (5)$$

z macierzą F i wektorem g

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & -a_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Inną postać normalną układu σ , zwaną postacią normalną sterownika, otrzymujemy w następujący sposób. Szukamy macierzy F i wektora g spełniających zależności $PA = FP$ i $Pb = g$, dla pewnej macierzy P . Niech ponownie Ω oznacza macierz Kalmana. Ze sterowalności wynika, że macierz ta jest odwracalna, zatem istnieje macierz Ω^{-1} . Oznaczmy jej wiersze symbolami v_1^T, \dots, v_n^T , tak żeby

$$\Omega^{-1} = \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{bmatrix}$$

Na mocy definicji macierz Ω spełnia warunek

$$\Omega^{-1}\Omega = \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{bmatrix} [b \quad Ab \quad \dots \quad A^{n-1}b] = I_n,$$

skąd wynikają równości

$$v_n^T b = v_n^T Ab = \dots = v_n^T A^{n-2}b = 0, \quad v_n^T A^{n-1}b = 1.$$

Macierz P zdefiniujemy wzorem

$$P = \begin{bmatrix} v_n^T \\ v_n^T A \\ \vdots \\ v_n^T A^{n-1} \end{bmatrix}$$

Iloczyn macierzy

$$P\Omega = \begin{bmatrix} v_n^T \\ v_n^T A \\ \vdots \\ v_n^T A^{n-1} \end{bmatrix} [b \quad Ab \quad \dots \quad A^{n-1}b] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & * \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & * & \dots & * & * \end{bmatrix},$$

gdzie gwiazdki oznaczają elementy, których znajomość nie jest potrzebna. Jak łatwo zauważyć, macierz P jest odwracalna, może więc definiować S -równoważność. Z formuły równoważności wynika, że $FP = PA$; korzystając znów z Twierdzenia Cayleya-Hamiltona można sprawdzić, że warunek ten spełnia macierz

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & 0 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix},$$

gdzie, jak poprzednio, a_0, a_1, \dots, a_{n-1} oznaczają współczynniki równania charakterystycznego macierzy A . Wektor $g = Pb$, a zatem $g = (0, 0, \dots, 0, 1)^T$. Podsumowując, pokazaliśmy, jak liniowy układ sterowania σ sprowadzić do postaci normalnej sterownika

$$\sigma' : \dot{\xi} = F\xi(t) + gu(t),$$

z macierzą F i wektorem g określonymi powyżej. Postać normalna sterownika ma zastosowanie przy syntezy sprzężenia zwrotnego, w szczególności pozwala udowodnić ważne Twierdzenie o rozmieszczaniu biegunów. Niech σ oznacza układ liniowy (1).

Twierdzenie 0.2.4 *Jeżeli układ σ jest sterowalny, to istnieje sprzężenie zwrotne $u = Kx$, takie że macierz $A + BK$ układu ze sprzężeniem zwrotnym ma zadane widmo. Oznacza to, że dla zadanego zestawu liczb zespolonych $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ spełniających warunek $\lambda \in \Lambda \Rightarrow \lambda^* \in \Lambda$, $*$ – sprzężenie liczb zespolonych, zachodzi*

$$\text{sp}(A + BK) = \Lambda.$$

Jeżeli widmo umieścimy w lewej półpłaszczyźnie płaszczyzny liczb zespolonych, to uzyskamy układ asymptotycznie stabilny. Zadanie stabilizacji układu σ polega na znalezieniu takiego sterowania w pętli sprzężenia zwrotnego, żeby trajektorie układu zamkniętego dążyły do zera. Konsekwencją Twierdzenia 0.2.4 jest zatem

Spostrzeżenie 0.2.1 *Każdy sterowalny układ liniowy jest stabilizowalny.*

0.3. Twierdzenie Brunowskiego

Pokazaliśmy, że układ liniowy z jednym wejściem jest S-równoważny postaci normalnej sterownika (F, g) . Przedstawione explicite równania układu w tej postaci wyglądają następująco

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = \xi_3 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{n-1} = \xi_n \\ \dot{\xi}_n = -a_0\xi_1 - a_1\xi_2 - \dots - a_{n-1}\xi_n + u \end{cases} .$$

Zastosujmy do tego układu sprzężenie zwrotne $u = k^T \xi + v$, w którym $k^T = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$. W rezultacie, otrzymujemy układ

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = \xi_3 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{n-1} = \xi_n \\ \dot{\xi}_n = v \end{cases} .$$

Okazuje się, że tego rodzaju postać normalną można uzyskać dla każdego sterowalnego układu liniowego. Postać ta nazywa się postacią kanoniczną Brunowskiego. Niech σ oznacza układ opisany wzorem (1),

o n -wymiarowej przestrzeni stanu i m wejściach sterujących, z macierzą B rzędu m . Dla układu σ zdefiniujemy ciąg liczb

$$\begin{cases} \rho_0 = \text{rank } B \\ \rho_1 = \text{rank } [B \ AB] - \text{rank } B \\ \vdots \\ \rho_{n-1} = \text{rank } [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B] - \text{rank } [B \ AB \ \dots \ A^{n-2}B] \end{cases}$$

Na mocy definicji liczby ρ_i mają dwie własności:

$$\rho_0 = m \geq \rho_1 \geq \rho_2 \geq \dots \geq \rho_{n-1} \geq 0$$

i

$$\sum_{i=0}^{n-1} \rho_i = n.$$

Można pokazać, że liczby te są niezmiennikami sprzężenia zwrotnego, tzn. układy F -równoważne mają takie same ρ_i . Co więcej, liczby ρ_i stanowią pełny układ niezmienników sprzężenia zwrotnego, tzn.

$$\sigma \underset{F}{\cong} \sigma' \iff \rho_i(\sigma) = \rho_i(\sigma').$$

Okazuje się, że zamiast n -niezmienników ρ_i wystarczy wziąć m -niezmienników $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_m$ zdefiniowanych w następujący sposób

$$\kappa_i = \#\rho_k | \rho_k \geq i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Symbol $\#$ oznacza liczbę elementów. Liczby κ_i nazywają się wskaźnikami sterowalności układu σ ; mają one następujące własności:

$$\kappa_1 \geq \kappa_2 \geq \dots \geq \kappa_m \geq 1$$

i

$$\sum_{i=1}^m \kappa_i = n.$$

Podobnie jak ρ_i , także κ_i stanowią pełny układ niezmienników sprzężenia zwrotnego. Mamy następujące

Twierdzenie 0.3.1 (Brunowski) *Niech sterowalny układ $\sigma = (A, B)$ z macierzą B rzędu m , ma wskaźniki sterowalności $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_m$. Wów-*

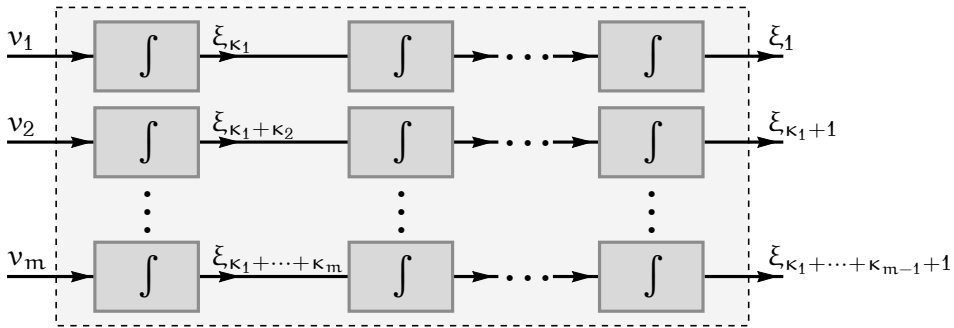
czas, σ jest F-równoważny układowi $\sigma' = (F, G)$, w postaci kanonicznej Brunowskiego, z macierzą dynamiki

$$F = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_{\kappa_1-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} 0 & I_{\kappa_2-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \begin{bmatrix} 0 & I_{\kappa_m-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

i macierzą sterowań

$$G = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{\kappa_1 \times 1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{\kappa_2 \times 1} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{\kappa_m \times 1} \end{bmatrix}_{n \times m}.$$

Układ w postaci kanonicznej Brunowskiego ma strukturę m ciągów całkowania, o długościach $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_m$, przedstawioną schematycznie na rysunku 1. Zauważmy, że podzbiór $\mathcal{B} \subset \Sigma$ przestrzeni układów liniowych $\Sigma \cong \mathbb{R}^{n^2+mn}$ obejmuje „prawie wszystkie” układy liniowe. Ściślej mówiąc, układy, które nie spełniają warunków Twierdzenia 0.3.1 są zdefiniowane przez pewną liczbę równań typu $\det = 0$, stanowią zatem tzw. zbiór algebraiczny, złożony z pierwiastków wielomianów zależnych od elementów macierzy A i B . Zbiór algebraiczny jest domknięty i brzegowy (nie zawiera żadnego podzbioru otwartego). Jego dopełnienie, które składa się z układów spełniających warunki Brunowskiego jest zbiorem otwartym i gęstym w Σ . Twierdzenie 0.3.1 orzeka zatem, że zbiór „prawie wszystkich”, albo „typowych” układów liniowych można podzielić na skończoną liczbę klas układów F-równoważnych odpowiedniej postaci kanonicznej



Rysunek 1: Układ w postaci kanonicznej Brunowskiego

Brunowskiego. Liczba klas jest wyznaczona przez liczbę podziałów liczby n na sumę m składników całkowitych $i \geq 1$ ułożonych w kolejności malejącej. Liczba N klas równoważności jest niewielka dla małych n i m , i szybko rośnie ze wzrostem n i m . Jeżeli $n = km + r$, $r < m$, to $p(r) \leq N \leq p(n - m)$, gdzie $p(r)$ oznacza tzw. liczbę partycji liczby r , tzn. przedstawień r w postaci sumy dodatnich liczb całkowitych. Istnieje tablica wartości $p(r)$ dla $r \leq 200$, której fragment zamieszczamy poniżej:

r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...	200
$p(r)$	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	...	3972999029388

Twierdzenie o postaciach kanonicznych Brunowskiego należy do najładniejszych i najgłębszych wyników liniowej teorii sterowania.

0.4. Koncepcja wykładu

Wykład ma na celu zaznajomienie Słuchacza z wybranymi pojęciami i metodami matematycznymi stosowanymi we współczesnej automatyce i robotyce. Koncepcja wykładu polega na przedstawieniu klasyfikacji trzech rodzajów obiektów matematycznych: funkcji, układów dynamicznych i układów sterowania. Niedoścignionym wzorem takiej klasyfikacji jest przedstawione w poprzednim rozdziale twierdzenie o postaciach kanonicznych Brunowskiego. Przy realizacji koncepcji wykładu zostaną przedstawione i wykorzystane tzw. trzy filary analizy nieliniowej, czyli

- Twierdzenie o Funkcji Odwrotnej,
- Twierdzenie o Istnieniu i Jednoznaczności rozwiązania układu równań różniczkowych,
- Twierdzenie Frobeniusa o dystrybucjach.

0.5. Dowody

0.5.1. Twierdzenie o rozmieszczaniu biegunów

Dowód Twierdzenia 0.2.4 jest przykładem zastosowania postaci normalnych układów liniowych. Przedstawimy go w przypadku układu (A, b) z jednym wejściem, postaci $\dot{x} = Ax(t) + bu(t)$.

Dowód: Jak pokazaliśmy w rozdziale 0.2.3, ze sterowalności układu wynika istnienie postaci normalnej sterownika, $\dot{\xi} = F\xi(t) + gu(t)$, takiej że

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \dots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

gdzie liczby $\{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}\}$ oznaczają współczynniki równania charakterystycznego macierzy A . Przypominamy, że sprowadzalność układu do postaci sterownika oznacza istnienie macierzy

$$P = \begin{bmatrix} v_n^T \\ v_n^T A \\ \vdots \\ v_n^T A^{n-1} \end{bmatrix},$$

w której wektor v_n^T pochodzi z ostatniego wiersza odwrotnej macierzy Kalmana Ω^{-1} , takiej że

$$PA = FP, \quad Pb = g.$$

Ponieważ macierze A i F łączy relacja podobieństwa, ich wielomiany charakterystyczne i widma są identyczne. Niech $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ oznacza zadane wartości własne układu zamkniętego. Utwórzmy wielomian

$$\alpha_\gamma(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) = \lambda^n + \gamma_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \gamma_1\lambda + \gamma_0. \quad (6)$$

Dla postaci normalnej sterownika zdefiniujmy dla pewnego sprzężenia zwrotnego $f = (f_0, f_1, \dots, f_{n-1})$ macierz

$$F + gf,$$

której wielomian charakterystyczny jest równy (6). Mamy

$$\begin{aligned}
 F + gf &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \dots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (f_0, f_1, \dots, f_{n-1}) = \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \dots & \vdots \\ f_0 - a_0 & f_1 - a_1 & f_2 - a_2 & \dots & f_{n-1} - a_{n-1} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \dots & \vdots \\ -\gamma_0 & -\gamma_1 & -\gamma_2 & \dots & -\gamma_{n-1} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Zauważmy, że a_i oznaczają współczynniki równania charakterystycznego macierzy A , natomiast γ_i są współczynnikami równania charakterystycznego macierzy układu zamkniętego. Sprzężenie zwrotne dla układu w postaci normalnej możemy zdefiniować jako $f_i = a_i - \gamma_i$. Przy takim wyborze sprzężenia zwrotnego układ w postaci normalnej ma zadany wielomian charakterystyczny $\alpha_\gamma(\lambda)$. Przechodzimy teraz do układu oryginalnego. Załóżmy, że istnieje sprzężenie zwrotne $k = (k_0, k_1, \dots, k_{n-1})$, przy którym jest spełniona równość

$$P(A + bk) = (F + gf)P.$$

Ze względu na to, że $PA = FP$, musi być $Pbk = gfP$, ale ponieważ $Pb = g$, powyższa równość będzie spełniona, jeżeli

$$k = fP.$$

Skorzystamy teraz z postaci macierzy P . Otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 k &= (f_0, f_1, \dots, f_{n-1}) \begin{bmatrix} v_n^T \\ v_n^T A \\ \vdots \\ v_n^T A^{n-1} \end{bmatrix} = v_n^T (f_{n-1} A^{n-1} + \dots + f_0 I_n) = \\
 &= v_n^T \left((a_{n-1} - \gamma_{n-1}) A^{n-1} + \dots + (a_0 - f_0) I_n \right) = \\
 &= v_n^T \underbrace{(a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_0 I_n)}_{-A^n} - (\gamma_{n-1} A^{n-1} + \dots + \gamma_0 I_n) = \\
 &= -v_n^T (A^n + \gamma_{n-1} A^{n-1} + \dots + \gamma_0 I_n) = -v_n^T \alpha_\gamma(A).
 \end{aligned}$$

Ostatnie równości wynikają z Twierdzenia Cayleya-Hamiltona. Symbol $\alpha_\gamma(A)$ oznacza wielomian charakterystyczny (6) zdefiniowany przez zadane widmo, obliczony dla macierzy A . Wzór

$$k = -v_n^T \alpha_\gamma(A)$$

określający sprzężenie zwrotne rozmieszczające bieguny w układzie (A, b) nazywa się formułą Ackermanna. ■

0.6. Zadania

Zadanie 0.1 Pokazać, że macierze podobne mają jednakowe wielomiany charakterystyczne.

Zadanie 0.2 Zbadać sterowalność układu liniowego

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u.$$

Obliczyć e^{tA} .

Zadanie 0.3 Zbadać sterowalność i stabilność układu liniowego

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Korzystając z formuły Ackermanna wyznaczyć sprzężenie zwrotne lokujące bieguny $\{-1, -3\}$.

Zadanie 0.4 Zbadać sterowalność i stabilność modelu odwróconego wahadła ($\alpha, \delta < 0$, $\beta, \gamma > 0$)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma \\ 0 \\ \delta \end{bmatrix} u.$$

Wyznaczyć sprzężenie zwrotne lokujące bieguny $\{-1, -1, -2, -2\}$.

Zadanie 0.5 Podać możliwe wskaźniki sterowalności układów o wymiarach $(n, m) = (3, 2)$, $(5, 2)$ i $(7, 2)$.

0.7. Odniesienia literaturowe

Objaśnienie podstawowych pojęć z dziedziny teorii mnogości, algebry, topologii i analizy matematycznej można znaleźć, na przykład, we wstępnych rozdziałach monografii [Koł78, Mau71, AMR83, Sas99]. Geometryczne ujęcie teorii liniowych układów sterowania zawiera książka [Won79]. Klasyczna teoria układów liniowych jest przedmiotem podręczników [Kac77] i [Fai98]. Sterowalności układów liniowych w ujęciu przedstawionym w tym rozdziale jest poświęcony podrozdział 4.1 monografii [Lév09]. Postacie kanoniczne Brunowskiego wprowadzono w pracy [Bru68]; można także o nich przeczytać w wymienionej już książce [Won79]. Dodatkowe informacje na temat działania grupy sprzężenia zwrotnego na liniowe układy sterowania zawiera artykuł [Tch83]. Twierdzenie Cayleya-Hamiltona podano w książce [Ber05], tam także można znaleźć informacje na temat własności macierzowej funkcji wykładniczej. Formułę Ackermanna można znaleźć w [Fai98]. Określenie „filary analizy nieliniowej” pochodzi z monografii [AMR83].

Literatura

- [AMR83] R. Abraham, J. E. Marsden, T. Ratiu, *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*. Springer, New York, 1983.
- [Ber05] D. S. Bernstein, *Matrix Mathematics*. Princeton University Press, Princeton, 2005.
- [Bru68] P. Brunovsky, A classification of linear controllable systems. *Kybernetika*, 6(3):173–188, 1968.
- [Fai98] F. W. Fairman, *Linear Control Theory*. Wiley, Chicester, 1998.
- [Kac77] T. Kaczorek, *Teoria układów regulacji automatycznej*. WNT, Warszawa, 1977.
- [Koł78] W. Kołodziej, *Analiza matematyczna*. PWN, Warszawa, 1978.
- [Lév09] J. Lévine, *Analysis and Control of Nonlinear Systems*. Springer, 2009.
- [Mau71] K. Maurin, *Analiza cz. I*. PWN, Warszawa, 1971.
- [Sas99] S. S. Sastry, *Nonlinear Systems*. Springer, New York, 1999.
- [Tch83] K. Tchoń, On generic properties of linear systems: An overview. *Kybernetika*, 19:467–474, 1983.
- [Won79] W. M. Wonham, *Linear Multivariable Control*. Springer, Berlin, 1979.

Rozdział 1

Funkcje

1.1. Rodzaje funkcji

Zakładamy, że pojęcie przestrzeni wektorowej, definicja funkcji, pojęcie ciągłości i pojęcie różniczkowalności funkcji są znane. Będziemy rozważać funkcje (odwzorowania, przekształcenia) między rzeczywistymi przestrzeniami wektorowymi

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad y = f(x). \quad (1.1)$$

Powyższy zapis oznacza, że poszczególne składowe wektora y są zadane jako

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_m = f_m(x_1, \dots, x_n) \end{cases}.$$

Domyślnie, obie przestrzenie \mathbb{R}^n i \mathbb{R}^m będą wyposażone w euklidesowy iloczyn skalarny $(\xi, \eta) = \xi^T \eta$. Będziemy wyróżniać następujące klasy funkcji:

- $C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ – klasa funkcji ciągłych,
- $C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ – klasa funkcji różniczkowalnych w sposób ciągły do rzędu k włącznie,
- $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ – klasa funkcji gładkich,
- $C^\omega(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ – klasa funkcji analitycznych.

Zgodnie z tą klasyfikacją, funkcja $f \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, jeżeli w każdym punkcie jej pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial^p f_i(x)}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \dots \partial x_n^{i_n}}$$

są ciągłe dla $\sum_{j=1}^n i_j = p$, dla wszystkich $p \leq k$ i wszystkich $i = 1, 2, \dots, m$. Przez funkcję gładką rozumiemy funkcję klasy C^k dla każdego k . Funk-

cja analityczna jest funkcją gładką, której każda składowa ma szereg Taylora zbieżny. Dla punktu $0 \in \mathbb{R}^n$ oznacza to zbieżność szeregu

$$f_i(x) = f_i(0) + Df_i(0)x + \frac{1}{2!}D^2f_i(0)(x, x) + \dots + \frac{1}{k!}D^k f_i(0)(x, x, \dots, x) + \dots,$$

gdzie symbol D oznacza różniczkowanie. Pochodną funkcji $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ będziemy obliczać w następujący sposób. Dla wektora $v \in \mathbb{R}^n$

$$Df(x)v = \left. \frac{d}{d\alpha} f(x + \alpha v) \right|_{\alpha=0} = \frac{\partial f(x)}{\partial x} v.$$

Macierz $Df(x)$ nazywamy macierzą Jacobiego funkcji f w punkcie x . Na mocy definicji, wyróżnione przez nas klasy funkcji pozostają w następującej relacji

$$C^\omega \subset C^\infty \subset C^k \subset C^0.$$

W dalszym ciągu wykładu będziemy niekiedy używać funkcji bardziej ogólnych niż ciągłe, takich jak funkcje kawałkami ciągłe lub kawałkami stałe. Zostaną one wprowadzone w odpowiednim miejscu. Z definicji funkcji analitycznej wynika, że wartość tej funkcji w otoczeniu pewnego punktu, na przykład zera, jest zdeterminowana przez pochodne tej funkcji w tym punkcie. Zestaw takich pochodnych nazywa się dżetem funkcji. Dżet rzędu k w zerze ma zatem postać

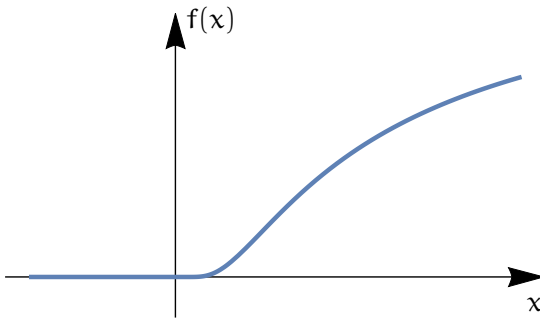
$$j^k f_i(0) = \left(f_i(0), Df_i(0), D^2f_i(0), \dots, D^k f_i(0) \right).$$

Jeżeli dla każdej składowej funkcji analitycznej określonej na \mathbb{R}^n dżet $j^\infty f_i(0) = 0$, to $f(x)$ zeruje się na całej przestrzeni \mathbb{R}^n . W celu lepszego zrozumienia różnicy między funkcjami gładkimi a analitycznymi rozważmy funkcję

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{dla } x > 0 \end{cases},$$

której wykres został przedstawiony na rysunku (1.1). Nietrudno sprawdzić, że funkcja ta jest gładka i że jej dżet $j^\infty f(0) = 0$. Z drugiej strony, w żadnym otoczeniu 0 funkcja $f(x)$ nie znika. Oznacza to, że $f(x)$ jest przykładem funkcji gładkiej, która nie jest analityczna. Oczywiście przykładem funkcji, która ma skończony stopień gładkości (jest klasy C^1 , ale nie C^2) jest funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0 \\ x^2 & \text{dla } x > 0 \end{cases}.$$



Rysunek 1.1: Funkcja gładka, nieanalityczna

1.2. Struktury algebraiczne w zbiorze funkcji

Weźmy dwie funkcje ciągłe $f_1, f_2 \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Funkcje te możemy dodawać i mnożyć przez liczby rzeczywiste $\alpha \in \mathbb{R}$

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x), \quad (\alpha f_1)(x) = \alpha f_1(x).$$

Wynika stąd, że funkcje ciągłe $C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ tworzą przestrzeń liniową nad zbiorem liczb rzeczywistych \mathbb{R} . Jeżeli założymy, że $m = 1$, wtedy funkcje ciągłe możemy także mnożyć

$$(f_1 f_2)(x) = f_1(x)f_2(x).$$

Przestrzeń liniowa z iloczynem nazywa się algebrą, możemy zatem powiedzieć, że $C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ stanowi algebrę. Jeżeli interesuje nas tylko operacja mnożenia, klasę $C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ nazywamy pierścieniem. Oczywiście, funkcje gładkie $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ z mnożeniem także tworzą pierścień. Weźmy teraz funkcję gładką $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ i funkcję $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Iloczyn

$$(af)(x) = a(x)f(x)$$

jest funkcją gładką. Oznacza to, że $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ jest modułem nad pierścieniem funkcji $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Co więcej, dla funkcji $f_1, f_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ możemy zdefiniować mnożenie

$$[f_1, f_2](x) = Df_2(x)f_1(x) - Df_1(x)f_2(x)$$

zwane nawiasem Liego. Przestrzeń liniowa $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ z nawiasem Liego nazywa się algebrą Liego. Jest więc $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ algebrą Liego na zbiorze liczb rzeczywistych \mathbb{R} i jednocześnie modułem nad pierścieniem funkcji gładkich $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Do pojęcia nawiasu Liego wrócimy w rozdziale poświęconym polom wektorowym.

Innego przykładu algebry Liego dostarcza przestrzeń funkcji gładkich $C^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$ z operacją nawiasu Poissona. Załóżmy, że $x = (q, p)$. Wówczas, nawias Poissona

$$\{f_1, f_2\}(q, p) = \left(\frac{\partial f_1(x)}{\partial q} \right)^T \frac{\partial f_2(x)}{\partial p} - \left(\frac{\partial f_1(x)}{\partial p} \right)^T \frac{\partial f_2(x)}{\partial q}.$$

Nawias Poissona odgrywa ważną rolę w mechanice hamiltonowskiej.

Jako ostatni przykład struktury algebraicznej w zbiorze funkcji zwrócimy uwagę na funkcje gładkie jednej zmiennej, $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Klasa ta jest algebrą, która jest dodatkowo zamknięta ze względu na różniczkowanie, tzn. jeżeli $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, to $\dot{f} \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Tego rodzaju algebrę nazywamy algebrą różniczkową; traktowana jako algebra funkcji czasu pojawia się ona przy analizie różniczkowo płaskich układów sterowania.

1.3. Twierdzenie o Funkcji Odwrotnej

Dla funkcji ciągłych $f_1, f_2 \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ możemy zdefiniować operację zwaną kompozycją lub składaniem funkcji

$$(f_1 \circ f_2)(x) = f_1(f_2(x)),$$

polegającą na tym, że funkcję f_1 obliczamy dla wartości funkcji f_2 . Przyjmujemy następującą definicję.

Definicja 1.3.1 *Funkcja f_1 jest funkcją odwrotną do funkcji f_2 , jeżeli*

$$(f_1 \circ f_2)(x) = x.$$

Funkcję odwrotną do funkcji f będziemy oznaczać symbolem f^{-1} . Przykładami funkcji odwrotnych jednej zmiennej są e^x , i $\ln x$, $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{arctg} x$, $\sin x$ i $\operatorname{arcsin} x$, itp. Jeżeli funkcje f_1 i f_2 są różniczkowalne, mamy następującą regułę różniczkowania funkcji złożonej (regułę łańcuchową)

$$D(f_1 \circ f_2)(x) = Df_1(f_2(x))Df_2(x).$$

Kwestię istnienia funkcji odwrotnej rozstrzyga następujące Twierdzenie o Funkcji Odwrotnej, zaliczane do filarów analizy nieliniowej.

Twierdzenie 1.3.1 (O Funkcji Odwrotnej) *Rozpatrzmy funkcję $f \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ dla pewnego $k \geq 1$ i niech $f(x_0) = y_0$. Załóżmy, że*

$$\operatorname{rank} Df(x_0) = n.$$

Wówczas, w pewnym otoczeniu U punktu y_0 , istnieje funkcja odwrotna $f^{-1}(y)$, także klasy C^k .

Z definicji funkcji odwrotnej $f \circ f^{-1}(x) = x$ i z reguły łańcuchowej wynika, że

$$Df(f^{-1}(x))Df^{-1}(x) = I_n,$$

a zatem

$$Df^{-1}(x) = \left(Df(f^{-1}(x)) \right)^{-1}.$$

Funkcja $f \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ która ma funkcję odwrotną klasy C^k nazywa się dyfeomorfizmem. Jeżeli f^{-1} istnieje tylko lokalnie, dyfeomorfizm nazywamy lokalnym. Twierdzenie o Funkcji Odwrotnej podaje zatem warunek wystarczający na lokalny dyfeomorfizm. Chcemy podkreślić, że nie istnieje warunek konieczny i wystarczający na to, żeby funkcja była dyfeomorfizmem. Oznacza to, że każdy przypadek wymaga osobnej analizy.

1.4. Twierdzenie o Funkcji Uwikłanej

Jedną z konsekwencji Twierdzenia o Funkcji Odwrotnej jest Twierdzenie o Funkcji Uwikłanej, które brzmi następująco.

Twierdzenie 1.4.1 (O Funkcji Uwikłanej) *Niech będzie dana funkcja $f \in C^k(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$, $w = f(x, y)$, dla pewnego $k \geq 1$, taka że $f(x_0, y_0) = w_0$. Załóżmy, że*

$$\text{rank} \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = m.$$

Wówczas, istnieje funkcja $y = g(x, w)$, określona w pewnym otoczeniu (x_0, w_0) , taka że

$$f(x, g(x, w)) = w.$$

Funkcja g jest także klasy C^k .

Dowód tego twierdzenia przedstawimy w Dodatku. W celu wyznaczenia pochodnych funkcji g zastosujemy następujące rozumowanie. Ponieważ $f(x, g(x, w)) = w$, różniczkując obie strony ze względu na x otrzymujemy

$$\frac{\partial f(x, g(x, w))}{\partial x} + \frac{\partial f(x, g(x, w))}{\partial y} \frac{\partial g(x, w)}{\partial x} = 0,$$

a zatem

$$\frac{\partial g(x, w)}{\partial x} = - \left(\frac{\partial f(x, g(x, w))}{\partial y} \right)^{-1} \frac{\partial f(x, g(x, w))}{\partial x}.$$

W podobny sposób wyliczamy

$$\frac{\partial g(x, w)}{\partial w} = - \left(\frac{\partial f(x, g(x, w))}{\partial y} \right)^{-1}.$$

1.5. Obliczanie funkcji odwrotnej

W różnych zadaniach automatyki i robotyki, jak na przykład odwrotnym zadaniu kinematyki, spotykamy się z koniecznością wyliczenia funkcji odwrotnej. Załóżmy, że funkcja $f \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ spełnia założenia Twierdzenia o Funkcji Odwrotnej, tzn. w każdym punkcie $\text{rank } Df(x) = n$. Mamy dany punkt $y_d \in \mathbb{R}^n$ i naszym celem jest wyznaczenie punktu $x_d \in \mathbb{R}^n$, takiego że $f(x_d) = y_d$. Na ogół zadanie to rozwiązujemy numerycznie. Dwa algorytmy jego rozwiązania zostaną opisane poniżej.

1.5.1. Algorytm Newtona

Według tego algorytmu, zaczynamy od wyboru punktu startowego $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Jeżeli wybór okaże się trafny, czyli $f(x_0) = y_d$, algorytm kończy działanie. W przeciwnym wypadku „deformujemy” punkt x_0 do różniczkowalnej krzywej $x(\theta)$ parametryzowanej przy pomocy $\theta \in \mathbb{R}$, takiej że $x(0) = x_0$. Błąd osiągnięcia punktu docelowego wzdłuż tej krzywej wynosi

$$e(\theta) = f(x(\theta)) - y_d.$$

Chcemy wybrać krzywą $x(\theta)$ w taki sposób, żeby przy $\theta \rightarrow +\infty$ błąd $e(\theta)$ malał wzdłuż krzywej $x(\theta)$ w sposób wykładniczy. W tym celu zażądamy, żeby błąd spełniał równanie różniczkowe

$$e'(\theta) = -\gamma e(\theta),$$

gdzie $\gamma > 0$ oznacza pewien współczynnik zbieżności. Załóżmy, że taka krzywa $x(\theta)$ istnieje. Po zróżniczkowaniu równania błędu otrzymujemy

$$e'(\theta) = Df(x(\theta))x'(\theta) = -\gamma e(\theta).$$

Dzięki odwracalności macierzy $Df(x)$ powyższe równanie oznacza, że krzywa $x(\theta)$ powinna być rozwiązaniem równania różniczkowego

$$x'(\theta) = -\gamma (Df(x(\theta)))^{-1} (f(x(\theta)) - y_d),$$

nazywanego równaniem Ważewskiego-Dawidenki, z warunkiem początkowym $x(0) = x_0$. Wartość funkcji odwrotnej $x_d = f^{-1}(y_d)$ otrzymujemy jako granicę

$$x_d = \lim_{\theta \rightarrow +\infty} x(\theta).$$

Podany wyżej algorytm nazywa się Algorytmem Newtona. Jak widać, w celu obliczenia wartości funkcji odwrotnej Algorytmem Newtona należy rozwiązać w sposób numeryczny pewne równanie różniczkowe, a następnie przejść do granicy. W celach obliczeniowych Algorytm Newtona

często przedstawia się w postaci dyskretnej, na przykład stosując schemat Eulera. Doprowadza to do dyskretnego Algorytmu Newtona, postaci

$$x_{k+1} = x_k - \gamma (Df(x_k))^{-1} (f(x_k) - y_d), \quad k = 0, 1, \dots$$

1.5.2. Algorytm Najszybszego Spadku

Alternatywą dla Algorytmu Newtona jest Algorytm Najszybszego Spadku. Zaczynamy od próby odgadnięcia rozwiązania x_0 , podobnie jak w Algorytmie Newtona. Jeżeli próba się nie powiodła, definiujemy funkcję $e(x) = f(x) - y_d$. Idea algorytmu polega na spowodowaniu ruchu punktu $x \in \mathbb{R}^n$ wzdłuż pewnej krzywej $x(\theta)$, w kierunku najszybszego zmniejszania się błędu

$$E(x) = \frac{1}{2} e^T(x) e(x) = \frac{1}{2} \|e(x)\|^2.$$

Tym kierunkiem jest $-\text{grad } E(x)$, a zatem krzywa $x(\theta)$ powinna spełniać równanie

$$x'(\theta) = -\gamma \text{grad } E(x(\theta)), \quad \gamma > 0.$$

Na mocy definicji gradient spełnia zależność

$$(\text{grad } E(x), v) = DE(x)v,$$

co pociąga za sobą, że

$$\text{grad } E(x) = (De(x))^T e(x).$$

W konsekwencji, po uwzględnieniu wzoru na $e(x)$, krzywa najszybszego spadku spełnia równanie różniczkowe

$$x'(\theta) = -\gamma (Df(x(\theta)))^T (f(x(\theta)) - y_d), \quad x(0) = x_0.$$

Podobnie jak w przypadku Algorytmu Newtona, wartość funkcji odwrotnej $x_d = f^{-1}(y_d)$ uzyskujemy jako granicę

$$x_d = \lim_{\theta \rightarrow +\infty} x(\theta)$$

rozwiązania pewnego równania różniczkowego. Wersja dyskretna Algorytmu Najszybszego Spadku ma postać

$$x_{k+1} = x_k - \gamma (Df(x_k))^T (f(x_k) - y_d), \quad k = 0, 1, \dots$$

gdzie γ można zinterpretować jako długość kroku algorytmu. Racjonalny sposób wyboru γ polega na minimalizacji funkcji

$$E(x_{k+1}) = E(x_k - \gamma \text{grad } E(x_k)).$$

Warunkiem koniecznym dla minimum jest

$$\begin{aligned} \frac{dE(x_{k+1})}{dy} &= -(DE(x_k - \gamma \text{grad } E(x_k)))^T \text{grad } E(x_k) = \\ &= -\text{grad}^T E(x_{k+1}) \text{grad } E(x_k) = 0. \end{aligned}$$

Przy takim doborze współczynnika γ kierunek ruchu w kroku $k+1$ jest prostopadły do kierunku ruchu w kroku k .

1.6. Dowody

1.6.1. Twierdzenie o Funkcji Uwikłanej

Dowód: Twierdzenie o Funkcji Uwikłanej wynika z Twierdzenia o Funkcji Odwrotnej w następujący sposób. Na podstawie funkcji $f(x, y)$ definiujemy funkcję $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ wzorem

$$F(x, y) = (x, f(x, y)) = (x, w).$$

Funkcja F jest klasy C^k . Jej pochodna w punkcie (x_0, y_0) ,

$$DF(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \end{bmatrix},$$

jest rzędu $n + m$ na mocy założenia $\text{rank } \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = m$. Do funkcji F możemy zatem zastosować Twierdzenie o Funkcji Odwrotnej, z którego wynika istnienie funkcji $G(x, w) = (G_1(x, w), G_2(x, w))$, takiej że

$$F(G(x, w)) = (G_1(x, w), f(G_1(x, w), G_2(x, w))) = (x, w).$$

Z zależności tej otrzymujemy

$$G_1(x, w) = x \quad \text{oraz} \quad f(x, G_2(x, w)) = w,$$

a zatem funkcja $g(x, w) = G_2(x, w)$ i $f(x, g(x, w)) = w$. ■

1.7. Zadania

Zadanie 1.1 Wykazać, że podane niżej odwzorowania są lokalnymi dyfeomorfizmami w otoczeniu punktu 0:

a) $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,
 $\varphi(x) = (x_3, x_2, x_1 - \sin x_2)^T$,

$$\text{b) } \varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4,$$

$$\varphi(x) = (x_1, x_2, -x_3 \sin x_1 + x_4 \cos x_1 - x_2, x_3 \cos x_1 + x_4 \sin x_1)^T,$$

$$\text{c) } \varphi : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^5,$$

$$\varphi(x) = (x_1, \sin x_2, \cos x_2 \sin x_3, x_4, x_5 + x_4^3 - x_1^{10})^T.$$

Czy są to dyfeomorfizmy globalne?

Zadanie 1.2 Pokazać, że układ równań

$$\begin{cases} x_1 y_1 - x_2 y_2 = 0 \\ x_2 y_1 + x_1 y_2 = 2 \end{cases}$$

definiuje funkcję $y = g(x)$. Obliczyć pochodną $Dg(x)$ w punkcie $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = 1$.

Zadanie 1.3 Dana jest kinematyka manipulatora typu podwójne wahadło:

$$\begin{cases} y_1 = l_1 \cos x_1 + l_2 \cos(x_1 + x_2) \\ y_2 = l_1 \sin x_1 + l_2 \sin(x_1 + x_2) \end{cases}.$$

Pokazać, że poza konfiguracjami osobliwymi istnieje lokalne rozwiązanie odwrotnego zadania kinematyki.

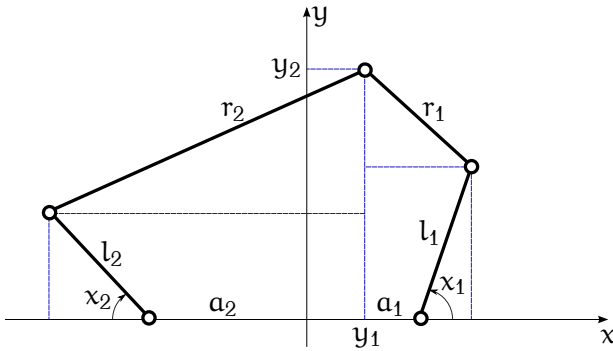
Zadanie 1.4 Korzystając z Twierdzenia o Funkcji Uwikłanej zbadać warunki, przy których wartości własne macierzy $A_{n \times n}$ są funkcją współczynników równania charakterystycznego.

Zadanie 1.5 Zbadać istnienie kinematyki i kinematyki odwrotnej mechanizmu przedstawionego na rysunku 1.2 i opisanego równaniami

$$\begin{cases} (a_1 - y_1 + l_1 \cos x_1)^2 + (y_2 - l_1 \sin x_1)^2 = r_1^2 \\ (a_2 + y_1 + l_2 \cos x_2)^2 + (y_2 - l_2 \sin x_2)^2 = r_2^2 \end{cases}.$$

1.8. Odniesienia literaturowe

Dodatkowe wiadomości na temat funkcji można znaleźć w monografii [GG74]. Twierdzenia o Funkcji Odwrotnej i o Funkcji Uwikłanej w przestrzeni Banacha, z dowodami, zostały przedstawione w [AMR83]. Wykład metod Newtona zawiera książka [Deu04]; ich zastosowanie do planowania ruchu robotów mobilnych opisano w pracach [Tch17, DS03]. Równanie Wązewskiego-Dawidenki bierze początek w pracach [Waż47] i [Dav53].



Rysunek 1.2: Mechanizm manipulatora z zadania 1.5

Literatura

- [AMR83] R. Abraham, J. E. Marsden, T. Ratiu, *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*. Springer, New York, 1983.
- [Dav53] D. Davidenko, On a new method of numerically integrating a system of nonlinear equations. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 88, 1053.
- [Deu04] P. Deuffhard, *Newton Methods for Nonlinear Problems*. Springer, Berlin, 2004.
- [DS03] I. Duleba, J. Sasiadek, Nonholonomic motion planning based on Newton algorithm with energy optimization. *IEEE Trans. Control Syst. Tech.*, 11(3), 2003.
- [GG74] M. Golubitsky, V. Guillemin, *Stable Mappings and Their Singularities*. Springer, New York, 1974.
- [Tch17] K. Tchoń, Endogenous configuration space approach: An intersection of robotics and control theory. W: *Nonlinear Systems*. Springer, 2017.
- [Waż47] T. Ważewski, Sur l'évaluation du domaine d'existence des fonctions implicites réelles ou complexes. *Ann. Soc. Pol. Math.*, 20:81–120, 1947.

Rozdział 2

Funkcje liniowe. Równoważność funkcji

2.1. Funkcje liniowe

Szczególną klasę funkcji stanowią funkcje liniowe. Przyjmiemy następującą definicję.

Definicja 2.1.1 Funkcja $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ nazywa się funkcją liniową, jeżeli dla każdej pary punktów $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ i pary liczb $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ zachodzi związek

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2).$$

Założmy, że w przestrzeniach \mathbb{R}^n i \mathbb{R}^m wybraliśmy bazy $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ i $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$. Niech $y = f(x)$, $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ i $y = \sum_{j=1}^m \beta_j f_j$. Na mocy liniowości

$$y = f(x) = f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(e_i).$$

Niech funkcja f przekształca wektory bazowe w następujący sposób

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^m a_{ji} f_j.$$

Łącząc powyższe obserwacje otrzymujemy zależność

$$\beta_j = \sum_{i=1}^n a_{ji} \alpha_i$$

albo, dla wektorów $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T$ i $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)^T$,

$$\beta = A\alpha.$$

Macierz $A = [a_{ij}]$ o m wierszach i n kolumnach jest reprezentacją funkcji liniowej f ze względu na przyjęte bazy. Przy ustalonych bazach możemy utożsamiać funkcje liniowe z ich macierzami. Oczywiście, funkcje liniowe są analityczne.

2.2. Macierze i normy macierzy

W różnorodnych zastosowaniach należy wyznaczyć normę macierzy. Przypomnijmy, że dla wektora $x \in \mathbb{R}^n$ norma jest funkcją o wartościach większych lub równych zero

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+,$$

która spełnia następujące warunki ($\alpha \in \mathbb{R}$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$)

$$\|x\| = 0 \iff x = 0, \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \quad \|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|.$$

Ostatni z warunków nosi nazwę nierówności trójkąta. Dobrze znaną normą wektora (w istocie jest to cała rodzina norm) jest tzw. p-norma

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad p \geq 1.$$

W szczególności, wyróżniamy następujące p-normy:

- dla $p = 1$, 1-norma wektora x , $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$,
- dla $p = 2$, 2-norma wektora x , $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$,
- dla $p = \infty$, ∞ -norma wektora x , $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$

Ponieważ $\|x\|_2 = (x, x)^{1/2} = (x^T x)^{1/2}$, 2-norma jest normą euklidesową. Można pokazać, że p-normy spełniają zależność $\|x\|_1 \geq \|x\|_2 \geq \dots \geq \|x\|_\infty$.

Przejdźmy teraz do normy macierzy. Niech $A = [a_{ij}]$ oznacza macierz rozmiaru $m \times n$; zbiór takich macierzy będziemy oznaczać $\text{Mat}(m, n)$. Norma macierzy powinna spełniać warunki podobne do normy wektora, tzn. dla $\alpha \in \mathbb{R}$ i macierzy $A_1, A_2 \in \text{Mat}(m, n)$

$$\|A\| = 0 \iff A = 0, \quad \|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|, \quad \|A_1 + A_2\| \leq \|A_1\| + \|A_2\|.$$

Warunki te definiują normę macierzy, ale dla macierzy, których rozmiary pozwalają na wykonanie operacji mnożenia, na przykład $A_1, A_2 \in \text{Mat}(n, n)$, ważną rolę odgrywa dodatkowa własność pierścienia,

$$\|A_1 A_2\| \leq \|A_1\| \|A_2\|.$$

Mając zdefiniowaną normę wektora pytamy teraz, jak można zdefiniować normę macierzy. Istnieją dwa sposoby podejścia do tego zagadnienia. Po pierwsze, przez wypisanie elementów macierzy, jeden za drugim według pewnej reguły, możemy utożsamić macierz $A \in \text{Mat}(m, n)$ z wektorem $A \in \mathbb{R}^{mn}$ złożonym z mn elementów, a następnie wykorzystać którąś z p-norm. Wyróżnimy w tym kontekście 2-normę

$$\|A\|_F = \left(\sum_{ij} a_{ij}^2 \right)^{1/2} = (\text{tr}(AA^T))^{1/2},$$

zwaną normą Frobeniusa. Normy macierzy „odziedziczone” z normy wektora na ogół nie mają własności pierścienia, jednak norma Frobeniusa tę własność ma. Drugi sposób zdefiniowania normy macierzy polega na potraktowaniu macierzy jako pewnego rodzaju operatora między przestrzeniami wektorowymi i przyjęciu interpretacji normy macierzy jako miary „wzmocnienia” tego operatora. Powstałe w ten sposób normy nazywamy normami operatorowymi. Definiuje się je jako największy możliwy do uzyskania stosunek „amplitudy” obrazu sygnału x do „amplitudy” tego sygnału. Formalnie oznacza to, że

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_{\mathbb{R}^m}}{\|x\|_{\mathbb{R}^n}},$$

gdzie zazaczyliśmy, że oryginał i obraz pochodzą z różnych przestrzeni. Ze względu na to, że $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A \frac{x}{\|x\|}\|$, normę operatorową macierzy można także zdefiniować wzorem

$$\|A\| = \sup_{\|v\|=1} \|Av\|.$$

Wybierając różne p -normy w \mathbb{R}^n i \mathbb{R}^m możemy uzyskać nieskończenie wiele operatorowych norm macierzy. Ograniczymy się do trzech z nich, zdefiniowanych przy założeniu, że normy wektora oryginału i wektora obrazu są takie same i mają postać jednej z trzech norm 1, 2 lub ∞ wektora. Powstałe normy oznaczamy symbolami $\|A\|_1$, $\|A\|_2$ i $\|A\|_\infty$. Mamy następujące

Twierdzenie 2.2.1 Normy macierzy są zadane następującymi wzorami:

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \max_j \sum_{i=1}^m |a_{ij}|, \\ \|A\|_2 &= \bar{\lambda}_{AA^T}^{1/2}, \\ \|A\|_\infty &= \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \end{aligned}$$

gdzie $\bar{\lambda}_M$ oznacza największą wartość własną symetrycznej macierzy M .

Ze względu na mnogość norm macierzy, rolę porządkującą odgrywa pojęcie równoważności norm.

Definicja 2.2.1 Dwie normy macierzy $\|A\|_\alpha$ i $\|A\|_\beta$ nazywamy równoważnymi, jeżeli istnieją liczby $\alpha, \beta > 0$, takie że

$$\alpha \|A\|_\beta \leq \|A\|_\alpha \leq \beta \|A\|_\beta.$$

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f_1} & \mathbb{R}^m \\
 \downarrow \phi & & \downarrow \psi \\
 \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f_2} & \mathbb{R}^m
 \end{array}$$

Rysunek 2.1: Diagram LR równoważności

Nietrudno pokazać, że relacja równoważności norm jest relacją równoważności. Jeżeli dwie normy macierzy są równoważne, to zbieżność ciągu macierzy względem jednej normy pociąga za sobą zbieżność ze względu na drugą z nich.

Dla nieosobliwej macierzy kwadratowej A wyliczamy $1 = \|AA^{-1}\|_2 \leq \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \chi(A)$. Liczbę $\chi(A)$ nazywamy współczynnikiem uwarunkowania macierzy A .

2.3. Równoważność typu LR

W niniejszym podrozdziale wprowadzimy ważne pojęcie równoważności funkcji.

Definicja 2.3.1 Dwie funkcje gładkie $f_1, f_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ nazywamy LR-równoważnymi (lewo-prawo, ang. left-right), $f_1 \cong_{LR} f_2$, jeżeli istnieją dyfeomorfizmy $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ i $\psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, takie że

$$\psi \circ f_1 = f_2 \circ \phi.$$

Jeżeli dyfeomorfizmy ϕ i ψ są określone lokalnie, w otoczeniu punktów x_0 i $y_0 = f(x_0)$, to równoważność nazywamy lokalną, $f_1 \cong_{LLR} f_2$. Przypominamy, że lokalny dyfeomorfizm spełnia Twierdzenie o Funkcji Odwrotnej.

LR równoważność oznacza przemienność diagramu funkcji pokazanego na rysunku 2.1.

2.4. Submersje i immersje

Zajmiemy się teraz dwiema klasami funkcji, których macierz Jacobiego ma pełny rząd.

Definicja 2.4.1 Niech $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, Załóżmy, że $m \leq n$. Jeżeli w każdym punkcie $x \in \mathbb{R}^n$ zachodzi warunek $\text{rank } Df(x) = m$, to funkcję f

nazywamy submersją. W przypadku, gdy $m \geq n$ i dla każdego $x \in \mathbb{R}^n$ $\text{rank Df}(x) = n$, funkcję f nazywamy immersją. Jeżeli funkcja f jest jednocześnie submersją i immersją, nazywamy ją lokalnym dyfeomorfizmem.

Submersje i immersje mają niezdegenerowaną część liniową w rozwinięciu Taylora. Następujące dwa twierdzenia podają postać normalną submersji i immersji.

Twierdzenie 2.4.1 (O Submersjach) Niech $m \leq n$ i $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ będzie submersją. Wówczas

$$f \underset{\text{LLR}}{\cong} g,$$

gdzie $g(x) = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T = A_s x$, $A_s = \begin{bmatrix} I_m & 0 \end{bmatrix}$.

Twierdzenie 2.4.2 (O Immersjach) Niech $m \geq n$ i $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ będzie immersją. Wówczas

$$f \underset{\text{LLR}}{\cong} g,$$

gdzie $g(x) = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0)^T = A_i x$, $A_i = \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}$.

Zauważmy, że jeżeli f jest submersją, to jest określona przez liniowy wyraz jej szeregu Taylora

$$f(x) = f(0) + Df(0)x + \frac{1}{2}D^2f(0)(x, x) + \dots$$

Podobna sytuacja ma miejsce dla immersji. W tym sensie mówimy, że submersje i immersje są 1-zdeterminowane.

Ciekawą własnością immersji jest ich powszechność. Rozważmy zbiór funkcji gładkich $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Zbiór ten można wyposażyć w pewną topologię, która pozwala zdefiniować podzbiory otwarte, domknięte, gęste, etc. zbioru $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Niech $\text{Imm}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ oznacza zbiór immersji. Mamy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.4.3 (Whitney) Załóżmy, że $m \geq 2n$. Wówczas, zbiór immersji $\text{Imm}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ jest otwarty i gęsty w $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Stwierdzenie, że zbiór immersji jest otwarty i gęsty oznacza, że każda immersja ma otoczenie złożone wyłącznie z immersji oraz, że w dowolnie małym otoczeniu funkcji gładkiej znajdziemy pewną immersję. Widzimy, że w pewnym zakresie wymiarów prawie każda funkcja gładka jest immersją.

2.5. Dowody

2.5.1. Twierdzenie o Submersjach

Dowód: Dowód opiera się na lokalnej konstrukcji zmian współrzędnych ϕ i ψ definiujących LR równoważność, spełniających warunek Twierdzenia o Funkcji Odwrotnej. Pochodną $Df(x)$ można przedstawić w postaci macierzy

$$Df(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_m} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_{m+1}} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_m} & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_{m+1}} & \cdots & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x^m} & \frac{\partial f(x)}{\partial x^{n-m}} \end{bmatrix},$$

gdzie $x^m = (x_1, \dots, x_m)$ i $x^{n-m} = (x_{m+1}, \dots, x_n)$. Bez utraty ogólności przyjmujemy, że $\text{rank} \frac{\partial f(0)}{\partial x^m} = m$ (w przeciwnym razie przenumeryjemy współrzędne x). Zdefiniujmy teraz funkcję $\phi(x) = (f(x), x_{m+1}, \dots, x_n)^T$. Z definicji wynika, że ϕ jest gładkie, i że $\phi(0) = 0$. Co więcej, rząd macierzy Jacobiego

$$D\phi(0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(0)}{\partial x^m} & \frac{\partial f(x)}{\partial x^{n-m}} \\ 0 & I_{n-m} \end{bmatrix}$$

jest równy n , a zatem, na mocy Twierdzenia o Funkcji Odwrotnej, w pewnym otoczeniu punktu $0 \in \mathbb{R}^n$ ϕ jest dyfeomorfizmem. Ponieważ $g(x) = x^m$, stwierdzamy że $g \circ \phi(x) = f(x)$, co kończy dowód (bierzemy $\psi(y) = y$). ■

2.5.2. Twierdzenie o Immersjach

Dowód: Podobnie jak poprzednio, wykorzystamy Twierdzenie o Funkcji Odwrotnej. Macierz Jacobiego funkcji f możemy przedstawić w postaci

$$Df(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^n(x)}{\partial x} \\ \frac{\partial f^{m-n}(x)}{\partial x} \end{bmatrix},$$

gdzie f^n i f^{m-n} oznaczają pierwsze n i pozostałe $m-n$ składowych funkcji f . Załóżmy, że $\text{rank} \frac{\partial f^n(0)}{\partial x} = n$. Niech $y = (y^n, y^{m-n})$ i zdefiniujmy następującą zmianę współrzędnych $\psi(y) = (f^n(y^n), y^{m-n} + f^{m-n}(y^n))$. Funkcja ψ jest gładka i $\psi(0) = 0$. Jej macierz Jacobiego

$$D\psi(0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^n(0)}{\partial y^n} & 0 \\ * & I_{m-n} \end{bmatrix},$$

gdzie gwiazdka oznacza pewną macierz, której postać nie jest istotna. Ponieważ $\text{rank} D\psi(0) = n$, na mocy Twierdzenia o Funkcji Odwrotnej,

w pewnym otoczeniu $0 \in \mathbb{R}^m$ ψ jest dyfeomorfizmem. Spostrzeżenie, że dla $g(x) = (x, 0)$ mamy $\psi \circ g(x) = \psi(x, 0) = (f^n(x), 0 + f^{m-n}(x)) = f(x)$ kończy dowód ($\phi(x) = x$). ■

2.6. Zadania

Zadanie 2.1 Dla macierzy obrotu $R \in SO(3)$ wyznaczyć normy $\|R\|_2$ i $\|R\|_F$. Wyznaczyć normę $\|R\|_1$ dla macierzy $R = \text{Rot}(Z, \alpha)$.

Zadanie 2.2 Pokazać, że norma operatora macierzy ma własność pierścienia $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

Zadanie 2.3 Pokazać, że $\|A\|_F^2 = \text{tr}(AA^T)$, $A_{n \times n}$.

Zadanie 2.4 Pokazać, że dla macierzy $A_{n \times n}$ zachodzi nierówność

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_F \leq \|A\|_1 \leq \sqrt{n} \|A\|_F.$$

Wskazówka: Skorzystać z nierówności $(\sum_{i=1}^n |a_i|)^2 \leq n \sum_{i=1}^n |a_i|^2$.

Zadanie 2.5 Pokazać, że współczynnik uwarunkowania macierzy $\chi(A) = \left(\frac{\bar{\lambda}_{AA^T}}{\underline{\lambda}_{AA^T}} \right)^{1/2}$, gdzie $\bar{\lambda}$ i $\underline{\lambda}$ oznaczają największą i najmniejszą wartość własną.

Zadanie 2.6 Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ obliczyć normy $\|A\|_1$, $\|A\|_2$, $\|A\|_F$ i $\|A\|_\infty$, a także współczynnik uwarunkowania $\chi(A)$.

Zadanie 2.7 Rozważmy układ równań liniowych $Ax = b$, $A_{n \times n}$, z zaburzoną prawą stroną, tak że $A\hat{x} = b + \varepsilon$. Pokazać, że błąd względny $\delta x = \frac{\|\hat{x} - x\|}{\|x\|}$ rozwiązania spełnia warunek

$$\delta b \leq \delta x \leq \chi(A) \delta b,$$

gdzie $\delta b = \frac{\|\varepsilon\|}{\|b\|}$, a $\chi(A)$ – współczynnik uwarunkowania.

Zadanie 2.8 Korzystając z Twierdzenia o Submersjach i Imersjach podać postać normalną podanych niżej funkcji:

a) $f(x) = x_1 + x_2^2$, $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$, $f(x) \in \mathbb{R}$,

b) $f(x) = (\sin x, \cos x)^T$, $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in \mathbb{R}^2$,

c) $f(x) = (x, \text{tg } x)^T$, $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in \mathbb{R}^2$,

d) $f(x) = (x_1 + x_2^2, x_2)^T$, $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$, $f(x) \in \mathbb{R}^2$.

2.7. Odniesienia literaturowe

Bogaty materiał na temat macierzy zawarto w monografii [Ber05]. Równoważność funkcji, twierdzenia o immersjach i submersjach, a także Twierdzenie Whitneya zostały zaczerpnięte z książki [GG74]. Twierdzenia o immersjach i submersjach w przestrzeni Banacha podano w monografii [AMR83]. Czytelnikowi zainteresowanemu teorią osobliwości funkcji polecamy książki [GG74, Mar82, Jan05].

Literatura

- [AMR83] R. Abraham, J. E. Marsden, T. Ratiu. *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*. Springer, New York, 1983.
- [Ber05] D. S. Bernstein. *Matrix Mathematics*. Princeton University Press, Princeton, 2005.
- [GG74] M. Golubitsky, V. Guillemin. *Stable Mappings and Their Singularities*. Springer, New York, 1974.
- [Jan05] S. Janeczko. *Wybrane zagadnienia teorii katastrof*. Oficyna Wyd. PW, Warszawa, 2005.
- [Mar82] J. Martinet. *Singularities of Smooth Functions and Maps*. Cambridge University Press, 1982.

Rozdział 3

Funkcje Morse'a. Twierdzenie o Punkcie Stałym

3.1. Punkty i wartości krytyczne

Definicja 3.1.1 Niech $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ nazywa się punktem krytycznym funkcji f , jeżeli

$$\text{rank } Df(x_0) < \min\{m, n\}.$$

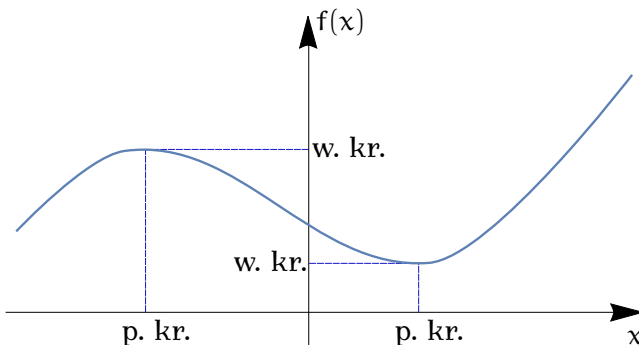
Punkt, który nie jest krytycznym (zatem $\text{rank } Df(x_0) = \min\{m, n\}$) nazywa się punktem regularnym funkcji f .

Jest oczywiste, że przy $m = 1$ (tzn. dla $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$), punkty krytyczne są punktami, w których pochodna $Df(x_0) = 0$. Dla danej funkcji f zbiór punktów krytycznych będziemy oznaczać symbolem

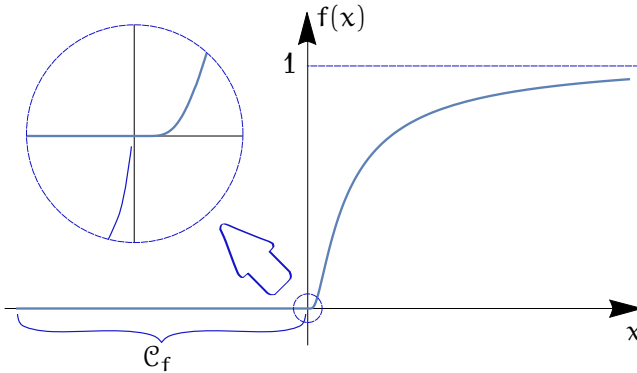
$$\mathcal{C}_f = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{rank } Df(x) < \min\{m, n\}\}.$$

Obraz tego zbioru, $f(\mathcal{C}_f)$ nazywamy zbiorem wartości krytycznych funkcji f . Z definicji zbiór punktów krytycznych \mathcal{C}_f jest domkniętym podzbiorem \mathbb{R}^n . Przykładowe punkty i wartości krytyczne funkcji przedstawia rysunek 3.1.

Łatwo pokazać, że dla funkcji gładkich, ale nieanalitycznych zbiór punktów krytycznych może być „duży”, tzn. może zawierać zbiór otwarty.



Rysunek 3.1: Punkty i wartości krytyczne

Rysunek 3.2: „Duży” zbiór punktów krytycznych \mathcal{C}_f

Widać to dobrze na przykładzie funkcji z rysunku 3.2. Zbiór \mathcal{C}_f pokrywa się w tym przypadku z ujemną półosią osi liczb rzeczywistych. W odróżnieniu od funkcji gładkich nieanalitycznych, zbiór punktów krytycznych funkcji analitycznej jest „mały” w tym sensie, że nie zawiera żadnego zbioru otwartego (ma puste wnętrze). Taki zbiór nazywa się zbiorem brzegowym. Do zbioru wartości krytycznych odnosi się następujące

Twierdzenie 3.1.1 (Sard) *Dla każdej funkcji gładkiej $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ zbiór wartości krytycznych $f(\mathcal{C}_f)$ ma miarę 0 w \mathbb{R}^m .*

Rozumiemy przez to, że zbiór wartości krytycznych można pokryć przeliczalną liczbą zbiorów otwartych, których sumaryczna objętość jest dowolnie mała. Oczywiście, jeżeli $m > n$, to obraz $f(\mathbb{R}^n)$ całej przestrzeni \mathbb{R}^n ma miarę zero, zatem miary zero jest także zbiór $f(\mathcal{C}_f)$.

3.2. Funkcje Morse'a, Twierdzenie Morse'a

W poprzednim rozdziale dowiedzieliśmy się, że submersje i immersje są funkcjami bez punktów krytycznych. Funkcje te nie są bardzo interesujące, ponieważ lokalnie są równoważne ich przybliżeniom liniowym (liniowym składnikom szeregu Taylora). Intuicja podpowiada, że funkcje posiadające punkty krytyczne są znacznie bardziej interesujące. Tak jest w istocie, a najprostszą klasą funkcji z punktami krytycznymi są funkcje Morse'a.

Definicja 3.2.1 *Funkcja gładka $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ nazywa się funkcją Morse'a, jeżeli jej punkty krytyczne są niezdegenerowane, tzn.*

$$Df(x) = 0 \implies \text{rank } D^2f(x) = n,$$

gdzie $D^2f(x) = \left[\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right]$ oznacza macierz drugich pochodnych funkcji f (macierz Hessego).

Dla lepszego zrozumienia pojęcia funkcji Morse'a zdefiniujmy funkcje $F = Df : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Ponieważ f jest funkcją Morse'a, w każdym jej punkcie krytycznym $Df(x) = 0$ zachodzi warunek $\text{rank } D(Df)(x) = n$. Korzystając z Twierdzenia o Funkcji Odwrotnej wyciągamy wniosek, że Df jest lokalnym dyfeomorfizmem. Jeżeli zatem w pewnym punkcie $Df(x_0) = 0$, to w pewnym otoczeniu punktu x_0 musi być $Df(x) \neq 0$, bowiem w przeciwnym razie Df nie miałoby funkcji odwrotnej. Oznacza to, że w pobliżu punktu krytycznego funkcji Morse'a nie ma innych punktów krytycznych. Mówimy, że funkcja Morse'a ma izolowane punkty krytyczne. Ta własność pozwala nam od razu wykluczyć funkcje z rysunku 1.1 jako funkcję Morse'a, gdyż jak powiedzieliśmy, jej punkty krytyczne zawierają podzbiór otwarty zbioru R . Na tej podstawie oczekujemy, że funkcja Morse'a $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ ma przeliczalny zbiór izolowanych ekstremów. Weźmy jako przykład funkcję $f(x) = \sin x$. Postacie normalne funkcji Morse'a są scharakteryzowane przez następujące

Twierdzenie 3.2.1 (Morse) Niech $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ będzie funkcją Morse'a. Załóżmy, że $f(0) = 0$, $Df(0) = 0$, a także $\text{rank } D^2f(0) = n$. Wówczas, w pewnym otoczeniu 0, zachodzi

$$f \underset{\text{LLR}}{\cong} g,$$

gdzie $g(x) = -x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_p^2 + x_{p+1}^2 + \dots + x_n^2$. Liczba p oznacza liczbę ujemnych wartości własnych macierzy $D^2f(0)$ i nosi nazwę indeksu punktu krytycznego 0.

Następujące funkcje są przykładami funkcji Morse'a:

- $f(x) = x_1^3 + x_1^2 + x_2^2$: Punkt krytyczny $(0, 0)$ ma indeks $p = 0$ i na mocy Twierdzenia Morse'a $f \underset{\text{LLR}}{\cong} x_1^2 + x_2^2$, tzn. $g(x) = x_1^2 + x_2^2$. Co więcej, LLR równoważność jest wyznaczona przez lokalny dyfeomorfizm (podstawienie) $\phi(x) = (x_1 \sqrt{x_1 + 1}, x_2)$,
- $f(x) = x_1^2 + x_1 x_2 - x_2^2$: W tym przypadku punkt krytyczny $(0, 0)$ ma indeks $p = 1$ i Twierdzenie Morse'a daje postać normalną $g(x) = -x_1^2 + x_2^2$. Mamy $f(x) = g \circ \phi(x)$, gdzie $\phi(x) = (\frac{\sqrt{5}}{2}x_2, x_1 + \frac{1}{2}x_2)$.

3.3. Lemat Hadamarda

Przy dowodzie Twierdzenia Morse'a wykorzystuje się następujący wynik, który jest interesujący również poza kontekstem Twierdzenia Morse'a.

Twierdzenie 3.3.1 (Hadamard) Niech $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Istnieją gładkie funkcje g_1, g_2, \dots, g_n , takie że

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^n g_i(x)x_i,$$

gdzie $g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f(tx)}{\partial x_i} dt$.

Zauważmy, że stosując powyższe twierdzenie do każdej z funkcji $g_i(x)$ otrzymamy

$$g_i(x) = g_i(0) + \sum_{j=1}^n h_{ij}(x)x_j,$$

gdzie $g_i(0) = \frac{\partial f(0)}{\partial x_i}$ oraz $h_{ij}(x) = \int_0^1 \frac{\partial g_i(sx)}{\partial x_j} ds = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 f(stx)}{\partial x_i \partial x_j} t dt ds$. W rezultacie otrzymaliśmy

$$f(x) = f(0) + Df(0)x + \sum_{i,j=1}^n h_{ij}(x)x_i x_j.$$

Tego rodzaju wywód można kontynuować otrzymując pewnego rodzaju szereg Taylora funkcji f .

3.4. Klasyfikacja funkcji: podsumowanie

Nasz program klasyfikacji funkcji i ich opisu za pomocą postaci normalnych zrealizowaliśmy dla trzech klas funkcji: submersji, immersji i funkcji Morse'a. Zasięg opisaney klasyfikacji można sprecyzować po wprowadzeniu do zbioru funkcji gładkich pewnej topologii, zwanej topologią Whitneya. Do tej właśnie topologii odwołuje się Twierdzenie Whitneya zamieszczone w poprzednim rozdziale.

3.5. Twierdzenie o Punkcie Stałym

W tym rozdziale przedstawimy ważne Twierdzenie o Punkcie Stałym, zwane czasami „koniem pociągowym” analizy nieliniowej. Nazwa podkreśla, że wiele fundamentalnych wyników analizy wyprowadza się z tego właśnie twierdzenia. Dla zachowania ogólności podane niżej sformułowanie używa terminologii przestrzeni Banacha. Przypominamy, że przestrzeń Banacha jest to przestrzeń liniowa, unormowana i zupełna.

Twierdzenie 3.5.1 (Twierdzenie o Punkcie Stałym) Niech \mathcal{X} oznacza przestrzeń Banacha, z normą $\|\cdot\|$. Załóżmy, że na tej przestrzeni jest określona funkcja

$$T : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$$

spełniająca warunek

$$\|T(x_2) - T(x_1)\| \leq \rho \|x_2 - x_1\|,$$

gdzie $0 < \rho < 1$. Wówczas funkcja T ma punkt stały x^* , o własności

$$T(x^*) = x^*.$$

Punkt stały jest jedyny i stanowi granicę $x^* = \lim x_k$ ciągu

$$x_0, x_1 = T(x_0), \dots, x_{k+1} = T(x_k), \dots$$

z wyrazem początkowym x_0 będącym dowolnym elementem przestrzeni \mathcal{X} .

Własność zmniejszania odległości między punktami i ich obrazami nazywa się zwężaniem; z tego powodu Twierdzenie o Punkcie Stałym bywa nazywane Twierdzeniem o Funkcjach Zwężających. W zastosowaniach użyteczną rolę odgrywa pewna konsekwencja Twierdzenia o Punkcie Stałym, a mianowicie

Twierdzenie 3.5.2 Jeżeli $S \subset \mathcal{X}$ jest domkniętym podzbiorem przestrzeni Banacha, takim że funkcja $T : S \longrightarrow S$ jest zwężająca, to T ma jedyny punkt stały w S .

3.6. Dowody

3.6.1. Lemat Hadamarda

Dowód: Z definicji całki wynika, że

$$\int_0^1 df(tx) = f(tx)|_0^1 = f(x) - f(0).$$

Korzystając z tej obserwacji otrzymujemy

$$f(x) = f(0) + \int_0^1 df(tx) = f(0) + \int_0^1 \sum_0^n \frac{\partial f(tx)}{\partial x_i} x_i dt = f(0) + \sum_0^n g_i(x) x_i,$$

$g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f(tx)}{\partial x_i} dt$, co kończy dowód. ■

3.6.2. Twierdzenie o Punkcie Stałym

Dowód: Weźmy ciąg $x_0, x_1 = T(x_0), \dots, x_{k+1} = T(x_k) \dots$. Z własności zwięzania wynika, że

$$\|x_{k+1} - x_k\| = \|T(x_k) - T(x_{k-1})\| \leq \rho \|x_k - x_{k-1}\|,$$

a zatem

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq \rho \|x_k - x_{k-1}\| \leq \rho^2 \|x_{k-1} - x_{k-2}\| \leq \dots \leq \rho^k \|x_1 - x_0\|.$$

Niech teraz $m = k+r$. Dążymy do pokazania, że ciąg x_0, x_1, \dots jest ciągiem Cauchy'ego, a więc że odpowiednio dalekie wyrazy tego ciągu różnią się od siebie dowolnie mało. Mamy

$$\begin{aligned} \|x_m - x_k\| &= \|x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - x_{m-2} + \dots + x_{k+1} - x_k\| \leq \\ &\leq \|x_m - x_{m-1}\| + \|x_{m-1} - x_{m-2}\| + \dots + \|x_{k+1} - x_k\| \leq \\ &\leq \rho^{m-1} \|x_1 - x_0\| + \rho^{m-2} \|x_1 - x_0\| + \dots + \rho^k \|x_1 - x_0\| = \\ &= \rho^k \|x_1 - x_0\| (1 + \rho + \dots + \rho^{m-k-1}) \leq \rho^k \|x_1 - x_0\| (1 + \rho + \dots) = \frac{\rho^k}{1 - \rho} \|x_1 - x_0\|. \end{aligned}$$

Z powyższej nierówności wynika, że dla dowolnego $\epsilon > 0$ znajdziemy taką liczbę N , że przy $k \geq N$ zachodzi $\|x_m - x_k\| < \epsilon$, co oznacza, że ciąg x_0, x_1, \dots jest ciągiem Cauchy'ego. W przestrzeni zupełnej każdy ciąg Cauchy'ego ma granicę, skąd wynika istnienie granicy $x^* = \lim x_{k+1} = \lim T(x_k) = T(x^*)$. Aby pokazać, że punkt x^* jest jedyny, założymy że istnieją dwa punkty stałe $x^* \neq \hat{x}$, spełniające warunek $x^* = T(x^*)$ i $T(\hat{x}) = \hat{x}$. Obliczamy

$$\|x^* - \hat{x}\| = \|T(x^* - \hat{x})\| \leq \rho \|x^* - \hat{x}\|.$$

Stąd wynika, że

$$(1 - \rho) \|x^* - \hat{x}\| \leq 0,$$

a ponieważ $\rho < 1$, musi być $x^* = \hat{x}$. W ten sposób twierdzenie zostało udowodnione. ■

3.7. Zadania

Zadanie 3.1 Zbadać istnienie i (nie)zdegenerowanie punktów krytycznych funkcji:

a) $f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$,

b) $f(x) = x_1^3 - 3x_1^2 x_2, x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$,

c) $f(x) = x_1^2, x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2,$

d) $f(x) = x_1 x_2, x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2,$

e) $f(x) = x_1^2 \cos x_2 + \sin^2 x_2, x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2.$

Zadanie 3.2 Bez powoływania się na Twierdzenie Morse'a wykazać, że funkcja $f(x) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$ jest LR-równoważna funkcji $g(x) = x_1^2 + x_2^2$.

Zadanie 3.3 Jak w zadaniu 3.2 pokazać, że funkcja $f(x) = x_1 x_2 + x_2^2$ jest LR-równoważna funkcji $g(x) = x_1^2 + x_2^2$.

Zadanie 3.4 Korzystając z Twierdzenia Morse'a znaleźć postacie normalne funkcji podanych niżej, w otoczeniu 0:

a) $f(x) = x_1^2 \cos x_2 + \sin^2 x_2,$

b) $f(x) = \cos x_1 - 2x_1 x_2 + \cos x_2 - 2,$

c) $f(x) = x_1 \sin x_2 + x_2 \sin x_1,$

d) $f(x) = x_1^2 \cos x_3 + x_2 x_3 + x_3^2,$

e) $f(x) = \sin x_1 \sin x_2 - x_3^2,$

f) $f(x) = x_1 x_2 + x_2 x_3 - x_1 x_3.$

3.8. Odniesienia literaturowe

Pojęcie punktów krytycznych, wartości krytycznych i funkcji Morse'a pochodzą z monografii [GG74]. Twierdzenie Sarda można znaleźć w [GG74], a także w [AMR83]. Twierdzenie Morse'a, wraz z dowodem, podano w [GG74]. Jako „vehiculum” w dowodzie Twierdzenia Morse'a wykorzystano tam Lemat Hadamarda. Twierdzenie o Punkcie Stałym pochodzi od Banacha [Ban22]. Dowód Twierdzenia o Funkcji Odwrotnej oparty na tym twierdzeniu podano w [AMR83].

Literatura

- [AMR83] R. Abraham, J. E. Marsden, T. Ratiu, *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*. Springer, New York, 1983.
- [Ban22] S. Banach, Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux equations integrales. *Fundamenta Mathematicae*, 3:133–181, 1922.
- [GG74] M. Golubitsky, V. Guillemin, *Stable Mappings and Their Singularities*. Springer, New York, 1974.

Rozdział 4

Układy dynamiczne zależne od czasu

4.1. Równania różniczkowe. Twierdzenie o Istnieniu i Jednoznaczności rozwiązania

W tym rozdziale zajmiemy się układami zależnych od czasu równań różniczkowych postaci

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad x(0) = x_0. \quad (4.1)$$

Domyślnie, zmienną t będziemy interpretować jako czas. Rozwiązaniem, trajektorią lub krzywą całkową układu (4.1) jest funkcja $x(t)$, taka że w każdej chwili t

$$\dot{x} = \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), t) \quad \text{i} \quad x(0) = x_0.$$

Mówimy, że $x(t)$ spełnia układ (4.1). Jest oczywiste, że jeżeli $x(t)$ spełnia układ równań, to

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(\tau), \tau) d\tau.$$

Podstawowym problemem analizy układu (4.1) jest kwestia istnienia rozwiązania $x(t)$, a także jego jednoznaczności. Odpowiednie twierdzenie, zwane Twierdzeniem o Istnieniu i Jednoznaczności, podobnie, jak Twierdzenie o Funkcji Odwrotnej, zalicza się do filarów analizy nieliniowej. Ma ono następujące brzmienie.

Twierdzenie 4.1.1 (O Istnieniu i Jednoznaczności) *Załóżmy, że funkcja $f(x, t)$ jest ciągła ze względu na t , ograniczona dla warunku początkowego, $\|f(x_0, t)\| \leq M$ i spełnia warunek Lipschitza ze względu na x , tzn.*

$$\|f(x_2, t) - f(x_1, t)\| \leq L\|x_2 - x_1\|, \quad L > 0,$$

dla punktów x_1, x_2 należących do pewnej kuli o środku w x_0 i promieniu r , $x_1, x_2 \in B(x_0, r)$. Wówczas, układ (4.1) ma rozwiązanie $x(t)$ określone na pewnym odcinku czasu $[0, \alpha]$ i spełniające warunek początkowy. Rozwiązanie to jest jednoznaczne.

Jednoznaczność rozwiązania $x(t)$ dla $t \in [0, \alpha]$ oznacza, że gdyby istniało inne rozwiązanie $\bar{x}(t)$ określone dla $t \in [0, \bar{\alpha}]$ to oba rozwiązania pokrywają się na wspólnej części przedziałów ich określoności, tzn. dla $t \in [0, \alpha] \cap [0, \bar{\alpha}]$ zachodzi $x(t) = \bar{x}(t)$.

Z Twierdzenia o Istnieniu i Jednoznaczności wynika, że rozwiązanie $x(t)$ istnieje lokalnie w czasie, na pewnym przedziale $[0, \alpha]$ zależnym od warunku początkowego x_0 . Jeżeli $x(t)$ istnieje dla wszystkich chwil czasu $t \in \mathbb{R}$ i wszystkich stanów początkowych $x_0 \in \mathbb{R}^n$, to układ (4.1) nazywamy zależnym od czasu (nieautonomicznym) układem dynamicznym.

4.2. Lemat Bellmana-Gronwalla, zależność od warunków początkowych

Przy analizie układów opisanych przez (4.1) ważną rolę odgrywa Lemat Bellmana-Gronwalla, który podajemy jako

Lemat 4.2.1 (Bellman-Gronwall) *Załóżmy, że dla dwóch danych funkcji $\phi(t), \psi(t) \geq 0$ zachodzi*

$$\phi(t) \leq a \int_0^t \phi(s)\psi(s)ds + b, \quad \text{dla } a, b \geq 0.$$

Wówczas, jest spełniona nierówność

$$\phi(t) \leq be^{a \int_0^t \psi(s)ds}.$$

Jako przykład zastosowania tego lematu, pokażemy że rozwiązanie układu równań różniczkowych zależy w sposób ciągły od warunku początkowego. Niech $x_0(t)$ będzie takim rozwiązaniem zapoczątkowanym w x_0 . Weźmy inny warunek początkowy $x_0 + \eta$, gdzie $\|\eta\| \leq \epsilon$, i oznaczmy rozwiązanie zapoczątkowane w $x_0 + \eta$ jako $x_\epsilon(t)$. Pytamy, czy jeżeli warunki początkowe są bliskie sobie (ϵ jest małe), to czy rozwiązania $x_0(t)$ i $x_\epsilon(t)$ także są bliskie. W tym celu obliczmy

$$\begin{aligned} \|x_\epsilon(t) - x_0(t)\| &= \left\| x_0 + \eta + \int_0^t f(x_\epsilon(\tau), \tau) d\tau - x_0 - \int_0^t f(x_0(\tau), \tau) d\tau \right\| \leq \\ &\leq \epsilon + \int_0^t \|f(x_\epsilon(\tau), \tau) - f(x_0(\tau), \tau)\| d\tau \leq \epsilon + L \int_0^t \|x_\epsilon(\tau) - x_0(\tau)\| d\tau. \end{aligned}$$

Do ostatniego wyrażenia zastosujemy teraz lemat 4.2.1. Podstawiając $\phi(t) = \|x_\epsilon(t) - x_0(t)\|$, $\psi(t) = 1$, $a = L$ i $b = \epsilon$ otrzymujemy

$$\|x_\epsilon(t) - x_0(t)\| \leq \epsilon e^{L \int_0^t ds} = \epsilon e^{tL}.$$

Wynika stąd, że dla skończonych t zawsze możemy znaleźć takie ϵ , że rozwiązanie $x_\epsilon(t)$ będzie dowolnie bliskie $x_0(t)$. To właśnie oznacza ciągłość zależności rozwiązania od warunku początkowego.

4.3. Układy liniowe zależne od czasu

Specjalną klasę układów typu (4.1) stanowią układy liniowe o postaci

$$\dot{x} = A(t)x(t), \quad (4.2)$$

gdzie $A(t)$ jest macierzą $n \times n$, zależną od czasu. Korzystając z Twierdzenia o Istnieniu i Jednoznaczności widzimy, że warunki tego twierdzenia sprowadzają się do wymagania, żeby funkcja $A(t)$ była ciągła i ograniczona. Jeżeli tak jest, rozwiązanie istnieje dla każdego t i każdego warunku początkowego x_0 , zatem układ (4.2) jest przykładem zależnego od czasu układu dynamicznego. W kontekście układów dynamicznych częściej niż „rozwiązanie” będziemy używać terminu „trajektoria układu”, a warunek początkowy będziemy nazywać stanem początkowym układu. Niech $x(s)$ oznacza trajektorię układu (4.2) dla pewnego $s \leq t$. Można wtedy pokazać, że

$$x(t) = \Phi(t, s)x(s).$$

Macierz $\Phi(t, s)$ nazywa się macierzą fundamentalną (macierzą przejścia) układu i spełnia równanie

$$\frac{\partial \Phi(t, s)}{\partial t} = A(t)\Phi(t, s), \quad \text{przy warunku} \quad \Phi(s, s) = I_n.$$

W istocie, mamy

$$\dot{x} = \frac{\partial \Phi(t, s)}{\partial t}x(s) = A(t)\Phi(t, s)x(s) = A(t)x(t).$$

Co więcej, dla trzech chwil $u \leq s \leq t$ prawdziwa jest zależność

$$x(t) = \Phi(t, s)x(s) = \Phi(t, s)\Phi(s, u)x(u),$$

skąd wynika tzw. własność półgrupowości macierzy fundamentalnej

$$\Phi(t, s)\Phi(s, u) = \Phi(t, u).$$

Wybierając $u = t$ otrzymujemy

$$\Phi(t, s)\Phi(s, t) = \Phi(t, t) = I_n,$$

co oznacza, że macierz fundamentalna jest odwracalna i $\Phi^{-1}(t, s) = \Phi(s, t)$. Podsumowując, ustaliliśmy następujące własności macierzy fundamentalnej

$$\Phi(t, t) = I_n, \quad \Phi^{-1}(t, s) = \Phi(s, t), \quad \Phi(t, s)\Phi(s, u) = \Phi(t, u).$$

4.4. Wzór Peano-Bakera

Jeżeli macierz $A(t)$ nie zależy od czasu, mamy do czynienia z liniowym układem dynamicznym

$$\dot{x} = Ax(t). \quad (4.3)$$

Cechą tego układu jest, że jego macierz fundamentalną można wyznaczyć w sposób jawny, mianowicie,

$$\Phi(t, s) = e^{(t-s)A},$$

gdzie wykładniczą funkcję macierzową definiujemy jako sumę szeregu $e^{tA} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(tA)^i}{i!}$. Jak wiadomo, istnieją różne sposoby skutecznego obliczania macierzowej funkcji wykładniczej, na przykład przy wykorzystaniu twierdzenia Cayleya-Hamiltona. Nie tylko w przypadku układu (4.3) obliczenie macierzy fundamentalnej sprowadza się do obliczenia pewnej funkcji wykładniczej; jest też tak dla jednowymiarowego układu zależnego od czasu. Dla

$$\dot{x} = a(t)x(t), \quad x, a, x_0 \in \mathbb{R},$$

rozwiązanie $x(t) = e^{\int_0^t a(u)du} x_0$. Nasuwa się pytanie, czy przez analogię, być może także $\Phi(t, s) = e^{\int_s^t A(u)du}$? Odpowiedź jest negatywna. W ogólnym przypadku macierz fundamentalna wyraża się tzw. formułą Peano-Bakera, która ma postać nieskończonego szeregu

$$\begin{aligned} \Phi(t, s) = I_n &+ \int_s^t A(\sigma_1) d\sigma_1 + \int_s^t A(\sigma_1) \int_s^{\sigma_1} A(\sigma_2) d\sigma_2 d\sigma_1 + \dots + \\ &+ \int_s^t A(\sigma_1) \int_s^{\sigma_1} A(\sigma_2) \dots \int_s^{\sigma_{k-1}} A(\sigma_k) d\sigma_k d\sigma_{k-1} \dots d\sigma_1 + \dots \end{aligned}$$

Konieczność stosowania formuły Peano-Bakera wynika z nieprzemienności mnożenia macierzy. Jeżeli dla każdego t_1, t_2 macierze $A(t_1)$ i $A(t_2)$ komutują, tzn. komutator

$$[A(t_1), A(t_2)] = A(t_1)A(t_2) - A(t_2)A(t_1) = 0,$$

wtedy z formuły wynika, że $\Phi(t, s) = e^{\int_s^t A(u)du}$.

4.5. Nierówność Ważewskiego

Rozważmy liniowy zależny od czasu układ dynamiczny. Asymptotyczne zachowanie się trajektorii tego układu opisuje następujące

Twierdzenie 4.5.1 (Ważewski) Dla układu $\dot{x} = A(t)x(t)$ ze stanem początkowym x_0 , niech $\bar{A}(t) = \frac{1}{2}(A(t) + A^T(t))$. Norma trajektorii układu spełnia nierówność Ważewskiego

$$e^{\int_0^t \underline{\lambda}_{\bar{A}}(s) ds} \|x_0\| \leq \|x(t)\| \leq e^{\int_0^t \bar{\lambda}_{\bar{A}}(s) ds} \|x_0\|,$$

gdzie $\underline{\lambda}_M$ i $\bar{\lambda}_M$ oznaczają najmniejszą i największą wartość własną symetrycznej macierzy M .

Nierówność Ważewskiego znajduje zastosowanie przy badaniu stabilności liniowych układów dynamicznych.

4.6. Dowody

4.6.1. Twierdzenie o Istnieniu i Jednoznaczności

Dowód: Twierdzenie udowodnimy korzystając z Twierdzenia o Punkcie Stałym. Niech dla pewnego $\alpha > 0$ $C_n^0[0, \alpha]$ oznacza przestrzeń funkcji ciągłych z określonych na odcinku $[0, \alpha]$, o wartościach w \mathbb{R}^n . Dla uproszczenia zapisu funkcje ciągłe ze zbioru $C_n^0[0, \alpha]$ będą oznaczane literą x . Przestrzeń $C_n^0[0, \alpha]$ jest przestrzenią Banacha, z normą

$$\|x\|_\infty = \sup_{0 \leq t \leq \alpha} \|x(t)\|,$$

gdzie $\|x(t)\|$ oznacza normę euklidesową w \mathbb{R}^n . Weźmy pewną funkcję ciągłą $x \in C_n^0[0, \alpha]$ i niech $z(t) = x_0 + \int_0^t f(x(\tau), \tau) d\tau$. Na mocy założeń twierdzenia 4.1.1 $z \in C_n^0[0, \alpha]$, możemy także założyć, że funkcja stała x_0 należy do tej przestrzeni. Weźmy kulę $B(x_0, r)$ i zdefiniujmy podzbiór $S \subset C_n^0[0, \alpha]$ wzorem

$$S = \left\{ x \in C_n^0[0, \alpha] \mid \|x - x_0\|_\infty \leq r \right\}.$$

Rozważmy teraz funkcję

$$P : C_n^0[0, \alpha] \longrightarrow C_n^0[0, \alpha],$$

taką że

$$(P(x))(t) = x_0 + \int_0^t f(x(\tau), \tau) d\tau.$$

Pokażemy że P jest odwzorowaniem zwężającym na zbiorze S . W tym celu, dla dwóch funkcji $x_1, x_2 \in C_n^0[0, \alpha]$ obliczamy

$$\begin{aligned} \|P(x_2) - P(x_1)\|_\infty &= \sup_{0 \leq t \leq \alpha} \left\| \int_0^t f(x_2(\tau), \tau) d\tau - \int_0^t f(x_1(\tau), \tau) d\tau \right\| \leq \\ &\leq \sup_{0 \leq t \leq \alpha} \int_0^t \|f(x_2(\tau), \tau) - f(x_1(\tau), \tau)\| d\tau \leq L \sup_{0 \leq t \leq \alpha} \int_0^t \|x_2(\tau) - x_1(\tau)\| d\tau, \end{aligned}$$

gdzie ostatni krok wykorzystuje warunek Lipschitza. Mamy tutaj jednakże $\|x_2(\tau) - x_1(\tau)\| \leq \sup_{0 \leq t \leq \alpha} \|x_2(\tau) - x_1(\tau)\| = \|x_2 - x_1\|_\infty$. Kontynuując nasz wywód dochodzimy do wniosku, że

$$\|P(x_2) - P(x_1)\|_\infty \sup_{0 \leq t \leq \alpha} \int_0^t d\tau = L\alpha \|x_2 - x_1\|_\infty.$$

Jeżeli tylko $\rho = L\alpha < 1$, to P jest funkcją zwężającą. Musimy teraz zbadać, czy P przyjmuje wartości w zbiorze S , czyli $P : S \rightarrow S$. Weźmy funkcję $x \in S$. Wykorzystując założenia otrzymujemy

$$\begin{aligned} \|P(x) - x_0\|_\infty &= \sup_{0 \leq t \leq \alpha} \left\| \int_0^t f(x(\tau), \tau) d\tau \right\| \leq \sup_{0 \leq t \leq \alpha} \int_0^t \|f(x(\tau), \tau)\| d\tau = \\ &= \sup_{0 \leq t \leq \alpha} \int_0^t \|f(x(\tau), \tau) - f(x_0, \tau) + f(x_0, \tau)\| d\tau \leq \\ &\leq \sup_{0 \leq t \leq \alpha} \left(\int_0^t L \|x(\tau) - x_0\| d\tau + \int_0^t \|f(x_0, \tau)\| d\tau \right) \leq \\ &\leq Lr \sup_{0 \leq t \leq \alpha} \int_0^t d\tau + M \sup_{0 \leq t \leq \alpha} \int_0^t d\tau = (Lr + M)\alpha. \end{aligned}$$

Podsumowując, P przyjmuje wartości w zbiorze S , jeżeli $(Lr + M)\alpha \leq r$, co oznacza, że α powinno być odpowiednio małe, $\alpha \leq \frac{r}{Lr + M}$. Wybierając $\alpha = \min \left\{ \frac{r}{L}, \frac{r}{Lr + M} \right\}$ zapewniamy, że P jest zwężające na zbiorze S . W tej sytuacji, z twierdzenia 3.5.2 wynika, że funkcja P ma punkt stały, taki że $P(x^*) = x^*$, a zatem, dla każdego $t \in [0, \alpha]$,

$$x^*(t) = x_0 + \int_0^t f(x^*(\tau), \tau) d\tau,$$

czyli

$$\dot{x}^* = f(x^*(t), t), \quad x^*(0) = x_0.$$

Twierdzenie zostało udowodnione. ■

4.6.2. Wzór Peano-Bakera

Podamy schemat wyprowadzenia wzoru Peano-Bakera. Szukamy macierzy fundamentalnej $\Phi(t, s)$ spełniającej równanie

$$\frac{\partial \Phi(t, s)}{\partial t} = A(t)\Phi(t, s), \quad \text{przy warunku} \quad \Phi(s, s) = I_n.$$

Całkując to równanie w granicach od s do t otrzymujemy

$$\Phi(t, s) = I_n + \int_s^t A(\sigma_1)\Phi(\sigma_1, s)d\sigma_1.$$

W analogiczny sposób obliczamy

$$\Phi(\sigma_1, s) = I_n + \int_s^{\sigma_1} A(\sigma_2)\Phi(\sigma_2, s)d\sigma_2,$$

co po wstawieniu do poprzedniego wzoru daje

$$\Phi(t, s) = I_n + \int_s^t A(\sigma_1)d\sigma_1 + \int_s^t A(\sigma_1) \int_s^{\sigma_1} A(\sigma_2)\Phi(\sigma_2, s)d\sigma_2 d\sigma_1,$$

etc.

4.6.3. Nierówność Wazewskiego

Dowód: Niech $x(t)$ oznacza trajektorię układu liniowego. Obliczamy kwadrat normy $\|x(t)\|^2 = x^T(t)x(t)$ i różniczkujemy względem czasu

$$\begin{aligned} \frac{d\|x(t)\|^2}{dt} &= \dot{x}^T(t)x(t) + x^T(t)\dot{x}(t) = \\ &= x^T(t)A^T(t)x(t) + x^T(t)A(t)x(t) = 2x^T(t)\bar{A}(t)x(t). \end{aligned}$$

Do ostatniego wyrazu stojącego po prawej stronie zastosujemy teraz nierówność Rayleigha-Ritza, z której wynika, że

$$\underline{\lambda}_{\bar{A}}(t)\|x(t)\|^2 \leq x^T(t)\bar{A}(t)x(t) \leq \bar{\lambda}_{\bar{A}}(t)\|x(t)\|^2.$$

W szczególności, z prawej części tej nierówności otrzymujemy

$$\frac{d\|x(t)\|^2}{dt} \leq 2\bar{\lambda}_{\bar{A}}(t)\|x(t)\|^2.$$

Scałkowanie tej nierówności stronami daje

$$\int_0^t \frac{d\|x(s)\|^2}{\|x(s)\|^2} = \ln \frac{\|x(t)\|^2}{\|x_0\|^2} \leq 2 \int_0^t \bar{\lambda}_{\bar{A}}(s) ds,$$

skąd bezpośrednio wynika

$$\|x(t)\|^2 \leq \|x_0\|^2 e^{2 \int_0^t \bar{\lambda}_{\bar{A}}(s) ds},$$

co jest równoważne prawej części nierówności Wazewskiego. Lewa część udowadniamy analogicznie. ■

4.7. Zadania

Zadanie 4.1 Korzystając z Twierdzenia o Punkcie Stałym wyprowadzić warunek wystarczający zbieżności podanego niżej algorytmu rozwiązania układu równań liniowych $x = Ax$. Algorytm:

$$x_{k+1} = Ax_k,$$

x_0 – punkt startowy.

Zadanie 4.2 Pokazać, że macierz fundamentalna $\Phi(t, s)$ układu liniowego $\dot{x} = A(t)x$ spełnia zależność

$$\frac{\partial \Phi^T(s, t)}{\partial t} = -A^T(t)\Phi^T(s, t).$$

Zadanie 4.3 Sprawdzić, że dla stałej macierzy $A(t) = A$ szereg Peano-Bakera daje $e^{tA} = \Phi(t, 0)$.

Zadanie 4.4 Sprawdzić, że macierz $M(t) = \int_0^t \Phi(t, s)B(s)B^T(s)\Phi^T(t, s)ds$ spełnia równanie Lapunowa

$$\dot{M} = B(t)B^T(t) + A(t)M(t) + M(t)A^T(t).$$

Zadanie 4.5 Udowodnić Lemat Gronwalla-Bellmana. Wskazówka: Zauważyć, że

$$\frac{\phi(t)}{a \int_0^t \phi(s)\psi(s)ds + b} \leq 1.$$

Zadanie 4.6 Na podstawie nierówności Wazewskiego określić asymptotyczną stabilność układów liniowych:

a)

$$\begin{cases} \dot{x} = -tx \\ \dot{y} = -y \end{cases},$$

b)

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + \frac{2y}{1+t^2} \\ \dot{y} = -y \end{cases},$$

c)

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + 2y \sin t \\ \dot{y} = -2y \end{cases},$$

d)

$$\begin{cases} \dot{x} = -t^2x + y \cos t \\ \dot{y} = -t^2y - x \cos t \end{cases}.$$

4.8. Odniesienia literaturowe

Podstawowe i bardziej zaawansowane wiadomości na temat układów dynamicznych Czytelnik może znaleźć w książkach [Har64, Arn75]. Dowód Twierdzenia o Istnieniu i Jednoznaczności przedstawiony w tym rozdziale opiera się na monografii [Sas99], tamże można znaleźć Lemat Bellmana-Gronwalla i wzór Peano-Bakera. Nierówność Ważewskiego pochodzi z pracy [Waż48]. Nierówność Rayleigha-Ritza (co prawda, bez użycia tej nazwy) pojawia się w rozdziale 8.4 książki [Ber05].

Literatura

- [Arn75] W. I. Arnold. *Równania różniczkowe zwyczajne*. PWN, Warszawa, 1975.
- [Ber05] D. S. Bernstein. *Matrix Mathematics*. Princeton University Press, Princeton, 2005.
- [Har64] Ph. Hartman. *Ordinary Differential Equations*. J. Wiley, New York, 1964.
- [Sas99] S. S. Sastry. *Nonlinear Systems*. Springer, New York, 1999.
- [Waż48] T. Ważewski. Sur la limitation des intégrales des systèmes d'équations différentielles linéaires ordinaires. *Studia Math.*, 10:48–59, 1948.

Rozdział 5

Stabilność

Zajmiemy się układami zależnymi od czasu, postaci

$$\dot{x} = f(x(t), t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (5.1)$$

gdzie $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest funkcją gładką (C^∞) ze względu na zmienną x . Zauważmy, że z gładkości wynika łatwo lokalna własność Lipschitza. Aby to pokazać zastosujemy wektorową postać Lematu Hadamarda 3.3.1, mianowicie zauważmy, że

$$\begin{aligned} f(x_2, t) - f(x_1, t) &= \int_0^1 df(sx_2 + (1-s)x_1, t) ds = \\ &= \int_0^1 \frac{\partial f(sx_2 + (1-s)x_1, t)}{\partial x} (x_2 - x_1) ds = G(x_1, x_2, t)(x_2 - x_1), \end{aligned}$$

gdzie $G(x_1, x_2, t) = \int_0^1 \frac{\partial f(sx_2 + (1-s)x_1, t)}{\partial x} ds$. Po obliczeniu normy dostaniemy

$$\|f(x_2, t) - f(x_1, t)\| \leq \|G(x_1, x_2, t)\| \|x_2 - x_1\|.$$

Jeżeli funkcja $f(x, t)$ spełnia warunki Twierdzenia o Istnieniu i Jednoznaczności ze względu na zmienną t , to nad zwartym zbiorem $B(x_0, r) \times [0, \alpha]$ norma macierzy $G(x_1, x_2, t)$ jest ograniczona, $\|G(x_1, x_2, t)\| \leq L$, co pociąga za sobą własność Lipschitza. Mamy więc zapewnione lokalne istnienie rozwiązania $x(t)$ układu (5.1). W dalszym ciągu będziemy zakładać więcej, mianowicie, że $x(t)$ istnieje dla każdego t , czyli że (5.1) jest zależnym od czasu gładkim układem dynamicznym.

5.1. Stabilność, stabilność jednostajna, stabilność asymptotyczna

Dla układu dynamicznego zdefiniujemy punkt równowagi.

Definicja 5.1.1 Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ nazywamy punktem równowagi układu (5.1), jeżeli dla każdego $t \in \mathbb{R}$

$$f(x_0, t) = 0.$$

Jest rzeczą oczywistą, że liniowy układ dynamiczny $\dot{x} = A(t)x(t)$ ma punkt równowagi $x_0 = 0$. Jednakże, nie każdy układ ma punkt równowagi, nie ma go na przykład układ $\dot{x} = x + t$.

Załóżmy, że $x_0 = 0$ jest punktem równowagi układu (5.1). Zachowanie się trajektorii układu w pobliżu punktu równowagi opisuje własność zwana stabilnością. Dla układów zależnych od czasu istnieje kilka koncepcji stabilności punktu równowagi. Przedstawimy je poniżej. Symbolem t_0 oznaczamy chwilę początkową.

Definicja 5.1.2 *Punkt równowagi $x_0 = 0$ układu dynamicznego zależnego od czasu jest*

— *stabilny (S), jeżeli*

$$(\forall t_0, \epsilon)(\exists \eta = \eta(t_0, \epsilon))(\forall t \geq t_0)(\|x(t_0)\| < \eta \implies \|x(t)\| < \epsilon),$$

— *niestabilny (NS), jeżeli nie jest stabilny*

$$(\exists t_0, \epsilon)(\forall \eta = \eta(t_0, \epsilon))(\exists t \geq t_0)(\|x(t_0)\| < \eta \wedge \|x(t)\| \geq \epsilon),$$

— *jednostajnie stabilny (JS), jeżeli jest stabilny i η nie zależy od t_0 , tzn. $\eta = \eta(\epsilon)$,*

— *asymptotycznie stabilny (AS), jeżeli jest stabilny i istnieje liczba $c = c(t_0)$, taka że dla $\|x(t_0)\| < c$ trajektoria $x(t) \rightarrow x_0$,*

— *jednostajnie asymptotycznie stabilny (JAS), jeżeli jest asymptotycznie stabilny i istnieje liczba c niezależna od t_0 , taka że dla $\|x(t_0)\| < c$ trajektoria $x(t)$ dąży do x_0 w sposób jednostajny, czyli jest spełniony warunek*

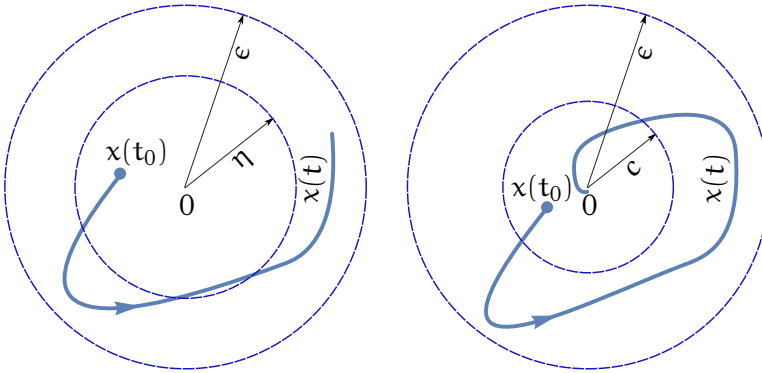
$$(\forall \eta > 0)(\exists T = T(\eta))(\forall t \geq t_0 + T(\eta))(\|x(t)\| < \eta),$$

— *globalnie jednostajnie asymptotycznie stabilny (GJAS), jeżeli jest JAS i $c = +\infty$.*

Ideę stabilności i stabilności asymptotycznej przedstawia rysunek 5.1. Dla bardzo prostych układów dynamicznych analizę stabilności można przeprowadzić na podstawie definicji. Jako przykład posłużmy nam układ

$$\dot{x} = -\frac{x(t)}{1+t}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > -1.$$

Trajektoria układu ma postać $x(t) = \frac{x(t_0)(1+t_0)}{1+t}$, a punkt $x_0 = 0$ jest punktem równowagi. Ponieważ $|x(t)| < |x(t_0)|$, wystarczy wziąć $\eta = \epsilon$, żeby stwierdzić, że punkt równowagi jest stabilny. Punkt ten jest także asymptotycznie stabilny. Nie jest on jednak jednostajnie asymptotycznie stabilny, ponieważ dla danego η wymagane $|x(t_0 + T)| = \frac{x(t_0)(1+t_0)}{1+t_0+T} < \eta$ prowadzi do wniosku $T > \frac{|x(t_0)|(1+t_0)}{\eta} - 1 - t_0 = T(\eta, t_0)$, co oznacza, że T zależy od chwili początkowej t_0 .



Rysunek 5.1: Stabilność i stabilność asymptotyczna

5.2. Funkcje klasy K i K_∞

W nietrywialnych przypadkach o stabilności punktu równowagi nie da się orzec bezpośrednio na podstawie definicji. Zamiast tego potrzebne są pewne metody pośrednie. Przy ich sformułowaniu wykorzystamy tzw. funkcje klasy K (funkcje porównawcze), zdefiniowane w następujący sposób

Definicja 5.2.1 Funkcja ciągła $\alpha : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}_+$, $a > 0$ nazywa się funkcją klasy K, jeżeli α jest ściśle rosnąca i $\alpha(0) = 0$. Funkcja α jest klasy K_∞ , jeżeli $a = +\infty$ i przy $r \rightarrow +\infty$ funkcja $\alpha(r) \rightarrow +\infty$.

Przykładem funkcji klasy K, ale nie K_∞ jest $\alpha(r) = \arctg r$. Natomiast funkcja $\alpha(r) = r^n$, $n \geq 1$, jest zarówno klasy K, jak i klasy K_∞ .

5.3. Twierdzenie o Funkcji Lapunowa

Przy użyciu funkcji klasy K możemy sformułować następujący warunek wystarczający stabilności.

Twierdzenie 5.3.1 (O Funkcji Lapunowa) Niech będzie dany układ dynamiczny (5.1) z punktem równowagi $x_0 = 0$. Załóżmy, że w pewnym obszarze $D \subset \mathbb{R}^n$ zawierającym x_0 została zdefiniowana funkcja $V : D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, klasy C^1 . Obliczamy pochodną V wzdłuż trajektorii układu dynamicznego,

$$\dot{V}(x, t) = \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} + \left(\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} \right)^T f(x, t).$$

Wówczas, jeżeli

— istnieją funkcje α_1, α_2 klasy K , takie że

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x, t) \leq \alpha_2(\|x\|) \quad \text{i} \quad \dot{V}(x, t) \leq 0,$$

to punkt x_0 jest jednostajnie stabilny,

— istnieją funkcje α_1, α_2 i α_3 , klasy K , takie że

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x, t) \leq \alpha_2(\|x\|) \quad \text{i} \quad \dot{V}(x, t) \leq -\alpha_3(\|x\|),$$

to punkt x_0 jest jednostajnie asymptotycznie stabilny,

— warunek z poprzedniego punktu jest spełniony dla funkcji α_1, α_2 i α_3 klasy K_∞ oraz $D = \mathbb{R}^n$, to punkt x_0 jest globalnie jednostajnie asymptotycznie stabilny.

Funkcja V nazywa się funkcją Lapunowa, a stabilny punkt równowagi bywa nazywany punktem stabilnym w sensie Lapunowa. Dla ilustracji Twierdzenia o Funkcji Lapunowa rozważmy zależny od czasu układ dynamiczny

$$\dot{x} = -\left(1 + t^2\right)x^3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Punkt $x_0 = 0$ jest punktem równowagi tego układu. Wybierzmy $V(x, t) = \frac{1}{2}x^2$. Jest oczywiste, że dla $\alpha_1(r) = \alpha_2(r) = \frac{1}{2}r^2$ jest spełniony warunek $\alpha_1(|x|) \leq V(x, t) \leq \alpha_2(|x|)$. Obliczamy pochodną $\dot{V}(x, t) = 1(1 + t^2)x^4 \leq -x^4$, zatem przy $\alpha_3(r) = r^4$ mamy $\dot{V}(x, t) \leq -\alpha_3(|x|)$. Ponieważ wszystkie funkcje α_i są klasy K_∞ a $D = \mathbb{R}$, z twierdzenia 5.3.1 wynika globalna jednostajna asymptotyczna stabilność punktu x_0 .

5.4. Lemat Barbalata

Przy badaniu stabilności układów zależnych od czasu obok Twierdzenia o Funkcji Lapunowa używa się także innego twierdzenia, zwanego Lematem Barbalata. W celu jego umotywowania spróbujmy odpowiedzieć na następujące pytania z dziedziny funkcji rzeczywistych:

- Załóżmy, że gładka funkcja $f(t)$ ma granicę przy $t \rightarrow +\infty$. Czy prawdą jest, że $\dot{f}(t) \rightarrow 0$?
- Niech teraz $\dot{f}(t) \rightarrow 0$. Czy wynika stąd, że istnieje granica funkcji $f(t)$ przy $t \rightarrow +\infty$?

Odpowiedź na oba pytania jest negatywna, co ilustrują kontrprzykłady $f(t) = e^{-t} \sin e^{2t}$ i $f(t) = \sin \ln t$. Okazuje się, że dla uzyskania odpowiedzi pozytywnej potrzebne jest dodatkowe założenie na temat funkcji $f(t)$. Zawiera je następujące

Twierdzenie 5.4.1 (Barbalat) Niech będzie dana funkcja $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Jeżeli $f(t)$ ma granicę przy $t \rightarrow +\infty$ i druga pochodna funkcji f jest ograniczona, $|\ddot{f}(t)| \leq M$, to $\dot{f}(t) \rightarrow 0$.

Lemat Barbalata jest często stosowany do funkcji Lapunowa, w celu udowodnienia asymptotycznej stabilności układu lub uzyskania dodatkowych informacji na temat zbieżności trajektorii. Dla przykładu zbadajmy układ dynamiczny

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 \sin t \\ \dot{x}_2 = -x_1 \sin t \end{cases}.$$

Punkt $0 \in \mathbb{R}^2$ jest punktem równowagi układu. Wybierzmy funkcję $V(x, t) = x_1^2 + x_2^2$ i obliczmy $\dot{V}(x, t) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = -2x_1^2$. Z Twierdzenia o Funkcji Lapunowa otrzymujemy, że punkt równowagi jest stabilny (zauważmy, że funkcja x_1^2 nie jest funkcją klasy K zależną od normy $\|x\|$). Czy można by pokazać więcej? W tym celu zauważmy, że wzdłuż trajektorii $x(t)$ układu funkcja $W(t) = x_1^2(t) + x_2^2(t) \geq 0$, a jej pochodna $\dot{W}(t) = -2x_1^2(t) \leq 0$, co oznacza, że $W(t)$ jest malejąca (nierosnąca) i ograniczona od dołu. Wynika stąd istnienie granicy $W(t)$ przy $t \rightarrow +\infty$. Obliczmy pochodną rzędu drugiego, $\ddot{W}(t) = -4x_1\dot{x}_1 = 4x_1^2 - 4x_1x_2 \sin t \leq 4x_1^2 + 4|x_1||x_2|$. Ponieważ funkcja $W(t)$ jest nierosnąca, $W(t) \leq W(0)$, skąd wynika że trajektoria $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ jest ograniczona. Na mocy Lematu Barbalata otrzymujemy, że $\dot{W}(t) = -x_1^2(t) \rightarrow 0$, czyli $x_1(t) \rightarrow 0$. Wykazaliśmy w ten sposób, że jedna ze współrzędnych układu dąży asymptotycznie do 0.

5.5. Ocena zbieżności

W trakcie analizy stabilności układu w oparciu o Twierdzenie o Funkcji Lapunowa zdarza się, że pochodną funkcji Lapunowa wzdłuż trajektorii można uzależnić od samej funkcji. Jest to sytuacja bardzo pożądana z uwagi na możliwość oszacowania szybkości zbieżności trajektorii układu do punktu równowagi. Dla lepszego zrozumienia procedury zajmijmy się układem $\dot{x} = -(1+t^2)x^3$. Układ ma punkt równowagi $0 \in \mathbb{R}$. Weźmy funkcję $V(x, t) = V(x) = \frac{1}{2}x^2$ i niech $W(t) = V(x(t))$. Łatwo zauważyć, że $\dot{W}(t) \leq -x^4(t) = -4W^2(t)$. Całkując tę nierówność stronami otrzymujemy $W(t) \leq \frac{1}{\frac{1}{W(0)} + 4t}$, skąd wynika, że $|x(t)| \leq \left(\frac{2}{\frac{1}{W(0)} + 4t}\right)^{1/2}$. Widzimy, że trajektoria układu dąży do 0 z gwarantowaną prędkością rzędu $t^{-1/2}$. Uzyskane oszacowanie ma charakter orientacyjny, jako że trajektoria

układu $x(t) = \frac{1}{\sqrt{x_0^{-2} + 2t + \frac{2}{3}t^3}}$ dąży do zera szybciej, mianowicie tak jak funkcja $t^{-3/2}$.

5.6. Zadania

Zadanie 5.1 Z badać stabilność następujących układów:

a)

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & e^{\frac{1}{2}t} \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

b)

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & e^{3t} \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

c)

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

d)

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \sin t \\ 0 & -(t+1) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 5.2 Pokazać, że punkt równowagi $(0,0)^T$ układu

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + (x_1^2 + x_2^2) \sin t \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + (x_1^2 + x_2^2) \cos t \end{cases}$$

jest eksponencjalnie stabilny i zdefiniować obszar jego stabilności; Wskazówka: Zastosować $V(x) = x_1^2 + x_2^2$.

Zadanie 5.3 Z badać stabilność punktu równowagi $(0,0)^T$ układu

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = h(t) - g(t)x_1^3 \\ \dot{x}_2 = -h(t) - g(t)x_2^3 \end{cases},$$

gdzie $g(t)$, $h(t)$ są gładkie i ograniczone od góry, i dodatkowo $g(t) \geq k > 0$. Wskazówka: Wziąć $V(x) = x_1^2 + x_2^2$.

Zadanie 5.4 Niech $V(x)$ oznacza gładką funkcję potencjału. Pokazać, że układ gradientowy

$$\dot{x} = -\frac{\partial V(x)}{\partial x} = -DV(x)$$

nie ma orbit zamkniętych.

Zadanie 5.5 Niech $H(x, y)$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ oznacza gładką funkcję Hamiltona. Pokazać, że układ hamiltonowski

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} \\ \dot{y} = -\frac{\partial H(x, y)}{\partial x} \end{cases}$$

nie ma asymptotycznie stabilnego punktu równowagi.

5.7. Odniesienia literaturowe

Wykład teorii stabilności przedstawiony w tym rozdziale opiera się na monografii [Kha00]. Teorii stabilności według Lapunowa poświęcono rozdział 5 książki [Sas99]. Pojęcie układu hamiltonowskiego i inne pojęcia z zakresu mechaniki analitycznej można znaleźć w [Arn78].

Literatura

- [Arn78] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer, Berlin, 1978.
- [Kha00] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall, New Jersey, 2000.
- [Sas99] S. S. Sastry, *Nonlinear Systems*. Springer, New York, 1999.

Rozdział 6

Układy dynamiczne niezależne od czasu

W tym rozdziale będziemy badać układy równań różniczkowych postaci

$$\dot{x} = f(x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad (6.1)$$

gdzie $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Zauważmy, że prawa strona układu (6.1) nie zależy od czasu, a zatem warunki Twierdzenia o Istnieniu i Jednoznaczności sprowadzają się do warunku Lipschitza, który dla gładkiej funkcji $f(x)$ jest spełniony automatycznie.

6.1. Strumień układu

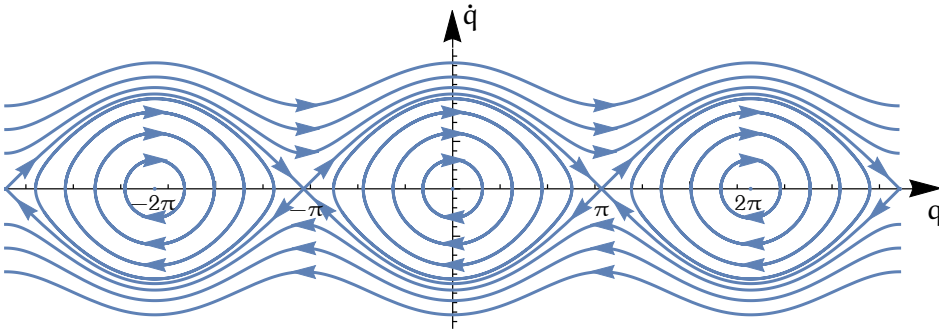
Wynika stąd, że układ (6.1) ma rozwiązanie

$$x(t) = \varphi(t, x), \quad x(0) = x, \quad \frac{d\varphi(t, x)}{dt} = f(\varphi(t, x))$$

określone na pewnym interwale czasu zawierającym chwilę początkową. Jeżeli $\varphi(x, t)$ jest określone dla każdego stanu początkowego $x \in \mathbb{R}^n$ i dla każdej chwili $t \in \mathbb{R}$, to (6.1) nazywamy niezależnym od czasu (autonomicznym) układem dynamicznym, albo, po prostu, układem dynamicznym. W odniesieniu do układu dynamicznego funkcja $\varphi(x, t)$ nazywa się strumieniem układu. Strumień zależy w sposób gładki zarówno od czasu, jak i od stanu. Wyznacza on stan, w którym się znajdzie układ w chwili t , jeżeli w chwili 0 układ był w stanie x . Dla odróżnienia znaczenia zmiennych x i t stosuje się często notację $\varphi(x, t) = \varphi_t(x)$. Strumień układu ma następujące własności:

- $\varphi_0(x) = x$ (własność identyczności),
- $\varphi_t \circ \varphi_s(x) = \varphi_{t+s}(x) = \varphi_{s+t}(x) = \varphi_s \circ \varphi_t(x)$ (własność półgrupowości).

Korzystając z powyższych własności, dla $s = -t$ otrzymujemy $\varphi_t \circ \varphi_{-t}(x) = \varphi_{t-t}(x) = \varphi_0(x) = x$, skąd wynika, że $(\varphi_t)^{-1} = \varphi_{-t}$. Widzimy, że $\{\varphi_t | t \in \mathbb{R}\}$ jest (1-parametrową) rodziną dyfeomorfizmów przestrzeni \mathbb{R}^n .



Rysunek 6.1: Orbity wahadła matematycznego

Geometrycznie, funkcja $f(x)$ występująca po prawej stronie układu (6.1) jest interpretowana jako pole wektorowe, które każdemu punktowi $x \in \mathbb{R}^n$ przypisuje kierunek ruchu układu w tym punkcie. Trajektoria układu musi być w każdym punkcie styczna do wektora wyznaczonego przez pole wektorowe. Wynika stąd, że całkowanie równania różniczkowego polega na wpisywaniu w przestrzeń stanu krzywych stycznych do kierunków wyznaczonych przez pole wektorowe.

Jeżeli w strumieniu ustalimy stan x i będziemy zmieniać t , wtedy dojdziemy do pojęcia orbity układu dynamicznego.

Definicja 6.1.1 Zbiór

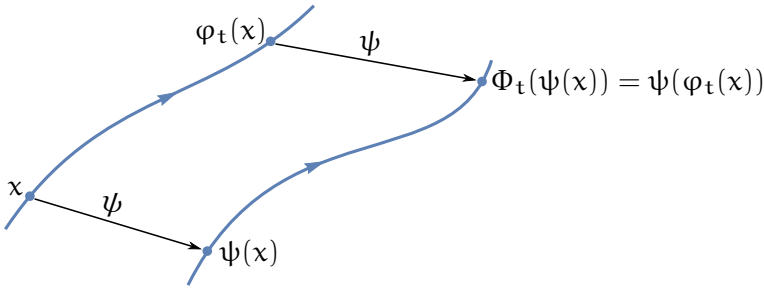
$$\mathcal{O}(x) = \{\varphi_t(x) | t \in \mathbb{R}\}$$

nazywamy orbitą układu przechodzącą przez punkt x .

Interesujące jest, że istnieją tylko trzy typy orbit układu dynamicznego.

- $\mathcal{O} = \{x\}$ punkt równowagi ($\forall t \in \mathbb{R})(\varphi_t(x) = x)$,
- $\mathcal{O} = \{x \in \mathbb{R}^n | (\exists t > 0)(\varphi_t(x) = x)\} \cong S^1$ orbita zamknięta,
- $\mathcal{O} \cong \mathbb{R}$ orbita otwarta.

Symbol \cong oznacza izomorfizm, można go czytać jako „wygląda jak”. S^1 oznacza okrąg jednostkowy. Wszystkie trzy rodzaje orbit pojawiają się na portrecie fazowym wahadła matematycznego $\ddot{q} = -\sin q$ pokazanego na rysunku 6.1. Zauważmy, że na mocy Twierdzenia o Istnieniu i Jednoznaczności, warunek $(\exists t > 0)(\varphi_t(x) = x)$ rzeczywiście definiuje orbitę zamkniętą. Najmniejsze $T > 0$, takie że $\varphi_T = x$ nazywamy okresem orbity zamkniętej. Oczywiście, $\varphi_{t+T}(x) = \varphi_t \circ \varphi_T(x) = \varphi_t(x)$.



Rysunek 6.2: Równoważność układów dynamicznych

6.2. Równoważność układów dynamicznych

Podobnie, jak dla funkcji wprowadzimy teraz pojęcie równoważności układów dynamicznych. Załóżmy, że mamy dane dwa układy dynamiczne postaci

$$\sigma : \dot{x} = f(x(t)) \quad \text{i} \quad \sigma' : \dot{\xi} = F(\xi(t)), \quad x, \xi \in \mathbb{R}^n$$

ze strumieniami, odpowiednio, $\varphi_t(x)$ i $\Phi_t(\xi)$. Można zdefiniować dwie relacje równoważności.

Definicja 6.2.1 — *Równoważność topologiczna*

$$\sigma \underset{\text{RT}}{\cong} \sigma' \iff (\exists \text{ homeomorfizm } \xi = \psi(x)) (\psi \circ \varphi_t(x) = \Phi_t \circ \psi(x)).$$

— *Równoważność różniczkowa*

$$\sigma \underset{\text{RR}}{\cong} \sigma' \iff (\exists \text{ dyfeomorfizm } \xi = \psi(x)) (\psi \circ \varphi_t(x) = \Phi_t \circ \psi(x)).$$

Pojęcie dyfeomorfizmu wprowadziliśmy w rozdziale 2. W odróżnieniu od dyfeomorfizmu, który musi być różniczkowalny, homeomorfizm jest funkcją ciągłą, z ciągłą funkcją odwrotną. Jeżeli funkcja ψ jest określona lokalnie, mówimy o lokalnej równoważności (topologicznej, różniczkowej) LRT i LRR. Istotę równoważności układów dynamicznych objaśnia rysunek 6.2.

6.3. Twierdzenie o Równoważności Różniczkowej

Jak wynika z definicji, wykazanie równoważności wymaga znajomości strumieni, a zatem rozwiązania równań układu. Jest to najczęściej niemożliwe, wobec tego pożądane byłoby kryterium równoważności nie angażujące strumieni. Jest to możliwe do uzyskania w przypadku równoważności różniczkowej. Mamy w tym kontekście następujące

Twierdzenie 6.3.1 (O Równoważności Różniczkowej)

$$\sigma \underset{\mathbb{R}\mathbb{R}}{\cong} \sigma' \iff (\exists \text{ dyfeomorfizm } \xi = \psi(x))(D\psi(x)f(x) = F(\psi(x))).$$

6.4. Twierdzenie o Prostowaniu

Niech będzie dany układ dynamiczny (6.1). Punkt x_0 , w którym $f(x_0) = 0$ nazywamy punktem osobliwym lub punktem równowagi układu dynamicznego. Jeżeli $f(x_0) \neq 0$, to punkt x_0 nazywamy punktem regularnym. Następujące Twierdzenie o Prostowaniu charakteryzuje zachowanie się układu w otoczeniu punktu regularnego.

Twierdzenie 6.4.1 (O Prostowaniu) *Załóżmy, że $f(0) \neq 0$. Wówczas*

$$\sigma \underset{\text{LRR}}{\cong} \sigma',$$

takim, że pole $F(\xi) = e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$. Innymi słowy, układ σ' ma postać

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = 1 \\ \dot{\xi}_2 = 0 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_n = 0 \end{cases},$$

a jego strumień

$$\Phi_t(\xi) = \xi + te_1.$$

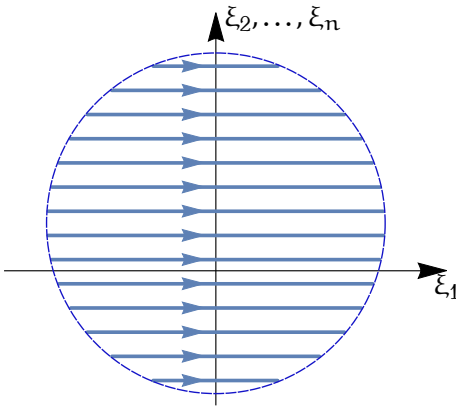
Nazwę i sens twierdzenia wyjaśnia rysunek 6.3. Z Twierdzenia o Prostowaniu wynika, że podobnie, jak w przypadku funkcji, zachowanie układów dynamicznych w otoczeniu punktów regularnych (nieosobliwych) jest mało interesujące. W poszukiwaniu ciekawych zachowań zajmiemy się teraz punktami równowagi (osobliwymi).

6.5. Punkty równowagi

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oznacza punkt równowagi układu (6.1). Rozwijamy pole $f(x)$ w szereg Taylora w otoczeniu punktu równowagi

$$f(x) = f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) + o(x) = Df(x_0)(x - x_0) + O(x^2).$$

Macierz $A = Df(x_0)$ nazywamy macierzą przybliżenia liniowego układu w punkcie x_0 . Będziemy rozróżniać dwa rodzaje punktów równowagi.



Rysunek 6.3: Prostowanie pola wektorowego

Definicja 6.5.1 Punkt równowagi x_0 nazywamy hiperbolicznym, jeżeli macierz A ma wartości własne o niezerowych częściach rzeczywistych. Punkt x_0 nazywamy rezonansowym, jeżeli wartości własne λ_i macierzy A spełniają następujące zależności: $\lambda_i = \sum_j m_{ij} \lambda_j$ dla pewnych liczb całkowitych $m_{ij} \geq 0$, takich że $\sum_j m_{ij} \geq 2$. Punkt równowagi x_0 nazywa się nierezonansowym, jeżeli nie jest rezonansowy.

Dla ilustracji pojęcia rezonansowego punktu równowagi rozważmy oscylator

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \omega x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega x_1 \end{cases} .$$

Jego orbity spełniają równanie $x_1^2 + x_2^2 = C$. Punkt równowagi $x_0 = 0$ jest rezonansowy, albowiem macierz $A = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix}$ przybliżenia liniowego oscylatora ma wartości własne $\pm i\omega$, a zatem $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. Wynika stąd $2\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_1$, jak wymaga definicja punktu rezonansowego. Skojarzenie z oscylatorem tłumaczy pochodzenie nazwy „rezonansowy”. Zauważmy, że warunek rezonansu może być spełniony przez rzeczywiste wartości własne sumujące się do 0. Oznacza to, że punkt równowagi może być jednocześnie rezonansowy i hiperboliczny, jak w układzie $\dot{x}_1 = \alpha x_2$, $\dot{x}_2 = \alpha x_1$.

6.6. Linearyzacja układów dynamicznych

Zachowanie się układów dynamicznych w otoczeniu punktu nierezonansowego opisuje następujące

Twierdzenie 6.6.1 (Poincaré-Siegel-Sternberg) Niech $x_0 = 0$ będzie nierezonansowym punktem równowagi układu dynamicznego $\sigma : \dot{x} = f(x(t))$. Wówczas

$$\sigma \underset{\text{LRR}}{\cong} \sigma',$$

gdzie $\sigma' : \dot{\xi} = A\xi$ i $A = Df(0)$.

Twierdzenie orzeka, że w otoczeniu nierezonansowego punktu równowagi układ dynamiczny zachowuje się tak samo jak jego przybliżenie liniowe. Dla punktu hiperbolicznego analogiczny wynik jest prawdziwy dla równoważności topologicznej. Mówi o tym

Twierdzenie 6.6.2 (Hartman-Grobman) Załóżmy, że punkt $x_0 = 0$ jest hiperbolicznym punktem równowagi układu dynamicznego $\sigma : \dot{x} = f(x(t))$. Wówczas

$$\sigma \underset{\text{LRT}}{\cong} \sigma',$$

gdzie $\sigma' : \dot{\xi} = A\xi$ i $A = Df(0)$.

6.7. Równoważność układów liniowych

Zajmiemy się teraz liniowymi układami dynamicznymi. Niech będą dane dwa takie układy

$$\sigma : \dot{x} = Ax(t) \quad \text{i} \quad \sigma' : \dot{\xi} = F\xi(t), \quad x, \xi \in \mathbb{R}^n, \quad A, F \text{ macierze.}$$

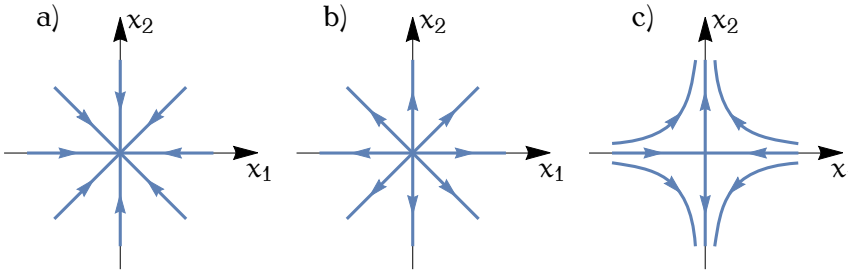
Równoważność różniczkowa układów liniowych oznacza, że

$$\sigma \underset{\text{RR}}{\cong} \sigma' \iff (\exists \text{ nieosobliwa macierz } P)(PA = FP).$$

Nietrudno zauważyć, że niezmiennikami tej równoważności są wartości własne macierzy A i F , zatem układy liniowe równoważne różniczkowo mają macierze o jednakowych wartościach własnych. Własność ta oznacza, że klasy tej równoważności są bardzo „małe” i jest ich nieskończenie wiele; na przykład dwie macierze diagonalne A i F , przestają być równoważne po dowolnie małym zaburzeniu któregośkolwiek elementu jednej z nich. Z tego powodu równoważność różniczkowa nie jest dobrym narzędziem do klasyfikacji układów liniowych. Jeżeli zamiast niej użyjemy równoważności topologicznej otrzymujemy następujący rezultat.

Twierdzenie 6.7.1 (Kuiper) Załóżmy, że układ liniowy

$$\sigma : \dot{x} = Ax(t)$$



Rysunek 6.4: Hiperboliczne punkty równowagi na płaszczyźnie: a) typu ujście, b) typu źródło, c) siodłowy

ma hiperboliczny punkt równowagi $x_0 = 0$. Wówczas

$$\sigma \underset{\text{LRT}}{\cong} \sigma'_k, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

gdzie

$$\sigma'_k : \begin{cases} \dot{\xi}_1 = -\xi_1(t) \\ \vdots \\ \dot{\xi}_k = -\xi_k(t) \\ \dot{\xi}_{k+1} = \xi_{k+1}(t) \\ \vdots \\ \dot{\xi}_n = \xi_n(t) \end{cases} \quad (6.2)$$

Nieziennik k oznacza liczbę wartości własnych macierzy A o ujemnych częściach rzeczywistych. W przypadku układów na płaszczyźnie ($n = 2$), z (6.2) wynika istnienie trzech rodzajów hiperbolicznych punktów równowagi: punktu typu ujście, punktu typu źródło i punktu siodłowego. Pokazuje je rysunek 6.4

6.8. Klasyfikacja układów dynamicznych: podsumowanie

Z rozważań przeprowadzonych w niniejszym rozdziale wynika, że równoważność różniczkowa jest efektywnym narzędziem do opisu zachowania układu dynamicznego w otoczeniu punktów regularnych oraz punktów równowagi typu nierezonansowego. Równoważność topologiczna pozwala utożsamić układ dynamiczny z jego przybliżeniem liniowym w hiperbolicznym punkcie równowagi. Dodatkowe zalety równoważności topologicznej uwidaczniają się po połączeniu twierdzeń 6.6.2 i 6.7.1. Uzyskujemy wtedy następującą skończoną klasyfikację układów dynamicznych.

Twierdzenie 6.8.1 *W otoczeniu hiperbolicznego punktu równowagi układ dynamiczny jest lokalnie topologicznie równoważny jednej spośród $(n + 1)$ postaci normalnych opisanych wzorem (6.2).*

Z twierdzenia 6.6.2 wynika także, że na podstawie przybliżenia liniowego w punkcie równowagi możemy wnioskować o lokalnej stabilności tego punktu. Jest to treścią tzw. Pierwszej Metody Lapunowa badania stabilności. W szczególności, punkt równowagi układu σ jest lokalnie asymptotycznie stabilny, jeżeli odpowiada mu postać normalną σ'_n i niestabilny w przypadku pozostałych postaci.

6.9. Dowody

6.9.1. Twierdzenie o Równoważności Różniczkowej

Dowód: Przypominamy, że strumienie układów σ i σ' spełniają równania

$$\frac{d\varphi_t(x)}{dt} = f(\varphi_t(x)) \quad \text{i} \quad \frac{d\Phi_t(x)}{dt} = F(\Phi_t(x)).$$

— Warunek konieczny: Załóżmy, że $\psi \circ \varphi_t(x) = \Phi_t \circ \psi(x)$. Ponieważ dyfeomorfizm ψ jest funkcją różniczkowalną, obliczamy pochodną po czasie obu stron otrzymując

$$\frac{d\psi \circ \varphi_t(x)}{dt} = D\psi(\varphi_t(x)) \frac{d\varphi_t(x)}{dt} = D\psi(\varphi_t(x))f(\varphi_t(x))$$

a także

$$\frac{d\Phi_t \circ \psi(x)}{dt} = F(\Phi_t(\psi(x))).$$

Po podstawieniu $t = 0$, z powyższych równości wynika

$$D\psi(x)f(x) = F(\psi(x)).$$

— Warunek wystarczający: Zakładamy, że $D\psi(x)f(x) = F(\psi(x))$. Ponieważ x jest dowolne, podstawiamy zamiast x strumień $\varphi_t(x)$, co daje $D\psi(\varphi_t(x))f(\varphi_t(x)) = F(\psi(\varphi_t(x)))$. Zauważmy jednak, że lewa strona tej równości jest równa $\frac{d\psi \circ \varphi_t(x)}{dt}$, a zatem

$$\frac{d\psi \circ \varphi_t(x)}{dt} = F(\psi(\varphi_t(x))).$$

Z drugiej strony, z definicji strumienia układu σ' wynika

$$\frac{d\Phi_t \circ \psi(x)}{dt} = F(\Phi_t \circ \psi(x)).$$

Otrzymaliśmy, że funkcje $\psi \circ \varphi_t(x)$ i $\Phi_t \circ \psi(x)$ spełniają to samo równanie różniczkowe postaci

$$\frac{d\alpha}{dt} = X(\alpha(t)),$$

przy tym samym warunku początkowym $\Phi_0 \circ \psi(x) = \psi(x)$ i $\psi \circ \varphi_0(x) = \psi(x)$. Na mocy Twierdzenia o Istnieniu i Jednoznaczności oba rozwiązania są identyczne,

$$\psi \circ \varphi_t(x) = \Phi_t \circ \psi(x).$$

■

6.9.2. Twierdzenie o Prostowaniu

Dowód: Zamiast dyfeomorfizmu $\xi = \psi(x)$, takiego że $D\psi(x)f(x) = F(\psi(x))$ skonstruujemy dyfeomorfizm odwrotny $x = \alpha(\xi)$ spełniający warunek $D\alpha(\xi)F(\xi) = f(\alpha(\xi))$. Mając $f(0) \neq 0$, jeżeli to konieczne poprzez przenumerywanie współrzędnych, możemy uzyskać $f_1(0) \neq 0$. Przy takim założeniu, korzystając ze strumienia układu σ , definiujemy

$$\alpha(\xi) = \varphi_{\xi_1}(0, \xi_2, \dots, \xi_n),$$

Z własności strumienia wynika, że α jest funkcją gładką i $\alpha(0) = 0$. Pochodna

$$\begin{aligned} D\alpha(\xi) &= \left[\frac{\partial \alpha}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial \alpha}{\partial \xi_n} \right] (\xi) = \\ &= \left[\frac{\partial \varphi_{\xi_1}(0, \xi_2, \dots, \xi_n)}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial \varphi_{\xi_1}(0, \xi_2, \dots, \xi_n)}{\partial \xi_n} \right]. \end{aligned}$$

Dla $\xi = 0$ otrzymujemy

$$D\alpha(0) = [f(0), e_2, \dots, e_n],$$

gdzie e_i oznacza i -ty wektor bazowy w \mathbb{R}^n . Ponieważ $f_1(0) \neq 0$, macierz $D\alpha(0)$ ma rząd n , zatem, na mocy Twierdzenia o Funkcji Odwrotnej, w pewnym otoczeniu 0 α jest dyfeomorfizmem. W celu sprawdzenia warunku równoważności obliczamy

$$D\alpha(\xi)F(\xi) = D\alpha(\xi)e_1 = \frac{\partial \varphi_{\xi_1}(0, \xi_2, \dots, \xi_n)}{\partial \xi_1} = f(\alpha(\xi)),$$

co kończy dowód. ■

6.10. Zadania

Zadanie 6.1 Pokazać, że układ dynamiczny

$$\begin{cases} \dot{x} = -\lambda y + xy \\ \dot{y} = \lambda x + \frac{1}{2}(x^2 - y^2) \end{cases} ,$$

$x, y \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, jest hamiltonowski. Wyznaczyć hamiltonian i sporządzić portret fazowy układu.

Zadanie 6.2 Wykazać, że układ dynamiczny

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y^3 \\ \dot{y} = 2x(x^2 - y) \end{cases} ,$$

$x, y \in \mathbb{R}$, ma całkę pierwszą.

Zadanie 6.3 Znaleźć całkę pierwszą układu

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - 2x^3 \end{cases} ,$$

$x, y \in \mathbb{R}$, i narysować jego portret fazowy.

Zadanie 6.4 Znaleźć całkę pierwszą układu i narysować jego portret fazowy układu równań Lotki-Volterra

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy \\ \dot{y} = -cy + bxy \end{cases} ,$$

$x, y \in \mathbb{R}$, $a, b, c > 0$.

Zadanie 6.5 Zbadać stabilność punktu $(0,0)^T$ układu

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(x^2 + y^2) \sin \sqrt{x^2 + y^2} \\ \dot{y} = x + y(x^2 + y^2) \sin \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} ,$$

$x, y \in \mathbb{R}$. Wskazówka: Przejść do współrzędnych biegunowych

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} .$$

6.11. Odniesienia literaturowe

Przydatnymi źródłami wiedzy na temat układów dynamicznych są monografie [Arn83, Arn75]. Równoważność układów dynamicznych i twierdzenia o klasyfikacji podane w tym rozdziale pochodzą z [Arn75]; traktuje także o nich rozdział 3 książki [Lév09]. Równoważność topologiczna układów liniowych jest przedmiotem pracy [Kui75]. Czytelnik zamierzający zająć się różnościami niezmienniczymi i teorią bifurkacji może przestudiować rozdział 7 monografii [Sas99].

Literatura

- [Arn75] W. I. Arnold. *Równania różniczkowe zwyczajne*. PWN, Warszawa, 1975.
- [Arn83] V. I. Arnold. *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*. Springer, New York, 1983.
- [Kui75] N. H. Kuiper. The topology of the solutions of a linear differential equation on \mathbb{R}^n . *Manifolds–Tokyo 1973*, strony 195–203. Tokyo University Press, 1975.
- [Lév09] J. Lévine. *Analysis and Control of Nonlinear Systems*. Springer, 2009.
- [Sas99] S. S. Sastry. *Nonlinear Systems*. Springer, New York, 1999.

Rozdział 7

Twierdzenie Frobeniusa

7.1. Pola wektorowe, duży operator dołączony

Zajmiemy się teraz parą układów dynamicznych

$$\dot{x} = X(x(t)) \quad \text{i} \quad \dot{y} = Y(y(t)), \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

zdefiniowanych przez gładkie pola wektorowe $X, Y \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, ze strumieniami $\varphi_t(x)$ i $\Phi_t(y)$. Na mocy definicji strumienie te spełniają zależności

$$\frac{d\varphi_t(x)}{dt} = X(\varphi_t(x)) \quad \text{i} \quad \frac{d\Phi_t(y)}{dt} = Y(\Phi_t(y)).$$

Rozważmy następujące działanie pola X na pole Y . Począwszy od stanu początkowego x poruszamy się przez czas t wzdłuż trajektorii pola X , aż do punktu $\varphi_t(x)$. W punkcie $\varphi_t(x)$ obliczamy pole Y i cofamy je poruszając się przez czas t wzdłuż trajektorii pola X , ale w przeciwnym kierunku. Uzyskany wektor w punkcie x definiuje duży operator dołączony

$$\text{Ad}_X^t Y(x) = D\varphi_{-t}(\varphi_t(x))Y(\varphi_t(x)) = (D\varphi_{-t}Y)(\varphi_t(x)).$$

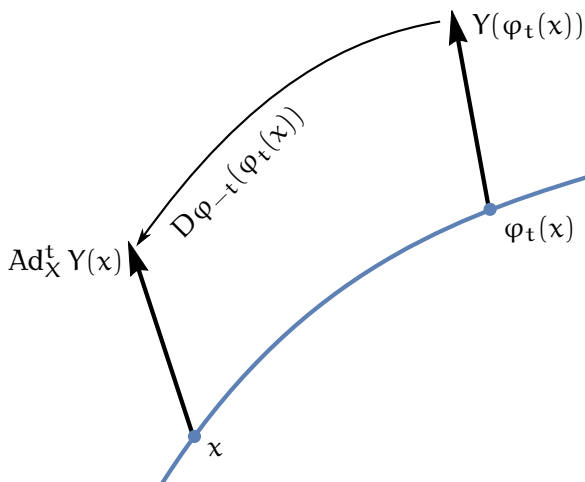
Definicję operatora $\text{Ad}_X^t Y(x)$ ilustruje rysunek 7.1. Dla ustalonego punktu x , a przy zmiennym t , $\text{Ad}_X^t Y(x)$ jest krzywą w przestrzeni \mathbb{R}^n . Pochodna tej krzywej wyznacza nawias Liego pól X i Y ,

$$[X, Y](x) = \text{ad}_X Y(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_X^t Y(x).$$

Nazwy „duży operator dołączony” proponujemy używać dla odróżnienia Ad od „małego operatora dołączonego” ad zdefiniowanego powyżej. Nie trudno udowodnić następujące własności operatora Ad :

- $\text{Ad}_X^0 Y(x) = Y(x)$,
- $\text{Ad}_X^{t+s} Y(x) = \text{Ad}_X^t \text{Ad}_X^s Y(x)$,
- $\frac{d}{dt} \text{Ad}_X^t Y(x) = \text{Ad}_X^t [X, Y](x)$.

Zauważmy, że z ostatniego wzoru wynika, że jeżeli pola X i Y komutują, tzn. ich nawias Liego $[X, Y](x) = 0$, to $\text{Ad}_X^t Y(x) = \text{Ad}_X^0 Y(x) = Y(x)$.

Rysunek 7.1: Definicja operatora $\text{Ad}_X^t Y(x)$

7.2. Nawias Liego

Można pokazać, że wprowadzona w poprzednim podrozdziale definicja nawiasu Liego pokrywa się z bardziej znaną definicją, sformułowaną we współrzędnych, mianowicie

$$[X, Y](x) = DY(x)X(x) - DX(x)Y(x).$$

Z definicji wynikają następujące własności nawiasu Liego:

- $[X, X](x) = 0$ – antyzwrotność,
 - $[Y, X](x) = -[X, Y](x)$ – antysymetria,
 - $[[X, Y], Z](x) + [[Y, Z], X](x) + [[Z, X], Y](x) = 0$ – tożsamość Jacobiego.
 - dla liczb $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $[\alpha X + \beta Y, Z](x) = \alpha[X, Z](x) + \beta[Y, Z](x)$ – dwuliniowość.
- Łatwo zauważyć, że nawias Liego przypisuje parze pól wektorowych nowe pole wektorowe. Można go zatem potraktować jako pewnego rodzaju iloczyn pól wektorowych, przypominający iloczyn wektorowy wektorów w \mathbb{R}^3 . Tożsamość Jacobiego pociąga za sobą, że nawias Liego (podobnie jak iloczyn wektorowy) nie jest łączny; mamy bowiem

$$[[X, Y], Z] = [X, [Y, Z]] - [Z, [X, Y]] \neq [X, [Y, Z]].$$

Jak powiedzieliśmy w podrozdziale 1.2, gładkie pola wektorowe $V(\mathbb{R}^n)$ tworzą przestrzeń liniową nad \mathbb{R} i, wraz z nawiasem Liego, stanowią algebrę Liego. Ponadto, pola wektorowe tworzą moduł nad pierścieniem funkcji gładkich $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, zatem dla $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ nawias $[fX, gY] \in V^\infty(\mathbb{R}^n)$. Wyliczenie tego nawiasu odbywa się według wzoru

$$[fX, gY](x) = f(x)g(x)[X, Y](x) + f(x)L_X g(x)Y(x) - g(x)L_Y f(x)X(x),$$

gdzie symbol $L_X f$ oznacza pochodną Liego funkcji f względem pola X , zdefiniowaną wzorem $L_X f(x) = df(x)X(x)$.

7.3. Twierdzenia o Nawiasie Liego

Kolejne własności nawiasu Liego pól wektorowych są zawarte w dwóch następujących twierdzeniach.

Twierdzenie 7.3.1 (O Przemienności) *Pola wektorowe komutują wtedy i tylko wtedy, gdy składanie ich strumieni jest przemienne, tzn.*

$$[X, Y](x) = 0 \iff \varphi_t \circ \Phi_s(x) = \Phi_s \circ \varphi_t(x).$$

Twierdzenie 7.3.2 *Załóżmy, że $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ określa równoważność różniczkową układów dynamicznych zdefiniowanych przez pola X_1, Y_1 i X_2, Y_2 . tzn.*

$$D\varphi(x)X_1(x) = Y_1(\varphi(x)) \quad \text{i} \quad D\varphi(x)X_2(x) = Y_2(\varphi(x)).$$

Nawiasy Liego pól różniczkowo równoważnych są także różniczkowo równoważne,

$$D\varphi(x)[X_1, X_2](x) = [Y_1, Y_2](\varphi(x)).$$

7.4. Twierdzenie o Jednoczesnym Prostowaniu

Uogólnieniem Twierdzenia o Prostowaniu udowodnionego w rozdziale 6 jest Twierdzenie o Jednoczesnym Prostowaniu, które podajemy poniżej. Twierdzenie to ma bezpośrednie zastosowanie w dowodzie tytułowego dla rozdziału Twierdzenia Frobeniusa.

Twierdzenie 7.4.1 (O Jednoczesnym Prostowaniu) *Niech będzie dany zestaw $k \geq 1$ pól wektorowych $X_1, X_2, \dots, X_k \in V^\infty(\mathbb{R}^n)$. Zakładamy, że pola te są niezależne w punkcie $0 \in \mathbb{R}^n$, tzn. $\text{rank}[X_1(0), X_2(0), \dots, X_k(0)] = k$ i że komutują, $[X_i, X_j] = 0$, $i, j = 1, 2, \dots, k$, w pewnym otoczeniu zera. Przy tych założeniach istnieje lokalny dyfeomorfizm $\xi = \psi(x)$, taki że*

$$D\psi(x)X_i(x) = e_i(\psi(x)) = e_i, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

gdzie $e_i \in \mathbb{R}^n$ oznacza i -ty wektor jednostkowy. Innymi słowy, dyfeomorfizm ψ pozwala jednocześnie wyprostować wszystkie k pól ustanawiając równoważności

$$X_1 \underset{\text{LRR}}{\cong} e_1, \quad X_2 \underset{\text{LRR}}{\cong} e_2, \dots, \quad X_k \underset{\text{LRR}}{\cong} e_k.$$

7.5. Dystrybucja i rozmaitość całkowa

Mając dany moduł pól wektorowych $V^\infty(\mathbb{R}^n)$ nad $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, jego podmoduł

$$\mathcal{D} = \underset{C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}{\text{span}} \{X_1, X_2, \dots, X_k\}$$

generowany przez zestaw niezależnych w każdym punkcie $x \in \mathbb{R}^n$ pól wektorowych $X_i \in V^\infty(\mathbb{R}^n)$ nazywamy dystrybucją. Na mocy definicji, dystrybucja \mathcal{D} wyznacza w każdym punkcie x k -wymiarową podprzestrzeń liniową $\mathcal{D}(x) \subset \mathbb{R}^n$, możemy zatem mówić o polu podprzestrzeni

$$x \mapsto \mathcal{D}(x).$$

Dla $k = 1$ dystrybucja $\mathcal{D} = \text{span}_{C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}\{X_1\}$ generuje w \mathbb{R}^n linie proste zdefiniowane przez pojedyncze pole X_1 . Z Twierdzenia o Istnieniu i Jednoznaczności wynikają warunki, przy których istnieje krzywa styczna w każdym punkcie do $\mathcal{D}(x)$. Krzywa ta jest krzywą całkową pola X_1 . Naturalnym uogólnieniem tego pojęcia dla dystrybucji dowolnego wymiaru k jest pojęcie rozmaitości całkowej dystrybucji rozumianej jako podrozmaitość \mathbb{R}^n , która jest w każdym punkcie styczna do podprzestrzeni $\mathcal{D}(x)$. W przeciwieństwie do dystrybucji jednowymiarowych, dla których warunki istnienia rozmaitości całkowej są łatwe do spełnienia, w przypadku $k \geq 2$ istnienie rozmaitości całkowej należy do rzadkości. W dalszym ciągu, w celu uniknięcia komplikacji technicznych, przez $(n-p)$ -wymiarową gładką rozmaitość (podrozmaitość \mathbb{R}^n) będziemy rozumieć podzbiór \mathbb{R}^n wyznaczony przez p niezależnych równań, a więc

$$M_{\mathcal{D}} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_1(x) = 0, f_2(x) = 0, \dots, f_p(x) = 0\},$$

gdzie funkcje f_i są gładkie. Niezależność funkcji oznacza, że ich różniczki są niezależne, i.e. $\text{rank} [df_1^T(x), df_2^T(x), \dots, df_p^T(x)](x) = p$ dla każdego $x \in M_{\mathcal{D}}$. Dystrybucję, która ma rozmaitość całkową nazywamy całkowaną

7.6. Twierdzenie Frobeniusa

Warunek konieczny i wystarczający istnienia rozmaitości całkowej dystrybucji podaje Twierdzenie Frobeniusa. Bywa ono nazywane trzecim filarem analizy nieliniowej. Poniżej ograniczymy się do sformułowania warunku wystarczającego.

Twierdzenie 7.6.1 (Frobenius) *Niech $\mathcal{D} = \text{span}_{C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}\{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ oznacza k -wymiarową dystrybucją zdefiniowaną w pewnym otoczeniu $0 \in \mathbb{R}^n$, taką że $\text{rank}[X_1(0), X_2(0), \dots, X_k(0)] = k$. Zakładamy, że*

dystrybucja \mathcal{D} jest inwolutywna, tzn. $X, Y \in \mathcal{D} \implies [X, Y] \in \mathcal{D}$. Wówczas, w pewnym lokalnym układzie współrzędnych,

$$\mathcal{D} = \underset{C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}{\text{span}} \{e_1, e_2, \dots, e_k\}.$$

Innymi słowy, istnieją pola wektorowe Y_1, Y_2, \dots, Y_k będące generatorami dystrybucji $\mathcal{D} = \text{span}_{C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}\{Y_1, Y_2, \dots, Y_k\}$ i lokalny dyfeomorfizm $\psi(x) = (\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x))$ prostujący jednocześnie te pola. Przez każdy punkt w pewnym otoczeniu $0 \in \mathbb{R}^n$ przechodzi rozmaitość całkowita dystrybucji \mathcal{D} , wymiaru k , zdefiniowana przez ostatnie $n - k$ składowych dyfeomorfizmu ψ ,

$$M_{\mathcal{D}} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \psi_{k+1}(x) = 0, \psi_{k+2}(x) = 0, \dots, \psi_n(x) = 0\}.$$

7.7. Dowody

7.7.1. Twierdzenie o Przemienności

Dowód: — Załóżmy, że $\varphi_t \circ \Phi_s(x) = \Phi_s \circ \varphi_t(x)$. Po zróżniczkowaniu obu stron względem s otrzymujemy

$$\frac{d}{ds} \varphi_t \circ \Phi_s(x) = D\varphi_t(\Phi_s(x)) \frac{d\Phi_s(x)}{ds} = \frac{d}{ds} \Phi_s \circ \varphi_t(x) = Y(\Phi_s \circ \varphi_t(x)).$$

Po podstawieniu $s = 0$ i $\varphi_{-t}(x)$ zamiast x powyższe wyrażenie uzyskuje postać

$$D\varphi_t(\varphi_{-t}(x))Y(\varphi_{-t}(x)) = \text{Ad}_X^{-t} Y(x) = Y(x),$$

skąd wynika, że

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_X^{-t} Y(x) = [X, Y](x) = 0.$$

— Niech teraz $[X, Y](x) = 0$. Pociąga to za sobą $\frac{d}{dt} \text{Ad}_X^t Y(x) = 0$, tzn.

$$\text{Ad}_X^t Y(x) = D\varphi_{-t}(\varphi_t(x))Y(\varphi_t(x)) = Y(x).$$

Zastępując x przez $\varphi_{-t}(x)$ i zamieniając $-t$ na t dostaniemy

$$D\varphi_t(x)Y(x) = Y(\varphi_t(x)).$$

Po kolejnym podstawieniu zamiast x strumienia $\Phi_s(x)$ pola Y otrzymamy

$$D\varphi_t(\Phi_s(x))Y(\Phi_s(x)) = Y(\varphi_t(\Phi_s(x))),$$

co pociąga za sobą

$$\frac{d}{ds} \varphi_t \circ \Phi_s(x) = Y(\varphi_t \circ \Phi_s(x)).$$

Jednakże, z definicji strumienia pola Y , mamy

$$\frac{d}{ds} \Phi_s \circ \varphi_t(x) = Y(\Phi_s \circ \varphi_t(x)).$$

Ostatnie dwie równości wskazują, że $\varphi_t \circ \Phi_s(x)$ i $\Phi_s \circ \varphi_t(x)$ spełniają to samo równanie różniczkowe przy tym samym warunku początkowym $\varphi_t \circ \Phi_s(x)|_{s=0} = \varphi_t(x) = \Phi_s \circ \varphi_t(x)|_{s=0}$, zatem na podstawie Twierdzenia o Istnieniu i Jednoznaczności musi być

$$\varphi_t \circ \Phi_s(x) = \Phi_s \circ \varphi_t(x),$$

co należało wykazać. ■

7.7.2. Twierdzenie o Jednoczesnym Prostowaniu

Dowód: Dla dowodu skonstruujemy dyfeomorfizm $x = \alpha(\xi)$, taki że $D\alpha(\xi)e_i = X_i(\alpha(\xi))$ dla $i = 1, 2, \dots, k$. Obliczenia będziemy prowadzić w pewnym otoczeniu $0 \in \mathbb{R}^n$. Bez utraty ogólności możemy przyjąć, że warunek rzędu $\text{rank}[X_1(0), X_2(0), \dots, X_k(0)] = k$ oznacza niezależność pierwszych k wierszy macierzy $[X_1(0), X_2(0), \dots, X_k(0)]$. Proponujemy następującą funkcję

$$\alpha(\xi) = \varphi_{1\xi_1} \circ \varphi_{2\xi_2} \circ \dots \circ \varphi_{k\xi_k}(0, 0, \dots, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n).$$

Z definicji wynika, że funkcja α jest gładka i że $\alpha(0) = 0$. Obliczmy jej pochodną

$$D\alpha(\xi) = \left[\begin{array}{l} \frac{d}{d\xi_1} \varphi_{1\xi_1}(\varphi_{2\xi_2} \circ \dots \circ \varphi_{k\xi_k}(0, 0, \dots, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n)), \\ D\varphi_{1\xi_1}(\varphi_{2\xi_2} \circ \dots \circ \varphi_{k\xi_k}(0, 0, \dots, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n)) \\ \frac{d}{d\xi_2}(\varphi_{2\xi_2}(\varphi_{3\xi_3} \circ \dots \circ \varphi_{k\xi_k}(0, 0, \dots, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n))), \dots \\ D\varphi_{1\xi_1} \circ \varphi_{2\xi_2} \circ \dots \circ \varphi_{k\xi_k}(0, 0, \dots, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n)e_{k+1}, \dots, \\ D\varphi_{1\xi_1} \circ \varphi_{2\xi_2} \circ \dots \circ \varphi_{k\xi_k}(0, 0, \dots, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n)e_n \end{array} \right].$$

Analiza uzyskanego wyrażenia prowadzi do wniosku, że

$$\frac{d}{d\xi_1} \varphi_{1\xi_1}(\varphi_{2\xi_2} \circ \dots \circ \varphi_{k\xi_k}(0, 0, \dots, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n)) = X_1(\alpha(\xi)),$$

$$\begin{aligned} & D\varphi_{1\xi_1}(\varphi_{2\xi_2} \circ \cdots \circ \varphi_{k\xi_k}(0, 0, \dots, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n)) \\ & \quad \frac{d}{d\xi_2}(\varphi_{2\xi_2}(\varphi_{3\xi_3} \circ \cdots \circ \varphi_{k\xi_k}(0, 0, \dots, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n))) = \\ & \quad = D\varphi_{1\xi_1}(\varphi_{1-\xi_1}(\alpha(\xi)))X_2(\varphi_{1-\xi_1}(\alpha(\xi))) = \text{Ad}_{X_1}^{-\xi_1} X_2(\alpha(\xi)) \end{aligned}$$

i podobnie dla dalszych elementów. Ale, na mocy założenia pola komutują, więc $[X_1, X_2](x) = 0$, co pociąga za sobą

$$\text{Ad}_{X_1}^{-\xi_1} X_2(\alpha(\xi)) = X_2(\alpha(\xi)),$$

etc. W rezultacie pokazaliśmy, że

$$D\alpha(\xi) = [X_1(\alpha(\xi)), X_2(\alpha(\xi)), \dots, X_k(\alpha(\xi)), *, \dots, *],$$

gdzie gwiazdkami oznaczyliśmy elementy, których znajomość nie jest potrzebna. W punkcie 0 mamy

$$D\alpha(0) = [X_1(0), X_2(0), \dots, X_k(0), e_{k+1}, \dots, e_n].$$

Ponieważ $\text{rank } D\alpha(0) = n$, α jest lokalnym dyfeomorfizmem w pewnym otoczeniu 0. Co więcej, dla każdego $i = 1, 2, \dots, k$, mamy

$$D\alpha(\xi)e_i = X_i(\alpha(\xi)),$$

a zatem pola X_1, X_2, \dots, X_k zostały jednocześnie wyprostowane. ■

7.7.3. Twierdzenie Frobeniusa

Dowód: Załóżmy, że górna $k \times k$ podmacierz macierzy

$$[X_1(x), X_2(x), \dots, X_k(x)] = \begin{bmatrix} P(x) \\ Q(x) \end{bmatrix}$$

jest rzędu k w pewnym otoczeniu $0 \in \mathbb{R}^n$. Na mocy definicji dystrybucji, po pomnożeniu obu stron powyższej równości przez macierz $P^{-1}(x)$ otrzymamy generatory Y_1, Y_2, \dots, Y_k dystrybucji \mathcal{D} o postaci

$$Y_i(x) = \begin{pmatrix} e_i \\ * \end{pmatrix},$$

gdzie $e_i \in \mathbb{R}^k$ jest i -tym wektorem jednostkowym, zaś $*$ oznacza pozostałe $n - k$ elementów pola. Pokażemy, że nowe generatory komutują. W tym celu obliczamy nawias Liego

$$\begin{aligned} [Y_i, Y_j](x) &= DY_j(x)Y_i(x) - DY_i(x)Y_j(x) = \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ * \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e_i \\ * \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ * \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e_j \\ * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ * \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Na mocy inwolutywności dystrybucji \mathcal{D} nawias $[Y_i, Y_j] \in \mathcal{D}$, co oznacza, że

$$[Y_i, Y_j](x) = \sum_{r=1}^k \alpha_r(x) Y_r(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ * \end{pmatrix},$$

czyli wszystkie funkcje $\alpha_i(x) = 0$ i $[Y_i, Y_j](x) = 0$, a więc nowe generatory komutują. Odwołując się do Twierdzenia o Jednoczesnym Prostowaniu stwierdzamy istnienie lokalnego dyfeomorfizmu $\psi(x) = (\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x))$, takiego że

$$D\psi(x)Y_j(x) = e_j, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Zostało do pokazania istnienie rozmaności całkowej. Niech

$$X_i(x) = \sum_{j=1}^k \gamma_{ij}(x) Y_j(x)$$

wyraża pole X_i za pomocą nowych generatorów. Mnożąc obie strony przez $D\psi(x)$, a następnie korzystając z postaci pól Y_j , otrzymujemy

$$D\psi(x)X_i(x) = \sum_{j=1}^k \gamma_{ij}(x) D\psi(x)Y_j(x) = \sum_{j=1}^k \gamma_{ij}(x) e_j = \begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix},$$

przy czym 0 odnosi się do ostatnich $n - k$ współrzędnych. Ponieważ

$$D\psi(x)X_i(x) = \begin{bmatrix} D\psi_1(x)X_i(x) \\ \vdots \\ D\psi_k(x)X_i(x) \\ \vdots \\ D\psi_n(x)X_i(x) \end{bmatrix},$$

wynika stąd, że

$$D\psi_{k+1}(x)X_i(x) = 0, \dots, D\psi_n(x)X_i(x) = 0.$$

Dystrybucja \mathcal{D} więc jest styczna do rozmaności

$$M_{\mathcal{D}} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \psi_{k+1}(x) = 0, \dots, \psi_n(x) = 0\}$$

będącej jej rozmanością całkową. Twierdzenie zostało udowodnione. ■

7.8. Zadania

Zadanie 7.1 Wyprowadzić formułę na nawias Liego pól wektorowych

$$[X, Y](x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_X^t Y(x) = DY(x)X(x) - DX(x)Y(x).$$

Zadanie 7.2 Udowodnić Twierdzenie 7.3.2. Wskazówka: pokazać, że prawa strona jest równa lewej, zauważyć, że $DY_i \circ \varphi D\varphi = D(Y_i \circ \varphi)$.

Zadanie 7.3 Pokazać, że dla każdej funkcji $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ zachodzi

$$L_{[X, Y]}f = L_X(L_Y f) - L_Y(L_X f).$$

Zadanie 7.4 Korzystając z własności $[fX, gY] = fg[X, Y] + fL_X gY - gL_Y fX$ wykazać, że dystrybucja $\mathcal{D} = \text{span}_{C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}\{X_1(x), X_2(x), \dots, X_k(x)\}$ jest inwolutywna wtedy i tylko wtedy, gdy $[X_i, X_j] \in \mathcal{D}$ dla $i, j = 1, 2, \dots, k$.

Zadanie 7.5 Sprawdzić inwolutywność dystrybucji:

a)

$$\mathcal{D}_1 = \text{span}_{C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

b)

$$\mathcal{D}_1 = \text{span}_{C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})} \left\{ \begin{pmatrix} \cos x_3 \\ \sin x_3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

c)

$$\mathcal{D}_1 = \text{span}_{C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})} \left\{ \begin{pmatrix} \cos x_3 \\ \sin x_3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin x_3 \\ \cos x_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos x_3 \\ \sin x_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

7.9. Odniesienia literaturowe

Pola wektorowe, nawiasy Liego, dystrybucje, Twierdzenie Frobeniusa etc. należą do obszaru geometrii różniczkowej. Niezbędne podstawy Czytelnik może znaleźć w monografiach dotyczących geometrycznej teorii sterowania, jak [Isi94, NvdS90, Blo03, Sas99, Lévo9]. Zaawansowany wykład geometrii różniczkowej zawierają prace [AMR83, Spi79]. „Dynamiczna” koncepcja nawiasu Liego przyjęta w tym rozdziale pochodzi

z monografii [AMR83]; w kontekście sterowania operatory dołączone pojawiły się w artykule [Kre85]. Twierdzenie o Prostowaniu jest klasyczne w teorii układów dynamicznych [Arn83, AMR83]. Uogólnienie Twierdzenia Frobeniusa można znaleźć w książce [Sus83].

Literatura

- [AMR83] R. Abraham, J. E. Marsden, T. Ratiu, *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*. Springer, New York, 1983.
- [Arn83] V. I. Arnold, *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*. Springer, New York, 1983.
- [Blo03] A. M. Bloch, *Nonholonomic Mechanics and Control*. Springer, New York, 2003.
- [Isi94] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*. Springer, New York, 1994.
- [Kre85] A. Krener, $(\text{Ad}_{f,g})$, $(\text{ad}_{f,g})$ and locally $(\text{ad}_{f,g})$ invariant and controllability distributions. *SIAM J. Contr. Opt.*, 23(4):523–549, 1985.
- [Lév09] J. Lévine, *Analysis and Control of Nonlinear Systems*. Springer, 2009.
- [NvdS90] H. Nijmeijer, A. J. van der Schaft, *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer, New York, 1990.
- [Sas99] S. S. Sastry, *Nonlinear Systems*. Springer, New York, 1999.
- [Spi79] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. Publish or Perish, Berkeley, 1979.
- [Sus83] H. Sussmann, Lie brackets, real analyticity and geometric control. W: *Differential Geometric Control Theory*, strony 1–116. Birkhäuser, Boston, 1983.

Rozdział 8

Układy sterowania

Układ sterowania jest reprezentowany przez układ równań różniczkowych zależny od zmiennej sterującej

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases}, \quad (8.1)$$

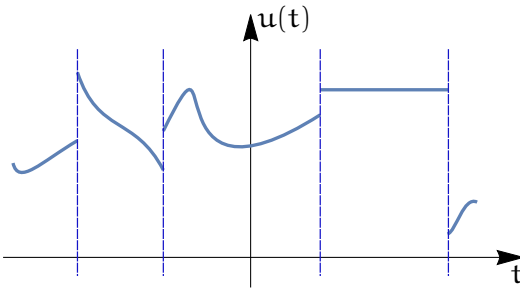
gdzie $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$ oznaczają, kolejno, zmienną stanu, zmienną sterującą i zmienną wyjścia. Zakładamy, że układ jest gładki, a więc funkcja opisująca dynamikę układu $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ i funkcja wyjścia $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. Zazwyczaj mamy $m \leq n$ i $p \leq n$. Zauważmy, że przy zadanym sterowaniu $u(t)$, układ sterowania jest opisany zależnym od czasu układem równań różniczkowych postaci

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t), u(t)) = \bar{f}(x(t), t) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases}.$$

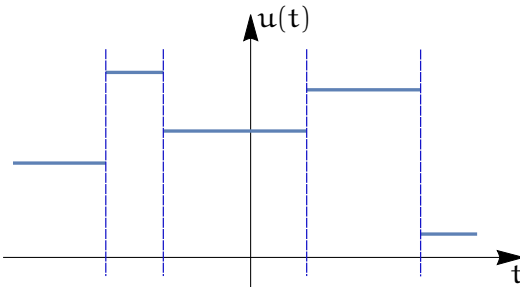
Biorąc to pod uwagę, z Twierdzenia o Istnieniu i Jednoznaczności otrzymujemy następujące warunki na istnienie trajektorii $x(t)$ układu (8.1)

- funkcja $\bar{f}(x, t)$ powinna być ciągłą funkcją t ,
- funkcja $\bar{f}(x, t)$ powinna spełniać warunek Lipschitza ze względu na x ,
- funkcja $\bar{f}(x_0, t)$ powinna być ograniczona ze względu na t .

Lipschitzowskość wynika z gładkości funkcji $f(x, u)$. Pozostałe warunki sprowadzają się do ciągłości i ograniczoności funkcji sterujących. Funkcje sterujące będziemy nazywać sterowaniami. Podstawowym wymaganiem, jakie nakładamy na dopuszczalne sterowania jest istnienie i jednoznaczność trajektorii $x(t)$, dla każdego sterowania dopuszczalnego i w każdej chwili. Zatem, podstawowa klasa sterowań dopuszczalnych to sterowania ciągłe i ograniczone. Z powodów praktycznych, ale także teoretycznych, dopuszczamy szerszą klasę sterowań, mianowicie sterowania odcinkami ciągłe i ograniczone, a w szczególności sterowania odcinkami stałe, których przykłady pokazano na rysunkach 8.1 i 8.2.



Rysunek 8.1: Sterowanie odcinkami ciągłe



Rysunek 8.2: Sterowanie odcinkami stałe

8.1. Układy afiniczne i bezdryfowe

Ważną podklasą układów sterowania są układy afiniczne, których równania mają następującą postać

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t)) + g(x(t))u(t) = f(x(t)) + \sum_{i=1}^m g_i(x(t))u_i(t) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (8.2)$$

Kolumnami macierzy $g(x)$ są pola wektorowe $g_1(x), \dots, g_m(x)$. Wszystkie pola wektorowe określające układ afiniczny (8.2) są gładkie. Ze względu na to, że przy „wyłączonych” sterowaniach, $u = 0$, zachowanie się układu afinicznego jest wyznaczone przez pole $f(x)$, pole to nazywamy dryfem. Znaczenie układów afinicznych wynika z kilku powodów, takich jak:

— Wiele układów, w tym układy z lagranżowskim modelem dynamiki, modelujemy jako afiniczne.

— Jeżeli sterowania dopuszczalne w układzie (8.1) są różniczkowalne, to przez zdefiniowanie zmiennej stanu jako $(x, u) \in \mathbb{R}^{n+m}$ otrzymujemy układ afiniczny

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x(t), u(t)) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix} v(t),$$

którego zmienna sterująca $v = \dot{u}$.

— Dla u bliskich zera rozwijamy prawą stronę układu (8.1) w szereg Taylora

$$f(x, u) = f(x, 0) + \frac{\partial f(x, 0)}{\partial u} u + O(x, u^2),$$

skąd wynika, że układ afiniczny (8.2) jest przybliżeniem układu (8.1) dla małych sterowań.

— Liniowy układ sterowania

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

jest układem afinicznym.

Jeżeli w układzie afinicznym dryf $f(x)$ nie występuje, równania (8.2) używają postać

$$\begin{cases} \dot{x} = g(x(t))u(t) = \sum_{i=1}^m g_i(x(t))u_i(t) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases}. \quad (8.3)$$

Znaczenie układów bezdryfowych wynika, m.in. z tego, że opisują kinematykę układów nieholonomicznych, na przykład robotów mobilnych.

8.2. Różniczkowanie odwzorowania końcowego

Niech będzie dany układ sterowania (8.1). Oznaczmy przez

$$x(t) = \varphi_{x,t}(u), \quad \frac{d\varphi_{x,t}(u)}{dt} = f(\varphi_{x,t}(u), u(t)),$$

trajektorię tego układu ze stanu początkowego x pod działaniem sterowania u . Jeżeli ustalimy chwilę końcowa T , możemy rozważać odwzorowanie $\text{end}_T : (x, u) \mapsto x(T) = \varphi_{x,T}(u)$ zwane odwzorowaniem końcowym układu. Przy odpowiednich założeniach na układ i sterowanie dowodzi się, że odwzorowanie końcowe jest różniczkowalne względem stanu i sterowania. Obliczmy teraz te pochodne.

— Dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^n$ mamy

$$\frac{\partial \varphi_{x,t}(u)}{\partial x} y = \xi(t) = \left. \frac{d}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \varphi_{x+\alpha y,t}(u).$$

Pochodna względem czasu

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \left. \frac{d}{dt} \frac{d}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \varphi_{x+\alpha y, t}(\mathbf{u}) = \left. \frac{d}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \frac{d}{dt} \varphi_{x+\alpha y, t}(\mathbf{u}) = \\ &= \left. \frac{d}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} f(\varphi_{x+\alpha y, t}(\mathbf{u}), \mathbf{u}(t)) = \frac{\partial f(x(t), \mathbf{u}(t))}{\partial x} \xi(t) = A(t)\xi(t).\end{aligned}$$

Rozwiązując równanie $\dot{\xi} = A(t)\xi(t)$ z warunkiem początkowym $\xi(0) = \mathbf{y}$ otrzymujemy

$$\left. \frac{\partial \text{end}_{\Gamma}(x, \mathbf{u})}{\partial x} \right|_{\alpha=0} \mathbf{y} = \xi(T) = \Phi(T, 0)\mathbf{y},$$

gdzie $\Phi(t, s)$ jest macierzą fundamentalną równania $\dot{\xi} = A(t)\xi(t)$.

— Analogicznie postępujemy przy różniczkowaniu względem sterowania, mianowicie dla $t \in \mathbb{R}$ i sterowania dopuszczalnego \mathbf{v} , obliczamy

$$\left. \frac{\partial \varphi_{x, t}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\alpha=0} \mathbf{v} = \zeta(t) = \left. \frac{d}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \varphi_{x, t}(\mathbf{u} + \alpha \mathbf{v}).$$

Różniczkowanie względem czasu daje

$$\begin{aligned}\dot{\zeta} &= \left. \frac{d}{dt} \frac{d}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \varphi_{x, t}(\mathbf{u} + \alpha \mathbf{v}) = \left. \frac{d}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \frac{d}{dt} \varphi_{x, t}(\mathbf{u} + \alpha \mathbf{v}) = \\ &= \left. \frac{d}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} f(\varphi_{x, t}(\mathbf{u} + \alpha \mathbf{v}), \mathbf{u}(t) + \alpha \mathbf{v}(t)) = \\ &= \frac{\partial f(x(t), \mathbf{u}(t))}{\partial x} \zeta(t) + \frac{\partial f(x(t), \mathbf{u}(t))}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{v}(t) = A(t)\zeta(t) + B(t)\mathbf{v}(t).\end{aligned}$$

W celu wyznaczenia pochodnej odwzorowania końcowego należy więc rozwiązać równanie $\dot{\zeta} = A(t)\zeta + B(t)\mathbf{v}(t)$ z warunkiem początkowym $\zeta(0) = 0$ i podstawić

$$\left. \frac{\partial \text{end}_{\Gamma}(x, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\alpha=0} \mathbf{v} = \zeta(T) = \int_0^T \Phi(T, t)B(t)\mathbf{v}(t)dt.$$

8.3. Osiągalność i sterowalność

Niech σ oznacza układ afiniczny (8.2) ze sterowaniami dopuszczalnymi z klasy sterowań odcinkami stałych, postaci

$$\mathbf{u}_k = \{(\mathbf{u}^1, t_1), (\mathbf{u}^2, t_2), \dots, (\mathbf{u}^k, t_k)\},$$

dla pewnego $k \in \mathbb{N}$ i $\mathbf{u}^i \in \mathbb{R}^m$. Zastosowanie tego sterowania oznacza, że przez czas t_1 podajemy na wejście układu stałe sterowanie \mathbf{u}^1 , następnie

przez czas t_2 używamy stałego sterowania u^2 itd., w końcu stosujemy stałe sterowanie u^k przez czas t_k . Po zastosowaniu takiego sterowania widzimy, że trajektoria układu afinicznego składa się z odcinka trajektorii pola $f(x) + g(x)u^1$, następnie z odcinka trajektorii pola $f(x) + g(x)u^2$ etc. Można powiedzieć, że ruch układu σ jest zdeterminowany przez rodzinę stowarzyszonych pól wektorowych

$$\mathcal{F}_\sigma = \{f + gu | u \in \mathbb{R}^m\}.$$

W szczególności, przy sterowaniu u_k układ σ ruch układu wyznaczają pola $X_i(x) = f(x) + g(x)u^i$ działające na odcinkach czasu t_i , przy $i = 1, 2, \dots, k$. Załóżmy, że $\varphi_{i,t}(x)$ oznacza strumień pola $X_i(x)$ i niech x_0 będzie stanem początkowym. Wówczas, pod działaniem sterowania u_k układ σ przejdzie po czasie $\sum_{i=1}^k t_i$ od stanu x_0 do stanu

$$x = \varphi_{k,t_k} \circ \varphi_{k-1,t_{k-1}} \circ \dots \circ \varphi_{1,t_1}(x_0).$$

Biorąc różne odcinkami stałe sterowania u_k , dla różnych k , otrzymamy zbiór stanów osiągalnych w układzie σ ze stanu x_0 w chwili t ,

$$\mathcal{R}_\sigma(x_0, t) = \left\{ \varphi_{k,t_k} \circ \varphi_{k-1,t_{k-1}} \circ \dots \circ \varphi_{1,t_1}(x_0) \mid t_i \geq 0, \sum_{i=1}^k t_i = t, k \geq 0 \right\}.$$

Zbiór osiągalny ze stanu x_0 w jakiegokolwiek chwili jest sumą

$$\mathcal{R}_\sigma(x_0) = \bigcup_{t \geq 0} \mathcal{R}_\sigma(x_0, t).$$

Za pomocą zbioru osiągalnego można zdefiniować kilka pojęć sterowalności.

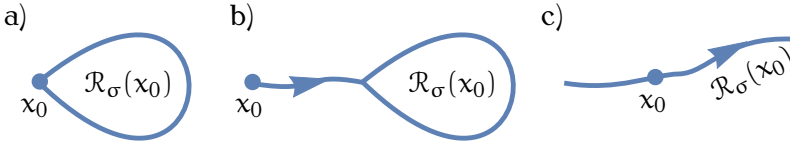
Definicja 8.3.1 Układ σ nazywamy sterowalnym z punktu x_0 , jeżeli $\mathcal{R}_\sigma(x_0) = \mathbb{R}^n$ i sterowalnym, jeżeli $\mathcal{R}_\sigma(x_0) = \mathbb{R}^n$ dla każdego x_0 .

Obok sterowalności używa się słabszego pojęcia osiągalności.

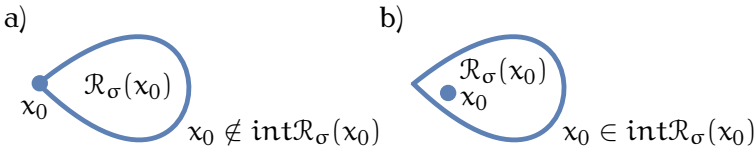
Definicja 8.3.2 Mówimy, że układ σ ma własność osiągalności z punktu x_0 , jeżeli zbiór osiągalny z x_0 ma niepuste wnętrze, $\text{int } \mathcal{R}_\sigma(x_0) \neq \emptyset$. Układ ma własność osiągalności, jeżeli $\text{int } \mathcal{R}_\sigma(x_0) \neq \emptyset$ dla każdego x_0 .

Przypominamy, że wnętrze zbioru jest to największy zbiór otwarty zawarty w tym zbiorze. Rysunek 8.3 ilustruje pojęcie osiągalności.

Intuicyjnie, jeżeli układ ma własność osiągalności z pewnego x_0 , to można z x_0 dojść do takiego punktu, z którego układ będzie mógł się poruszać w każdym kierunku w \mathbb{R}^n . Niekoniecznie ruch we wszystkich kierunkach jest możliwy z samego punktu x_0 . Trzecim pojęciem jest lokalna sterowalność.



Rysunek 8.3: Własność osiągalności: a), b) tak, c) nie



Rysunek 8.4: Lokalna sterowalność: a) nie, b) tak

Definicja 8.3.3 Układ σ jest lokalnie sterowalny z punktu x_0 , jeżeli $x_0 \in \text{int } \mathcal{R}_\sigma(x_0)$ i lokalnie sterowalny, jeżeli $x_0 \in \text{int } \mathcal{R}_\sigma(x_0)$ dla każdego x_0 (patrz rysunek 8.4).

8.4. Twierdzenia o sterowalności

W celu sformułowania pewnych warunków sterowalności wykorzystamy duży operator dołączony $\text{Ad}_X^t Y(x) = D\varphi_{-t}(\varphi_t(x))Y(\varphi_t(x))$, a także mały operator dołączony $\text{ad}_X Y(x) = [X, Y](x)$, zdefiniowane w poprzednim rozdziale. Z układem σ wiążemy dwie dystrybucje

$$\mathcal{D}_\sigma = \langle \text{Ad}_{\mathcal{F}_\sigma} | \mathcal{F}_\sigma \rangle \quad \text{i} \quad \mathcal{d}_\sigma = \langle \text{ad}_{\mathcal{F}_\sigma} | \mathcal{F}_\sigma \rangle,$$

określone jako najmniejsze dystrybucje zawierające rodzinę pól \mathcal{F}_σ stowarzyszonych z układem σ , zamknięte ze względu na operatory Ad i ad . Dla \mathcal{D}_σ oznacza to, że $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{D}_\sigma$ i dla każdego $X \in \mathcal{F}_\sigma$, $Y \in \mathcal{D}_\sigma$, pole $\text{Ad}_X^t Y \in \mathcal{D}_\sigma$ w każdej chwili t , analogicznie dla \mathcal{d}_σ . Nietrudno zauważyć, że $\mathcal{d}_\sigma \subset \mathcal{D}_\sigma$. W języku wprowadzonych dystrybucji podajemy następujące dwa twierdzenia.

Twierdzenie 8.4.1 (Chow-Susmann-Krener) Układ afiniczny σ ma własność osiągalności wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathcal{D}_\sigma = V^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Twierdzenie 8.4.2 (Chow-Lobry-Krener) Jeżeli $\mathcal{d}_\sigma = V^\infty(\mathbb{R}^n)$, to układ σ ma własność osiągalności.

W obu twierdzeniach pola \mathcal{F}_σ można zastąpić przez $F_\sigma = \{f, g_1, g_2, \dots, g_m\}$. Warunek wystarczający własności osiągalności wygodnie jest przedstawić w formie tzw. Warunku Rzędu Algebry Liego. W tym celu definiujemy algebrę Liego \mathcal{L}_σ stowarzyszoną z układem σ jako najmniejszą algebrę Liego zawierającą pola F_σ . Mamy następujące

Twierdzenie 8.4.3 *Jeżeli w każdym punkcie $x \in \mathbb{R}^n$*

$$\dim \mathcal{L}_\sigma(x) = n,$$

to układ σ ma własność osiągalności.

Dla układów bezdryfowych (8.3) przytoczone wyżej twierdzenia podają warunki sterowalności. Mianowicie

Twierdzenie 8.4.4 — *Układ bezdryfowy jest sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{D}_\sigma = V^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

— *Jeżeli $d_\sigma = V^\infty(\mathbb{R}^n)$, to układ bezdryfowy jest sterowalny.*

— *Jeżeli $\dim \mathcal{L}_\sigma(x) = n$, to układ bezdryfowy jest sterowalny.*

8.5. Sprawdzanie sterowalności

Jak wynika z naszych rozważań, nie są znane ogólne warunki konieczne i wystarczające sterowalności układów nieliniowych, w tym układów afinicznych. Łatwiejsza do weryfikacji (ale dużo słabsza) jest własność osiągalności. Wymienimy teraz kilka szczególnych przypadków, w których można orzec sterowalność już to bezpośrednio, już to wydedukować sterowalność na podstawie osiągalności.

— Niech (x_0, u_0) oznacza punkt równowagi układu (8.1), tzn. niech $f(x_0, u_0) = 0$. Wyznaczamy przybliżenie liniowe układu w punkcie równowagi

$$f(x, u) = f(x_0, u_0) + \frac{\partial f(x_0, u_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, u_0)}{\partial u}(u - u_0) + O((x - x_0)^2, (u - u_0)^2)$$

i niech $A = \frac{\partial f(x_0, u_0)}{\partial x}$ i $B = \frac{\partial f(x_0, u_0)}{\partial u}$, a także $\xi = x - x_0$, $v = u - u_0$. Mamy następujące Twierdzenie.

Twierdzenie 8.5.1 *Jeżeli układ liniowy*

$$\dot{\xi} = A\xi(t) + Bv(t)$$

jest sterowalny (spełnia kryterium Kalmana), to układ nieliniowy (8.1) jest lokalnie sterowalny z punktu x_0 .

— Układ bezdryfowy (8.3) mający własność osiągalności jest sterowalny.

— Jeżeli dryf $f(x)$ układu afinicznego ze strumieniem $\varphi_t(x)$ jest stabilny w sensie Poissona, to układ afiniczny posiadający własność osiągalności jest sterowalny. Przypominamy, że pole wektorowe $X(x)$ jest stabilne w sensie Poissona, jeżeli istnieje gęsty podzbiór $D \subset \mathbb{R}^n$, taki że

$$(\forall x \in D)(\forall D \supset U \ni x)(\forall T > 0)(\exists t_1, t_2 \geq T)(\varphi_{t_1}(x) \in U \text{ i } \varphi_{-t_2}(x) \in U).$$

Przykładem układu stabilnego w sensie Poissona jest układ drgający.

Dla lokalnej sterowalności układów afinicznych istnieje warunek wystarczający podany przez Sussmanna. Podajemy go w wersji dla układu z jednym wejściem. Niech zatem będzie dany układ

$$\dot{x} = f(x(t)) + g(x(t))u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R},$$

z punktem równowagi $(0, x_0)$. Definiujemy rodzinę dystrybucji

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^1(f, g) &= \text{span}_{C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})} \{g, \text{ad}_f g, \dots, \text{ad}_f^i g, \dots\}, \\ \mathcal{S}^2(f, g) &= \mathcal{S}^1(f, g) + \text{span}_{C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})} \left\{ \left[\text{ad}_f^{i_1} g, \text{ad}_f^{i_2} g \right] \Big|_{i_1, i_2 \geq 0} \right\}, \\ &\vdots \\ \mathcal{S}^k(f, g) &= \mathcal{S}^{k-1}(f, g) + \\ &+ \text{span}_{C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})} \left\{ \left[\text{ad}_f^{i_1} g, \left[\text{ad}_f^{i_2} g, \dots \left[\text{ad}_f^{i_{k-1}} g, \text{ad}_f^{i_k} g \right] \dots \right] \right] \Big|_{i_1, i_2, \dots, i_k \geq 0} \right\}, \end{aligned}$$

gdzie $\text{ad}_f^{i+1} g = [f, \text{ad}_f^i g]$. Nietrudno zauważyć, że dystrybucja $\mathcal{S}^i(f, g)$ charakteryzuje się tym, że pole sterujące g występuje w niej i razy. Warunek Sussmanna brzmi następująco.

Twierdzenie 8.5.2 (Warunek Sterowalności Sussmanna) *Załóżmy, że dla pewnego k*

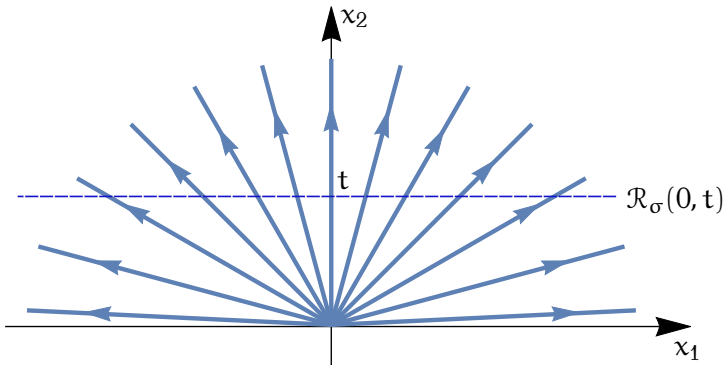
$$\mathcal{S}^k(f, g)(x_0) = \mathbb{R}^n$$

oraz, dla każdego nieparzystego $j \leq k$,

$$\mathcal{S}^j(f, g)(x_0) = \mathcal{S}^{j+1}(f, g)(x_0).$$

Wtedy, układ afiniczny jest lokalnie sterowalny z punktu x_0 .

Drugi warunek w Twierdzeniu 8.5.2 oznacza, że kierunki ruchu w punkcie x_0 wygenerowane przez dystrybucje $\mathcal{S}^k(f, g)$ zawierające parzystą liczbę wystąpień pola g powinny być możliwe do uzyskania za pomocą

Rysunek 8.5: Zbiory osiągalne $\mathcal{R}_\sigma(0, t)$ i $\mathcal{R}_\sigma(0)$

nieparzystej, o jeden mniejszej, liczby wystąpień pola g . Nawiasy Liego, w których pole g pojawia się parzystą liczbę razy nazywa się „złymi nawiasami Liego”. Zauważmy, że jeżeli pierwszy warunek Twierdzenia 8.5.2 jest spełniony dla $k = 1$, lokalna sterowalność wynika ze sterowalności przybliżenia liniowego układu.

8.6. Przykłady

Przykład 8.6.1 Zbadajmy sterowalność układu afinicznego

$$\sigma : \begin{cases} \dot{x}_1 = u \\ \dot{x}_2 = 1 \end{cases}$$

z polami $f(x) = (0, 1)^\top$ i $g(x) = (1, 0)^\top$, $u \in \mathbb{R}$, ze stanu $x_0 = (0, 0)^\top$. Z równań układu wynika, że przy stałych sterowaniach

$$x_2 = \frac{1}{u} x_1.$$

Stany osiągalne z x_0 (zobacz rysunek 8.5) leżą na promieniach wychodzących z x_0 , położonych w górnej półpłaszczyźnie układu współrzędnych, przy czym ruch wzdłuż osi x_2 odpowiada zerowemu sterowaniu, $u = 0$, a ruch wzdłuż osi x_1 w ogóle nie jest możliwy. Mamy więc $\mathcal{R}_\sigma(x_0) \subset \mathbb{R}_+^2$. Na mocy definicji, układ ma własność osiągalności z x_0 , ale nie jest ani sterowalny (punkty w dolnej półpłaszczyźnie i na osi x_1 nie są osiągalne), ani lokalnie sterowalny z x_0 (x_0 nie należy do wnętrza zbioru $\mathcal{R}_\sigma(x_0)$).

Przykład 8.6.2 Rozważmy układ w postaci łańcuchowej

$$\sigma : \begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 \\ \dot{x}_2 = u_2 \\ \dot{x}_3 = u_1 x_2 \end{cases} .$$

Układ jest bezdryfowy, z polami $g_1(x) = (1, 0, x_2)^T$ i $g_2(x) = (0, 1, 0)^T$. Mamy punkt równowagi $x_0 = 0$ i $u_0 = 0$. Najpierw wyznaczmy przybliżenie liniowe

$$\dot{\xi} = A\xi(t) + Bv(t)$$

układu σ w punkcie równowagi. Mamy $A = 0$ i $B = [g_1(0), g_2(0)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Łatwo sprawdzić, że przybliżenie liniowe nie spełnia warunku Kalmana, zatem nie jest sterowalne. Wynika stąd, że na podstawie przybliżenia liniowego nie możemy wnioskować na temat sterowalności układu. Można pokazać, że każdy układ bezdryfowy z $m < n$ ma niesterowalne przybliżenie liniowe. Zbadajmy teraz warunek rzędu algebry Liego. Mamy $F_\sigma = \{g_1, g_2\}$, a zatem, algebra Liego \mathcal{L}_σ zawiera pola $g_1, g_2, g_{12} = [g_1, g_2], \dots$. Obliczamy $g_{12}(x) = Dg_2(x)g_1(x) - Dg_1(x)g_2(x) = \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_2} = (0, 0, -1)^T$. Ponieważ

$$\dim \mathcal{L}_\sigma(x) = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 3,$$

układ σ jest sterowalny.

Przykład 8.6.3 Niech będzie dany układ afiniczny

$$\sigma : \begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 \\ \dot{x}_2 = u_2 \\ \dot{x}_3 = x_1 + u_1 x_2 \end{cases} ,$$

powstały z poprzedniego układu przez dodanie dryfu $f(x) = (0, 0, x_1)^T$. Pola sterujące g_1 i g_2 są takie same, jak w poprzednim przykładzie. Mamy punkt równowagi $u_0 = 0$ i $x_0 = 0$, i przybliżenie liniowe w tym punkcie

$$\dot{\xi} = A\xi(t) + Bv(t)$$

z macierzami $A = Df(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Macierz Kalmana

$$\Omega = [B, AB, A^2B] = [I_3, *]$$

ma rząd 3, z czego wynika, że przybliżenie liniowe jest sterowalne, a zatem układ σ jest lokalnie sterowalny z punktu równowagi. Zbadajmy inne punkty korzystając z warunku rzędu algebry Liego. Mamy $F_\sigma = \{f, g_1, g_2\} \subset \mathcal{L}_\sigma$. Algebra Liego zawiera także pole $\text{ad}_f g_1(x) = Dg_1(x)f(x) - Df(x)g_1(x) = (0, 0, -1)^\top$, które zapewnia spełnienie warunku rzędu

$$\dim \mathcal{L}_\sigma(x) = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 3,$$

a zatem układ σ ma własność osiągalności.

Przykład 8.6.4 Zajmiemy się teraz układem afinicznym na płaszczyźnie

$$\sigma: \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + (1 + x_1^2)u \end{cases}$$

z polami $f(x) = (x_2, x_1)^\top$ i $g(x) = (0, 1 + x_1^2)^\top$. Punkt równowagi $u = 0$ i $x_0 = 0$. Przybliżenie liniowe jest dane przez

$$\dot{\xi} = A\xi(t) + Bv(t),$$

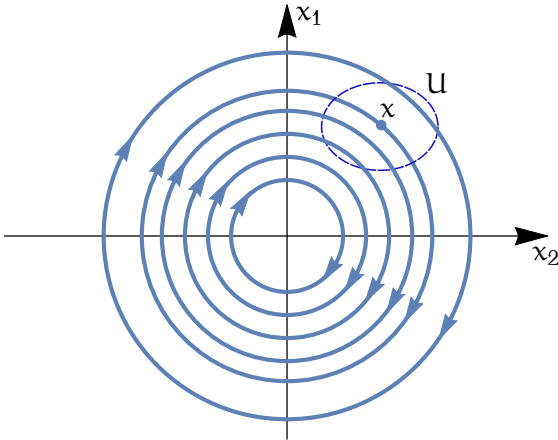
gdzie $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Macierz Kalmana $\Omega = [B, AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ma rząd 2, a zatem układ σ jest lokalnie sterowalny z punktu równowagi. Rodzina pól $F_\sigma = \{f, g\} \subset \mathcal{L}_\sigma$, algebra Liego \mathcal{L}_σ układu zawiera także pole $\text{ad}_f g(x) = -(1 + x_1^2, 2x_1x_2)^\top$. Warunek rzędu

$$\dim \mathcal{L}_\sigma(x) = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & -(1 + x_1^2) \\ 1 + x_1^2 & 2x_1x_2 \end{bmatrix} = 2,$$

jest spełniony, a więc układ σ ma własność osiągalności. Zbadajmy pole dryfu $f(x)$. Układ dynamiczny zdefiniowany przez to pole ma postać

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases}.$$

Łatwo sprawdzić, że jest to układ drgający, którego orbity są okręgami $x_1^2 + x_2^2 = C$. Oznacza to, że dryf jest stabilny w sensie Poissona, co zilustrowano na rysunku 8.6. W takim przypadku z własności osiągalności wynika sterowalność układu σ .



Rysunek 8.6: Stabilność w sensie Poissona

Przykład 8.6.5 Na zakończenie podamy przykład badania lokalnej sterowalności w oparciu o warunek Sussmanna. Rozważmy układ afiniczny

$$\sigma: \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^3 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases},$$

którego pola $f(x) = (x_2^3, 0)^T$ i $g(x) = (0, 1)^T$. Układ ma punkt równowagi $x_0 = 0$ i $u_0 = 0$. Obliczmy dystrybucję

$$\mathcal{S}^1(f, g) = \text{span} \left\{ g, \text{ad}_f g, \dots, \text{ad}_f^j g, \dots \right\}.$$

Ponieważ $\text{ad}_f g(x) = (-3x_2^2, 0)^T$ i $\text{ad}_f^j g(x) = 0$ dla $j \geq 2$, mamy

$$\mathcal{S}^1(f, g)(0) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Następnie obliczamy

$$\mathcal{S}^2(f, g) = \mathcal{S}^1(f, g) + \text{span} \left\{ \left[\text{ad}_f^j g, \text{ad}_f^k g \right] \Big|_{j, k \geq 0} \right\}.$$

Nawias $[g, \text{ad}_f g](x) = (-6x_2, 0)^T$, a pozostałe nawiasy, w których pole g pojawia się dwa razy są równe zero. Wynika stąd, że

$$\mathcal{S}^2(f, g)(0) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \mathcal{S}^1(f, g)(0).$$

Kontynuując obliczenia wyznaczamy dystrybucję

$$\mathcal{S}^3(f, g) = \mathcal{S}^2(f, g) + \text{span} \left\{ \left[\text{ad}_f^j g, [\text{ad}_f^k g, \text{ad}_f^l g] \right] \Big|_{j,k,l \geq 0} \right\}.$$

Korzystając z tego, że $[g, [g, \text{ad}_f^g]](x) = (-6, 0)^T$ otrzymujemy

$$\mathcal{S}^3(f, g)(0) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{R}^2.$$

Ten warunek i fakt, że $\mathcal{S}^2(f, g)(0) = \mathcal{S}^1(f, g)(0)$ pozwala nam stwierdzić na podstawie warunku Sussmanna, że układ σ jest lokalnie sterowalny z punktu 0.

8.7. Zadania

Zadanie 8.1 Dla liniowego układu sterowania

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, wykazać, że własność osiągalności pociąga za sobą sterowalność.

Zadanie 8.2 Dla afinicznego układu sterowania

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u \\ \dot{x}_2 = x_1^2 \end{cases}$$

wyznaczyć dystrybucję d_σ i zbadać własność osiągalności, sterowalności i lokalnej sterowalności w punkcie $(0, 0)^T$.

Zadanie 8.3 Zbadać własność osiągalności równań Eulera ze sterowaniem (a, b, c, d - stałe parametry)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_2x_3 + bu \\ \dot{x}_2 = -ax_1x_3 + cu \\ \dot{x}_3 = du \end{cases}.$$

Zadanie 8.4 Korzystając z wyniku zadania 8.3 wykazać sterowalność równań Eulera ze sterowaniem.

Zadanie 8.5 Wykazać sterowalność integratora Brocketta

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 \\ \dot{x}_2 = u_2 \\ \dot{x}_3 = x_1u_2 - x_2u_1 \end{cases}.$$

8.8. Odniesienia literaturowe

Podstawowe wiadomości na temat układów sterowania są zawarte w monografiach [Isi94, NvdS90, Son98, Kha00, KKK95, Blo03, Sas99, Lévo9]. Formuła na pochodną odwzorowania końcowego wywodzi się z [Son98]. Sterowalność układów nieliniowych jest przedmiotem wymienionych monografii; nasz wywód jest zgodny z podrozdziałem 4.2 pracy [Lévo9] i wykorzystuje wyniki opisane w artykule [Kre85]. Warunek wystarczający sterowalności Sussmanna pochodzi z pracy [Sus83]; jego uogólnienie na układy o wielu sterowaniach opublikowano w [Sus87].

Literatura

- [Blo03] A. M. Bloch. *Nonholonomic Mechanics and Control*. Springer, New York, 2003.
- [Isi94] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Springer, New York, 1994.
- [Kha00] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall, New Jersey, 2000.
- [KKK95] M. Krstić, I. Kanellakopoulos, P. Kokotović. *Nonlinear and Adaptive Control Design*. J. Wiley, New York, 1995.
- [Kre85] A. Krener. $(Ad_{f,g})$, $(ad_{f,g})$ and locally $(ad_{f,g})$ invariant and controllability distributions. *SIAM J. Contr. Opt.*, 23(4):523–549, 1985.
- [Lévo9] J. Lévine. *Analysis and Control of Nonlinear Systems*. Springer, 2009.
- [NvdS90] H. Nijmeijer, A. J. van der Schaft. *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer, New York, 1990.
- [Sas99] S. S. Sastry. *Nonlinear Systems*. Springer, New York, 1999.
- [Son98] E. D. Sontag. *Mathematical Control Theory*. Springer, New York, 1998.
- [Sus83] H. Sussmann. Lie brackets, real analyticity and geometric control. *Differential Geometric Control Theory*, strony 1–116. Birkhäuser, Boston, 1983.
- [Sus87] H. J. Sussmann. A general theorem on local controllability. *SIAM J. Contr. Opt.*, 25:158–194, 1987.

Rozdział 9

Równoważność układów sterowania

9.1. Równoważność w przestrzeni stanu i przez sprzężenie zwrotne

Niech będą dane dwa afiniczne układy sterowania

$$\begin{aligned}\sigma: \dot{x} &= f(x(t)) + g(x(t))u(t) = f(x(t)) + \sum_{i=1}^m g_i(x(t))u_i(t), \\ \sigma': \dot{\xi} &= F(\xi(t)) + G(\xi(t))v(t) = F(\xi(t)) + \sum_{i=1}^m G_i(\xi(t))v_i(t),\end{aligned}$$

gdzie $x, \xi \in \mathbb{R}^n$, $u, v \in \mathbb{R}^m$ i wszystkie pola wektorowe są gładkie. Podobnie jak w przypadku układów dynamicznych, zdefiniujemy równoważność układów sterowania. Są dwa rodzaje równoważności: równoważność w przestrzeni stanu, zwana S-równoważnością, i równoważność przez sprzężenie zwrotne, którą nazywamy F-równoważnością.

Definicja 9.1.1 *Załóżmy, że $u = v$. Układy σ i σ' nazywamy S-równoważnymi,*

$$\sigma \underset{S}{\cong} \sigma' \iff (\exists \text{ dyfeomorfizm } \xi = \varphi(x))$$

$$(D\varphi(x)f(x) = F(\varphi(x)) \text{ i } D\varphi(x)g(x) = G(\varphi(x))).$$

Ostatnia równość oznacza, że $D\varphi(x)g(x) = G_i(\varphi(x))$ dla $i = 1, 2, \dots, m$. Zauważmy, że w gruncie rzeczy S-równoważność układów sterowania oznacza równoważność różniczkową opisujących je pól wektorowych. Nie wykorzystuje się tu w żaden sposób faktu, że mamy do czynienia z układami sterowania. Z tego względu bardziej adekwatną równoważnością układów sterowania jest równoważność przez sprzężenie zwrotne.

Definicja 9.1.2 *Układy σ i σ' nazywamy F-równoważnymi,*

$$\sigma \underset{F}{\cong} \sigma' \iff (\exists \text{ dyfeomorfizm } \xi = \varphi(x) \text{ i s. zwrotne } u = \alpha(x) + \beta(x)v)$$

$$(D\varphi(x)(f(x) + g(x)\alpha(x)) = F(\varphi(x)) \text{ i } D\varphi(x)g(x)\beta(x) = G(\varphi(x))).$$

Występująca w sprzężeniu zwrotnym funkcja $\alpha(x)$ jest gładką, natomiast $\beta(x)$ jest nieosobliwą macierzą $m \times m$ gładko zależną od x .

Nietrudno zauważyć, że F-równoważność staje się S-równoważnością, przy $\alpha(x) = 0$ i $\beta(x) = I_m$. Obie równoważności opierają się na założeniu, że trajektorie układów równoważnych są dyfeomorficzne, $\xi(t) = \varphi(x(t))$. Dla F-równoważności oznacza to, że

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= D\varphi(x)\dot{x} = D\varphi(x)(f(x) + g(x)u) = D\varphi(x)(f(x) + g(x)(\alpha(x) + \beta(x)v)) = \\ &= D\varphi(x)(f(x) + g(x)\alpha(x)) + D\varphi(x)g(x)\beta(x)v = F(\varphi(x)) + G(\varphi(x))v.\end{aligned}$$

Oczywiście, jeżeli dyfeomorfizm $\varphi(x)$ jest zdefiniowany lokalnie, mówimy o lokalnych S- lub F-równoważnościach oznaczanych, odpowiednio, symbolami \cong_{LS} i \cong_{LF} . Pojęcia S- i F-równoważności są zgodne z odpowiednimi równoważnościami liniowych układów sterowania. Dla układów liniowych

$$\begin{aligned}\sigma_L : \dot{x} &= Ax(t) + Bu(t), \\ \sigma'_L : \dot{\xi} &= F\xi(t) + Gv(t)\end{aligned}$$

mamy

$$\sigma_L \underset{F}{\cong} \sigma'_L \iff (\exists P, Q, K)(P(A + BK) = FP \text{ i } PBQ = G),$$

przy nieosobliwych macierzach P , Q rozmiaru $n \times n$ i $m \times m$ i dowolnej macierzy K rozmiaru $m \times n$. Oczywiście, dla układów liniowych $\varphi(x) = Px$, $\alpha(x) = Kx$ i $\beta(x) = Q$.

Spostrzeżenie 9.1.1 Dla ustanowienia F-równoważności między układami σ i σ' należy wyznaczyć funkcje sprzężenia zwrotnego $\varphi(x)$, $\alpha(x)$ i $\beta(x)$, przy zadanych $f(x)$, $g(x)$, $F(\xi)$ i $G(\xi)$. Sprowadza się to do rozwiązania równań równoważności

$$D\varphi(x)(f(x) + g(x)\alpha(x)) = F(\varphi(x)) \quad \text{i} \quad D\varphi(x)g(x)\beta(x) = G(\varphi(x)).$$

Zauważmy, że macierz $D\varphi(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$ zawiera pochodne

cząstkowe nieznanych składowych dyfeomorfizmu. Wynika stąd, że równania równoważności mają postać układu nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych. Warunki istnienia sprzężenia zwrotnego podamy dla szczególnych postaci układu σ' . Z punktu widzenia zadań teorii sterowania największe znaczenie ma sytuacja, gdy σ' jest układem, dla którego są znane algorytmy sterowania. Do tego typu układów należą liniowe układy sterowania, tzn. $\sigma' = \sigma'_L$.

9.2. Linearyzacja w przestrzeni stanu i przez sprzężenie zwrotne

Rozważmy afiniczny układ sterowania σ . Przyjmujemy następujące definicje.

Definicja 9.2.1 Układ σ nazywamy linearyzowalnym przez zmianę współrzędnych w przestrzeni stanu (*S-linearyzowalnym*), jeżeli

$$\sigma \underset{S}{\cong} \sigma'_L.$$

Jeżeli zachodzi lokalna *S*-równoważność ($\sigma \underset{LS}{\cong} \sigma'_L$), to układ σ nazywamy lokalnie *S*-linearyzowalnym.

Podobnie, wprowadzamy definicję.

Definicja 9.2.2 Układ σ nazywamy linearyzowalnym przez sprzężenie zwrotne (*F-linearyzowalnym*), jeżeli

$$\sigma \underset{F}{\cong} \sigma'_L.$$

W przypadku lokalnej *F*-równoważności ($\sigma \underset{LF}{\cong} \sigma'_L$), układ σ nazywamy lokalnie *F*-linearyzowalnym.

Warunki konieczne i wystarczające linearyzowalności podajemy poniżej. Załóżmy, że układ σ ma w $0 = 0 \in \mathbb{R}^m$ i $x_0 = 0 \in \mathbb{R}^n$ punkt równowagi ($f(0) = 0$) i niech układ liniowy σ'_L będzie sterowalny. Dla układu σ zdefiniujemy rodzinę dystrybucji

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^0 &= \text{span} \{g_i |_{i=1, \dots, m}\}, \\ &\vdots \\ \mathcal{D}^k &= \text{span} \left\{ g_i, \text{ad}_f g_i, \dots, \text{ad}_f^k g_i |_{i=1, \dots, m} \right\}, \end{aligned}$$

dla $k \geq 0$, gdzie $\text{ad}_f^{k+1} g_i = [f, \text{ad}_f^k g_i]$. Mamy wówczas

Twierdzenie 9.2.1 (Krener-Sussmann-Respondek) Układ σ jest lokalnie *S*-linearyzowalny wokół 0,

$$\sigma \underset{LS}{\cong} \sigma'_L \iff \dim \mathcal{D}^{n-1}(0) = n \text{ i } [\text{ad}_f^p g_i, \text{ad}_f^r g_j](x) = 0$$

w pewnym otoczeniu 0 dla $p, r \geq 0$, $p + r \leq 2n - 1$.

Warunki *F*-linearyzacji podaje następné twierdzenie.

Twierdzenie 9.2.2 (Jakubczyk-Respondek) Układ σ jest lokalnie F-li-nearyzowalny wokół 0,

$$\sigma \underset{\text{LF}}{\cong} \sigma'_L \iff \dim \mathcal{D}^{n-1}(0) = n \text{ i dystrybucje } \mathcal{D}^k \text{ dla } k = 0, 1, \dots, n-2$$

są w pewnym otoczeniu 0 stałego wymiaru i inwolutywne, tzn.

$$\dim \mathcal{D}^k(x) = \text{const}, \quad [\mathcal{D}^k, \mathcal{D}^k] \subset \mathcal{D}^k.$$

9.3. Równania równoważności

Zajmiemy się S i F równoważnością układów afinicznych

$$\sigma: \dot{x} = f(x(t)) + g(x(t))u(t) = f(x(t)) + \sum_{i=1}^m g_i(x(t))u_i(t),$$

$$\sigma': \dot{\xi} = F(\xi(t)) + G(\xi(t))v(t) = F(\xi(t)) + \sum_{i=1}^m G_i(\xi(t))v_i(t),$$

gdzie $x, \xi \in \mathbb{R}^n$, $u, v \in \mathbb{R}^m$. Z punktu widzenia syntezy algorytmów sterowania, podstawowe zadanie polega na wyliczeniu transformacji zapewniających równoważność, a więc dyfeomorfizmu $\xi = \varphi(x)$ dla S-równoważności i sprzężenia zwrotnego $\xi = \varphi(x)$, $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ dla równoważności przez sprzężenie zwrotne. W tym celu powinniśmy rozwiązać układ równań różniczkowych cząstkowych zwanych równaniami równoważności. Sformułujemy teraz te równania.

— S-równoważność: $D\varphi(x)f(x) = F(\varphi(x))$, $D\varphi(x)g(x) = G(\varphi(x))$.

— F-równoważność: $D\varphi(x)(f(x) + g(x)\alpha(x)) = F(\varphi(x))$, $D\varphi(x)g(x)\beta(x) = G(\varphi(x))$.

W przypadku, gdy rozważamy zadanie linearyzacji, a więc

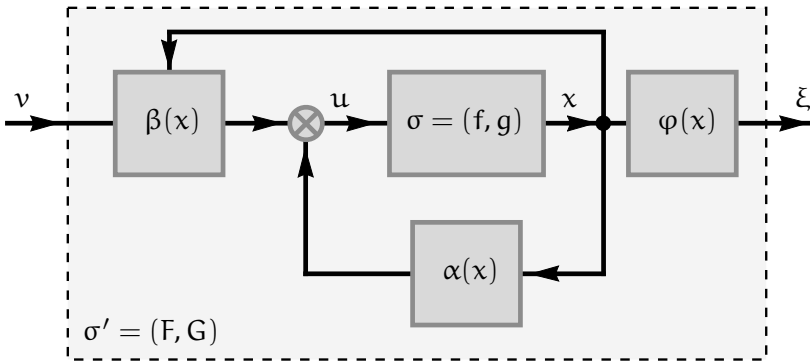
$$\sigma': \dot{\xi} = F\xi(t) + Gv(t),$$

F i G – macierze, równania równoważności przyjmują prostszą postać dzięki odpowiedniemu wyborowi układu σ' . W tym celu zakładamy, że $u = 0$ i $x_0 = 0$ jest punktem równowagi układu σ . W zadaniu S-linearyzacji układ σ' wybieramy równy przybliżeniu liniowemu układu σ w punkcie równowagi. Oznacza to, że macierz $F = \frac{\partial f(0)}{\partial x}$, a macierz $G = g(0)$. Przy zadaniu F-linearyzacji najpierw wyznaczamy przybliżenie liniowe i sprawdzamy jego sterowalność, a następnie wyliczamy jego wskaźniki sterowalności $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_m)$ i na ich podstawie określamy postać kanoniczną Brunowskiego. Macierze F i G wybieramy w postaci Brunowskiego. Dla zadania linearyzacji równania równoważności przyjmują następującą postać:

— S-równoważność: $D\varphi(x)f(x) = F\varphi(x)$, $D\varphi(x)g(x) = G$.

— F-równoważność: $D\varphi(x)(f(x) + g(x)\alpha(x)) = F\varphi(x)$, $D\varphi(x)g(x)\beta(x) = G$.

Rozwiązania przykładowych równań równoważności dla zadania linearyzacji podamy w podrozdziale Przykłady.



Rysunek 9.1: Efekt zastosowania linearyzującego sprzężenia zwrotnego

9.4. Znaczenie linearyzowalności dla syntezy algorytmów sterowania

Niech będzie dany nieliniowy układ afiniczny

$$\sigma : \dot{x} = f(x(t)) + g(x(t))u(t)$$

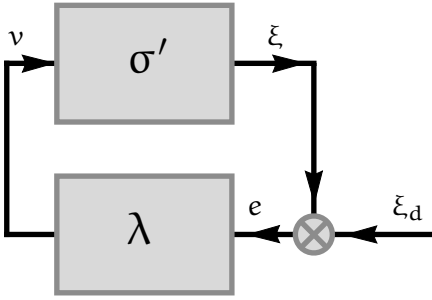
i równoważny mu przez sprzężenie zwrotne układ liniowy w postaci Brunowskiego

$$\sigma' : \dot{\xi} = F\xi(t) + Gv(t)$$

opisanej wskaźnikami sterowalności $(\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_m)$. Załóżmy, że $\xi = \varphi(x)$, $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ oznacza sprzężenie zwrotne linearyzujące układ σ . Efekt zastosowania tego sprzężenia pokazuje rysunek 9.1.

W układzie σ rozważamy następujące zadanie śledzenia trajektorii: Dana jest trajektoria odniesienia $x_d(t)$, znaleźć sterowanie $u(t)$ w układzie σ , takie że uzyskana trajektoria $x(t) \rightarrow x_d(t)$ przy $t \rightarrow +\infty$. Linearyzowalność układu σ pozwala na przeniesienie trajektorii odniesienia do układu liniowego, $\xi_d(t) = \varphi(x_d(t))$ i sformułowanie zadania śledzenia w układzie liniowym: Znaleźć sterowanie $v(t)$, takie że odpowiadająca mu trajektoria $\xi(t) \rightarrow \xi_d(t)$. Dzięki temu, że σ' ma postać Brunowskiego

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2, \dot{\xi}_2 = \xi_3, \dots, \dot{\xi}_{\kappa_1} = v_1 \\ \dot{\xi}_{\kappa_1+1} = \xi_{\kappa_1+2}, \dots, \dot{\xi}_{\kappa_1+\kappa_2} = v_2 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{\kappa_1+\dots+\kappa_{m-1}+1} = \xi_{\kappa_1+\dots+\kappa_{m-1}+2}, \dots, \dot{\xi}_{\sum_{i=1}^m \kappa_i = n} = v_m \end{cases}$$



Rysunek 9.2: Układ śledzenia trajektorii stanu

co oznacza, że $\xi_1^{(\kappa_1)} = v_1$, $\xi_{\kappa_1+1}^{(\kappa_2)} = v_2$, ..., $\xi_{\kappa_1+\dots+\kappa_{m-1}+1}^{(\kappa_m)} = v_m$, nietrudno sprawdzić, że algorytm śledzenia w układzie σ' może mieć postać

$$\lambda : \begin{cases} v_1 = \xi_{d1}^{(\kappa_1)} - k_{1\kappa_1-1}(\xi_1 - \xi_{d1})^{(\kappa_1-1)} - \dots - k_{10}(\xi_1 - \xi_{d1}) \\ \vdots \\ v_m = \xi_{d\kappa_1+\dots+\kappa_{m-1}+1}^{(\kappa_m)} \\ \quad - k_{m\kappa_{m-1}}(\xi_{\kappa_1+\dots+\kappa_{m-1}+1} - \xi_{d\kappa_1+\dots+\kappa_{m-1}+1})^{(\kappa_m-1)} - \dots + \\ \quad - k_{m0}(\xi_{\kappa_1+\dots+\kappa_{m-1}+1} - \xi_{d\kappa_1+\dots+\kappa_{m-1}+1}) \end{cases} \quad (9.1)$$

Przy oznaczeniu $e_i = \xi_i - \xi_{di}$ otrzymujemy równania błędu śledzenia w układzie liniowym

$$\begin{cases} e_1^{(\kappa_1)} + k_{1\kappa_1-1}e_1^{(\kappa_1-1)} + \dots + k_{10}e_1 = 0 \\ \vdots \\ e_{\kappa_1+\dots+\kappa_{m-1}+1}^{(\kappa_m)} + k_{m\kappa_{m-1}}e_{\kappa_1+\dots+\kappa_{m-1}+1}^{(\kappa_m-1)} + \dots + k_{m0}e_{\kappa_1+\dots+\kappa_{m-1}+1} = 0 \end{cases} .$$

Jeżeli wzmocnienia k_{ij} dobierzemy w taki sposób, że wielomian charakterystyczny każdego z powyższych równań różniczkowych jest wielomianem Hurwitza, wtedy zadanie śledzenia w układzie liniowym zostanie rozwiązane za pomocą algorytmu (9.1). Po zastosowaniu sterowania $v(t)$ do układu σ' wyznaczamy trajektorię $\xi(t)$, a następnie trajektorię $x(t) = \varphi^{-1}(\xi(t))$ i sterowanie $u(t) = \alpha(x(t)) + \beta(x(t))v(t)$ w układzie σ . Taki sposób postępowania stanowi procedurę syntezy algorytmu śledzenia z wykorzystaniem linearyzacji przez sprzężenie zwrotne. Ilustruje go rysunek 9.2. Podobne wyniki można uzyskać, jeżeli zamiast postaci układu liniowego σ' będzie miał inną postać, dla której istnieje algorytm śledzenia. Jedną z takich postaci omówimy w rozdziale 11.

9.5. Przykłady

Przykład 9.5.1 Niech będzie dany układ afiniczny

$$\sigma : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 (1 + x_1^2) \\ \dot{x}_2 = \arctg x_1 + u \end{cases}$$

z polami $f(x) = (x_2 (1 + x_1^2), \arctg x_1)^\top$, $g(x) = (0, 1)^\top$. Mamy $f(0) = 0$. Załóżmy że układ σ' jest przybliżeniem linowym układu σ w punkcie równowagi. Oznacza to, że

$$\sigma' : \begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = v \end{cases} .$$

Łatwo sprawdzić, że układ σ' jest sterowalny. Zbadajmy, czy układ σ jest S-linearyzowalny. W tym celu obliczamy $\text{ad}_f g(x) = [f, g](x) = -(1 + x_1^2, 0)^\top$, zatem $\mathcal{D}^1 = \text{span}\{g, \text{ad}_f g\}$ i

$$\dim \mathcal{D}^1(0) = 2.$$

Dalej, obliczamy kolejno nawiasy Liego $[g, \text{ad}_f g]$, $[g, \text{ad}_f^2 g]$, $[\text{ad}_f g, \text{ad}_f^2 g]$ i $[g, \text{ad}_f^3 g]$. Mamy $[g, \text{ad}_f g] = 0$, a także $\text{ad}_f^2 g = [f, \text{ad}_f g] = g$, co pociąga za sobą $[g, \text{ad}_f^2 g] = [g, g] = 0$, $\text{ad}_f^3 g = [f, \text{ad}_f^2 g] = [f, g] = \text{ad}_f g$ oraz $g, \text{ad}_f^3 g] = [g, \text{ad}_f g] = 0$. Na podstawie Twierdzenia 9.2.1 wyciągamy wniosek, że układ σ jest lokalnie S-linearyzowalny w otoczeniu punktu równowagi.

Przykład 9.5.2 Weźmy układ afiniczny

$$\sigma : \begin{cases} \dot{x}_1 = \sin x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases} ,$$

którego pola $f(x) = (\sin x_2, 0)^\top$ i $g(x) = (0, 1)^\top$. Pole f znika w 0. Przybliżenie liniowe układu σ ma postać Brunowskiego, zatem jest sterowane. Układ σ' weźmiemy także w postaci kanonicznej Brunowskiego,

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = v \end{cases} .$$

Obliczamy dystrybucje $\mathcal{D}^0 = \text{span}\{g\}$ i $\mathcal{D}^1 = \text{span}\{g, \text{ad}_f g\}$. Ponieważ $\text{ad}_f g(x) = [f, g](x) = -(\cos x_2, 0)^\top$, mamy $\dim \mathcal{D}^1(0) = 2$. Dystrybucja \mathcal{D}^0 ma stały wymiar 1 i jako dystrybucja generowana przez pojedyncze pole jest inwolutywna. Warunki Twierdzenia (9.2.2) są więc spełnione, co pociąga za sobą, że w pewnym otoczeniu 0 układ σ jest F-linearyzowalny.

Przykład 9.5.3 Wyznamy teraz dyfeomorfizm $\xi = \varphi(x)$ realizujący S-linearyzację układu σ z Przykładu 9.5.1. Zaczynamy od wyznaczenia przybliżenia liniowego układu w punkcie 0; mamy $F = \frac{\partial f(0)}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ i $G = g(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Szukamy S-równoważności między układem σ a układem liniowym σ' opisanym macierzami F, G . Z Przykładu 9.5.1 wynika, że dyfeomorfizm linearyzujący istnieje. Założmy, że ma on postać $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x))$. Składowe tego dyfeomorfizmu spełniają równania równoważności

$$D\varphi(x)f(x) = F\varphi(x), \quad D\varphi(x)g(x) = G,$$

skąd wynika, że

$$\begin{aligned} d\varphi_1(x)f(x) &= \varphi_2(x), & d\varphi_2(x)f(x) &= \varphi_1(x), \\ d\varphi_1(x)g(x) &= 0, & d\varphi_2(x)g(x) &= 1. \end{aligned}$$

Korzystając z postaci pola $g(x)$, otrzymujemy

$$\frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x_2} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x_2} = 1.$$

Z pierwszej równości wynika, że $\varphi_1(x)$ nie zależy od x_2 , a więc $\varphi_1(x) = \varphi_1(x_1)$. Druga równość jest spełniona m.in. przez $\varphi_2(x) = x_2$. Przyjmując to rozwiązanie wyliczamy $\varphi_1(x_1) = d\varphi_1(x)f(x) = \arctg x_1$. W ten sposób wyznaczaliśmy dyfeomorfizm $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T = (\arctg x_1, x_2)^T$. Równania układu w nowych współrzędnych

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \frac{1}{1+\xi_1^2} \dot{x}_1 = x_2 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = \dot{x}_2 = \arctg x_1 + u = \xi_1 + u \end{cases}.$$

Przykład 9.5.4 Z kolei zajmiemy się wyznaczeniem sprzężenia zwrotnego linearyzującego układ rozważany w Przykładzie 9.5.2. Pokazaliśmy, że takie sprzężenie zwrotne istnieje. Przyjmujemy, że układ σ' ma postać Brunowskiego, co oznacza, że $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Chcemy wyznaczyć dyfeomorfizm $\xi = \varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x))$ i funkcje $\alpha(x)$, $\beta(x) \neq 0$ spełniające równania równoważności

$$\begin{aligned} d\varphi_1(x)(f(x) + g(x)\alpha(x)) &= \varphi_2(x), & d\varphi_2(x)(f(x) + g(x)\alpha(x)) &= 0, \\ d\varphi_1(x)g(x)\beta(x) &= 0, & d\varphi_2(x)g(x)\beta(x) &= 1. \end{aligned}$$

Ponieważ funkcja $\beta(x) \neq 0$, z ostatnich dwóch równości wynika, że $\frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x_2} = 0$, czyli $\varphi_1(x) = \varphi_1(x_1)$ oraz $\beta(x) = \frac{1}{d\varphi_2(x)g(x)}$. Biorąc pod uwagę dwa pierwsze równania otrzymujemy wyrażenia $\varphi_2(x) = d\varphi_1(x)f(x)$ i $\alpha(x) = -\frac{d\varphi_2(x)f(x)}{d\varphi_2(x)g(x)}$. Ponieważ φ_1 zależy tylko od x_1 wypróbujmy

najprostsze rozwiązanie $\varphi_1(x) = x_1$. Przy tym założeniu wyliczamy $\varphi_2(x) = \sin x_2$. Po wykorzystaniu dyfeomorfizmu $\varphi(x) = (x_1, \sin x_2)^T$ przez odpowiednie podstawienia wyznaczamy pozostałe składniki linearyzującego sprzężenia zwrotnego, $\alpha(x) = 0$ i $\beta(x) = \frac{1}{\cos x_2}$. Otrzymane sprzężenie zwrotne jest dobrze określone w zbiorze $\mathbb{R} \times (-\pi/2, \pi/2)$. W nowych współrzędnych i po zastosowaniu sprzężenia zwrotnego układ σ uzyskuje postać

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \dot{x}_1 = x_2 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = \cos x_2 u = v \end{cases}.$$

Dokonany przez nas wybór składowej φ_1 dyfeomorfizmu był dość arbitralny. Wybór ten nie jest jedyny, nietrudno sprawdzić, że wybór $\varphi_1(x) = \sin x_1$ daje $\varphi_2(x) = \cos x_1 \sin x_2$ oraz $\alpha(x) = \frac{\sin x_1 \sin x_2}{\cos x_1 \cos x_2}$ i $\beta(x) = \frac{1}{\cos x_1 \cos x_2}$. To sprzężenie jest określone w kwadracie $(-\pi/2, \pi/2)^2$ i prowadzi do tego samego układu linowego w postaci Brunowskiego, co poprzednio wyliczone sprzężenie.

Przykład 9.5.5 Korzystając z postaci Brunowskiego układu linowego z jednym wejściem przeanalizujemy teraz postać równań równoważności dla układu afinicznego z jednym wejściem. Załóżmy, że jest dany układ

$$\sigma: \dot{x} = f(x) + g(x)u,$$

gdzie $x \in \mathbb{R}^n$ i $u \in \mathbb{R}$. Weźmy układ liniowy

$$\sigma': \dot{\xi} = F\xi + Gv$$

w postaci Brunowskiego, a zatem $F = \begin{bmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ i $G = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Szukamy dyfeomorfizmu $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x))^T$ i funkcji $\alpha(x)$, $\beta(x) \neq 0$. Zakładamy, że układ σ spełnia warunki Twierdzenia 9.2.2, zatem równania równoważności

$$\begin{aligned} D\varphi(x)(f(x) + g(x)\alpha(x)) &= F\varphi(x) = (\varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), 0)^T, \\ D\varphi(x)g(x)\beta(x) &= G = (0, \dots, 0, 1)^T \end{aligned} \quad (9.2)$$

mają rozwiązanie. Nietrudno zauważyć, że druga grupa równań ma postać

$$d\varphi_1(x)g(x)\beta(x) = \dots = d\varphi_{n-1}(x)g(x)\beta(x) = 0, \quad d\varphi_n(x)g(x)\beta(x) = 1,$$

z czego wynika

$$d\varphi_1(x)g(x) = \dots = d\varphi_{n-1}(x)g(x) = 0, \quad \text{i} \quad \beta(x) = \frac{1}{d\varphi_n(x)g(x)}.$$

Podstawienie do pierwszej grupy równań równoważności (9.2) pozwala teraz wyznaczyć dyfeomorfizm $\varphi(x)$, o ile tylko jest znana jego pierwsza składowa, mianowicie

$$\varphi_2(x) = d\varphi_1(x)f(x), \varphi_3(x) = d\varphi_2(x)f(x), \dots, \varphi_n(x) = d\varphi_{n-1}(x)f(x).$$

Otrzymujemy także $\alpha(x) = -\frac{d\varphi_n(x)f(x)}{d\varphi_n(x)g(x)}$. Całe sprzężenie zwrotne jest więc wyznaczone przez funkcję $\varphi_1(x)$. Geometryczny sens wyboru tej funkcji pokazuje następujące rozumowanie, w którym dla zwięzłości zastosujemy dla pochodnej Liego funkcji względem pola wektorowego oznaczenie $L_f^0\varphi_1(x) = \varphi_1(x)$ i $L_f^{k+1}\varphi_1(x) = L_f(L_f^k\varphi_1(x))$. Przyjmujemy także, że $L_{\text{ad}_f g}\varphi_1(x) = L_{[f,g]}\varphi_1(x) = L_fL_g\varphi_1(x) - L_gL_f\varphi_1(x)$. Przy takich oznaczeniach równania (9.2) możemy zapisać w postaci

$$\begin{aligned} L_g\varphi_1(x) &= L_g\varphi_2(x) = \dots = L_g\varphi_{n-1}(x) = 0, \\ L_f\varphi_1(x) &= \varphi_2(x), L_f\varphi_2(x) = \varphi_3(x), \dots, L_f\varphi_{n-1}(x) = \varphi_n(x). \end{aligned} \quad (9.3)$$

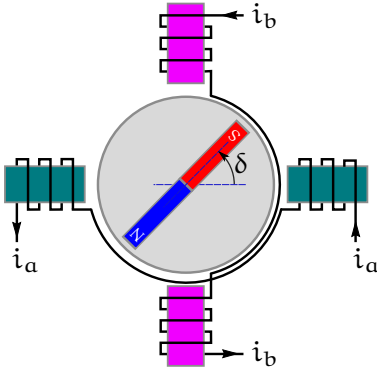
Obliczmy teraz pochodne Liego funkcji $\varphi_1(x)$ względem pól $\text{ad}_f g$, $\text{ad}_f^2 g$, ..., $\text{ad}_f^{n-1} g$. Wykorzystanie zależności (9.3) prowadzi do następujących wniosków

$$\begin{aligned} L_{\text{ad}_f g}\varphi_1(x) &= L_fL_g\varphi_1(x) - L_gL_f\varphi_1(x) = -L_g\varphi_2(x) = 0, \\ L_{\text{ad}_f^2 g}\varphi_1(x) &= L_fL_{\text{ad}_f g}\varphi_1(x) - L_{\text{ad}_f g}L_f\varphi_1(x) = L_g\varphi_3(x) = 0, \\ &\vdots \\ L_{\text{ad}_f^{n-2} g}\varphi_1(x) &= 0, L_{\text{ad}_f^{n-1} g}\varphi_1(x) = (-1)^{n-1}L_g\varphi_n(x) \neq 0. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Geometrycznie równania (9.4) oznaczają, że funkcja $\varphi_1(x)$ powinna zostać wybrana w taki sposób, żeby w każdym punkcie różniczka $d\varphi_1(x)$ była prostopadła do $n-1$ wektorów $g(x)$, $\text{ad}_f g(x)$, ..., $\text{ad}_f^{n-2} g(x)$, natomiast $d\varphi_1(x)\text{ad}_f^{n-1}(x) \neq 0$.

Przykład 9.5.6 Jako bardziej praktyczny przykład układu linearyzowalnego przez sprzężenie zwrotne przeanalizujemy model elektrycznego silnika indukcyjnego pokazanego schematycznie na rysunku 9.3. Równania elektromechaniczne silnika pracującego bez obciążenia można zapisać w postaci

$$\begin{cases} \dot{\delta} = \omega, \\ \dot{\omega} = -\frac{k_m}{J}i_a \sin \delta + \frac{k_m}{J}i_b \cos \delta - \frac{F}{J}\omega, \\ \dot{i}_a = -\frac{R}{L}i_a + \frac{k_m}{L}\omega \sin \delta + \frac{u_a}{L}, \\ \dot{i}_b = -\frac{R}{L}i_b - \frac{k_m}{L}\omega \cos \delta + \frac{u_b}{L}. \end{cases} \quad (9.5)$$



Rysunek 9.3: Model silnika indukcyjnego

Poszczególne symbole występujące w tych równaniach mają następujące znaczenie: δ – kąt obrotu wirnika, ω – prędkość kątowna wirnika, i_a, i_b, u_a, u_b – prądy stojana i napięcia zasilające, F, J – parametry mechaniczne, L, R – parametry elektryczne, k_m – stała elektromechaniczna. Dla uproszczenia zapisu wprowadzamy nowe zmienne $x_1 = \delta, x_2 = \omega, x_3 = i_a, x_4 = i_b, \frac{k_m}{J} = a, \frac{F}{J} = b, \frac{R}{L} = c, \frac{k_m}{L} = d, \frac{u_a}{L} = u_1, \frac{u_b}{L} = u_2$. Przy nowych oznaczeniach układ (9.5) jest afinicznym układem sterowania z dryfem $f(x) = (x_2, ax_3 \sin x_1 + ax_4 \cos x_1 - bx_2, -cx_3 + dx_2 \sin x_1, -cx_4 - dx_2 \cos x_1)^T$ i polami sterującymi $g_1(x) = e_3$ i $g_2(x) = e_4$, gdzie e_i oznacza i -ty wektor jednostkowy w \mathbb{R}^4 . Układ (9.5) ma punkt równowagi $x_0 = 0$, a jego przybliżenie liniowe w tym punkcie jest następujące

$$A = \frac{\partial f(0)}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 & a \\ 0 & 0 & -c & 0 \\ 0 & -d & 0 & -c \end{bmatrix}, \quad B = g(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Przez sprawdzenie warunku Kalmana $\text{rank}[B, AB, A^2B] = 4$ stwierdzamy, że przybliżenie liniowe jest sterowalne. Dla podmacierzy macierzy Kalmana obliczamy wskaźniki $\rho_0 = \text{rank} B = 2, \rho_1 = \text{rank}[B, AB] - \text{rank} B = 1$ i $\rho_2 = \text{rank}[B, AB, A^2B] - \text{rank}[B, AB] = 1$, a zatem wskaźniki sterowalności dla przybliżenia liniowego wynoszą $\kappa_1 = 3$ i $\kappa_2 = 1$. W celu sprawdzenia warunków linearyzowalności układu przez sprzężenie zwrotne zgodnie z Twierdzeniem 9.2.2 wyznaczamy dystrybucje

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^0 &= \text{span}\{g_1, g_2\} = \text{span}\{e_3, e_4\}, \\ \mathcal{D}^1 &= \text{span}\{g_1, g_2, \text{ad}_f g_1, \text{ad}_f g_2\} = \text{span}\{e_2, e_3, e_4\}, \\ \mathcal{D}^2 &= \text{span}\{g_1, g_2, \text{ad}_f g_1, \text{ad}_f g_2, \text{ad}_f^2 g_1, \text{ad}_f^2 g_2\} = \text{span}\{e_1, e_2, e_3, e_4\}. \end{aligned}$$

Z postaci tych dystrybucji wynika natychmiast, że warunki linearyzowalności są spełnione. Układ (9.5) jest F-równoważny układowi liniowemu

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = \xi_3 \\ \dot{\xi}_3 = v_1 \\ \dot{\xi}_4 = v_2 \end{cases} .$$

9.6. Zadania

Zadanie 9.1 Zbadać S-linearyzowalność układów sterowania:

a)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = e^{-x_1} x_2 \\ \dot{x}_2 = e^{x_1} - 1 + u \end{cases} ,$$

b)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \cos^2 x_1 \\ \dot{x}_2 = \operatorname{tg} x_1 + u \end{cases} .$$

Zadanie 9.2 Zbadać F-linearyzowalność układów sterowania:

a)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{x_2}{\cos x_1} \\ \dot{x}_2 = \sin x_1 + u \end{cases} ,$$

b)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_2^2 u \\ \dot{x}_2 = u \end{cases} ,$$

c)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + e^{x_2} x_3 - e^{x_2} x_2^3 \\ \dot{x}_2 = x_3 - x_2^3 \\ \dot{x}_3 = 2x_2^2 x_3 - 5x_2^5 + u \end{cases} ,$$

d)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + e^{-x_3} x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = u \end{cases} .$$

Zadanie 9.3 Pokazać, że układ sterowania

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 x_4^2 + \sin x_3 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = u \end{cases}$$

reprezentujący dynamikę sterowanego układu kula-belka nie jest F-linearyzowalny.

Zadanie 9.4 Dla układu sterowania

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sin x_2 \\ \dot{x}_2 = \sin x_3 \\ \dot{x}_3 = x_4^3 + u_1 \\ \dot{x}_4 = x_5 + x_4^3 - x_1^{10} \\ \dot{x}_5 = u_2 \end{cases}$$

napisać równania równoważności dla odpowiedniej postaci Brunowskiego i rozwiązać je.

9.7. Odniesienia literaturowe

Równoważność układów sterowania była analizowana między innymi w pracach [Kre73, JR80, Sus83, Res85, Jak90], w szczególności w kontekście linearyzacji. Warunki S-linearyzacji pochodzą z prac [Kre73, Res85, Sus83]. Fundamentalne wyniki dotyczące linearyzacji przez sprzężenie zwrotne pochodzą z prac [JR80, HSM83]. Omówienie tych wyników zawiera, na przykład, rozdział 9 monografii [Sas99], rozdział 6 książki [NvdS90], jak również rozdziały 4 i 5 monografii [Isi94]. O typowości, a właściwie nietypowości linearyzowalności i innych własności nieliniowych układów sterowania traktuje praca [Tch86]. Linearyzacji modelu silnika indukcyjnego rozważanego w Przykładzie 9.5.6 jest poświęcona praca [LU89].

Literatura

- [HSM83] L. R. Hunt, R. Su, G. Meyer, Design for multi-input nonlinear systems. W: *Differential Geometric Control Theory*, strony 268–298. Birkhäuser, Boston, 1983.
- [Isi94] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*. Springer, New York, 1994.

- [Jak90] B. Jakubczyk, Equivalence and invariants of nonlinear control systems. W: *Nonlinear Controllability and Optimal Control*, strony 177–218. M. Dekker, New York, 1990.
- [JR80] B. Jakubczyk, W. Respondek, On linearization of control systems. *Bull. Ac. Pol. Sci., ser. Sci. Math.*, 20:517–522, 1980.
- [Kre73] A. Krener, On the equivalence of of control systems and linearization of nonlinear systems. *SIAM J. Contr. Opt.*, 11:670–676, 1973.
- [LU89] A. De Luca, G. Ulivi, Design of exact nonlinear controller for induction motors. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 34(12):1304–1307, 1989.
- [NvdS90] H. Nijmeijer, A. J. van der Schaft, *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer, New York, 1990.
- [Res85] W. Respondek, Geometric methods in linearization of control systems. W: *Mathematical Control Theory*, strony 453–467. PWN, 1985.
- [Sas99] S. S. Sastry, *Nonlinear Systems*. Springer, New York, 1999.
- [Sus83] H. Sussmann, Lie brackets, real analyticity and geometric control. W: *Differential Geometric Control Theory*, strony 1–116. Birkhäuser, Boston, 1983.
- [Tch86] K. Tchoń, Generic properties of linear and nonlinear systems: A comparative study. W: *Theory and Applications of Nonlinear Control Systems*, strony 521–532. Elsevier, Amsterdam, 1986.

Rozdział 10

Odsprężanie odwzorowania we/wy i linearyzacja

10.1. Stopień różniczkowy

Przedmiotem naszej analizy jest afiniczny układ sterowania z wyjściem

$$\sigma : \begin{cases} \dot{x} = f(x(t)) + g(x(t))u(t) = f(x(t)) + \sum_{i=1}^m g_i(x(t))u_i(t) \\ y = h(x) = (h_1(x), h_2(x), \dots, h_p(x))^T \end{cases}, \quad (10.1)$$

gdzie $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$. Załóżmy, że liczba wejść sterujących jest równa liczbie wyjść, $m = p$. Interesuje nas związek między j -tym wyjściem układu a sterowaniem. Z definicji funkcji wyjścia wynika, że sterowanie nie ma bezpośredniego wpływu na wyjście y_j . Aby odkryć ten wpływ, różniczkujemy wyjście względem czasu wzdłuż trajektorii $x(t)$ układu. W celu uproszczenia zapisu będziemy stosować symbol pochodnej Liego $dh_j(x)f(x) = L_f h_j(x)$, a także opuszczać argument t ,

$$\dot{y}_j = dh_j(x)\dot{x} = dh_j(x)(f(x) + g(x)u) = L_f h_j(x) + L_g h_j(x)u,$$

przy czym $L_g h_j(x) = (L_{g_1} h_j(x), L_{g_2} h_j(x), \dots, L_{g_m} h_j(x))^T$. Jeżeli w pewnym otoczeniu punktu x wektor $L_g h_j(x)$ jest różny od zera, bezpośredni wpływ sterowania na wyjście y_j został wykazany. Załóżmy jednak, że w pewnym otoczeniu x $L_g h_j(x) = 0$, co oznacza, że $\dot{y}_j = L_f h_j(x)$. Kolejne różniczkowanie prowadzi do

$$\ddot{y}_j = L_f \dot{h}_j = dL_f h_j(x)\dot{x} = L_f^2 h_j(x) + L_g L_f h_j(x)u.$$

Podobnie, jak poprzednio, może być tak, że w pewnym otoczeniu punktu x zachodzi $L_g L_f h_j(x) \neq 0$. Jeżeli tak jest, sterowanie ma wpływ na pochodną rzędu drugiego wyjścia y_j . Załóżmy znowu, że w pewnym otoczeniu punktu x jest $L_g L_f h_j(x) = 0$. W takim przypadku otrzymujemy $\ddot{y}_j = L_f^2 h_j(x)$ i różniczkowanie powinno być kontynuowane. Załóżmy, że istnieje taka liczba ρ_j , że wszystkie pochodne Liego $L_g L_f^{\rho_j} h_j(x) = 0$,

dla $r = 0, 1, \dots, \rho_j - 2$, ale $L_g L_f^{\rho_j - 1} h_j(x) \neq 0$. Wówczas, zależność między sterowaniem u a wyjściem y_j jest następująca

$$\begin{cases} y_j = h_j(x) \\ \dot{y}_j = L_f h_j(x) \\ \vdots \\ y_j^{(\rho_j - 1)} = L_f^{\rho_j - 1} h_j(x) \\ y_j^{(\rho_j)} = L^{\rho_j} h_j(x) + L_g L_f^{\rho_j - 1} h_j(x) u \end{cases} \quad (10.2)$$

Liczbę ρ_j nazywamy stopniem różniczkowym lub stopniem względnym wyjścia y_j . Wykonując powyższą procedurę dla wszystkich wyjść otrzymamy zestaw stopni różniczkowych $\rho = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m)$. Możemy oczekiwać, że stopnie różniczkowe, o ile istnieją, są skończone; w przeciwnym razie pewne wyjścia układu nie podlegałyby działaniu żadnego sterowania, co świadczyłoby o pewnej dysfunkcjonalności układu.

10.2. Odsprężanie

Mając dane stopnie różniczkowe ρ_j dla wszystkich wyjść, przy oznaczeniu $y^\rho = (y_1^{(\rho_1)}, y_2^{(\rho_2)}, \dots, y_m^{(\rho_m)})^T$, możemy zapisać relację wejście-wyjście układu w postaci

$$y^\rho = L_f^\rho h(x) + L_g L_f^{\rho - 1} h(x) u = P(x) + D(x) u, \quad (10.3)$$

gdzie

$$P(x) = (L_f^{\rho_1} h_1(x), L_f^{\rho_2} h_2(x), \dots, L_f^{\rho_m} h_m(x))^T \quad (10.4)$$

i

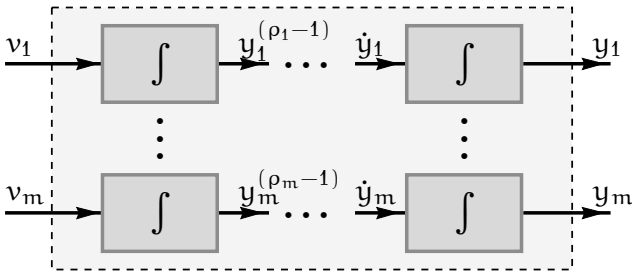
$$D(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{\rho_1 - 1} h_1(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{\rho_1 - 1} h_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{\rho_m - 1} h_m(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{\rho_m - 1} h_m(x) \end{bmatrix}. \quad (10.5)$$

Macierz $D(x)$ nazywamy macierzą odsprężenia. Jeżeli dla afinicznego układu sterowania istnieją stopnie różniczkowe i macierz odsprężenia jest nieosobliwa, to za pomocą sprzężenia zwrotnego

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v = -D^{-1}(x)P(x) + D^{-1}(x)v$$

przekształcamy układ do postaci odsprężonej

$$y_j^{\rho_j} = v_j, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (10.6)$$



Rysunek 10.1: Struktura relacji wejście-wyjście

Jak widać, w układzie (10.6) sterowanie nr j oddziałuje wyłącznie na wyjście j . Strukturę relacji wejście-wyjście przedstawia rysunek 10.1.

Jeżeli zatem układ sterowania ma stopnie różniczkowe $(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m)$ i nieosobliwą macierz odsprężania $D(x)$, to zadanie śledzenia trajektorii wyjścia $y_d(t)$ w takim układzie ma naturalne rozwiązanie

$$\begin{cases} v_1 = \dot{y}_{d1}^{(\rho_1)} - k_{1\rho_1-1}(y_1 - y_{d1})^{(\rho_1-1)} + \dots + k_{10}(y_1 - y_{d1}) \\ \vdots \\ v_m = \dot{y}_{dm}^{(\rho_m)} - k_{m\rho_m-1}(y_m - y_{dm})^{(\rho_m-1)} + \dots + k_{m0}(y_m - y_{dm}) \end{cases}$$

Łatwo sprawdzić, że jeżeli $e_j = y_j - y_{dj}$ oznacza błąd śledzenia j -tego wyjścia, to równania błędu śledzenia całego układu można przedstawić w postaci

$$e_j^{(\rho_j)} + k_{j\rho_j-1}e_j^{(\rho_j-1)} + \dots + k_{j0}e_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Dla zapewnienia asymptotycznej stabilności wielomian charakterystyczny każdego równania błędu powinien być wielomianem Hurwitza.

10.3. Dynamika układu odsprężonego

Założmy, że liczby $(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m)$ oznaczają stopnie różniczkowe układu sterowania (10.1), który jest odsprężalny. Niech suma stopni różniczkowych $\sum_{j=1}^m \rho_j = s$, $s \leq n$. Sprężenie zwrotne

$$u = -D^{-1}(x)P(x) + D^{-1}(x)v,$$

które umożliwiło odsprężenie układu, nadaje jego dynamice postać

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t)) + g(x(t))D^{-1}(x)P(x) + g(x)D^{-1}(x)v = F(x) + G(x)v \\ y = h(x) \end{cases}$$

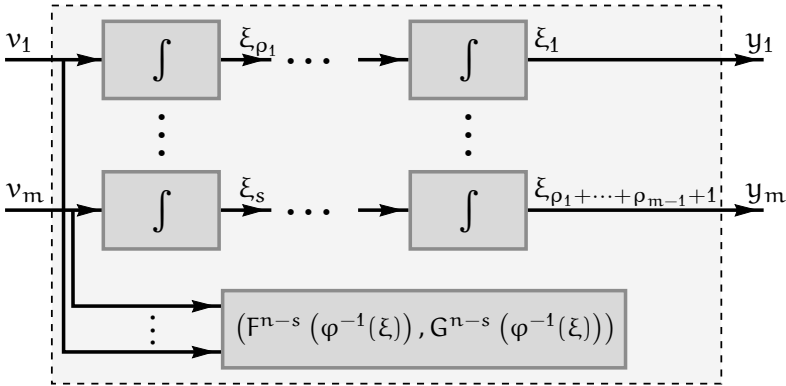
Aby lepiej zrozumieć strukturę części dynamicznej układu po sprzężeniu wprowadzimy nowe współrzędne, w następujący sposób

$$\xi = \varphi(x) = \begin{pmatrix} h_1(x) \\ L_f h_1(x) \\ \vdots \\ L_f^{\rho_1-1} h_1(x) \\ h_2(x) \\ L_f h_2(x) \\ \vdots \\ L_f^{\rho_2-1} h_2(x) \\ \vdots \\ h_m(x) \\ L_f h_m(x) \\ \vdots \\ L_f^{\rho_m-1} h_m(x) \\ x^{n-s} \end{pmatrix},$$

gdzie pierwsze s składowych zostało zdefiniowanych przy użyciu związków między wejściem a pochodnymi wyjścia rzędu od 0 do $\rho_j - 1$, natomiast pozostałe współrzędne oznaczone jako $\xi^{n-s} = x^{n-s}$ zostały wybrane spośród (x_1, x_2, \dots, x_n) w taki sposób, że $\varphi(x)$ jest lokalnym dyfeomorfizmem. Niezależność pierwszych s współrzędnych można wykazać na podstawie własności stopni różniczkowych. Zauważmy, że po zastosowaniu sprzężenia zwrotnego $(\varphi(x), \alpha(x), \beta(x))$ równania układu przyjmują następującą postać

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2, \dot{\xi}_2 = \xi_3, \dots, \dot{\xi}_{\rho_1} = v_1 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{\rho_1+\dots+\rho_{m-1}+1} = \xi_{\rho_1+\dots+\rho_{m-1}+2}, \dots, \dot{\xi}_s = v_m \\ \dot{\xi}^{n-s} = F^{n-s}(\varphi^{-1}(\xi)) + G^{n-s}(\varphi^{-1}(\xi))v \\ y_1 = \xi_1 \\ y_2 = \xi_{\rho_1+1} \\ \vdots \\ y_m = \xi_{\rho_1+\dots+\rho_{m-1}+1} \end{cases} \quad (10.7)$$

Przez $F^{n-s}(x)$ i $G^{n-s}(x)$ rozumiemy te składowe pól $F(x)$ i $G(x)$, które odpowiadają współrzędnym x^{n-s} . Strukturę układu (10.7) przedstawia rysunek 10.2. Widać, że s -wymiarowy podukład układu (10.7) został



Rysunek 10.2: Struktura układu sterowania (10.7)

zlinearyzowany i odsprężony. Widać także, że istnieje podukład opisany współrzędnymi ξ^{n-s} , który podlega sterowaniu v , ale który nie ma żadnego wpływu na wyjście układu. Ewolucja tego podukładu powinna pozostawać pod kontrolą, a jego trajektorie powinny być ograniczone. Załóżmy, że wszystkie wyjścia układu (10.7) są w każdej chwili równe zero. Wynika stąd, że wszystkie współrzędne $\xi_1, \dots, \xi_s = 0$, a także $v = 0$. Przy takim założeniu dynamika współrzędnych ξ^{n-s} jest opisana układem dynamicznym

$$\dot{\xi}^{n-s} = F^{n-s} \left(\varphi^{-1}(0, \xi^{n-s}) \right) = \bar{F}(\xi^{n-s}).$$

Tę dynamikę nazywamy dynamiką zerową układu (10.7). Aby skutecznie zastosować algorytm sterowania wykorzystujący odsprężanie, dynamika zerowa musi być stabilna (stabilna w sensie Lapunowa, asymptotycznie stabilna), co najmniej lokalnie. Układ z asymptotycznie stabilną dynamiką zerową nazywa się minimalnofazowym. Oczywiście, jeżeli $s = n$, dynamika zerowa jest nieobecna i metoda odsprężania pozwala na znalezienie linearyzującego sprzężenia zwrotnego bez rozwiązywania równań równoważności. Formułujemy w tym kontekście następujące spostrzeżenie.

Spostrzeżenie 10.3.1 *Jeżeli stopnie różniczkowe układu σ sumują się do wymiaru przestrzeni stanu, to układ jest linearyzowalny przez sprzężenie zwrotne postaci*

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= (h_1(x), \dots, L^{\rho_1-1}h_1(x), \dots, h_m(x), \dots, L^{\rho_m-1}h_m(x))^T, \\ \alpha(x) &= -D(x)^{-1}P(x), \\ \beta(x) &= D^{-1}(x), \end{aligned}$$

gdzie $P(x)$ i $D(x)$ zostały zdefiniowane wzorami (10.4) i (10.5).

10.4. Przykłady

Przykład 10.4.1 Rozważmy równania dynamiki nieredundantnego manipulatora o n stopniach swobody, opisanego wektorem współrzędnych $q \in \mathbb{R}^n$, wektorem sterowań $u \in \mathbb{R}^n$ i wektorem współrzędnych zadaniowych $y \in \mathbb{R}^n$,

$$Q(q)\ddot{q} + B(q, \dot{q}) = u,$$

gdzie $Q(q)$ oznacza macierz bezwładności, a $B(q, \dot{q})$ wektor sił Coriolisa, odśrodkowych i grawitacji, z kinematyką

$$y = k(q).$$

Aby nadać tym równaniom formalną postać afinicznego układu sterowania, zastosujemy podstawienie $x = q$ i $\xi = \dot{q}$. Nietrudno pokazać, że w takim przypadku dynamika manipulatora będzie opisana układem afinicznym z wyjściem

$$\begin{cases} \dot{x} = \xi, \\ \dot{\xi} = -Q^{-1}(x)B(x, \xi) + Q^{-1}(x)u, \\ y = k(x). \end{cases}$$

Okazuje się, że stopnie różniczkowe wszystkich wyjść są jednakowe, dlatego w celu ich wyznaczenia będziemy jednocześnie różniczkować cały wektor wyjść

$$\begin{aligned} \dot{y} &= Dk(x)\dot{x} = J(x)\xi, \\ \ddot{y} &= \dot{J}(x)\xi + J(x)\dot{\xi} = \underbrace{\dot{J}(x)\xi - J(x)Q^{-1}(x)B(x, \xi)}_{P(x, \xi)} + \underbrace{J(x)Q^{-1}(x)}_{D(x)} u. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy stopnie różniczkowe $\rho_j = 2$ i macierz odsprężania $D(x)$, która jest nieosobliwa poza konfiguracjami osobliwymi manipulatora. Co więcej, suma stopni różniczkowych $s = 2n$ jest równa wymiarowi przestrzeni stanu, zatem model dynamiki manipulatora można odsprząc i zlinearyzować przez sprzężenie zwrotne. Nie musimy przy tym zmieniać współrzędnych. Po zastosowaniu sprzężenia zwrotnego

$$u = -D^{-1}(x)P(x, \xi) + D^{-1}(x)v$$

relacja między wejściem a wyjściem uzyskuje postać

$$\ddot{y} = v.$$

Do rozwiązania zadania śledzenia trajektorii zadaniowej $y_d(t)$ naturalne jest zastosowanie algorytmu

$$v = \ddot{y}_d - K_1(\dot{y} - \dot{y}_d) - K_0(y - y_d),$$

z diagonalnymi macierzami wzmocnień K_0, K_1 o dodatnich elementach. Wynikowy algorytm śledzenia

$$u = -D^{-1}(x)P(x, \xi) + D^{-1}(x)(\ddot{y}_d - K_1(\dot{y} - \dot{y}_d) - K_0(y - y_d))$$

jest znany w robotyce pod nazwą algorytmu Freunda.

Przykład 10.4.2 Rozważmy układ sterowania z jednym wejściem

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 - x_2^3 \\ \dot{x}_2 = -x_2 - u \\ \dot{x}_3 = x_1^2 - x_3 + u \end{cases}$$

i jednym wyjściem

$$y = h(x) = x_1.$$

Różniczkowanie wyjścia daje

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \dot{x}_1 = x_3 - x_2^3 \\ \ddot{y} &= \underbrace{x_1^2 - x_3 + 3x_2^3}_{P(x)} + \underbrace{(1 + 3x_2^2)}_{D(x)} u. \end{aligned}$$

Mamy więc stopień różniczkowy $\rho_1 = 2$ i macierz (współczynnik) odsprężania $D(x) \neq 0$. Sprężenie zwrotne $u = -\frac{P(x)}{D(x)} + \frac{1}{D(x)}v$ daje odsprężoną relację wejście-wyjście $\ddot{y} = v$. Ponieważ $s = 2 < n = 3$, pojawia się dynamika zerowa. W celu jej wyznaczenia wybieramy nowe współrzędne

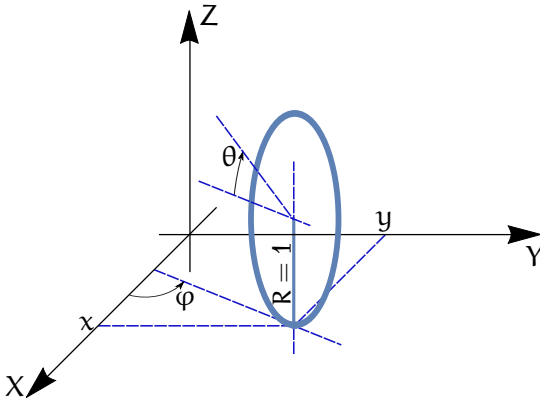
$$\begin{cases} \xi_1 = h(x) = x_1 \\ \xi_2 = L_f h(x) = x_3 - x_2^3 \\ \xi_3 = x_2 \end{cases}.$$

Łatwo sprawdzić, że w otoczeniu punktu $0 \in \mathbb{R}^3$ $\xi = \varphi(x)$ jest lokalnym dyfeomorfizmem. Równania układu w nowych współrzędnych i po odsprężeniu uzyskują postać

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = v \\ \dot{\xi}_3 = -x_2 - u = -\xi_3 + \frac{1}{1+3\xi_3^2}v - \frac{1}{1+3\xi_3^2}(\xi_1^2 - \xi_2 + 2\xi_3^3). \end{cases}$$

Zakładając, że $y = 0$ otrzymujemy dynamikę zerową

$$\dot{\xi}_3 = -\xi_3 - \frac{2\xi_3^3}{1+3\xi_3^2} = -\xi_3 k(\xi_3),$$



Rysunek 10.3: Koło toczące się po płaszczyźnie pionowo

gdzie $k(\xi_3) \geq 1$. Wybierzmy funkcję $V(x) = \frac{1}{2}x^2$, w której $x = \xi_3$. Otrzymujemy $\dot{V} = x\dot{x} = -x^2k(x) \leq -x^2 = -2V$. W rezultacie, $V(t) \leq V(0)e^{-2t}$, skąd wynika $|\xi_3(t)| \leq |\xi_{30}|e^{-t}$, a więc dynamika zerowa jest globalnie asymptotycznie stabilna.

10.5. Zadania

Zadanie 10.1 Dla nieredundantnego manipulatora sztywnego opisanego równaniami

$$\begin{cases} Q(q)\ddot{q} + B(q, \dot{q}) = u \\ y = k(q) \end{cases},$$

$q, u, y \in \mathbb{R}^n$, korzystając z linearyzacji wejście-wyjście wyprowadzić algorytm śledzenia trajektorii $y_d(t)$ w przestrzeni zadaniowej.

Zadanie 10.2 Dla pokazanego na rysunku 10.3 koła toczącego się pionowo, opisanego równaniami

$$\begin{cases} \dot{x} = \eta_1 \cos \varphi \\ \dot{y} = \eta_1 \sin \varphi \\ \dot{\varphi} = \eta_2 \\ \dot{\theta} = \eta_1 \\ \dot{\eta}_1 = u_1 \\ \dot{\eta}_2 = u_2 \\ y_1 = x \\ y_2 = y \end{cases},$$

korzystając z linearyzacji wejście-wyjście przeprowadzić syntezę algorytmu śledzenia trajektorii $y_d(t) = (y_{d1}(t), y_{d2}(t))^T$. Wprowadzić nowe współrzędne i zbadać dynamikę zerową układu.

Zadanie 10.3 Dany jest układ sterowania postaci

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \sin x_3 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = u \end{cases}.$$

Korzystając z twierdzenia Jakubczyka-Respondka i z linearyzacji wejście-wyjście przy funkcji wyjścia $y = x_1$ pokazać, że układ ten jest linearyzowalny przez sprzężenie zwrotne w otoczeniu $0 \in \mathbb{R}^4$

10.6. Odniesienia literaturowe

Odsprężanie wejściowo-wyjściowe i związane z nim pojęcia stopnia różniczkowego i dynamiki zerowej zostały dokładniej opisane w monografiach [NvdS90, Isi94]. Zwięzłe i przystępne omówienie tych zagadnień zawiera także rozdział 9 książki [Sas99]. W celu wyjaśnienia zagadnień związanych z robotyką Czytelnik może sięgnąć do monografii [MZS94, TMD⁺00]. Zastosowanie odsprężania wejściowo-wyjściowego do sterowania manipulatorów mobilnych omawia praca [Maz09].

Literatura

- [Isi94] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Springer, New York, 1994.
- [Maz09] A. Mazur. *Sterowanie oparte na modelu dla nieholonomicznych manipulatorów mobilnych*. Oficyna Wydawnicza PWr, Wrocław, 2009.
- [MZS94] R. Murray, Li Zexiang, S. Sastry. *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. CRC Press, Boca Raton, 1994.
- [NvdS90] H. Nijmeijer, A. J. van der Schaft. *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer, New York, 1990.
- [Sas99] S. S. Sastry. *Nonlinear Systems*. Springer, New York, 1999.
- [TMD⁺00] K. Tchoń, A. Mazur, I. Dulęba, R. Hossa, R. Muszyński. *Manipulatory i roboty mobilne: modele, planowanie ruchu, sterowanie*. Akademicka Oficyna Wydawnicza PLJ, Warszawa, 2000. (Politechnika Wrocławska, projekt AZON, 2018).

Rozdział 11

Układy w postaci łańcuchowej

Znaczenie sprzężenia zwrotnego dla syntezy układów sterowania polega na tym, że pozwala przetransformować zadanie sterowania z układu „trudnego” do analizy do układu w postaci normalnej, dla którego zostały opracowane algorytmy sterowania. Przykładem takiego układu jest układ liniowy. Pokażemy teraz inny przykład prostej postaci normalnej układu sterowania, wraz z odpowiednią metodą sterowania. Takim układem jest układ w postaci łańcuchowej.

11.1. Postać łańcuchowa

Rozważamy układ bezdryfowy o dwóch wejściach

$$\sigma : \dot{x} = g(x(t))u(t) = g_1(x(t))u_1(t) + g_2(x(t))u_2(t), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (11.1)$$

Dystrybucję generowaną przez pola sterujące tego układu oznaczmy symbolem $\mathcal{D} = \text{span}_{C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}\{g_1, g_2\}$. Układem sterowania w postaci łańcuchowej nazywamy układ

$$\sigma' : \dot{\xi} = G(\xi(t))v = G_1(\xi(t))v_1(t) + G_2(\xi(t))v_2(t)$$

mający jedną z dwóch równoważnych postaci

$$\begin{aligned} \sigma'_1 : \dot{\xi}_1 &= v_1, \quad \dot{\xi}_2 = v_2, \quad \dot{\xi}_3 = \xi_2 v_1, \dots, \dot{\xi}_n = \xi_{n-1} v_1 \\ \sigma'_2 : \dot{\xi}_1 &= v_1, \quad \dot{\xi}_2 = \xi_3 v_1, \quad \dot{\xi}_3 = \xi_4 v_1, \dots, \dot{\xi}_{n-1} = \xi_n v_1, \quad \dot{\xi}_n = v_2. \end{aligned} \quad (11.2)$$

Szukamy sprzężenia zwrotnego $\xi = \varphi(x)$, $u = \beta(x)v$, które ustala F-równoważność układów σ i σ' . Jeżeli takie sprzężenie istnieje, musi spełniać następujące równania równoważności

$$D\varphi(x)g(x)\beta(x) = G(\varphi(x)).$$

11.2. Twierdzenie Murraya

Mając dany układ (11.1) definiujemy dwie rodziny dystrybucji dla $k = 0, 1, \dots, n-2$

$$\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}, \quad \mathcal{D}_{k+1} = \mathcal{D}_k + [\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_k]$$

i

$$\mathcal{D}^0 = \mathcal{D}, \mathcal{D}^{k+1} = \mathcal{D}^k + [\mathcal{D}^k, \mathcal{D}^k].$$

Pierwszą z tych rodzin nazywamy małą flagą, a drugą – dużą flagą dystrybucji. Poszczególne dystrybucje w małej i dużej fladze są zagnieżdżone, $\mathcal{D}_k \subset \mathcal{D}_{k+1}$, $\mathcal{D}^k \subset \mathcal{D}^{k+1}$, mamy także

$$\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}^0, \mathcal{D}_1 = \mathcal{D}^1, \mathcal{D}_k \subset \mathcal{D}^k$$

dla $k \geq 2$. Ostatnia zależność tłumaczy nazwę „mała” i „duża” flaga. W języku flag został sformułowany następujący warunek konieczny i wystarczający lokalnej F-równoważności układów σ i σ' .

Twierdzenie 11.2.1 (Murray)

$$\sigma \underset{\text{LF}}{\cong} \sigma' \iff \dim \mathcal{D}_k(x) = \dim \mathcal{D}^k(x) = k + 2$$

dla x w pewnym zbiorze otwartym i dla $k = 0, 1, \dots, n - 2$.

11.3. Całkowanie wsteczne

Metodą sterowania, która ma zastosowanie do układów w postaci łańcuchowej jest metoda całkowania wstecznego*. Ideę metody wprowadzimy na układzie afinicznym z jednym wejściem postaci

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t)) + g(x(t))\xi(t), \\ \dot{\xi} = u(t), \end{cases} \quad (11.3)$$

z punktem równowagi $f(0) = 0$, gdzie $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$. System (11.3) może reprezentować dynamikę błędu pewnego układu sterowania. Mamy rozwiązać zadanie stabilizacji błędu, a więc znaleźć sterowanie $u(t)$, takie że przy $t \rightarrow +\infty$ trajektoria $(x(t), \xi(t)) \rightarrow 0$. Sterowanie wyznaczymy w postaci sprzężenia zwrotnego od stanu układu, $u = u(x, \xi)$. W tym celu postępujemy w następujący sposób:

— Rozważmy podukład $\dot{x} = f(x(t)) + g(x(t))\xi(t)$ i potraktujmy zmienną ξ jako tymczasowe sterowanie. Zakładamy, że istnieje dla tego podukładu stabilizujące sprzężenie zwrotne, tzn. funkcja $\xi = \phi(x)$, $\phi(0) = 0$ i funkcje $\alpha_1(\|x\|) \leq V_1(x) \leq \alpha_2(\|x\|)$, $W_1(x) \geq 0$, gdzie α_1, α_2 są pewnymi funkcjami klasy K, takie że wzdłuż trajektorii układu ze sprzężeniem zwrotnym $\dot{x} = f(x(t)) + g(x(t))\phi(x)$

$$\dot{V}_1(x) = dV(x)(f(x) + g(x)\phi(x)) \leq -W_1(x) \leq 0.$$

*Oryginalna nazwa tej metody „integrator backstepping” nie ma dobrego tłumaczenia na język polski; nasza propozycja nie pretenduje do najbardziej adekwatnej, jest jednak lepsza od używanego czasami w języku polskim terminu „bakstepping”.

— Wprowadźmy nową zmienną $z = \xi - \phi(x)$ i zapiszmy układ (11.3) w postaci

$$\begin{cases} \dot{x} = \underbrace{f(x(t)) + g(x(t))\phi(x(t))}_{\text{stabilny}} + g(x(t))z(t), \\ \dot{z} = u(t) - \dot{\phi}(x(t)) = v(t), \end{cases} \quad (11.4)$$

gdzie symbol $\dot{\phi}(x(t))$ oznacza różniczkowanie względem czasu, natomiast v jest nowym sterowaniem. Szukamy teraz sterowania stabilizującego dla całego układu (11.4). W tym celu wybieramy funkcję

$$V_2(x, z) = V_1(x) + \frac{1}{2}z^2 \geq 0$$

i obliczamy

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(x, z) &= \dot{V}_1(x) + z\dot{z} \leq -W_1(x) + dV_1(x)g(x)z + zv = \\ &= -W_1(x) + (dV_1(x)g(x) + v)z. \end{aligned}$$

Zauważmy, że biorąc

$$dV_1(x)g(x) + v = -kz$$

dla pewnego $k > 0$ otrzymamy

$$\dot{V}_2(x, z) \leq -W_1(x) - kz^2,$$

skąd wynika stabilność układu (11.4), ze sterowaniem

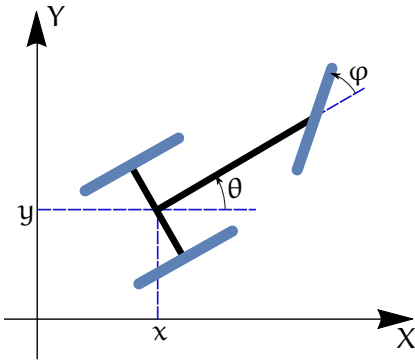
$$v = -kz - dV_1(x)g(x).$$

Gdyby założyć, że funkcja $W_1(x) \geq \alpha_3(\|x\|)$, dla pewnej funkcji α_3 klasy K , to otrzymalibyśmy asymptotyczną stabilność układu (11.4). Ponieważ $\xi = z - \phi(x)$ i $\phi(0) = 0$, ze zbieżności $(x(t), z(t))$ do 0 wynika dążenie do zera $\xi(t)$. Sterowanie stabilizujące układ (11.3) ma zatem postać

$$u(x, \xi) = -k(\xi - \phi(x)) - dV_1(x)g(x) + d\phi(x)(f(x) + g(x)\xi).$$

Przedstawiona procedura ma naturalne uogólnienie na układy z wieloma całkowaniami,

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t)) + g(x(t))\xi_1(t), \\ \dot{\xi}_1 = \xi_2(t) \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{k-1} = \xi_k(t), \\ \dot{\xi}_k = u. \end{cases}$$



Rysunek 11.1: Samochód kinematyczny

11.4. Przykłady

Przykład 11.4.1 Przedmiotem naszej analizy będzie samochód kinematyczny przedstawiony na rysunku 11.1. Niech $q = (x, y, \theta, \varphi)^T$ oznacza wektor współrzędnych opisujący samochód (patrz rysunek). Przy założeniu, że nie następuje poślizg boczny kół tylnych ani przednich, model kinematyki samochodu kinematycznego ma postać układu bezdryfowego

$$\begin{cases} \dot{x} = u_1 \cos \theta \cos \varphi \\ \dot{y} = u_1 \sin \theta \cos \varphi \\ \dot{\theta} = u_1 \sin \varphi \\ \dot{\varphi} = u_2 \end{cases} \quad (11.5)$$

Pokażemy, że układ ten jest lokalnie F-równoważny układowi w postaci łańcuchowej, a dokładnie układowi σ_2' występującemu we wzorze (11.2). Załóżmy, że współrzędne θ i φ układu są ograniczone do zakresu $\pm\pi/2$, zatem $|\theta|, |\varphi| < \pi/2$. Przy takim założeniu możemy zdefiniować wstępne sprzężenie zwrotne

$$w = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u,$$

które pozwala zapisać układ (11.5) w postaci

$$\begin{cases} \dot{x} = w_1 \\ \dot{y} = w_1 \operatorname{tg} \theta \\ \dot{\theta} = w_1 \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \theta} \\ \dot{\varphi} = w_2 \end{cases} \quad (11.6)$$

Układ (11.6) jest opisany przez dwa pola sterujące

$$g_1(q) = \begin{pmatrix} 1 \\ \operatorname{tg} \theta \\ \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \theta} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_2(q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

zatem dystrybucja $\mathcal{D} = \operatorname{span}\{g_1, g_2\}$. Wyznaczymy małą i dużą flagę. Z Twierdzenia 11.2.1 wynika, że wystarczy wyliczyć następujące dystrybucje:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0 &= \mathcal{D}^0 = \mathcal{D} \ni g_1, g_2 \\ \mathcal{D}_1 &= \mathcal{D}^1 = \mathcal{D}_0 + [\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_0] \ni g_1, g_2, g_{12} = [g_1, g_2], \\ \mathcal{D}_2 &= \mathcal{D}_1 + [\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1] = \mathcal{D}^2 \ni g_1, g_2, g_{12}, g_{112} = [g_1, g_{12}], g_{212} = [g_2, g_{12}]. \end{aligned}$$

W naszym przypadku mamy identyczność dystrybucji $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}^2$; zauważmy, że własność ta nie ma charakteru ogólnego, lecz wynika z tego, że dystrybucja \mathcal{D} ma dwa generatory. Obliczenie nawiasów Liego daje

$$g_{12}(q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{\cos \theta \cos^2 \varphi} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_{112}(q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{\cos^3 \theta \cos^2 \varphi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nietrudno teraz sprawdzić, że dystrybucja $\mathcal{D}_1 = \operatorname{span}\{g_1, g_2, g_{12}\}$, a dystrybucja $\mathcal{D}_2 = \operatorname{span}\{g_1, g_2, g_{12}, g_{112}\}$, a zatem każdym punkcie $q \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (-\pi/2, +\pi/2)^2$ są spełnione warunki

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{D}_0(q) &= \dim \mathcal{D}^0(q) = 2, \quad \dim \mathcal{D}_1(q) = \dim \mathcal{D}^1(q) = 3, \\ \dim \mathcal{D}_2(q) &= \dim \mathcal{D}^2(q) = 4. \end{aligned}$$

Z Twierdzenia 11.2.1 wynika, że układ (11.6) jest lokalnie F-równoważny postaci łańcuchowej, a ponieważ układ (11.5) jest F-równoważny układowi (11.6), zatem kinematyka samochodu kinematycznego jest lokalnie równoważna przez sprzężenie zwrotne układowi w postaci łańcuchowej.

Przykład 11.4.2 Jako ilustrację metody całkowania wstecznego wyprowadzimy algorytm stabilizacji punktu równowagi $0 \in \mathbb{R}^2$ w układzie

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 - x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases}.$$

Zgodnie ze schematem metody potraktujemy najpierw zmienną x_2 jako sterowanie i znajdziemy stabilizujące sprzężenie zwrotne $x_2 = \phi(x_1)$. W tym celu wybieramy funkcję $V_1(x_1) = 1/2x_1^2$ i obliczamy

$$\dot{V}_1(x_1) = x_1\dot{x}_1 = x_1^2 - x_1^3 + \phi(x_1) \leq x_1^3 + x_1\phi(x_1) = x_1 \left(x_1^2 - x_1^3 + \phi(x_1) \right).$$

Łatwo widać, że wybór $\phi(x_1) = -k_1x_1 - x_1^2$ przy $k_1 > 0$ daje $\dot{V}_1(x_1) \leq -k_1x_1^2 = -W_1(x_1)$, skąd wynika asymptotyczna stabilność dynamiki zmiennej x_1 . Następnie definiujemy zmienną $z = x_2 - \phi(x_1)$ i przepisujemy równania całego układu w postaci

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 - x_1^3 + \phi(x_1) + z \\ \dot{z} = u - \phi(x_1) = v \end{cases}.$$

Dla ostatniego układu bierzemy funkcję $V_2(x_1, z) = V_1(x_1) + 1/2z^2$. Jej pochodna wzdłuż trajektorii wynosi

$$\dot{V}_2(x_1, z) = \dot{V}_1 + z\dot{z} \leq -W_1(x_1) + \left(\frac{dV_1(x_1)}{dx_1} + v \right) z.$$

Jeżeli $dV_1(x) + v = -k_2z$, to sterowanie $v = -k_2z - \frac{dV_1(x_1)}{dx_1}$ prowadzi do

$$\dot{V}_2(x_1, z) \leq -W_1(x_1) - k_2z^2 = -k_1x_1^2 - k_2z^2,$$

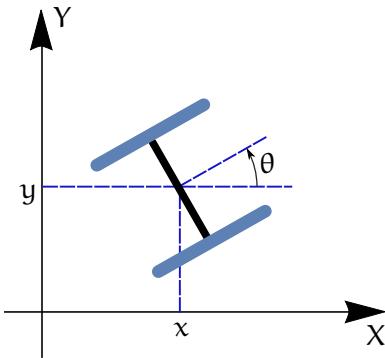
a więc stabilizuje układ opisany zmiennymi (x_1, z) , zapewniając dążenie trajektorii $(x_1(t), z(t))$ do zera. Ponieważ $\phi(0) = 0$ wynika stąd zbieżność do zera trajektorii oryginalnej $(x_1(t), x_2(t))$. Sterowanie stabilizujące układ (x_1, x_2) jest równe

$$u(x_1, x_2) = v + \dot{\phi}(x_1) = -k_2(x_2 - \phi(x_1)) - \frac{dV_1(x_1)}{dx_1} + \frac{d\phi(x_1)}{dx_1}(x_1^2 - x_1^3 + x_2),$$

gdzie $V_1(x_1) = 1/2x_1^2$ i $\phi(x_1) = -k_1x_1 - x_1^2$.

Przykład 11.4.3 Drugim przykładem zastosowania metody całkowania wstecznego będzie model kinematyki monocykła o współrzędnych $q = (x, y, \theta)^T$, przedstawionego na rysunku 11.2. Równania kinematyki monocykła są następujące

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos \theta(t) \\ \dot{y} = v \sin \theta(t) \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases}.$$



Rysunek 11.2: Monocykl

Załóżmy, że zadanie sterowania polega na śledzeniu trajektorii odniesienia $(x_d(t), y_d(t))$. Niech trajektoria ta będzie realizowalna przez monocykl (dopuszczalna), co oznacza, że istnieją sterowania referencyjne $(v_d(t), w_d(t))$, takie że $\dot{x}_d = v_d(t) \cos \theta_d(t)$, $\dot{y}_d = v_d(t) \sin \theta_d(t)$, $\dot{\theta}_d = w_d(t)$. Zdefiniujmy błędy śledzenia jako $\bar{x}_e = x_d - x$, $\bar{y}_e = y_d - y$, $\bar{\theta}_e = \theta_d - \theta$ i przetransformujmy błąd śledzenia do postaci

$$\begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ \theta_e \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_e \\ \bar{y}_e \\ \bar{\theta}_e \end{pmatrix}.$$

Przy takiej definicji błędu jego dynamika wyraża się układem zależnym od czasu

$$\begin{cases} \dot{x}_e = w(t)y_e(t) - v(t) + v_d(t) \cos \theta_e(t), \\ \dot{y}_e = -w(t)x_e(t) + v_d(t) \sin \theta_e(t), \\ \dot{\theta}_e = w_d(t) - w(t). \end{cases} \quad (11.7)$$

Procedura syntezy algorytmu śledzenia wykorzystująca metodę całkowania wstecznego przedstawia się następująco:

- Załóżmy chwilowo, że w drugim równaniu z układu (11.7) mamy $x_e = 0$ i postarajmy się ustabilizować zmienną y_e . W tym celu bierzemy $\theta_e = -\varphi(y_e v_d)$ [†], gdzie $\varphi(z)$ jest funkcją o następujących własnościach: $\varphi(0) = 0$, $z\varphi(z) > 0$ dla $z \neq 0$ i pochodna $\varphi'(z)$ jest ograniczona. Przykładem funkcji spełniającej te wymagania jest $\varphi(z) = \frac{\sigma z}{1+z^2}$ dla pewnego $\sigma > 0$.
- Wyliczmy $\dot{y}_e = -v_d(t) \sin \varphi(y_e(t)v_d(t))$. Biorąc $V_1(y_e) = 1/2 y_e^2$ otrzymujemy $\dot{V}_1(y_e) = -y_e v_d \sin \varphi(y_e v_d) < 0$, dla małych wartości

[†]argumentem φ jest iloczyn y_e i v_d

funkcji $\varphi(y_e v_d)$, na mocy własności funkcji φ . Wynika stąd jednostajna asymptotyczna stabilność współrzędnej y_e .

— Zdefiniujmy zmienną $z = \theta_e + \varphi(y_e v_d)$ i obliczmy jej pochodną względem czasu

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \dot{\theta}_e + \varphi'(y_e v_d)(\dot{y}_e v_d + y_e \dot{v}_d) = \\ &= w_d - w + \varphi'(y_e v_d)(-w x_e v_d + v_d^2 \sin \theta_e + y_e \dot{v}_d).\end{aligned}$$

— Weźmy funkcję

$$V_2(t, x_e, y_e, z) = \frac{1}{2}x_e^2 + \frac{1}{2}y_e^2 + \frac{1}{2\gamma}z^2,$$

dla pewnego $\gamma > 0$. Zróżniczkowanie V_2 wzdłuż trajektorii układu błędu (11.7) daje

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 &= x_e \dot{x}_e + y_e \dot{y}_e + \frac{1}{\gamma}z \dot{z} = x_e(-v + v_d \cos \theta_e) + y_e v_d \sin \theta_e + \\ &+ \frac{1}{\gamma}z \left(w_d - w + \varphi'(y_e v_d) \left(-w x_e v_d + v_d^2 \sin \theta_e + y_e \dot{v}_d \right) \right).\end{aligned}$$

— Skorzystamy teraz z Lematu Hadamarda przedstawionego w podrozdziale 3.3, w postaci

$$f(x+x_0) - f(x_0) = \int_0^1 df(s(x+x_0) + (1-s)x_0) = f'(x_0) + x \int_0^1 f''(sx+x_0) ds.$$

Mamy $z = \theta_e + \varphi(y_e v_d)$, a zatem

$$\sin \theta_e = \sin(z - \varphi(y_e v_d)) = \sin(-\varphi(y_e v_d)) + z \underbrace{\int_0^1 \cos(sz - \varphi(y_e v_d)) ds}_{\eta}.$$

— Korzystając z tego obliczamy

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 &= x_e(-v + v_d \cos \theta_e) - y_e v_d \sin \phi(y_e v_d) + y_e z \eta v_d + \\ &+ \frac{1}{\gamma}z \left(w_d - w + \varphi'(y_e v_d) \left(-w x_e v_d + v_d^2 \sin \theta_e + y_e \dot{v}_d \right) \right) = \\ &= x_e(-v + v_d \cos \theta_e) - y_e v_d \sin \phi(y_e v_d) + \frac{1}{\gamma}z \left(\gamma y_e \eta v_d + \right. \\ &\quad \left. + w_d - (1 + \varphi'(y_e v_d)x_e v_d) w + \varphi' \left(v_d^2 \sin \theta_e + y_e \dot{v}_d \right) \right).\end{aligned}$$

— W celu zapewnienia ujemności pochodnej \dot{V}_2 wybieramy sterowania v i w w taki sposób, by spełniały zależności

$$\begin{cases} -v + v_d \cos \theta_e = -c_1 x_e \\ -(1 + \varphi'(y_e v_d) x_e v_d) w + \gamma y_e \eta v_d + w_d + \\ + \varphi'(v_d^2 \sin \theta_e + y_e \dot{v}_d) = -c_2 z \end{cases},$$

dla dodatnich współczynników c_1 i c_2 . Po ich rozwikłaniu otrzymujemy

$$\begin{cases} v = c_1 x_e + v_d \cos \theta_e \\ w = \frac{1}{1 + \varphi'(y_e v_d) x_e v_d} (c_2 z + \gamma y_e \eta v_d + w_d + \varphi'(v_d^2 \sin \theta_e + y_e \dot{v}_d)) \end{cases}$$

oraz

$$\dot{V}_2 = -c_1 x_e^2 - \underbrace{y_e v_d \sin \phi(y_e v_d)}_{>0} - c_2 z^2 < 0.$$

Dla dokończenia analizy zauważamy, że z tego że $\dot{V}_2 < 0$ wynika, że funkcja V_2 jest ograniczona, a zatem zmienne x_e , y_e i z są ograniczone. Co więcej, jeżeli trajektoria odniesienia $(v_d(t), w_d(t))$ jest ograniczona wraz z pochodną rzędu pierwszego względem czasu, to także sterowania $v(t)$, $w(t)$ i pochodne \dot{x}_e , \dot{y}_e i $\dot{\theta}_e$ będą ograniczone. Wyciągamy z tego wniosek, że druga pochodna \ddot{V}_2 jest ograniczona. Funkcja V_2 ma granicę, funkcja \ddot{V}_2 jest ograniczona, zatem, na mocy Lemat Barbalata, mamy $\dot{V}_2 \rightarrow 0$, tzn. $(x_e(t), y_e(t) v_d(t) \sin \phi(y_e(t) v_d(t)), \theta_e(t)) \rightarrow 0$. Przy odpowiednich założeniach na trajektorię odniesienia umożliwia to wykazanie, że także $y_e(t) \rightarrow 0$.

11.5. Odniesienia literaturowe

Układy w postaci łańcuchowej odgrywają w geometrycznej teorii sterowania szczególną rolę, zarówno z teoretycznego punktu widzenia (tzw. postać normalna Goursat), jak i ze względu na istnienie dla nich algorytmów sterowania, zob. [JN99, MZS94], rozdział 8, [Kha00], rozdział 14 lub [Sas99], rozdział 12. Twierdzenie Murraya można znaleźć w tym rozdziale, albo w rozdziale 9 pracy [Sas99]. Przykład 11.4.1 pochodzi z [MLS94], Przykład 11.4.2 pochodzi z monografii [Kha00], natomiast Przykład 11.4.3 jest rekonstrukcją opartą na [JN97]. Czytelnikowi zainteresowanemu rozszerzeniem wiedzy na temat metody całkowania wstecznego polecamy monografię [KKK95].

Literatura

- [JN97] Z.-P. Jiang, H. Nijmeijer. Tracking control of mobile robots: A case study in backstepping. *Automatica*, 33(7):1393–1399, 1997.
- [JN99] Z.-P. Jiang, H. Nijmeijer. A recursive technique for tracking control of nonholonomic systems in chained form. *IEEE Trans. Automat. Control*, 44(2):265–279, 1999.
- [Kha00] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall, New Jersey, 2000.
- [KKK95] M. Krstić, I. Kanellakopoulos, P. Kokotović. *Nonlinear and Adaptive Control Design*. J. Wiley, New York, 1995.
- [MLS94] R. Murray, Z. Li, S. S. Sastry. *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. CRC Press, Boca Raton, 1994.
- [MZS94] R. Murray, Li Zexiang, S. Sastry. *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. CRC Press, Boca Raton, 1994.
- [Sas99] S. S. Sastry. *Nonlinear Systems*. Springer, New York, 1999.

Rozdział 12

Dynamiczne sprzężenie zwrotne, linearyzacja

12.1. Motywacja

Zajmijmy się ponownie kinematyka monocykla o współrzędnych $q = (x, y, \theta)^T$,

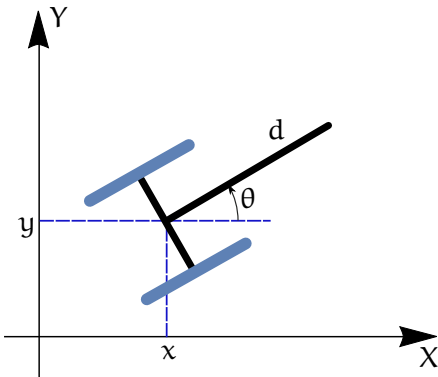
$$\begin{cases} \dot{x} = u_1 \cos \theta \\ \dot{y} = u_1 \sin \theta \\ \dot{\theta} = u_2 \end{cases} .$$

Założmy, że chcemy sterować położeniem końca dyszla o długości d przymocowanego do monocykla, jak pokazano na rysunku 12.1. Funkcja wyjścia układu ma zatem postać

$$\begin{cases} y_1 = x + d \cos \theta \\ y_2 = y + d \sin \theta \end{cases} .$$

Zbadajmy możliwość odsprzężenia wejściowo-wyjściowego układu. W tym celu różniczkujemy

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \dot{x} - d\dot{\theta} \sin \theta = u_1 \cos \theta - u_2 d \sin \theta, \\ \dot{y}_2 = \dot{y} + d\dot{\theta} \cos \theta = u_1 \sin \theta + u_2 d \cos \theta, \end{cases}$$



Rysunek 12.1: Monocykl z dyszlem

czyli

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -d \sin \theta \\ \sin \theta & d \cos \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = D(q)u = v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Stopnie różniczkowe obu wyjść są równe $\rho_1 = \rho_2 = 1$, a jeżeli $\det D(q) = d \neq 0$, układ jest odsprzęgalny. Ponieważ $\rho_1 + \rho_2 = 2 < 3$, pojawi się dynamika zerowa. Aby ją opisać, wprowadźmy nowe współrzędne

$$\begin{cases} \xi_1 = y_1 \\ \xi_2 = y_2 \\ \xi_3 = \theta \end{cases}.$$

W nowych współrzędnych równania układu wyglądają następująco

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \dot{y}_1 = v_1 \\ \dot{\xi}_2 = \dot{y}_2 = v_2 \\ \dot{\xi}_3 = \dot{\theta} = u_2 = -\frac{1}{d}v_1 \sin \theta + \frac{1}{d}v_2 \cos \theta \end{cases}.$$

Założenie, że $y_1(t) = 0$ i $y_2(t) = 0$ wymaga wyzerowania współrzędnych ξ_1, ξ_2 , a także wejść v_1 i v_2 . W konsekwencji, dynamika zerowa ma postać

$$\dot{\xi}_3 = 0,$$

zatem jest ograniczona. Jeżeli zadanie sterowania polega na śledzeniu zadanej trajektorii $(x_d(t), y_d(t))$, to algorytm śledzenia może mieć postać regulatora typu P (proporcjonalnego) ze sprzężeniem wyprzedzającym, tzn.

$$\begin{cases} v_1 = \dot{x}_d - k_1(x - x_d) \\ v_2 = \dot{y}_d - k_2(y - y_d) \end{cases}.$$

Jak widać, procedura odsprzęgania i (częściowej) linearyzacji modelu monocykla przez sprzężenia zwrotne powiedzie się, pod warunkiem że sterujemy punktem mieszczącym się w pewnej odległości d od środka tylnej osi. Zbadajmy jednak dokładniej przypadek $d = 0$, a więc funkcję wyjścia

$$\begin{cases} y_1 = x \\ y_2 = y \end{cases}.$$

Mamy wtedy

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = u_1 \cos \theta \\ \dot{y}_2 = u_1 \sin \theta \end{cases},$$

macierz odsprężania jest osobliwa i procedura odsprężania nie ma zastosowania. Niezrażeni tym zróżniczkujmy funkcję wyjścia jeszcze raz, zakładając, że funkcja sterująca jest różniczkowalna

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 = \dot{u}_1 \cos \theta - u_1 \dot{\theta} \sin \theta = \dot{u}_1 \cos \theta - u_1 u_2 \sin \theta \\ \ddot{y}_2 = \dot{u}_1 \sin \theta + u_1 \dot{\theta} \cos \theta = \dot{u}_1 \sin \theta + u_1 u_2 \cos \theta \end{cases}.$$

Założmy teraz, że u_1 w powyższych wzorach nie oznacza już sterowania, ale zmienną stanu, natomiast jako sterowania weźmy $w_1 = \dot{u}_1$ i $w_2 = u_2$. Mamy wtedy

$$\begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -u_1 \sin \theta \\ \sin \theta & u_1 \cos \theta \end{bmatrix} w = D(q, u_1)w.$$

Przy założeniu, że $u_1 \neq 0$ macierz $D(q, u_1)$ staje się macierzą odsprężania. Po zastosowaniu sprzężenia zwrotnego $v = D(q, u_1)w$ uzyskujemy odsprężoną zależność wejście-wyjście

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 = v_1 \\ \ddot{y}_2 = v_2 \end{cases}.$$

Okazuje się, że po rozszerzeniu przestrzeni stanu monocykła o zmienną u_1 i dodaniu do równań monocykła równania $\dot{u}_1 = w_1$ układ

$$\begin{cases} \dot{x} = u_1 \cos \theta \\ \dot{y} = u_1 \sin \theta \\ \dot{\theta} = w_2 \\ \dot{u}_1 = w_1 \end{cases}$$

z wyjściem

$$\begin{cases} y_1 = x \\ y_2 = y \end{cases}$$

można odsprząc i zlinearyzować przez sprzężenie zwrotne $\xi = \varphi(x) = (y_1, \dot{y}_1, y_2, \dot{y}_2)^T$, $v = D^{-1}(q, u_1)w$, nadając mu postać

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_1 \\ \dot{\xi}_2 = v_1 \\ \dot{\xi}_3 = \xi_4 \\ \dot{\xi}_4 = v_2 \end{cases},$$

ważną w obszarze $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} - \{0\}$. Sprzężenie zwrotne wykorzystujące rozszerzenie układu o dodatkową część dynamiczną nazywa się dynamicznym sprzężeniem zwrotnym; sprzężenie zwrotne bez podukładu dynamicznego nazywamy statycznym. Równania kinematyki poruszającego

się ($u_1 \neq 0$) monocykła z $d = 0$ są zatem linearyzowalne przez dynamiczne sprzężenie zwrotne, ale nie są linearyzowalne przez sprzężenie statyczne. Dowodzi to, że dynamiczne sprzężenie zwrotne jest silniejszym narzędziem od statycznego. W następnym rozdziale wprowadzimy pojęcie dynamicznego sprzężenia zwrotnego w sposób formalny.

12.2. Dynamiczne sprzężenie zwrotne

Niech będzie dany afiniczny układ sterowania

$$\sigma: \dot{x} = f(x(t)) + g(x(t))u(t) = f(x(t)) + \sum_{i=1}^m g_i(x(t))u_i(t), \quad (12.1)$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$. Do układu (12.1) dołączamy kompensator dynamiczny

$$\kappa: \begin{cases} \dot{z} = F(x(t), z(t)) + G(x(t), z(t))w \\ u = H(x, z) + K(x, z)w \end{cases}, \quad (12.2)$$

$z \in \mathbb{R}^q$, $w \in \mathbb{R}^m$. Zmienną z nazywamy stanem kompensatora, wymiar przestrzeni stanu kompensatora wynosi q . Połączenie układu (12.1) i kompensatora (12.2) daje układ sterowania

$$\begin{aligned} (\sigma + \kappa): \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f(x(t)) + g(x(t))H(x(t), z(t)) \\ F(x(t), z(t)) \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} g(x(t))K(x(t), z(t)) \\ G(x(t), z(t)) \end{bmatrix} w = \Phi(x(t), z(t)) + \Psi(x(t), z(t))w. \end{aligned} \quad (12.3)$$

Niech będzie dany układ sterowania

$$\sigma': \dot{\xi} = F(\xi(t)) + G(\xi(t))v.$$

Przyjmujemy następującą definicję równoważności przez dynamiczne sprzężenie zwrotne.

Definicja 12.2.1 *Układ σ jest równoważny przez dynamiczne sprzężenie zwrotne układowi σ' , $\sigma \cong_{DF} \sigma'$, jeżeli istnieje kompensator dynamiczny κ i statyczne sprzężenie zwrotne*

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x, z) \\ w = \alpha(x, z) + \beta(x, z)v \end{cases},$$

takie że

$$(\sigma + \kappa) \underset{F}{\cong} \sigma'.$$

Jeżeli dyfeomorfizm $\varphi(x, z)$ jest lokalny, mówimy o lokalnej równoważności przez dynamiczne sprzężenie zwrotne.

Układ σ nazywamy linearyzowalnym przez dynamiczne sprzężenie zwrotne (dynamicznie linearyzowalnym), jeżeli σ' jest układem liniowym i zachodzi $\sigma \cong_{DF} \sigma'$.

12.3. Twierdzenia o dynamicznej linearyzacji

Intuicje, jakie mogliśmy nabyć analizując przykłady odsprzęgania i linearyzacji z dodatkiem całkowań w torze sterowania podpowiadają, że istota linearyzacji przez dynamiczne sprzężenie zwrotne polega na wzajemnym „przesunięciu” względem siebie poszczególnych sterowań działających na układ. Możemy przyjąć, że takie przesunięcie jest realizowane przez całkowanie sterowań. Zatem, jeżeli wejście/sterowanie jest tylko jedno, dynamiczne sprzężenie zwrotne nie powinno przynosić żadnego efektu. Jest tak istotnie, jak orzeka następujące Twierdzenie.

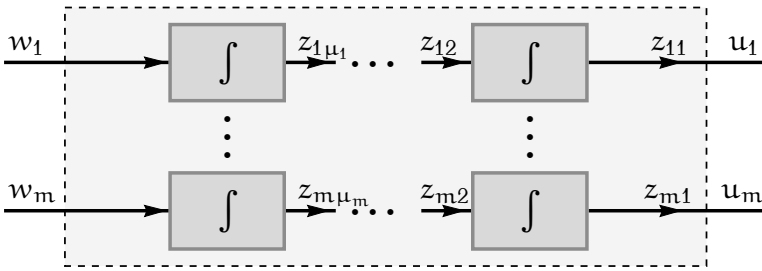
Twierdzenie 12.3.1 *Jeżeli liczba wejść układu $m = 1$, to układ jest linearyzowalny przez dynamiczne sprzężenie zwrotne wtedy i tylko wtedy, gdy jest statycznie linearyzowalny.*

Drugi wynik podaje warunek konieczny linearyzacji dynamicznej. Ponieważ układ linearyzowalny statycznie jest linearyzowalny dynamicznie, jak wiemy, jest to także konieczne dla statycznej linearyzacji.

Twierdzenie 12.3.2 *Jeżeli układ jest linearyzowalny przez dynamiczne sprzężenie zwrotne w otoczeniu punktu równowagi, to jego przybliżenie liniowe w tym punkcie jest sterowalne.*

12.3.1. Kompensator Brunowskiego

Rzut oka na zadanie dynamicznej linearyzacji pozwala odnieść wrażenie, że zadanie to musi być znacznie bardziej złożone od zadania linearyzacji przez statyczne sprzężenie zwrotne, ponieważ przy linearyzacji dynamicznej należy zaprojektować kompensator, a następnie zlinearyzować układ wraz z kompensatorem. Okazuje się, że zadanie wyboru i linearyzacji kompensatora można rozwiązać w sposób dość arbitralny proponując kompensator liniowy w postaci kanonicznej Brunowskiego. Dla układu (12.1) wybieramy zestaw liczb całkowitych $0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_m$. Ich suma wyznacza wymiar przestrzeni stanu kompensatora, $q = \sum_{i=1}^m \mu_i$. Kompensator Brunowskiego jest szczególnym przypad-



Rysunek 12.2: Kompensator Brunowskiego

kiem układu (12.2), zdefiniowanym w następujący sposób (zobacz rysunek 12.2):

$$\begin{cases} \dot{z}_{11} = z_{12}, \dot{z}_{12} = z_{13}, \dots, \dot{z}_{1, \mu_1} = w_1, & u_1 = z_{11}, \\ \dot{z}_{21} = z_{22}, \dot{z}_{22} = z_{23}, \dots, \dot{z}_{2, \mu_2} = w_2, & u_2 = z_{21}, \\ \vdots & \\ \dot{z}_{m1} = z_{m2}, \dot{z}_{m2} = z_{m3}, \dots, \dot{z}_{m, \mu_m} = w_m, & u_m = z_{m1}. \end{cases}$$

Z definicji kompensatora Brunowskiego wynika, że $u_1^{(\mu_1)} = w_1$, $u_2^{(\mu_2)} = w_2, \dots$, $u_m^{(\mu_m)} = w_m$, a zatem nowe sterowania są całkowane odpowiednio $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ razy. Zauważmy także, że dynamika kompensatora Brunowskiego nie zależy od zmiennych stanu układu (12.1), co nadaje mu cechę pewnej uniwersalności. Liczby μ_i są ułożone w porządku rosnącym; jeżeli więc pewne $\mu_j = 0$, to wszystkie μ_i poprzedzające μ_j są także równe zero. $\mu_j = 0$ oznacza, że sterowanie w_j nie jest całkowane, czyli $u_j = w_j$. Rozważmy układ (12.1) i wybierzmy kompensator Brunowskiego opisany liczbami $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$. Zdefiniujmy dystrybucje

$$\Delta_0 = \text{span}_{C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})} \{g_k | \mu_k = 0\}, \quad \Delta_{i+1} = \Delta_i + \text{ad}_f \Delta_i + \text{span}_{C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})} \{g_k | \mu_k = i + 1\}.$$

Warunki wystarczające linearyzacji przez dynamiczne sprzężenie zwrotne podaje następujące Twierdzenie.

Twierdzenie 12.3.3 (Charlet-Lévine-Marino) Układ

$$\sigma : \dot{x} = f(x(t)) + g(x(t))u(t) = f(x(t)) + \sum_{i=1}^m g_i(x(t))u_i(t),$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, jest linearyzowalny przez dynamiczne sprzężenie w pewnym otoczeniu punktu równowagi $x_0 = 0$, jeżeli

1. $\dim \Delta_{n+\mu_m-1}(0) = n$,

2. dystrybucje Δ_i , $i = 0, 1, \dots, n + \mu_m - 2$ mają w pewnym otoczeniu 0 stały wymiar i są inwolutywne,
3. w pewnym otoczeniu zera zachodzi $[g_j, \Delta_i] \subset \Delta_{i+1}$, dla $j = 1, 2, \dots, m$, $\mu_j \geq 1$, $i = 0, 1, \dots, n + \mu_m - 2$.

W przypadku, gdy $i \geq \mu_m$, ostatni składnik w dystrybucji Δ_{i+1} jest równy zeru. Zauważmy, że jeżeli $\mu_m = 0$ (a więc wszystkie $\mu_j = 0$), warunek dynamicznej linearyzowalności pokrywa się z warunkiem linearyzowalności przez statyczne sprzężenie zwrotne.

12.4. Płaskość różniczkowa

W rozdziale poświęconym odsprężaniu wejściowo-wyjściowemu i linearyzacji zauważyliśmy (Spostrzeżenie 10.3.1), że jeżeli stopnie różniczkowe poszczególnych wyjść układu sumują się do wymiaru jego przestrzeni stanu, to istnieje sprzężenie zwrotne (φ, α, β) , zależne wyłącznie od pochodnych wyjść względem czasu, które linearyzuje układ. Można zatem powiedzieć, że zarówno zmienne stanu, jak i sterowania w nowym układzie zależą od dżetów wyjść. To spostrzeżenie leży u podstaw pojęcia układu różniczkowo płaskiego, które definiujemy w następujący sposób.

Definicja 12.4.1 *Układ afiniczny*

$$\sigma: \dot{x} = f(x(t)) + g(x(t))u = f(x(t)) + \sum_{i=1}^m g_i(x(t))u_i(t),$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, nazywamy różniczkowo płaskim, jeżeli istnieją funkcje

$$y_i = h_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

zwane wyjściami płaskimi, takie że prawie wszędzie, być może poza pewnymi punktami osobliwymi, zmienne stanu i sterowania układu σ można wyrazić jako pewne funkcje zależne od płaskich wyjść i ich pochodnych, tzn,

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(y, \dot{y}, \dots, y^{(r_i)}), \quad i = 1, 2, \dots, n \\ u_j &= u_j(y, \dot{y}, \dots, y^{(s_j)}), \quad j = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Podstawową własnością układów różniczkowo płaskich jest linearyzowalność prawie wszędzie przez dynamiczne sprzężenie zwrotne. Ponieważ nie ma łatwo sprawdzalnych warunków koniecznych i wystarczających różniczkowej płaskości, przy ustalaniu płaskości najczęściej wykorzystujemy bezpośrednio warunek zawarty w definicji. Można pokazać,

że kinematyka robotów mobilnych, takich jak monocykl, samochód kinematyczny, a także samochód z przyczepami jest różniczkowo płaska. Podobnie można wykazać płaskość układów w postaci łańcuchowej. Mianowicie, niech będzie dany układ w postaci łańcuchowej

$$\dot{x}_1 = u_1, \dot{x}_2 = u_2, \dot{x}_3 = x_2 u_1, \dots, \dot{x}_n = x_{n-1} u_1.$$

Jako wyjścia płaskie weźmiemy $y_1 = x_1$ i $y_2 = x_n$. Obliczamy

$$\begin{aligned} x_1 = y_1, x_n = y_2, u_1 = \dot{x}_1 = \dot{y}_1, x_{n-1} &= \frac{\dot{x}_n}{u_1} = \frac{\dot{y}_2}{\dot{y}_1}, \\ x_{n-2} = \frac{\dot{x}_{n-1}}{u_1} &= \frac{\ddot{y}_2 \dot{y}_1 - \dot{y}_2 \ddot{y}_1}{\dot{y}_1^3}, \dots, u_2 = \dot{x}_2. \end{aligned}$$

Wynika stąd, że układ w postaci łańcuchowej jest różniczkowo płaski, pod warunkiem że $\dot{y}_1 = u_1 \neq 0$. Układem, który nie jest różniczkowo płaski jest kinematyka toczącej się kuli. Warto podkreślić, że po wykazaniu różniczkowej płaskości układu konstrukcja linearyzującego sprzężenia zwrotnego jest dość naturalna. Zobaczmy to dokładniej na Przykładach 12.5.2 i 12.5.3.

12.5. Przykłady

Przykład 12.5.1 Niech będzie dany afiniczny układ sterowania

$$\sigma : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u_2 \\ \dot{x}_3 = u_1 \\ \dot{x}_4 = x_3 - x_3 u_2 \end{cases}.$$

Układ jest opisany przez trzy pola wektorowe: $f(x) = (x_2, 0, 0, x_3)^T$ oraz $g_1(x) = e_3$ i $g_2(x) = e_2 - x_3 e_4$; e_i oznacza i -ty wektor bazowy w \mathbb{R}^4 . Zbadamy możliwość linearyzacji tego układu przez statyczne lub dynamiczne sprzężenie zwrotne. Dla kompletności zaczniemy od sprawdzenia warunku koniecznego linearyzowalności. Łatwo widać, że $u = 0$ i $x_0 = 0$ jest punktem równowagi układu σ . Przybliżenie liniowe

$$A = \frac{\partial f(0)}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = [g_1(0), g_2(0)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nietrudno sprawdzić, że rząd macierzy Kalmana

$$\text{rank} [B, AB, A^2B, A^3B] = \text{rank}[B, AB] = 4,$$

przybliżenie liniowe jest sterowalne, a zatem warunek konieczny linearyzowalności jest spełniony. Stawiamy teraz pytanie o linearyzowalność przy pomocy statycznego sprzężenia zwrotnego. Obliczamy

$$\mathcal{D}^0 = \underset{C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}{\text{span}} \{g_1, g_2\} = \underset{C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}{\text{span}} \{e_3, e_2 - x_3 e_4\}, \dim \mathcal{D}^0(x) = 2.$$

Dystrybucja \mathcal{D}^0 ma stały wymiar w dowolnym punkcie $x \in \mathbb{R}^4$. Obliczmy teraz nawias Liego

$$g_{12}(x) = [g_1, g_2](x) = Dg_2(x)g_1(x) - Dg_1(x)g_2(x) = -e_4 \notin \mathcal{D}^0.$$

Ponieważ dystrybucja \mathcal{D}^0 nie jest inwolutywna, układ σ nie jest linearyzowalny przez statyczne sprzężenie zwrotne. Zaczynamy od wyboru kompensatora Brunowskiego; niech $\mu_1 = 0$ i $\mu_2 = 1$. Mamy zatem $q = 1$ i $n = 4$. Obliczamy dystrybucje

$$\Delta_0 = \underset{C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}{\text{span}} \{g_1\} = \underset{C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}{\text{span}} \{e_3\}.$$

Oczywiście Δ_0 ma stały wymiar $= 1$ i jest inwolutywna. Z kolei wyznaczamy

$$\Delta_1 = \Delta_0 + \text{ad}_f \Delta_0 + \underset{C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}{\text{span}} \{g_2\}.$$

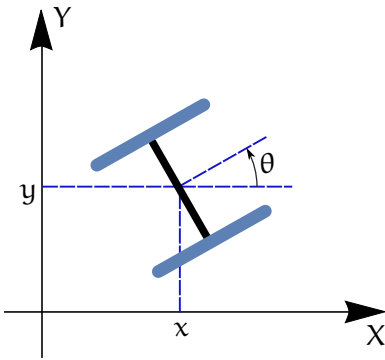
Ponieważ $\Delta_1 = \text{span}_{C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})} \{e_3, e_4, e_2 - x_3 e_4\} = \text{span}_{C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})} \{e_2, e_3, e_4\}$, dystrybucja Δ_1 jest także stałego wymiaru ($= 3$) i inwolutywna. Następnie obliczamy

$$\Delta_2 = \Delta_1 + \text{ad}_f \Delta_1 = \underset{C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}{\text{span}} \{e_1, e_2, e_3, e_4\}.$$

Dystrybucja Δ_2 ma stały wymiar 4 równy wymiarowi przestrzeni stanu układu. Wynika stąd, że dystrybucja $\Delta_4 = \Delta_3 = \Delta_2$, czyli warunki nr 1 i 2 Twierdzenia 12.3.3 są spełnione. Pozostało sprawdzenie warunku nr 3, czyli pokazanie, że

$$[g_2, \Delta_0] \subset \Delta_1, [g_2, \Delta_1] \subset \Delta_2, [g_2, \Delta_2] \subset \Delta_3.$$

W istocie sprawdzenia wymaga tylko pierwszy spośród nich, co wynika z tego, że $[g_2, g_1] = e_4 \in \Delta_1$. Ponieważ wszystkie warunki linearyzowalności przez dynamiczne sprzężenie zwrotne są spełnione, układ σ jest dynamicznie linearyzowalny. Przykład ten pokazuje, że klasa układów dynamicznie linearyzowalnych jest szersza od klasy układów linearyzowalnych statycznie.



Rysunek 12.3: Monocykl

Przykład 12.5.2 Zajmijmy się zbadaniem różniczkowej płaskości modelu kinematyki monocykla opisanego współzrędnymi $q = (x, y, \theta)^T$, cf. rysunek 12.3,

$$\begin{cases} \dot{x} = u_1 \cos \theta \\ \dot{y} = u_1 \sin \theta \\ \dot{\theta} = u_2 \end{cases} .$$

Wybieramy wyjścia płaskie $y_1 = x$, $y_2 = y$ i obliczamy

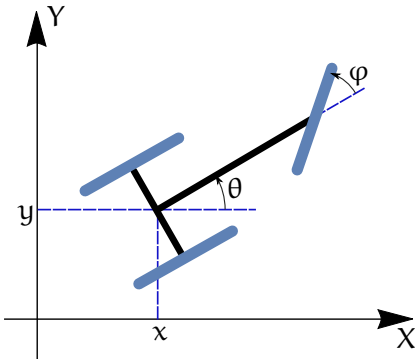
$$x = y_1, \quad y = y_2, \quad \theta = \arctg \frac{\dot{y}_2}{\dot{y}_1}, \quad u_1 = \pm \sqrt{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2}, \quad u_2 = \dot{\theta} = \frac{\dot{y}_2 \dot{y}_1 - \dot{y}_2 \ddot{y}_1}{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2},$$

co dowodzi różniczkowej płaskości monocykla, poza osobliwością $u_1 = 0$. W celu wyznaczenia linearyzującego sprzężenia zwrotnego zauważamy, że zmienne stanu monocykla zostały wyrażone za pomocą wyjść płaskich i ich pochodnych do rzędu 1. Z tego powodu nowe współrzędne definiujemy jako

$$\begin{cases} \xi_1 = y_1 \\ \xi_2 = \dot{y}_1 \\ \xi_3 = y_2 \\ \xi_4 = \dot{y}_2 \end{cases} .$$

Równania monocykla w tych współzrędnym są następujące

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = \ddot{y}_1 = \dot{u}_1 \cos \theta - u_1 u_2 \sin \theta = w_1 \cos \theta - u_1 w_2 \sin \theta \\ \dot{\xi}_3 = \xi_4 \\ \dot{\xi}_4 = \ddot{y}_2 = \dot{u}_1 \sin \theta + u_1 u_2 \cos \theta = w_1 \sin \theta + u_1 w_2 \cos \theta \end{cases} .$$



Rysunek 12.4: Samochód kinematyczny

Wynika z nich, że do równań monocykla należy dołączyć kompensator dynamiczny

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = w_1 \\ u_2 = w_2 \end{cases}$$

i zastosować sprzężenie zwrotne

$$\begin{cases} v_1 = w_1 \cos \theta - u_1 w_2 \sin \theta \\ v_2 = w_1 \sin \theta + u_1 w_2 \cos \theta \end{cases},$$

które sprowadzi model kinematyki monocykla do układu liniowego

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = v_1 \\ \dot{\xi}_3 = \xi_4 \\ \dot{\xi}_4 = v_2 \end{cases}.$$

Sprzężenie to jest dobrze określone w zbiorze stanów układu z kompensatorem $(q, u_1) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} - \{0\}$. Dyfeomorfizm przestrzeni stanu ma postać

$$\xi = \varphi(q, u_1) = \begin{pmatrix} x \\ u_1 \cos \theta \\ y \\ u_1 \sin \theta \end{pmatrix}.$$

Przykład 12.5.3 Nieco bardziej złożonym układem jest model kinematyki samochodu kinematycznego przedstawionego na rysunku 12.4. Wektor zmiennych stanu samochodu kinematycznego $q = (x, y, \theta, \varphi)^T$.

Model kinematyki przyjmujemy w postaci

$$\begin{cases} \dot{x} = u_1 \\ \dot{y} = u_1 \operatorname{tg} \theta \\ \dot{\theta} = u_1 \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \theta} \\ \dot{\varphi} = u_2 \end{cases},$$

ważny przy ograniczeniu $|\theta|, |\varphi| < \pi/2$. Jako wyjścia płaskie bierzemy, jak w poprzednim przykładzie,

$$\begin{cases} y_1 = x \\ y_2 = y \end{cases}.$$

Obliczamy

$$\begin{aligned} x = y_1, \quad y = y_2, \quad u_1 = \dot{y}_1, \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{\dot{y}_2}{\dot{y}_1}, \quad \dot{\theta} = \frac{\ddot{y}_2 \dot{y}_1 - \dot{y}_2 \ddot{y}_1}{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2} = \dot{y}_1 \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \theta}, \\ \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\ddot{y}_2 \dot{y}_1 - \dot{y}_2 \ddot{y}_1}{\dot{y}_1 (\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2)} \cos \theta (\dot{y}_1, \dot{y}_2), \quad u_2 = \dot{\varphi} (\dot{y}_1, \ddot{y}_1, y_1^{(3)}, \dot{y}_2, \ddot{y}_2, y_2^{(3)}). \end{aligned}$$

Z przedstawionych obliczeń wynika, że dla $u_1 \neq 0$ kinematyka samochodu kinematycznego jest różniczkowo płaska. Wyprowadzimy teraz postać sprzężenia zwrotnego. Ponieważ $q = q(y_1, \dot{y}_1, \ddot{y}_1, y_2, \dot{y}_2, \ddot{y}_2)$ wybierzemy nowe współrzędne jako

$$\begin{cases} \xi_1 = y_1 \\ \xi_2 = \dot{y}_1 = u_1 \\ \xi_3 = \ddot{y}_1 = \dot{u}_1 \\ \xi_4 = y_2 \\ \xi_5 = \dot{y}_2 = u_1 \operatorname{tg} \theta \\ \xi_6 = \ddot{y}_2 = \dot{u}_1 \operatorname{tg} \theta + u_1^2 \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos^3 \theta} \end{cases}.$$

Równania samochodu kinematycznego w nowych współrzędnych są następujące:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = \xi_3 \\ \dot{\xi}_3 = \ddot{u}_1 \\ \dot{\xi}_4 = \xi_5 \\ \dot{\xi}_5 = \xi_6 \\ \dot{\xi}_6 = \ddot{u}_1 \operatorname{tg} \theta + \dot{u}_1 \frac{u_1 \operatorname{tg} \varphi}{\cos^3 \theta} + \frac{(2\dot{u}_1 u_1 \operatorname{tg} \varphi + u_2 \frac{u_1^2}{\cos^2 \varphi}) \cos^3 \theta + \frac{3}{2} u_1^3 \sin 2\theta \operatorname{tg}^2 \varphi}{\cos^6 \theta} \end{cases}.$$

Wprowadzamy dwuwymiarowy kompensator dynamiczny

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \eta \\ \dot{\eta} = w_1 \\ u_2 = w_2 \end{cases}$$

i sprzężenie zwrotne

$$\begin{cases} v_1 = w_1 \\ v_2 = \eta \frac{u_1 \operatorname{tg} \varphi}{\cos^3 \theta} + \frac{2\eta u_1 \operatorname{tg} \varphi \cos^3 \theta + \frac{3}{2} u_1^3 \sin 2\theta \operatorname{tg}^2 \varphi}{\cos^3 \theta} + w_1 \operatorname{tg} \theta + w_2 \frac{u_1^2}{\cos^2 \varphi \cos^3 \theta} \end{cases}.$$

Po linearyzacji dynamicznej kinematyka samochodu kinematycznego ma postać układu liniowego

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = \xi_3 \\ \dot{\xi}_3 = v_1 \\ \dot{\xi}_4 = \xi_5 \\ \dot{\xi}_5 = \xi_6 \\ \dot{\xi}_6 = v_2 \end{cases}.$$

Linearyzacja jest możliwa w obszarze zmiennych stanu układu z kompensatorem $(q, u_1, \eta) \in \mathbb{R}^2 \times (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})^2 \times (\mathbb{R} - \{0\}) \times \mathbb{R}$. Dyfeomorfizm przestrzeni stanu jest zadany wzorem

$$\xi = \varphi(q, u_1, \eta) = \begin{pmatrix} x \\ u_1 \\ \eta \\ y \\ u_1 \operatorname{tg} \theta \\ \eta \operatorname{tg} \theta + \frac{u_1^2 \operatorname{tg} \varphi}{\cos^3 \theta} \end{pmatrix}.$$

12.6. Odniesienia literaturowe

Warunki dynamicznej linearyzacji za pomocą kompensatora Brunowskiego, a także Przykład 12.5.1 pochodzą z artykułu [CLM91]. Nietypowość takiej linearyzacji badano w pracy [Tch94]. Dynamiczną linearyzację modelu silnika indukcyjnego uwzględniającego strumień magnetyczny opisano w pracy [Chi93]. Pojęcie różniczkowej płaskości omówiono gruntownie w artykule [FLR95]. Rozwój teorii i zastosowań układów różniczkowo płaskich, głównie w kontekście linearyzacji dynamicznej, ilustrują monografie [SRA04, Lév09].

Literatura

- [Chi93] J. Chiasson, Dynamic feedback linearization of the induction motor. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 38(10):1588–1594, 1993.
- [CLM91] B. Charlet, J. Lévine, R. Marino, Sufficient conditions for dynamic feedback linearization. *SIAM J. Contr. Opt.*, 29(1):38–57, 1991.
- [FLR95] M. Fliess, J. Lévine, P. Rouchon, Flatness and defect of nonlinear systems: Introductory theory and examples. *Int. J. Control*, 61:1327–1361, 1995.
- [Lév09] J. Lévine, *Analysis and Control of Nonlinear Systems*. Springer, 2009.
- [SRA04] H. Sira-Ramirez, S. K. Agrawal, *Differentially Flat Systems*. M. Dekker, New York, 2004.
- [Tch94] K. Tchoń, Towards robustness and genericity of dynamic feedback linearization. *J. Math. Syst., Estim. Control*, 4(2):165–180, 1994.

Rozdział 13

Ograniczenia sprzężenia zwrotnego

W ostatnim rozdziale tych notatek przedstawimy pewne ograniczenia stosowalności sprzężenia zwrotnego do syntezy algorytmów sterowania układów nieliniowych. Punktem odniesienia będą układy liniowe.

13.1. Układy liniowe

Niech będzie dany liniowy układ sterowania

$$\sigma: \quad \dot{x} = Ax + Bu, \tag{13.1}$$

o m wejściach sterujących i n -wymiarowej przestrzeni stanu. Przypominamy, że układ σ jest stabilizowalny przez sprzężenie zwrotne, jeżeli istnieje liniowa funkcja $u = Kx$, taka że liniowy układ dynamiczny

$$\dot{x} = (A + BK)x$$

ma asymptotycznie stabilny punkt równowagi $x_0 = 0$. W rozdziale [0.2.3](#) sformułowaliśmy Spostrzeżenie [0.2.1](#), mówiące że warunkiem wystarczającym stabilizowalności układu liniowego jest sterowalność. Pokazaliśmy także, że ta własność wynika z bardziej ogólnego Twierdzenia o rozmieszczaniu biegunów [0.2.4](#). Sterowalność układu liniowego gwarantuje więc jego stabilizowalność. Okazuje się, że własność ta nie uogólnia się na nieliniowe układy sterowania.

13.2. Twierdzenie Brocketta

Rozważmy gładki układ sterowania

$$\dot{x} = f(x, u), \tag{13.2}$$

i niech $u = 0$, $x = x_0$ oznacza jego stan równowagi, tzn. $f(x_0, 0) = 0$. Układ ten nazywamy stabilizowalnym przez sprzężenie zwrotne, jeżeli istnieje

gładka funkcja $u = \alpha(x)$, $\alpha(x_0) = 0$, taka że punkt x_0 jest asymptotycznie stabilnym punktem równowagi układu dynamicznego

$$\dot{x} = f(x, \alpha(x)).$$

Następujące twierdzenie podaje warunek konieczny stabilizowalności układu (13.2).

Twierdzenie 13.2.1 (Brockett) *Załóżmy, że układ jest stabilizowalny i niech \mathcal{A} oznacza otoczenie x_0 . Wówczas obrazem odwzorowania*

$$\gamma : \mathcal{A} \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \gamma(x, u) = f(x, u),$$

jest pewne otwarte otoczenie punktu $0 \in \mathbb{R}^n$.

Mówimy, że Twierdzenie Brocketta definiuje przeszkodę do stabilizacji nieliniowego układu sterowania. Dla ilustracji, załóżmy, że układ (13.2) jest w postaci łańcuchowej

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 \\ \dot{x}_2 = u_2 \\ \dot{x}_3 = x_2 u_1 \end{cases}.$$

Mamy $\mathcal{A} = \mathbb{R}^3$ i $\gamma(u, x) = f(u, x) = (u_1, u_2, x_2 u_1)$. W celu uzyskania punktu $0 \in \mathbb{R}^3$ musimy założyć, że $u_1 = u_2 = 0$. Zauważmy jednak, że dowolnie bliski zera punkt postaci $(0, 0, \epsilon) \in \mathbb{R}^3$ nie należy do obrazu odwzorowania f . Oznacza to, że układ w postaci łańcuchowej nie jest stabilizowalny przez sprzężenie zwrotne. Zauważmy, że układ w postaci łańcuchowej jest sterowalny i pomimo to nie jest stabilizowalny. Podobny wynik można uzyskać dla każdego układu bezdryfowego, sterowalnego lub niesterowalnego. W tym celu weźmy układ

$$\dot{x} = g(x)u = \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i$$

i niech pola sterujące będą niezależne w punkcie x_0 . Bez utraty ogólności możemy założyć, że macierz $g(x)$ ma postać

$$\begin{bmatrix} \tilde{g}_1(x) \\ \tilde{g}_2(x) \end{bmatrix},$$

przy czym w otoczeniu punktu x_0 $\text{rank } \tilde{g}_1(x) = m$. Niech

$$\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{rank } \tilde{g}_1(x) = m\}.$$

Na zbiorze \mathcal{A} istnieje sprzężenie zwrotne $u = \tilde{g}^{-1}(x)v$ przekształcające układ bezdrowy do równoważnej postaci

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} I_m \\ h(x) \end{bmatrix} v.$$

Mamy $\gamma(v, x) = (v, h(x)v)$. Dla osiągnięcia punktu $0 \in \mathbb{R}^n$ musimy położyć $v = 0$. Jednak, o ile $m < n$, żaden punkt postaci $(0_m, ee_i)$, gdzie e_i jest wektorem jednostkowym w \mathbb{R}^{n-m} , nie należy do zbioru wartości odwzorowania γ . Układ bezdrowy spełniający warunek $m < n$ nie jest stabilizowalny przez sprzężenie zwrotne. Analogiczne rozumowanie prowadzi do wniosku, że dla układu afinicznego

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i$$

w którym pole dryfu należy do dystrybucji rozpiętej przez pola sterujące i $m < n$ również nie istnieje stabilizujące sprzężenie zwrotne. Warunek podany w Twierdzeniu 13.2.1 obowiązuje także wtedy, gdy zamiast gładkiego weźmiemy ciągle sprzężenie zwrotne $u = \alpha(x)$.

Warunek Brocketta okazał się jednym z kamieni milowych teorii sterowania i dał asumpt do rozwoju badań nad sprzężeniem zwrotnym niepodlegającym temu warunkowi, takim jak sprzężenie zwrotne zależne od stanu i czasu lub sprzężenie nieciągłe, a także do zadania stabilizacji praktycznej, w którym zamiast stabilności asymptotycznej żąda się by trajektoria układu zbliżała się do punktu równowagi w kontrolowany sposób.

13.3. Twierdzenie Lizárragi

Twierdzenie będące przedmiotem niniejszego podrozdziału jest odpowiednikiem Twierdzenia Brocketta dla zadania śledzenia trajektorii. W celu jego sformułowania rozważmy układ sterowania postaci

$$\dot{x} = f(x, u), \tag{13.3}$$

z ciągłą funkcją $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ i taką, że dla ustalonego $u \in \mathbb{R}^m$ pole wektorowe $f_u(x) = f(x, u)$ jest gładkie. Przyjmujemy, że dopuszczalne funkcje sterujące $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ są odcinkami ciągłe i że dla każdego sterowania $u(\cdot)$ i stanu początkowego x_0 istnieje trajektoria $x_u(t) = \Phi_t(x_0, u(\cdot))$ układu (13.3). Trajektorię odniesienia układu (13.3) będziemy nazywać trajektorią $y_v(t)$ spełniającą równanie $\dot{y}_v = f(y_v, v)$ dla pewnej funkcji

sterującej $v(\cdot) \in \mathcal{U}$. Powiemy, że układ (13.3) posiada ciągły stabilizator, jeżeli istnieje ciągła funkcja

$$u = \alpha(x, y, v, t),$$

spełniająca warunek $\alpha(y, y, v, t) = v$, taka że trajektoria $x_\alpha(t)$ zależnego od czasu układu dynamicznego

$$\begin{cases} \dot{x}_\alpha = f(x_\alpha, \alpha(x_\alpha, y, v, t)) \\ \dot{y}_v = f(y, v) \end{cases}$$

spełnia warunek $x_\alpha(t) \rightarrow_{t \rightarrow +\infty} y_v(t)$. Przedstawione niżej twierdzenie podaje warunek wystarczający nieistnienia ciągłego stabilizatora.

Twierdzenie 13.3.1 (Lizárraga) *Dla dekompozycji przestrzeni sterowań na sumę prostą podprzestrzeni*

$$\mathbb{R}^m = E_1 \oplus E_2$$

zdefiniujemy zbiory pól wektorowych

$$B_i = \{f_u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \mid u \in E_i\}, \quad i = 1, 2$$

i niech $\hat{B}_i(\cdot)$ oznacza najmniejszą algebrę Liego pól wektorowych zawierającą B_i . Załóżmy, że dla wprowadzonej dekompozycji istnieją podzbiory $S_1, S_2 \in \mathbb{R}^n$ spełniające warunki:

1. *S_i jest niezmiennicze ze względu na $\hat{B}_i(\cdot)$, co oznacza że trajektorie pól wektorowych należących do algebry Liego $\hat{B}_i(\cdot)$ zapoczątkowane w S_i pozostają w S_i ,*

2. *wymiar $\dim \hat{B}_i(p)$ przestrzeni rozpiętej przez pola z algebry Liego $\hat{B}_i(\cdot)$ jest stały w każdym punkcie $p \in S_i$,*

3. *istnieje punkt $q \in S_1 \cap S_2$, taki że suma przestrzeni rozpiętych przez algebry Liego $\hat{B}_i(\cdot)$ w tym punkcie jest równa sumie prostych tych przestrzeni i jest zawarta ale nie równa sumie przestrzeni stycznych do podzbiory S_i*

$$\hat{B}_1(q) + \hat{B}_2(q) = \hat{B}_1(q) \oplus \hat{B}_2(q) \subsetneq T_q S_1 + T_q S_2.$$

Wówczas nie istnieje ciągły stabilizator dla układu (13.3).

Z Twierdzenia Lizárragi wynika, że nie każdą dopuszczalną trajektorię odniesienia w nieliniowym układzie sterowania można śledzić z wykorzystaniem ciągłego sprzężenia zwrotnego zależnego od stanu układu,

trajektorii odniesienia i czasu. Dla ilustracji rozważmy układ w postaci łańcuchowej

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 \\ \dot{x}_2 = u_2 \\ \dot{x}_3 = x_2 u_1 \end{cases}$$

badany w poprzednim rozdziale. Przestrzeń sterowań \mathbb{R}^2 zdekomponujemy na sumę prostą $\mathbb{R}^2 = E_1 \oplus E_2$, gdzie $E_i = \text{span}_{\mathbb{R}}\{e_i\}$, $i = 1, 2$. Mamy

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x_2 \end{pmatrix} v \mid v \in \mathbb{R} \right\}, \quad B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} w \mid w \in \mathbb{R} \right\} = E_2$$

i, oczywiście, $\hat{B}_i(\cdot) = B_i$. Wybierzmy podrozmaitości $S_1 = S_2 = \mathbb{R}^3$. Warunek niezmienniczości jest spełniony w sposób trywialny. Obie podprzestrzenie $\hat{B}_i(p)$, $i = 1, 2$ są jednowymiarowe, co oznacza spełnienie warunku wymiaru. W końcu, dla punktu $q = 0 \in S_1 \cap S_2$ zachodzi

$$\hat{B}_1(0) + \hat{B}_2(0) = \hat{B}_1(0) \oplus \hat{B}_2(0) = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subsetneq T_0 S_1 + T_0 S_2 = \mathbb{R}^3.$$

Ponieważ warunki Twierdzenia 13.3.1 są spełnione, układ w postaci łańcuchowej nie posiada ciągłego stabilizatora.

13.4. Odniesienia literaturowe

Warunek Brocketta został sformułowany w pracy [Bro83]. Przez dziesięciolecia był on „spiritus movens” nieliniowej teorii sterowania. Twierdzenie Lizzáragi pochodzi z pracy [Liz04].

Literatura

- [Bro83] R. W. Brockett, *Differential Geometric Control Theory*, rozdział Asymptotic stability and feedback stabilization, strony 171–181. Birkhäuser, Boston, 1983.
- [Liz04] D. A. Lizárraga, Obstructions to the existence of universal stabilizers for smooth control systems. *Math. Control Signals Syst.*, 16:255–277, 2004.

Skorowidz

A		
algebra	3	
Liego	20	
różniczkowa	21	
algorytm		
śledzenia metodą całkowania		
wstecznego	123	
śledzenia z linearyzacją	99	
Najszybszego Spadku	24	
Newtona	23	
stabilizacji punktu		
równowagi	121	
B		
Banacha przestrzeń	4	
C		
całkowanie wsteczne	118	
D		
dżet	19	
dryf	81	
duża flaga	118	
dyfeomorfizm	22	
lokalny	22, 32	
dynamiczne sprzężenie		
zwrotne	129	
dynamika zerowa	112	
dystrybucja	73	
całkowalna	73	
duża flaga	118	
inwolutywność	74	
mała flaga	118	
działanie	1	
F		
flaga		
duża	118	
mała	118	
F-linearizowalność	96	
F-równoważność	7, 94	
funkcja		1
analityczna	19	
ciągła	3	
dżet	19	
gładka	18	
klasy	18	
klasy K	54	
klasy K_∞	54	
kompozycja	21	
liniowa	28	
LR równoważność	31	
Morse'a	37	
odwrotna	21	
różniczkowalna	18	
składanie	21	
wykres	1	
G		
grupa	2	
łączna	2	
asocjatywna	2	
komutatywna	2	
przemienne	2	
H		
homeomorfizm	61	
I		
immersja	32	
indeks punktu krytycznego	38	
K		
Kalman		
kryterium	6	
macierz	6	
klasa równoważności	2	
kompensator dynamiczny	130	
Brunowskiego	131	
kryterium Kalmana	6	
krzywa całkowita	43	

L	
LaTeX	VII
linearyzacja	63
przez sprzężenie zwrotne ...	96
w przestrzeni stanu	96
LR równoważność	31
M	
mała flaga	118
macierz	
fundamentalna	45
Gram'a	6
Jacobiego	19
Kalmana	6
odsprężenia	109
przejścia	45
przybliżenia liniowego	62
model kinematyki	
monocykl	122
samochód kinematyczny ...	120
moduł	3
monocykl	122
N	
nawias	
Liego	20, 71
własności	71
Poissona	21
nierówność Ważewskiego	46
norma macierzy	30
O	
odwzorowanie końcowe	82
operacja	1
operator dołączony	
duży	70
mały	70
orbita	60
osiągalność	84
otoczenie punktu	3
P	
p-norma	29
płaskość różniczkowa	133
pierścień	2
z jedyką	2
pochodna	
Fréchet'a	4
Gateaux	4
Liego	72
podzbiór	1
postać	
łańcuchowa	117
kanoniczna	2
Brunowskiego	10
normalna	2
liniowy układ sterowania ..	7
przechodność	2
przestrzeń	
Banacha	4
liniowa	2
stanu	5
sterowań	5
topologiczna	3
zupełna	3
punkt	
krytyczny	36
indeks	38
osobliwy	62
hiperboliczny	63
nierezonansowy	63
rezonansowy	63
równowagi	52, 62
asymptotycznie stabilny ...	53
globalnie stabilny	53
hiperboliczny	63
jednostajnie stabilny	53
nierezonansowy	63
niestabilny	53
rezonansowy	63
stabilny	53
regularny	36, 62
R	
równanie	
Ważewskiego-Dawidenki ...	23
równoważność	7
klasa	2
przez dynamiczne sprzężenie	
zwrotne	130
przez sprzężenie zwrotne ..	7, 94
różniczkowa	61, 64
relacja	1
topologiczna	61, 64
w przestrzeni stanu	7, 94

- relacja równoważności 1
rozmaitość całkowita 73
- S**
- samochód kinematyczny 120
S-linearyzowalność 96
sprzężenie zwrotne 9, 10, 109
 dynamiczne 129
 statyczne 129
S-równoważność 7, 94
stabilizowalność 10, 141
stabilność 53
 asymptotyczna 53
 globalna 53
 jednostajna 53
 w sensie Lapunowa 55
 w sensie Poissona 87
stan początkowy 45
statyczne sprzężenie zwrotne... 129
sterowalność 5, 84
sterowania 80
sterowanie
 metoda całkowania
 wstecznego 118
 w pętli sprzężenia
 zwrotnego 10
stopień
 różniczkowy 109
 względny 109
strumień 59
strumień układu dynamicznego
 własności 59
submersja 32
symbol Landaua 4
symetria 1
- T**
- topologia 3
trajektoria 43
- U**
- układ dynamiczny
 autonomiczny 59
 krzywa całkowita 43
 linearyzacja 63
 liniowy 64
 nieautonomiczny 45
 równoważność
 różniczkowa 64
 równoważność
 topologiczna 64
 zależny od czasu 45
macierz przybliżenia
 liniowego 62
nieautonomiczny 44
 liniowy 45
niezależny od czasu 59
orbita 60
punkt osobliwy 62
 hiperboliczny 63
 nierezonansowy 63
 rezonansowy 63
punkt równowagi 62
 hiperboliczny 63
 nierezonansowy 63
 rezonansowy 63
punkt regularny 62
równoważność
 różniczkowa 61
 topologiczna 61
stabilność 53
 asymptotyczna 53
 globalna 53
 jednostajna 53
stan początkowy 45
strumień 59
 własności 59
trajektoria 43
zależny od czasu 44
 liniowy 45
układ sterowania 80
 afiniczny 81
 F-linearyzacja 96
 F-równoważność 94
 S-linearyzacja 96
 S-równoważność 94
 bezdryfowy 82
 dryf 81
 dynamika zerowa 112
 linearyzacja przez
 sprzężenie zwrotne 96
 linearyzacja w przestrzeni
 stanu 96
 lokalna sterowalność 84

macierz odsprężenia.....	109	gęsty	3
odsprężanie	109	nigdziegęsty	3
osiągalność	84	osiągalny	84
postać łańcuchowa	117	wnętrze	3
różniczkowo płaski	133	zmienna	
równania równoważności.	97	stanu.....	4, 80
równoważność przez		sterująca.....	4, 80
sprężenie zwrotne	94	wyjścia.....	80
równoważność		zwrotność	1
w przestrzeni stanu	94		
sprężenie zwrotne	109		
sterowalność	84		
stopień różniczkowy	109		
stopień względny	109		
zadanie śledzenia			
trajektorii.....	98		
liniowy	4		
F-równoważność	7		
S-równoważność	7		
postać normalna			
sterowalności	7		
postać normalna			
sterownika.....	8		
równoważność	7		
równoważność przez			
sprężenie zwrotne	7		
równoważność			
w przestrzeni stanu	7		
stabilizowalność	10		
sterowalność	5		
minimalnofazowy	112		
odwzorowanie końcowe	82		
stabilizowalność przez			
sprężenie zwrotne	141		

W

wnętrze zbioru.....	3
wykres funkcji.....	1
wzór Peano-Bakera	46

Z

zadanie	
śledzenia trajektorii.....	98
stabilizacji	10
sterowania	5
zbiór	1
brzegowy	3
domknięty	3

Spis rysunków

1	Układ w postaci kanonicznej Brunowskiego	13
1.1	Funkcja gładka, nieanalityczna	20
1.2	Mechanizm manipulatora z zadania 1.5	27
2.1	Diagram LR równoważności	31
3.1	Punkty i wartości krytyczne	36
3.2	„Duży” zbiór punktów krytycznych \mathcal{C}_f	37
5.1	Stabilność i stabilność asymptotyczna	54
6.1	Orbity wahadła matematycznego	60
6.2	Równoważność układów dynamicznych	61
6.3	Prostowanie pola wektorowego	63
6.4	Hiperboliczne punkty równowagi na płaszczyźnie: a) typu ujście, b) typu źródło, c) siodłowy	65
7.1	Definicja operatora $\text{Ad}_X^t Y(x)$	71
8.1	Sterowanie odcinkami ciągłe	81
8.2	Sterowanie odcinkami stałe	81
8.3	Własność osiągalności: a), b) tak, c) nie	85
8.4	Lokalna sterowalność: a) nie, b) tak	85
8.5	Zbiory osiągalne $\mathcal{R}_\sigma(0, t)$ i $\mathcal{R}_\sigma(0)$	88
8.6	Stabilność w sensie Poissona	91
9.1	Efekt zastosowania linearyzującego sprzężenia zwrotnego	98
9.2	Układ śledzenia trajektorii stanu	99
9.3	Model silnika indukcyjnego	104
10.1	Struktura relacji wejście-wyjście	110
10.2	Struktura układu sterowania (10.7)	112
10.3	Koło toczące się po płaszczyźnie pionowo	115
11.1	Samochód kinematyczny	120
11.2	Monocykl	123
12.1	Monocykl z dyszlem	127

12.2	Kompensator Brunowskiego	132
12.3	Monocykl	136
12.4	Samochód kinematyczny	137

Spis twierdzeń

0.3.1	Twierdzenie (Brunowski)	11
1.3.1	Twierdzenie (O Funkcji Odwrotnej)	21
1.4.1	Twierdzenie (O Funkcji Uwikłanej)	22
2.4.1	Twierdzenie (O Submersjach)	32
2.4.2	Twierdzenie (O Immersjach)	32
2.4.3	Twierdzenie (Whitney)	32
3.1.1	Twierdzenie (Sard)	37
3.2.1	Twierdzenie (Morse)	38
3.3.1	Twierdzenie (Hadamard)	39
3.5.1	Twierdzenie (Twierdzenie o Punkcie Stałym)	40
4.1.1	Twierdzenie (O Istnieniu i Jednoznaczności)	43
4.5.1	Twierdzenie (Ważewski)	47
5.3.1	Twierdzenie (O Funkcji Lapunowa)	54
5.4.1	Twierdzenie (Barbalat)	56
6.3.1	Twierdzenie (O Równoważności Różniczkowej)	62
6.4.1	Twierdzenie (O Prostowaniu)	62
6.6.1	Twierdzenie (Poincaré-Siegel-Sternberg)	63
6.6.2	Twierdzenie (Hartman-Grobman)	64
6.7.1	Twierdzenie (Kuiper)	64
7.3.1	Twierdzenie (O Przemienności)	72
7.4.1	Twierdzenie (O Jednoczesnym Prostowaniu)	72
7.6.1	Twierdzenie (Frobenius)	73
8.4.1	Twierdzenie (Chow-Susmann-Krener)	85
8.4.2	Twierdzenie (Chow-Lobry-Krener)	85
8.5.2	Twierdzenie (Warunek Sterowalności Sussmanna)	87
9.2.1	Twierdzenie (Krener-Sussmann-Respondek)	96
9.2.2	Twierdzenie (Jakubczyk-Respondek)	97
11.2.1	Twierdzenie (Murray)	118

12.3.3 Twierdzenie (Charlet-Lévine-Marino)	132
13.2.1 Twierdzenie (Brockett)	142
13.3.1 Twierdzenie (Lizárraga)	144