

POLITECHNIKA WROCŁAWSKA  
WYDZIAŁ ELEKTRONIKI

---

KIERUNEK: Automatyka i Robotyka (AIR)  
SPECJALNOŚĆ: Robotyka (ARR)

**PRACA DYPLOMOWA  
INŻYNIERSKA**

Bąk jaki jest każdy widzi. Studium zachowań

Top is a top. Case study

AUTOR:  
Roberto Orozco

PROWADZĄCY PRACĘ:  
Dr inż. Robert Muszyński,  
Katedra Cybernetyki i Robotyki

OCENA PRACY:

# Spis treści

<b>1</b>	<b>Wstęp</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Preliminaria matematyczne</b>	<b>4</b>
2.1	Ruch bryły sztywnej . . . . .	4
2.2	Macierz i elipsoida bezwładności . . . . .	7
2.3	Formalizm Eulera-Newtona . . . . .	8
2.4	Formalizm Lagrange’a . . . . .	8
2.5	Transformacja Legendre’a . . . . .	10
2.6	Formalizm Hamiltona . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Czym jest błąk?</b>	<b>14</b>
3.1	Błąki swobodne . . . . .	15
3.2	Błąki ciężkie . . . . .	15
3.2.1	Błąk Lagrange’a . . . . .	16
3.2.2	Błąk Kowalewskiej . . . . .	16
3.2.3	Błąk Goryacheva-Chaplygina . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Modele i analiza zachowań</b>	<b>19</b>
4.1	Błąk Eulera . . . . .	19
4.1.1	Elipsoidy Poincaré . . . . .	20
4.1.2	Symetryczny błąk Eulera . . . . .	23
4.2	Błąk Lagrange’a . . . . .	24
4.2.1	Analiza z wykorzystaniem formalizmu Lagrange’a . . . . .	25
4.2.2	Wzory asymptotyczne . . . . .	29
<b>5</b>	<b>Badania symulacyjne</b>	<b>30</b>
5.1	Błąk Eulera . . . . .	30
5.2	Błąk Lagrange’a . . . . .	30
5.2.1	Przebiegi błąka Lagrange’a . . . . .	34
5.2.2	Zachowania szczególne . . . . .	34
<b>6</b>	<b>Podsumowanie</b>	<b>39</b>
	<b>Literatura</b>	<b>41</b>
<b>A</b>	<b>Błąkiem malowane</b>	<b>44</b>

# 1. Wstęp

Od zarania dziejów ludzkość interesowała się ruchem obrotowym, który rozpałał umysły myślicieli oraz inspirował wynalazców. Już w starożytności opisano wynalazek znany dziś pod nazwą gimbal, a pitagorejczycy rozpatrywali ruch obrotowy Ziemi. Na przestrzeni kolejnych wieków wciąż pozostawał on w umysłach znakomitych uczonych, takich jak Isaac Newton (1642–1727) [New11], Mikołaj Kopernik (1473–1543) [Cop65] czy Girolamo Cardano (1501–1573) [Mac], który częściowo stworzył, a także opisał specjalny typ zawieszenia nazwanego później jego nazwiskiem – kluczową część ówczesnych kompasów oraz żyroskopów i przyczynę do zaprojektowania przegubu Cardana, nieodzownego elementu wielu współczesnych mechanizmów napędowych [Wik].

Wielu znakomitych matematyków, inżynierów oraz badaczy podjęło się matematycznego opisu zjawiska ruchu ciała sztywnego wokół ustalonego punktu, którego ogólny przypadek zwany bąkiem ciężkim można krótko scharakteryzować jako bryłę zamocowaną w pewnym punkcie, tak aby mogła obracać się wokół własnej osi oraz wokół punktu mocowania. Pierwsze istotne wyniki w tej materii uzyskali Leonhard Euler (1707–1783) [Eul36], Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) [Lag11], Louis Poinsot (1777–1859) [Poi52] oraz Sofia Kovalevskaya (1850–1891) [Kow89, Kow90]. Wyznaczony przez nich kierunek badań dominował aż do początku XX wieku, a rezultaty ich prac stały się podstawowymi przykładami stanowiącymi dobre wprowadzenie do zagadnienia analizy układów z wykorzystaniem formalizmów mechaniki analitycznej. Twierdzenia wyprowadzone w trakcie prac nad problemem opisu zjawiska istotnie wpłynęły na rozwój myśli matematycznej w ówczesnych czasach. Warto zauważyć, że pomimo prac prowadzonych przez tak znamienitych uczonych ogólny przypadek tego zagadnienia pozostaje nierozwiązany do dziś. Istnieją jednak szczególne przypadki dla których jesteśmy w stanie podać rozwiązanie – bąk Eulera, bąk Lagrange’a oraz bąk Kowalewskiej [RK12], a także takie dla których analityczne rozwiązanie jesteśmy w stanie podać tylko dla pewnych warunków początkowych – bąk Goryacheva-Chaplygina [Aud99].

Inspirację w bąkach znajdowali również fizycy, w tym nobliści niezajmujący się stricte zagadnieniem ich ruchu. Zachwyty nad wirującą bryłą dwóch znakomitych fizyków – N. Bohra oraz W. Pauliego – został uwieczniony na zdjęciu w trakcie inauguracji Instytutu Fizyki w Lund, które to przedstawia rysunek 1.1. O swojej inspiracji pisze także R. Feynman, również noblista, w zbiorze swoich wspomnień pod tytułem „«Pan raczy żartować, panie Feynman!» Przypadki ciekawego człowieka” [FLHB07], w którym przytacza anegdotę jak zainteresowanie wirującym talerzem



Rysunek 1.1 „Medytacja nad wirującym bąkiem“, [Gus]

wpłynęło na jego karierę zawodową i otrzymanie nagrody Nobla. W Polsce popularnonaukowym propagatorem tego zagadnienia jest Arkadiusz Jadczyk, profesor Uniwersytetu Wrocławskiego, prowadzący bloga [Jad], którego duża część poświęcona jest opisowi, w przystępny sposób, zachowania bąków.

Badanie zagadnienia ruchu obrotowego brył sztywnych jest istotne z punktu widzenia robotyki, ze względu na wykorzystywanie elementów wirujących w konstrukcjach robotycznych na przykład jako napędy. Przykładem robota mobilnego z napędem, który może zostać zamodelowany jako bąk jest między innymi Hogger [Ryb13] oraz Hogger<sup>2</sup> [Gó17]. Opis badań nad robotami napędzanymi w ten sposób można znaleźć w [JM17, JM16].

Niniejsza praca ma na celu wprowadzić czytelnika w podstawy problemu ruchu obrotowego oraz jego analizy. W jej ramach przygotowano system symulacji pozwalający na śledzenie wybranych modeli bąków i wykorzystania go do przeprowadzenia badań komputerowych oraz wizualizacji ich zachowań. Układ pracy jest następujący. W drugim rozdziale przytoczony został podstawowy aparat matematyczny, wraz z jego interpretacją, niezbędny do zrozumienia pracy. W rozdziale trzecim scharakteryzowano podstawowe przypadki bąków, dla których jesteśmy w stanie uzyskać rozwiązanie całkowite bądź częściowe, zostały również przedstawione różnice pomiędzy nimi. Rozdział czwarty zawiera analityczną analizę bąków Lagrange’a oraz Eulera, która została poparta symulacjami przedstawionymi w rozdziale piątym. Rozdział szósty podsumowuje całość.

## 2. Preliminaria matematyczne

Celem rozdziału jest zaprezentowanie podstawowych informacji dotyczących aparatu matematycznego wykorzystywanego w pracy. Ma on ponadto ułatwić dalsze czytanie poprzez zaznajomienie czytelnika z przyjętymi konwencjami oznaczeń oraz symboli, które można napotkać w następnych rozdziałach. Przedstawione zostaną tu również interpretacje wprowadzonych wzorów oraz formalizmów. Szczegółowe opisy oraz dowody przedstawianych zagadnień oraz twierdzeń można znaleźć w większości dostępnych podręczników do mechaniki analitycznej. Niniejsza praca bazuje w głównej mierze na pozycjach [TM18, RK12, Arn81].

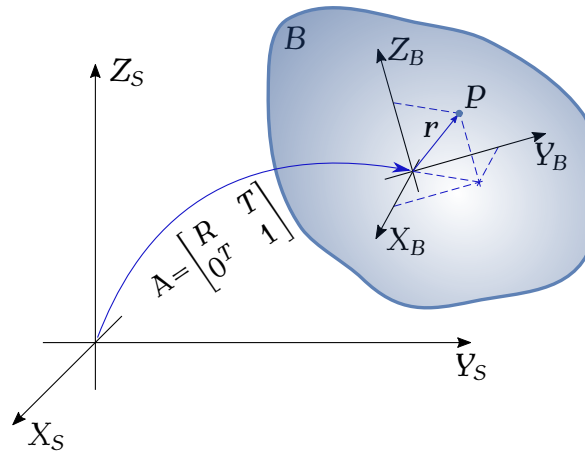
### 2.1 Ruch bryły sztywnej

W ogólności ruch bryły sztywnej jest złożeniem dwóch podstawowych ruchów – przesunięcia oraz obrotu ciała sztywnego. Opis takiego ruchu bazujący na trójelementowym wektorze położenia  $(x, y, z)$  z elementami  $x, y, z$  jednoznacznie określającymi położenie w przestrzeni euklidesowej  $\mathbb{E}^3$ , w postaci macierzowego układu równań jest nieliniowy, to znaczy takiej transformacji nie jesteśmy w stanie zapisać za pomocą jednej macierzy, co znacząco utrudnia rachunki oraz jest mniej dogodna do analizy. Z tego powodu do opisu ruchu w mechanice wprowadza się współrzędne jednorodnie  $x = (x, y, z, 1)$ , gdzie  $x, y, z$  jednoznacznie określają położenie w przestrzeni euklidesowej  $\mathbb{E}^3$ . Jako transformacje opisujące ruch wykorzystuje się elementy należące do specjalnej grupy euklidesowej  $\mathbb{SE}(3)$ , pozwalające na całkowity opis kinematyczny bryły sztywnej w  $\mathbb{E}^3$  za pomocą liniowego przekształcenia. Elementy grupy  $\mathbb{SE}(3)$  można utożsamić z macierzami  $4 \times 4$ , które przyjmują postać

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

gdzie  $\mathbf{R}$  – macierz  $3 \times 3$  opisująca część rotacyjną ruchu,  $\mathbf{T}$  – trójelementowy wektor opisujący część translacyjną ruchu.

Standardowo w mechanice analitycznej, w celu opisu zachowania obiektów wprowadza się dwa układy współrzędnych, nieruchomy układ zwany układem przestrzeni  $(X_S, Y_S, Z_S)$  oraz układ ciała  $(X_B, Y_B, Z_B)$  związany z poruszającym się obiektem. Przekształcenie pomiędzy tymi układami dane jest macierzą postaci (2.1), jak wcześniej wspomniano będącą elementem grupy  $\mathbb{SE}(3)$ . Przesunięcie pomiędzy początkami układów współrzędnych opisuje część translacyjna  $\mathbf{T}$  tego przekształcenia i jest



Rysunek 2.1 Przekształcenie układów współrzędnych, [TM18]

to wektor należący do  $\mathbb{R}^3$ . Wzajemną orientację układów określa część rotacyjna  $\mathbf{R}$ , która ma postać macierzy obrotu i jest elementem należącym do specjalnej grupy ortogonalnej  $\mathbb{SO}(3)$ . Ilustracja przekształcenia została przedstawiona na rysunku 2.1.

Ze względu na charakter ruchu badanych obiektów, w pracy zajmiemy się tylko częścią rotacyjną przekształcenia (2.1), która pozwoli nam na analizę ewolucji zachowań błąków. Zanim jednak scharakteryzujemy tę transformację zdefiniujemy układy współrzędnych opisujące świat, w którym będziemy je śledzić oraz ich wzajemne relacje. Razem z układami przestrzeni i ciała zdefiniujemy wersory je rozpinające, związane z ich odpowiednimi osiami. I tak dla układu przestrzeni mamy  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ , zaś dla układu ciała  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ . Pomędzy odpowiadającymi wersorami układów zachodzą następujące równości

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{R}\mathbf{e}_x,$$

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{R}\mathbf{e}_y,$$

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{R}\mathbf{e}_z.$$

Z twierdzeń matematycznych wynika, że dowolną orientację układu względem układu bazowego jesteśmy w stanie uzyskać z wykorzystaniem trzech obrotów elementarnych wokół osi układu współrzędnych opisanych następującymi macierzami

$$\text{Rot}(X, \alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

$$\text{Rot}(Y, \beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

$$\text{Rot}(Z, \gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Dowolną macierz obrotu możemy przedstawić jako złożenie trzech macierzy elementarnych. Jednakże samo złożenie nie jest dowolne. Poprawne wyznaczenie rotacji możliwe jest z wykorzystaniem parametryzacji, na przykład kątami Eulera ZXZ [TMD<sup>+</sup>00]

$$\mathbf{R} = \text{Rot}(Z, \alpha)\text{Rot}(X, \beta)\text{Rot}(Z, \gamma),$$

bądź przy pomocy kątów Kołysanie-Kiwanie-Myszkowanie [TMD<sup>+</sup>00]

$$\mathbf{R} = \text{Rot}(Z, \alpha)\text{Rot}(Y, \beta)\text{Rot}(X, \gamma).$$

Mając opisane przemieszczenie ciała sztywnego scharakteryzujemy prędkości jego ruchu. Jak wcześniej, zrobimy to dla części obrotowej. W ogólności, prędkości ruchu ciała sztywnego zostały szczegółowo opisane w [TMD<sup>+</sup>00]. Dla ruchu obrotowego prędkości kątowne można wyrazić za pomocą dwóch macierzy

$$\Omega_S = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T$$

oraz

$$\Omega_B = \mathbf{R}^T\dot{\mathbf{R}},$$

gdzie pierwsza z nich nazywana jest prędkością w układzie przestrzeni, a druga prędkością w ciele. Obie prędkości spełniają warunek antysymetryczności, to znaczy dla obu zachodzi

$$\Omega + \Omega^T = 0,$$

z czego wynika, że są one skośnie symetryczne, [TM18]. Wiadomo, że dla macierzy skośnie symetrycznej  $\Omega$  i wektora  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$  zachodzi

$$\Omega = [\boldsymbol{\omega}] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix},$$

co wykorzystywane jest w macierzowej reprezentacji iloczynu wektorowego. Można więc zapisać

$$\Omega\mathbf{x} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x},$$

gdzie  $\mathbf{x}$  jest pewnym wektorem należącym do  $\mathbb{R}^3$ , a  $\times$  operatorem iloczynu wektorowego. Oznacza to, że prędkość kątową w ciele bądź przestrzeni można skojarzyć z odpowiadającym jej wektorem definiującym oś obrotu za pomocą operacji iloczynu wektorowego.

Obie prędkości  $\Omega_S, \Omega_B$  opisują prędkość zmian orientacji układu ciała względem układu przestrzeni. Różnice pomiędzy nimi polegają na tym, że pierwsza z nich wyrażona jest w układzie przestrzeni, druga zaś w układzie ciała. Pomocna w zrozumieniu tego jest reprezentacja wektorowa gdzie dla prędkości w ciele  $\Omega_B$  odpowiadający jej wektor  $\boldsymbol{\omega}_B$  wyznaczający oś obrotu możemy rozłożyć na składowe z wykorzystaniem wektorów ( $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ ). Mamy więc

$$\boldsymbol{\omega}_B = \omega_1\mathbf{e}_x + \omega_2\mathbf{e}_y + \omega_3\mathbf{e}_z.$$

Wiemy, że transformacja między układem przestrzeni, a układem ciała dana jest macierzą  $\mathbf{R}$ . Stąd przekształcenie z układu ciała do układu przestrzeni będzie miało postać macierzy  $\mathbf{R}^T$ . Możemy więc zapisać

$$\boldsymbol{\omega}_B = \omega_1\mathbf{R}^T\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{R}^T\mathbf{e}_2 + \omega_3\mathbf{R}^T\mathbf{e}_3 = \mathbf{R}^T\boldsymbol{\omega}_S.$$

## 2.2 Macierz i elipsoida bezwładności

Dla ruchu obrotowego odpowiednikiem masy pojawiającej się w opisie ruchu postępowego jest moment bezwładności. Dla ciał sztywnych i obrotu wokół pewnej osi wyraża się on wzorem

$$I = \int_V \rho(\mathbf{r}) r^2 dV,$$

gdzie  $\mathbf{r}$  – wektor odległości punktu od osi obrotu,  $\rho$  – rozkład gęstości masy.

Ogólny zapis pozwalający na przedstawienie równań ruchu obrotowego danego ciała wokół dowolnej osi opiera się na tensorze drugiego rzędu zwanym tensorem bezwładności, którego możemy opisać za pomocą macierzy [RK12]

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

gdzie jej elementy definiujemy jako

$$I_{ij} = \int_V \rho(\mathbf{r})(r^2 \delta_{ij} - r_i r_j) dV,$$

z  $\delta_{ij}$  oznaczającą deltę Kroenecker'a. Jak widać z powyższego wzoru postać tej macierzy zależy od punktu odniesienia – w naszym przypadku początku układu ciała. Widać również, że jest ona macierzą symetryczną. Elementy na jej diagonalu są tak zwanymi momentami głównymi, a elementy poza nią nazywane są momentami dewiacyjnymi.

Jak wiemy z algebry wszystkie macierze symetryczne można zdiagonalizować, to znaczy przedstawić w postaci [JS04]

$$\mathbf{M} = \mathbf{PDP}^{-1}, \quad (2.6)$$

gdzie  $\mathbf{D}$  – macierz diagonalna z wartościami własnymi macierzy  $\mathbf{M}$  na przekątnej,  $\mathbf{P}$  – macierz przejścia, której kolumny są wektorami własnymi macierzy  $\mathbf{M}$ , odpowiadającymi jej wartościom własnym. Rolę jaką pełni macierz przejścia jest przekształcenie układu do postaci, w której transformacja zadana macierzą  $\mathbf{M}$  wyraża się za pomocą macierzy diagonalnej  $\mathbf{D}$ . Fakt ten oznacza, że dobierając odpowiednio układ współrzędnych możemy przedstawić macierz bezwładności  $\mathbf{I}$  jako macierz diagonalną z głównymi momentami na przekątnej

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Geometrycznie tensor momentu bezwładności przedstawić można jako elipsoidę. Zauważmy za [RK12], że równanie kwadryki

$$(\mathbf{x}, \mathbf{I}\mathbf{x}) = 1, \quad (2.8)$$

dla którego  $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$ , geometrycznie przedstawia elipsoidę, której długości głównych półosi  $a_i$  spełniają równość  $a_i = \frac{1}{\sqrt{I_{ii}}}$ , a kierunki tych półosi odpowiadają



kierunkom głównym tensora. Zauważmy tutaj, że w przypadku symetrii obrotowej bryły, dwa z jej głównych momentów bezwładności są sobie równe. Kierunki główne tensora stanowi kierunek wzdłuż osi symetrii obrotowej oraz dowolne dwa prostopadłe do niego i wzajemnie. W przypadku, gdy wszystkie główne momenty bezwładności są równe, elipsoida przyjmuje postać sfery wówczas dowolny kierunek przechodzący, przez środek sfery stanowi kierunek główny macierzy.

Warto dodać, że wykorzystując parametry elipsoidy bezwładności możliwe jest wyznaczenie momentu bezwładności dla dowolnej osi obrotu. Proces ten został szczegółowo opisany w [RK12].

## 2.3 Formalizm Eulera-Newtona

Formalizm Eulera-Newtona bazuje na uogólnionej przez Eulera drugiej zasadzie dynamiki Newtona dla ruchu postępowego i obrotowego bryły sztywnej [TM18]. Przy danym układzie przestrzeni i układzie ciała o początku w środku ciężkości bryły sztywnej ruch translacyjny opisuje wektor położenia  $\mathbf{T}$ , a ruch obrotowy macierz  $\mathbf{R}$ . Mamy wówczas prędkość liniową wyrażoną w układzie ciała jako  $\mathbf{v}_B = \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{T}}$  oraz prędkość kątową  $\boldsymbol{\omega}_B$ . Układ równań Eulera-Newtona opisujący dynamikę bryły przyjmuje wtedy postać

$$\begin{cases} \mathbf{F} = m_b (\dot{\mathbf{v}}_B + \boldsymbol{\omega}_B \times \dot{\mathbf{v}}_B) \\ \mathbf{m} = I_B \dot{\boldsymbol{\omega}}_B + \boldsymbol{\omega}_B \times I_B \boldsymbol{\omega}_B \end{cases}, \quad (2.9)$$

gdzie  $\mathbf{F}$  – siła zewnętrzna działająca na bryłę,  $\mathbf{m}$  – zewnętrzny moment siły działający na bryłę,  $m_b$  – masa bryły, zaś  $I_B$  – jej macierz inercji.

## 2.4 Formalizm Lagrange’a

Atrakcyjność mechaniki lagranżowskiej uwidacznia się przy badaniu bardziej złożonych układów, gdzie opis dynamiki układu wyraża się za pomocą współrzędnych i prędkości uogólnionych, które per se uwzględniają więzy układu, co w przypadku formalizmu newtonowskiego dokonywane jest poprzez dodanie równań ograniczeń do układu równań dynamiki. Jednym ze sposobów sformułowania mechaniki Lagrange’a jest wprowadzenie jej jako rozwiązania pewnego zagadnienia wariacyjnego, spełniającego zasadę najmniejszego działania Hamiltona (zobacz [Arn81]) bądź z ogólniejszej zasady d’Alemberta, której wyprowadzenie można znaleźć w [RK12].

Postępując zgodnie z formalizmem Lagrange’a, w celu uzyskania równań ruchu należy postąpić według następującego schematu:

1. Opisać układ za pomocą współrzędnych i prędkości uogólnionych  $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$ .
2. Zdefiniować lagranżian układu postaci

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = K(\dot{\mathbf{q}}) - V(\mathbf{q}),$$

gdzie  $K(\dot{\mathbf{q}})$  – energia kinetyczna układu,  $V(\mathbf{q})$  – potencjał sił pola (energia potencjalna układu).

3. Dla tak zdefiniowanego lagranżianu równania ruchu wyrażone są za pomocą równań Eulera-Lagrange'a drugiego rodzaju postaci

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{F}, \quad (2.10)$$

gdzie  $\mathbf{F}$  – siły niepotencjalne działające na układ np. sterowania, siły tarcia.

Funkcja Lagrange'a dla ruchu bryły sztywnej w ogólności została wyprowadzona w [TM18] i opisana jest równaniem

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_B^T \mathbf{I}_B \boldsymbol{\omega}_B + m_B \dot{\mathbf{T}}^T \mathbf{R} (\boldsymbol{\omega}_B \times \mathbf{r}_B) + \frac{1}{2} m_B (\dot{\mathbf{T}}, \dot{\mathbf{T}}) + m_B (\mathbf{g}, \mathbf{R} \mathbf{r}_B + \mathbf{T}), \quad (2.11)$$

gdzie  $\mathbf{I}_B$  – macierz inercji,  $\mathbf{R}$  – macierz obrotu,  $\mathbf{T}$  – wektor przesunięcia,  $\boldsymbol{\omega}_B$  – prędkość kątowna w ciele,  $\mathbf{r}_B$  – wektor położenia środka ciężkości,  $m_B$  – masa ciała sztywnego. Lagranżowski opis dynamiki układu jest uogólnieniem drugiej zasady Newtona, wykorzystującym bardziej wyrafinowany i abstrakcyjny aparat matematyczny. W zastosowaniach mechaniki klasycznej oba opisy są równoważne. Ogólne wyprowadzenie równań Eulera-Lagrange'a oraz lagranżianu z newtonowskiej zasady dynamiki można znaleźć w [GPS00]. W celu zobrazowania równoważności opisów oraz zaprzyjaźnienia czytelnika z wprowadzonym formalizmem poniżej przedstawimy dowód dla jednowymiarowego problemu ruchu w polu grawitacyjnym.

Z podstaw fizyki wiadomo, że potencjalne siły zachowawcze możemy scharakteryzować następującym równaniem

$$F = - \frac{\partial V(x)}{\partial x}, \quad (2.12)$$

gdzie  $V(x)$  – potencjał pola sił (energia potencjalna),  $x$  – położenie. Zapisując zasadę dynamiki Newtona dla punktu materialnego o masie  $m$  oraz rozwijając ją mamy

$$F = m\ddot{x} = m \frac{d}{dt} \dot{x} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \frac{m\dot{x}^2}{2} \right). \quad (2.13)$$

Zauważając, że energia kinetyczną poruszającego się punktu materialnego dana jest równaniem

$$K(\dot{x}) = \frac{m\dot{x}^2}{2}$$

oraz uwzględniając równania (2.12) i (2.13) mamy

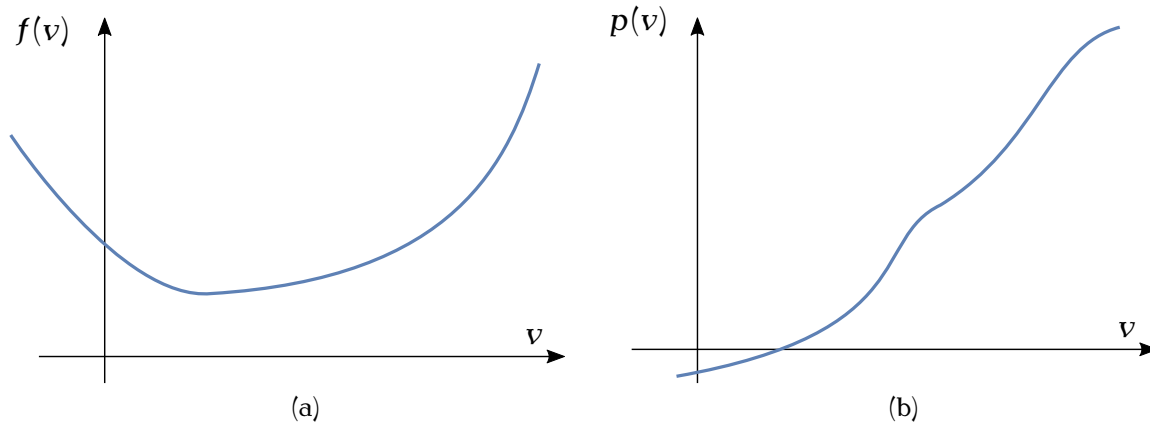
$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K(\dot{x})}{\partial \dot{x}} \right) = - \frac{\partial V(x)}{\partial x} \quad (2.14)$$

po przeniesieniu wyrażen na jedną stronę oraz uwzględnieniu faktu, że energia potencjalna  $V(x)$  nie zależy od prędkości, a energia kinetyczna nie zależy od położenia otrzymujemy

$$0 = \frac{\partial (K(\dot{x}) - V(x))}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial (K(\dot{x}) - V(x))}{\partial \dot{x}} \right). \quad (2.15)$$

Korzystając z postaci lagranżianu  $L(x, \dot{x}) = K(\dot{x}) - V(x)$  oraz porządkując (2.15) dostajemy równanie Eulera-Lagrange'a postaci

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial x} = 0. \quad (2.16)$$

Rysunek 2.2 Przykład funkcji  $f(v)$  oraz  $p(v)$ 

## 2.5 Transformacja Legendre'a

Transformacja Legendre'a podobnie jak transformacja Fouriera bądź Laplace'a pozwala na wyrażenie funkcji w odmienny sposób [ZRM08]. I tak jak w przypadku przekształcenia Fouriera dla pewnej funkcji czasu  $f(t)$  otrzymujemy jej opis w dziedzinie częstotliwości  $F(i\omega)$

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(i\omega),$$

tak w przypadku transformacji Legendre'a zastosowanej do funkcji Lagrange'a wyrażonej za pomocą współrzędnych i prędkości uogólnionych otrzymujemy jej opis we współrzędnych uogólnionych i pędach sprzężonych

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \xrightarrow{\mathcal{L}} H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$$

zwany hamiltonianem, który scharakteryzowany zostanie później. Transformacja ta zazwyczaj wprowadzana jest jako narzędzie przydatne przy przejściu z mechaniki lagranżowskiej do mechaniki Hamiltona ad-hoc bez podania interpretacji. Z tego względu poniżej, oprócz wprowadzenia transformacji, przedstawiono również jej geometryczną interpretację dla przypadku jednowymiarowego.

Rozpatrzmy pewną gładką i wypukłą funkcję  $f(v)$ , co oznacza, że funkcja ta ma nieskończenie wiele pochodnych oraz jej druga pochodna jest zawsze dodatnia

$$f \in C^\infty, \quad \frac{d^2 f(v)}{dv^2} > 0.$$

Oznaczmy jej pochodną jako funkcję zmiennej niezależnej  $v$

$$p(v) = \frac{df(v)}{dv} \tag{2.17}$$

będącą ściśle monotoniczną, co wynika z założenia o wypukłości funkcji  $f(v)$ . Możliwą ilustracją powyższej funkcji oraz przykładowy przebieg  $p(v)$  przedstawiono na rysunku 2.2. Zauważmy, że istnieje pewne odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne pomiędzy  $v$  i  $p$  (zobacz rysunek 2.2b). Oznacza to, że dla każdego  $v$  istnieje jedyna

wartość pochodnej  $p$  i na odwrót, dla każdej wartości  $p$  istnieje jedyna wartość  $v$ . Możemy więc znaleźć zależność odwrotną do  $p(v)$  i uzyskać  $v(p)$  – de facto wyrażając zmienną niezależną jako funkcję jednoznacznie określoną przez jej pochodną. Przy powyższych założeniach transformacja Legendre’a wyraża się wzorem

$$F(p) = pv(p) - f(v(p)), \quad (2.18)$$

gdzie  $v(p)$  uzyskujemy z równości (2.17). Różniczkując otrzymane równanie ze względu na  $p$  i uwzględniając (2.17) dostajemy następującą zależność

$$\frac{dF(p)}{dp} = v(p) + p \frac{dv(p)}{dp} - \frac{df(v)}{dv} \frac{dv(p)}{dp} = v(p).$$

Korzystając z powyższego równania można pokazać, że transformacja Legendre’a jest inwolucją, to znaczy jej odwrotność dana jest tą samą formułą – i tak mamy

$$f(v) = p(v)v - F(p(v)). \quad (2.19)$$

Interpretując geometrycznie powyższe równanie wykreślmy funkcję  $f(v)$  oraz poprowadźmy styczną w pewnym punkcie  $v_0$  tak, aby przecięła oś rzędnych  $OY$ , oznaczmy również jej nachylenie jako  $p(v_0) = p_0$ , tworząc konstrukcję jak na rysunku 2.3a, z której wynika, że  $F(p(v_0))$  jest odległością od początku układu do miejsca przecięcia stycznej z osią  $OY$ . Tożsamość (2.19) można zapisać w następujący sposób

$$F(p(v)) + f(v) = p(v)v. \quad (2.20)$$

Korzystając z tego zapisu na wykresie funkcji  $f(v)$  narysujmy prostą o nachyleniu  $p$  przechodzącą przez początek układu i zauważmy, że  $F(p)$  jest taką wartością zależną od nachylenia prostej, przy której odległość pomiędzy narysowaną prostą a wykresem funkcji wynosi  $pv$ , co przedstawiono na rysunku 2.3b.

W przypadku, gdy współrzędne i pędy są wektorami, transformacja Legendre’a przyjmuje postać

$$F(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^T \mathbf{v}(\mathbf{p}) - f(\mathbf{v}(\mathbf{p})). \quad (2.21)$$

Bardziej szczegółowy opis można znaleźć w [ZRM08].

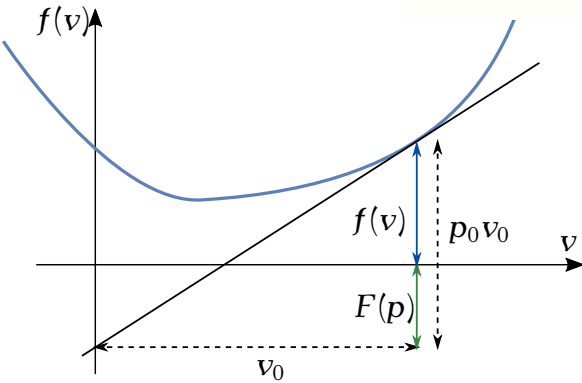
## 2.6 Formalizm Hamiltona

Mechanika hamiltonowska jest przeformułowaniem poprzednich podejść do opisu dynamiki układów, dającym dodatkowe narzędzia do badań oraz analizy ich zachowań [Arn81]. Formalizm Hamiltona bazuje na funkcji opisującej układ, zwanej hamiltonianem, która stanowi transformację Legendre’a lagranżianu tego układu

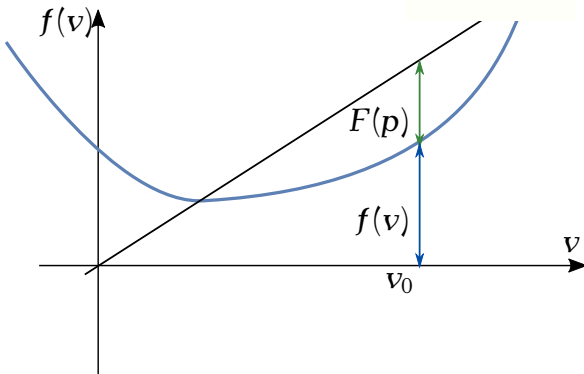
$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{p}^T \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{p})). \quad (2.22)$$

Interpretacją fizyczną funkcji Hamiltona dla układów badanych w ramach mechaniki klasycznej jest energia całkowita układu

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = K(\dot{\mathbf{q}}) + V(\mathbf{q}). \quad (2.23)$$



(a)



(b)

Rysunek 2.3 Interpretacja przekształcenia Legendre'a

Przy tak zdefiniowanym hamiltonianie, równania ruchu tożsame są z tak zwanym układem równań kanonicznych Hamiltona, który przyjmuje postać

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{F} \end{cases}, \quad (2.24)$$

gdzie  $\mathbf{F}$  – wektor sił niepotencjalnych. Wyprowadzenie równań kanonicznych z równań Eulera-Lagrange’a oraz szczegółowe wprowadzenie do mechaniki Hamiltona można znaleźć w [HSS09].

Istotnym pojęciem często wykorzystywanym w mechanice hamiltonowskiej są niezmienniki nazywane też całkami ruchu. Są to funkcje, których wartość pozostaje stała w trakcie ewolucji układu. Z niezmiennikami związane jest twierdzenie Liouville’a, które daje warunki pozwalające na stwierdzenie czy układ równań kanonicznych hamiltona można rozwiązać przez kwadratury, to znaczy jesteśmy w stanie otrzymać analityczne rozwiązanie układu. Bardziej szczegółowe informacje można znaleźć między innymi w [TM18, RK12, GPS00].

### 3. Czym jest bąk?

Najprościej rzecz ujmując bąk jest bryłą sztywną zamocowaną wahliwie w pewnym ustalonym punkcie. Przykładem bryły, którą można zamodelować jako bąk przedstawiono na rysunku 3.1. Konstruując matematyczny model bąka definiujemy układ przestrzeni  $(X_s, Y_s, Z_s)$  oraz układ ciała  $(X_b, Y_b, Z_b)$ . Ze względu na uwiązanie bąka, a także dla ułatwienia analizy problemu w większości przypadków będziemy zakładać, że początki obu układów pokrywają się oraz znajdują w punkcie mocowania bąka (na przykład styku bryły z podłożem). Dodatkowo ustalmy osie układu ciała tak, aby macierz inercji bąka przyjęła postać diagonalną

$$\mathbf{I}_B = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Przy tak zdefiniowanych układach macierz przejścia z układu przestrzeni do układu ciała ma postać macierzy rotacji.

Jak wspomniano w podrozdziale 2.1, obrót w grupie obrotów  $\mathbb{SO}(3)$  może być opisany z wykorzystaniem różnych parametryzacji. Idąc za [TM18] zdecydujemy się na korzystanie z parametryzacji ZXZ kątami Eulera. Przy takim wyborze orientacja naszego bąka jest wyrażona poprzez wektor współrzędnych  $\mathbf{q} = (\alpha, \beta, \gamma)^T$ , a macierz przejścia z układu ciała do układu przestrzeni ma postać

$$\mathbf{R}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \gamma - \cos \beta \sin \alpha \sin \gamma & -\cos \beta \cos \gamma \sin \alpha - \cos \alpha \sin \gamma & \sin \alpha \sin \beta \\ \cos \gamma \sin \alpha + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma & \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma & -\cos \alpha \sin \beta \\ \sin \beta \sin \gamma & \cos \gamma \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

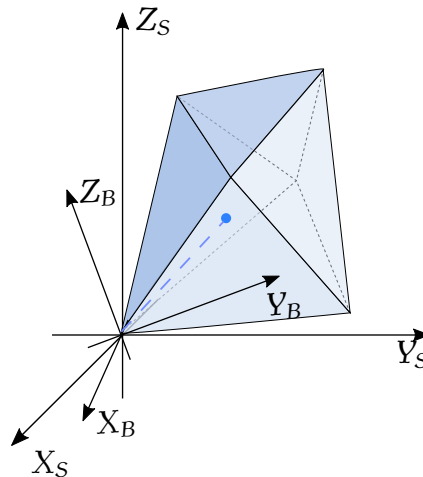
W świetle, powyższych definicji, odwzorowanie prędkości zmian kątów Eulera w prędkości kątowe w ciele zachodzi według zależności

$$\boldsymbol{\omega}_B = \mathbf{B}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \sin \beta \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ \sin \beta \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \cos \beta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

Przy tak zdefiniowanych układach współrzędnych dla ogólnego modelu bąka lagranżian systemu można wyrazić za pomocą wzoru

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_B^T \mathbf{I}_B \boldsymbol{\omega}_B + m_B (\mathbf{g}_B, \mathbf{r}_B), \quad (3.4)$$

gdzie  $m_B$  – masa bąka,  $\mathbf{r}_B$  – położenie jego środka masy,  $\mathbf{g}_B$  – wektor grawitacji wyrażony w układzie ciała,  $(\mathbf{g}_B, \mathbf{r}_B)$  – długość rzutu wektora położenia środka masy



Rysunek 3.1 Przykład błąka

na wektor grawitacji. Poniżej opiszemy główne rodzaje błąków oraz przedstawimy szczególne przypadki, dla których możliwe jest uzyskanie analitycznego rozwiązania, w sposób pozwalający na dostrzeżenie różnic pomiędzy błąkami.

### 3.1 Błąki swobodne

Szczególną, w pełni rozwiązywalną klasą błąków są tak zwane błąki swobodne nazywane również błąkami Eulera [RK12]. Charakterystyczną cechą tej klasy jest zanikanie części lagranżianu (3.4) związanej z energią potencjalną grawitacji. Sytuacja ta zachodzi w zasadzie dla dwóch różnych przypadków. Pierwszy z nich ma miejsce, gdy punkt mocowania umiejscowimy w środku ciężkości modelowanej bryły, drugi zaś, gdy układ związany z błąkiem jest układem inercyjnym, to znaczy siły działające na układ równoważą się.

Uwzględniając powyższe założenia definiujemy błąka Eulera, dla którego lagranżian przyjmuje postać

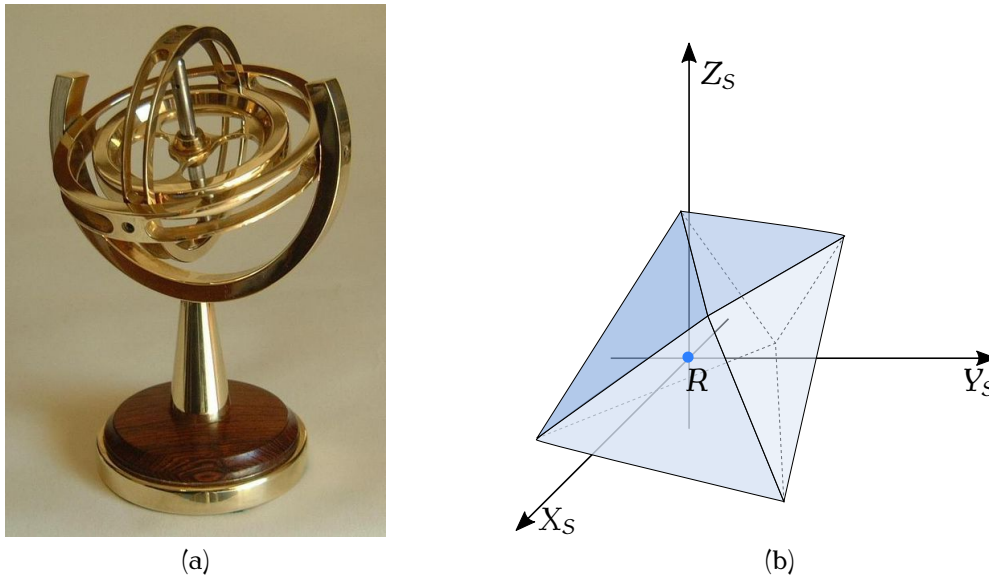
$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_B^T \mathbf{I}_B \boldsymbol{\omega}_B. \quad (3.5)$$

Fizyczną realizacją błąka Eulera spełniającą przypadek pierwszy jest żyroskop – ciało sztywne umieszczone w zawieszeniu Cardana, w taki sposób, aby środek ciężkości pozostawał nieruchomy – przedstawiony na rysunku 3.2 wraz z ilustracją modelu matematycznego, gdzie  $R$  oznacza środek ciężkości błąka.

### 3.2 Błąki ciężkie

Błąkiem ciężkim nazywany jest ogólny przypadek ruchu bryły sztywnej wokół punktu uwzględniający siły potencjalne grawitacji, opisany równaniem (3.4) [RK12]. Problem analizy zachowania takiego obiektu nie doczekał się ogólnego rozwiązania, jednakże istnieją szczególne przypadki, poza błąkiem swobodnym, które oprócz





Rysunek 3.2 Przykład bąków swobodnych a) żyroskop, [Hin], b) model bąka Eulera

energii całkowitej układu oraz momentu pędu wprowadzają dodatkowe całki ruchu, dzięki czemu możliwe jest otrzymanie rozwiązania w kwadraturach.

Obecnie odkryto trzy przypadki bąków ciężkich, dla których układ równań Eulera-Lagrange'a jest rozwiązywalny. Są to bąki Lagrange'a, Kowalewskiej oraz Goryacheva-Chaplygina, które nazwane zostały na część ich odkrywców i badaczy. Poniżej przedstawimy krótką charakterystykę każdego z wymienionych bąków ciężkich.

### 3.2.1 Bąk Lagrange'a

Charakterystyczną cechą bąka Lagrange'a, wprowadzającą dodatkowy niezmiennik, jest symetria obrotowa bryły wokół jej głównej osi obrotu, przechodzącej przez środek ciężkości [RK12].

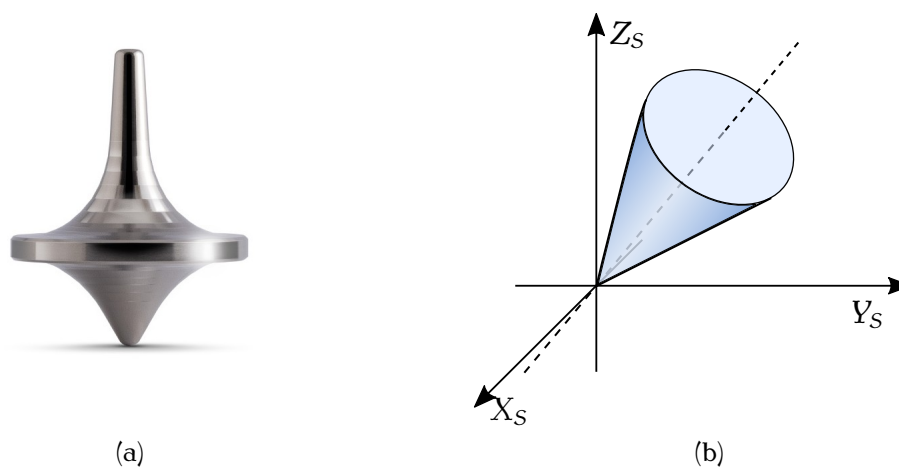
Przy naszych założeniach dotyczących układu ciała oznacza to, że dwa główne momenty bezwładności są sobie równe. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że są to momenty  $I_1$  oraz  $I_2$ , zachodzi zatem  $I_1 = I_2 \neq I_3$ . Lagranżian przyjmuje wówczas postać

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} (I_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + I_3 \omega_3^2) - mgr \cos \beta \quad (3.6)$$

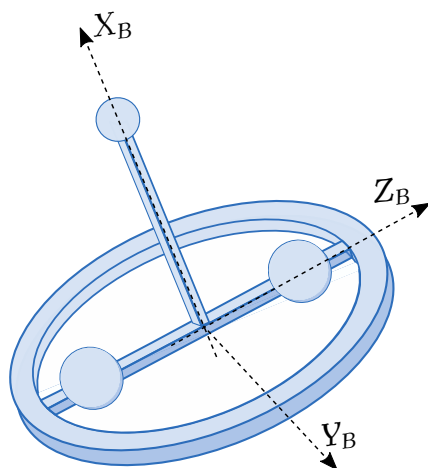
Rzeczywistym przykładem bąka Lagrange'a może być zabawka dziecięca zwana bąkiem, która została przedstawiona na rysunku 3.3 wraz z ilustracją modelu matematycznego.

### 3.2.2 Bąk Kowalewskiej

Bąk Kowalewskiej, podobnie jak bąk Lagrange'a, jest bąkiem symetrycznym, co skutkuje tym, że dwa momenty bezwładności są sobie równe [oMb]. Wyróżnia go jednak stosunek momentów bezwładności o tej samej wartości do trzeciego z nich,



Rysunek 3.3 Przykład bąków Lagrange'a: a) zabawka dziecięca, [LaT], b) ilustracja modelu



Rysunek 3.4 Ilustracja modelu bąka Kowalewskiej

tak, że zachodzi  $I_1 = I_2 = 2I_3$ . Przyjmujemy również, że położenie środka masy bąka znajduje się na pewnej płaszczyźnie prostopadłej do osi symetrii na przykład w pewnej odległości  $r$  od początku układu ciała wzdłuż osi  $OX_B$ .

Uwzględniając powyższe, funkcję Lagrange'a dla bąka Kowalewskiej można wyrazić równaniem

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = I_3 \left( \omega_1^2 + \omega_2^2 + \frac{1}{2} \omega_3^2 \right) - mgr \sin \beta \sin \gamma. \quad (3.7)$$

Ilustracja modelu została przedstawiona na rysunku 3.4.

### 3.2.3 Bąk Goryacheva-Chaplygina

Bąka Goryacheva-Chaplygina cechuje, podobnie jak dla bąka Kowalewskiej, symetria obrotowa oraz położenie środka masy na płaszczyźnie prostopadłej do osi obrotu. Różni się jednak od niego stosunkiem momentów bezwładności, które spełniają następującą równość  $I_1 = I_2 = 4I_3$ . W porównaniu do pozostałych bąków jest on rozwiązywalny algebraicznie tylko wtedy, gdy wektor momentu pędu jest prostopadły do wektora grawitacji [oMa] to znaczy zachodzi  $(\mathbf{m}, \mathbf{g}) = 0$ .

Przyjmując położenie środka masy tak, jak dla bąka Kowalewskiej lagranżian bąka Goryacheva-Chaplygina wyraża się formułą

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = I_3 \left( \omega_1^2 + \omega_2^2 + \frac{1}{4}\omega_3^2 \right) - mgr \sin \beta \sin \gamma. \quad (3.8)$$

## 4. Modele i analiza zachowań

Uzyskanie rozwiązań równań dynamiki badanych układów najczęściej wiąże się z wykorzystaniem skomplikowanego aparatu matematycznego oraz jego wyrafinowanych metod. W rozdziale tym postaramy się przybliżyć matematyczny opis bąków Eulera i Lagrange'a oraz zapoznać z zachowaniem tych obiektów, dokonując jakościowej analizy ich równań wspierając się geometryczną interpretacją wyników. Opis matematyczny pozostałych dwóch bąków: Kowalewskiej i Goryacheva-Chaplygina można znaleźć w [Lei63, Aud99].

### 4.1 Bąk Eulera

Klasyczne podejście do analizy zachowania bąka Eulera, znajdujące się w takich podręcznikach do mechaniki analitycznej jak [RK12, Arn81], oparte jest na wykorzystaniu równań Eulera-Newtona (4.1), które dla tego układu przyjmują postać układu trzech równań, mianowicie

$$\mathbf{m} = \mathbf{I}_B \frac{d}{dt} \boldsymbol{\omega}_B + \boldsymbol{\omega}_B \times \mathbf{I}_B \boldsymbol{\omega}_B, \quad (4.1)$$

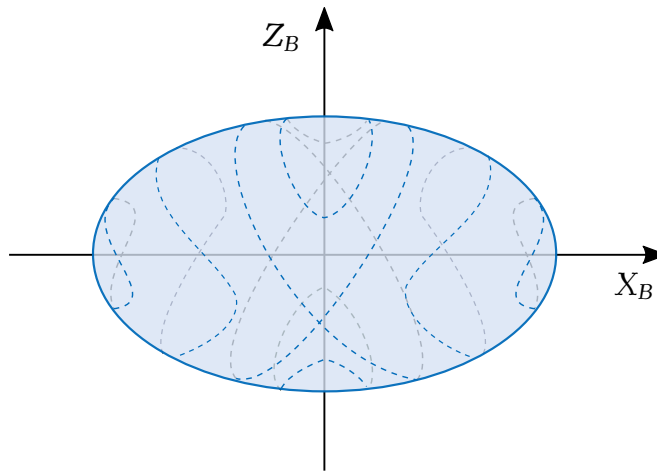
$$\begin{cases} m_1 = I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 \\ m_2 = I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_3 \omega_1 \\ m_3 = I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 \end{cases}, \quad (4.2)$$

gdzie  $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)^T$  oznacza zewnętrzny moment siły działający na bąka.

Jak wspomniano w podrozdziale 2.3 opisy układów mechanicznych za pomocą formalizmu Eulera-Newtona i Eulera-Lagrange'a są równoważne. Nie będzie więc nieścisłością jeśli podążymy za [Arn81] i przeprowadzimy analizę z wykorzystaniem powyższych równań, które ze względu na brak sił zewnętrznych działających na układ wyrażają się następująco

$$\begin{cases} 0 = I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 \\ 0 = I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_3 \omega_1 \\ 0 = I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 \end{cases}. \quad (4.3)$$

Mnożąc powyższe równanie skalarnie przez wektor prędkości kątowych  $\boldsymbol{\omega}_B$  i całkując uzyskany wynik otrzymujemy pierwszy niezmiennik, który stanowi energia całkowita układu, równa w tym przypadku jego energii kinetycznej  $K$ ,



Rysunek 4.1 Portret fazowy bąka Eulera

$$2K = I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2. \quad (4.4)$$

Dokonując ponownie skalarne go mnożenia równań (4.3) tym razem przez wektorem momentu pędu oraz całkując tak otrzymane równanie dostajemy drugi niezmiennik związany z zasadą zachowania momentu pędu w układzie przestrzeni

$$m^2 = I_1^2\omega_1^2 + I_2^2\omega_2^2 + I_3^2\omega_3^2. \quad (4.5)$$

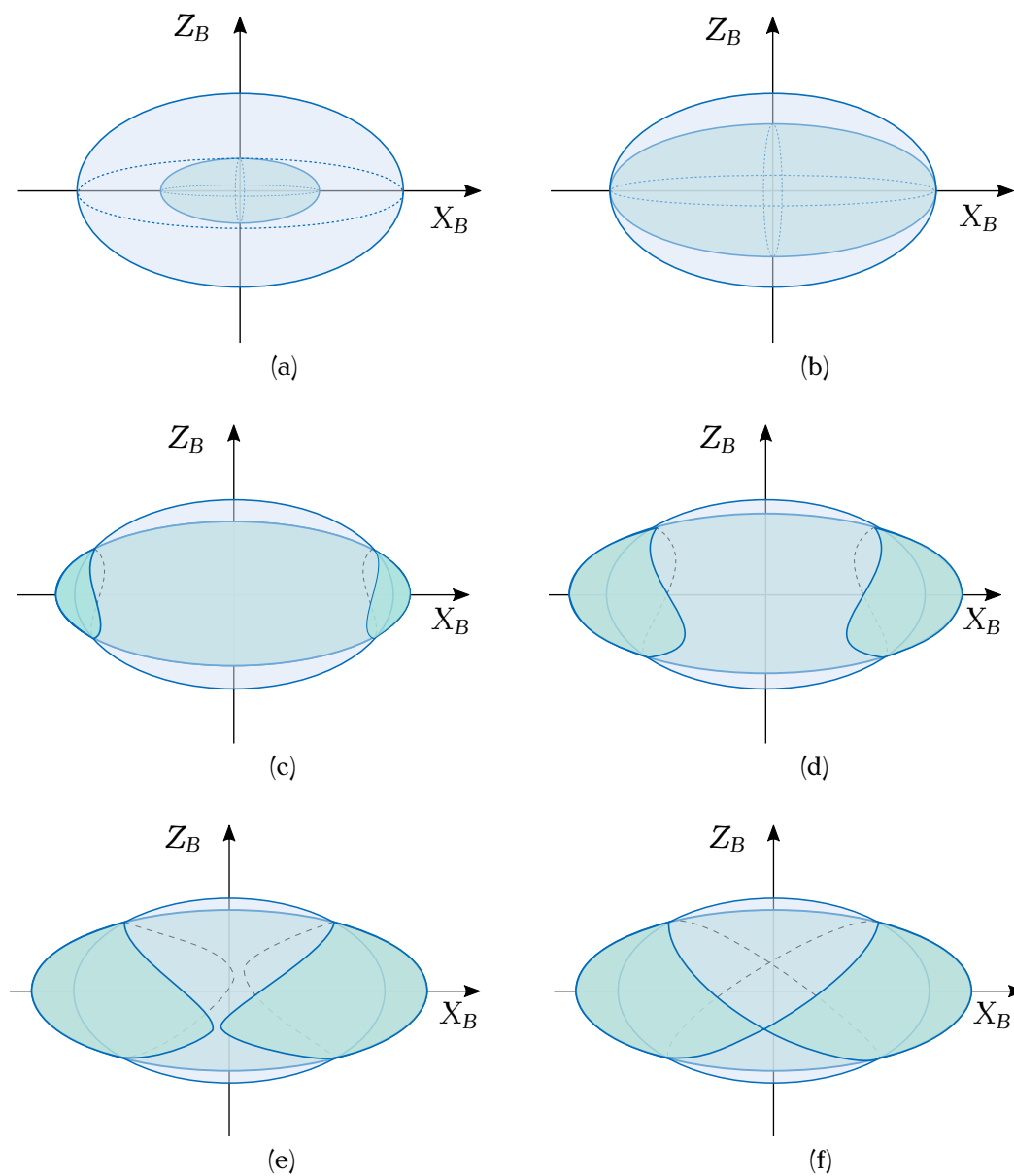
Korzystając z wyznaczonych całek ruchu możliwe jest uzyskanie rozwiązań układu równań różniczkowych opisujących ruch bąka Eulera. Szczegółowe ich wyprowadzenie można znaleźć w [LL82] lub [Lei63].

#### 4.1.1 Elipsoidy Poinso

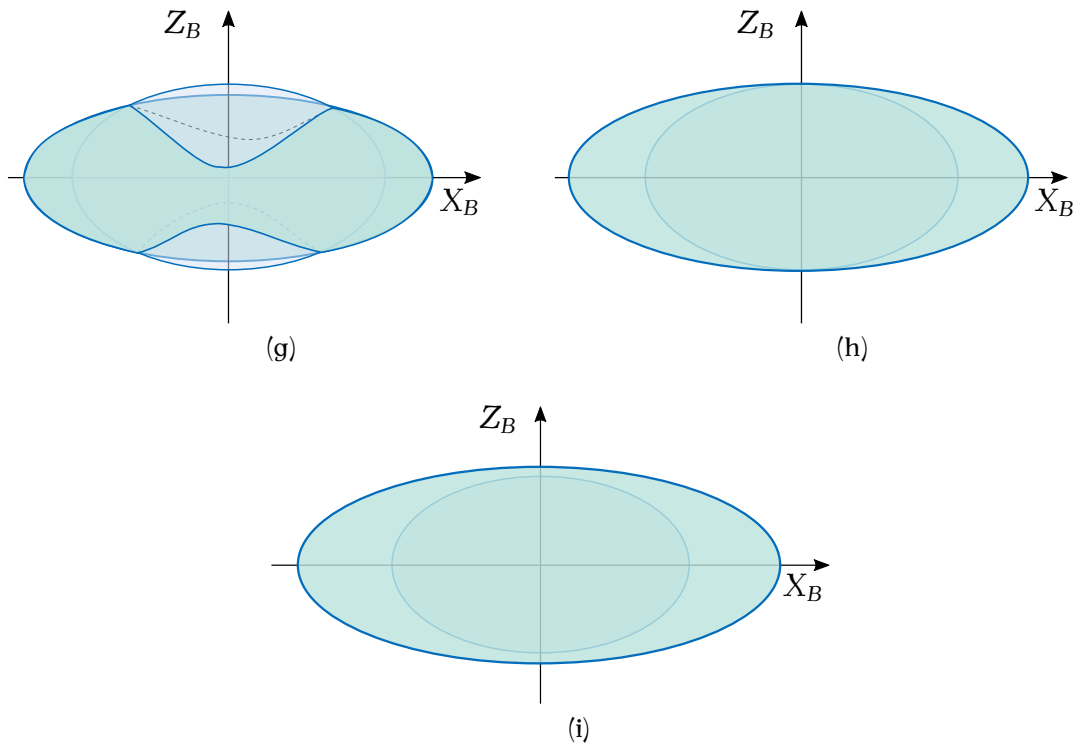
Jakościowej analizie równań Eulera dla bąka swobodnego dokonał L. Poinso wprowadzając geometryczną interpretację niezmienników (4.4) i (4.5). Zauważył on, że przytoczone równania opisują powierzchnie elipsoid, gdzie pierwsza z nich nazywana jest elipsoidą bezwładności – szerzej opisaną w podrozdziale 2.2 – zaś druga nazwana została elipsoidą momentu pędu. Spełnienie obu równości wymaga, aby wektor prędkości  $\omega_B$  poruszał się po krzywej przecięcia obu elipsoid, co pozwala na badanie zachowań układu.

Zakładając dla ustalenia uwagi wartości momentów  $I_1 < I_2 < I_3$  oraz przyjmując pewną początkową wartość energii kinetycznej, możemy wyznaczyć rodzinę portretów fazowych układu parametryzowanych wartością momentu pędu i zobrazować w ten sposób możliwe stadia zachowań bąka, co zostało przedstawione na rysunku 4.1.

Szczególne stadia powstawania portretu fazowego zostały przedstawione na rysunku 4.2. Rozpoczynamy rysowanie krzywych fazowych od dostatecznie małej wartości momentu pędu. Możemy wówczas zauważyć, że elipsoidalna jemu odpowiadająca znajduje się całkowicie wewnątrz elipsoidalności bezwładności (zobacz rysunek 4.2a). Oznacza to, że ruch przy tak dobranych parametrach nie jest możliwy.



Rysunek 4.2 Kolejne etapy powstawania portretu fazowego (cdn.)



Rysunek 4.2 Kolejne etapy powstawania portretu fazowego (cd.)

Zwiększanie wartości momentu pędu doprowadza w efekcie do sytuacji, w której otrzymujemy przecięcia elipsoid w punktach biegunów związanych z najdłuższymi półosiami odpowiadającymi najmniejszemu momentowi bezwładności. W naszym przypadku, jest to  $I_1$  (zobacz rysunek 4.2b). Przy dalszym zwiększaniu momentu pędu formują się wokół osi  $OX_B$  krzywe zamknięte (rysunki 4.2c,d), które przy rzucie na płaszczyznę  $OX_b Y_b$  tworzą hiperbole, aż do momentu gdy niezależne krzywe przecinają się (rysunki 4.2e,f). Odpowiada to niestabilnym obrotom wokół osi elipsy powiązanej z pośrednim momentem bezwładności.

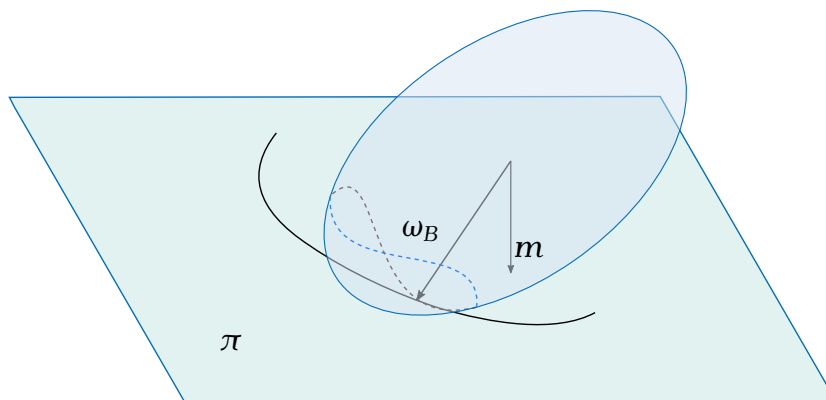
Przy dalszym zwiększaniu wartości momentu pędu otrzymujemy przecięcia wokół osi odpowiadającej największemu momentowi bezwładności (rysunek 4.2g). Idąc dalej dla pewnej wartości otrzymamy ponownie przecięcia w pojedynczych punktach (rysunek 4.2h), po czym wracamy do sytuacji, w której rozwiązania nie istnieją (rysunek 4.2i).

Zauważmy, że elipsoidy zostały wykreślone w układzie, dla którego macierz inercji przyjmuje postać diagonalną, z głównymi momentami bezwładności na przekątnej, w związku z czym możemy ten układ skojarzyć z układem ciała, w którym krzywe przecięcia elipsoid wyznaczają trajektorię osi chwilowej obrotu bąka. W literaturze trajektoria ta nazywana jest polhodią [RK12]. Nazwa ta ma swój początek w zagadnieniu ruchu obrotowego Ziemi jako bąka swobodnego.

Rozpatrując przebieg ruchu chwilowej osi obrotu w układzie przestrzeni zauważmy, że rzutując wektor prędkości  $\boldsymbol{\omega}_B$  na wektor momentu pędu  $\mathbf{m}$  otrzymujemy

$$(\boldsymbol{\omega}_B, \mathbf{m}) = \boldsymbol{\omega}_B^T \mathbf{I}_B \boldsymbol{\omega}_B = \boldsymbol{\omega}_{B\parallel} m = 2T, \quad (4.6)$$

z czego wynika, że długość składowej równoległej prędkości  $\boldsymbol{\omega}_{B\parallel}$  do wektora mo-



Rysunek 4.3 Konstrukcja herpolhoidii

mentu pędu jest stała

$$\omega_{B\parallel} = \frac{2T}{m} = \text{const.} \quad (4.7)$$

Biorąc również pod uwagę, że wektor momentu pędu oprócz stałej długości ma także, wynikający z warunków początkowych stały kierunek, wektor  $\omega_{B\parallel}$  również będzie posiadał te własności. Możemy więc poprowadzić taką płaszczyznę  $\pi$  o stałym wektorze normalnym  $\omega_{B\parallel}$ , na której zawsze będzie znajdował się koniec wektora prędkości  $\omega_B$ . Wynika z tego, że polhodia, ma zawsze punkt wspólny ze skonstruowaną płaszczyzną w układzie przestrzeni. Zbiór tych punktów w różnych chwilach tworzy krzywą leżącą w  $\pi$ , która nazywana jest herpolhodią. Punkt styczności polhoidii z herpolhodią w układzie ciała ma zerową prędkość ze względu na położenie na osi obrotu, z czego wnioskujemy, że elipsoida obraca się bez poślizgu po płaszczyźnie  $\pi$ . Konstrukcja herpolhoidii została przedstawiona na rysunku 4.3.

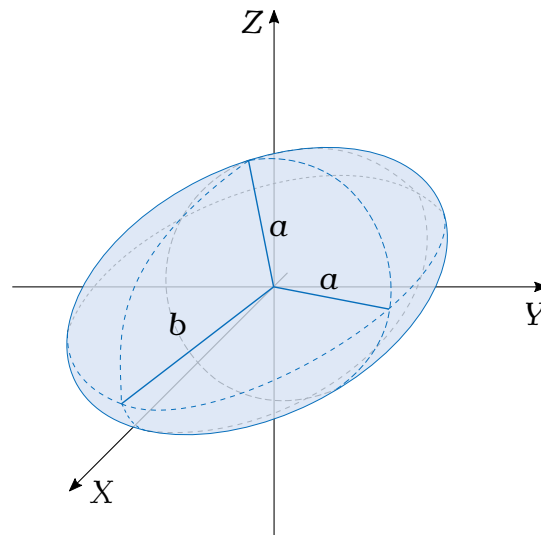
#### 4.1.2 Symetryczny bąk Eulera

Szczególnym przypadkiem bąka Eulera jest przypadek, gdy podobnie jak w bąku Lagrange'a, dwa z trzech momentów bezwładności są sobie równe. To znaczy, gdy obiekt ten ma symetrię obrotową wzdłuż osi powiązanej z trzecim momentem bezwładności. Takie bąki nazywać będziemy symetrycznym bąkiem Eulera. Elipsoida bezwładności oraz elipsoida momentu pędu takiego obiektu stają się wtedy elipsoidami obrotowymi. Przykład elipsoidy obrotowej został przedstawiony na rysunku 4.4. Zauważmy, że ze względu na wprowadzoną symetrię polhodie stają się okręgami, co zostało przedstawione na rysunku 4.5. Zanika również stadium nietrwałego obrotu wokół osi odpowiadającej średniemu momentowi bezwładności. Zakładając bez straty ogólności  $I_1 = I_2 = I$ , równania Eulera-Newtona ruchu obrotowego dla tego przypadku przyjmują postać

$$\begin{cases} 0 = I\dot{\omega}_1 + (I_3 - I)\omega_2\omega_3 \\ 0 = I\dot{\omega}_2 + (I - I_3)\omega_3\omega_1 \\ 0 = I_3\dot{\omega}_3 \end{cases}, \quad (4.8)$$

Z równań (4.8) wynika, że moment pędu wzdłuż trzeciej osi nie zmienia się w czasie i zależy od warunków początkowych, wobec czego układ trzech równań (4.8)





Rysunek 4.4 Elipsoidal obrotowa

upraszcza się do

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 = (I - I_3) \omega_2 m_3 \\ I_2 \dot{\omega}_2 = (I_3 - I) \omega_1 m_3 \\ m_3 = I_3 \omega_3 \end{cases}, \quad (4.9)$$

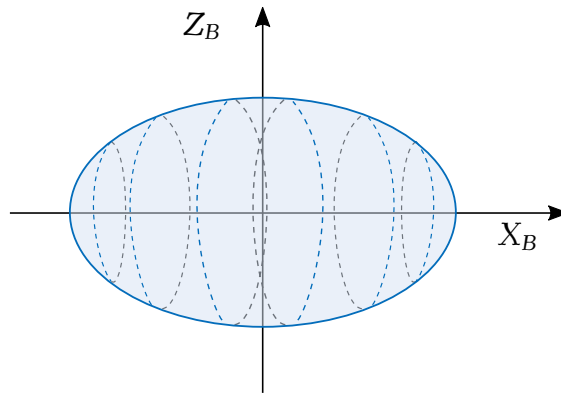
gdzie  $\omega_3$  to warunek początkowy dla składowej prędkości kątowej. Rozwiązując powyższy układ równań różniczkowych liniowych pierwszego rzędu otrzymujemy

$$\begin{cases} \omega_1 = R \sin(ft + C) \\ \omega_2 = R \cos(ft + C) \\ \omega_3 = \omega_3 \end{cases}, \quad (4.10)$$

gdzie  $R = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$  przy czym  $\omega_1, \omega_2$  to prędkości początkowe,  $f = \frac{I - I_3}{I} \omega_3$ ,  $C$  – stała całkowania. Na podstawie uzyskanych wyników widzimy, że rzeczywiście oś obrotu poruszać się będzie po okręgach o promieniu  $R$  z częstotliwością  $f$  zależną od warunków początkowych. Rozwiązanie równań (4.10) wyrażone w kątach Eulera możemy znaleźć w [RK12].

## 4.2 Bąk Lagrange'a

W ogólnym przypadku ruchu niesymetrycznego ciała sztywnego wokół ustalonego punktu mamy dwa niezmienniki. Niezmienną energię całkowitą układu  $E$  wynikającą z zasady zachowania energii oraz rzut wektora momentu pędu  $m_3$  na oś pionową  $Z_S$  układu przestrzeni. Stałość w czasie drugiej z całek ruchu wynika z tego, że obrót ciała wokół osi  $OZ$  nie zmienia wysokości, na której znajduje się środek ciężkości ciała, tym samym lagranżian układu pozostanie niezmienny. Symetria obrotowa oraz fakt, że środek ciężkości leży na osi obrotu w przypadku bąka Lagrange'a wprowadza nam trzeci niezmiennik związany z obrotem wokół tej osi i jest nim rzut momentu pędu na oś rozpinaną przez wektor  $e_z$  układu ciała.



Rysunek 4.5 Portret fazowy symetrycznego bąka Eulera

Rzeczywiście, zauważmy, że z definicji ruchu obrotowego punkty na osi obrotu nie zmieniają swojego położenia.

#### 4.2.1 Analiza z wykorzystaniem formalizmu Lagrange'a

Powyższe własności można również uzyskać z wykorzystaniem wprowadzonego w rozdziale 2 formalizmu Lagrange'a. I tak, wyrażając prędkości w ciele za pomocą kątów Eulera lagranżian (3.6) przyjmuje następującą postać

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \left( I_1 (\dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}^2 \sin^2 \beta) + I_3 (\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \cos \beta)^2 \right) - mgr \cos \beta, \quad (4.11)$$

Zauważmy, że funkcja Lagrange'a nie zależy od  $\alpha$  ani od  $\gamma$ , zachodzi więc

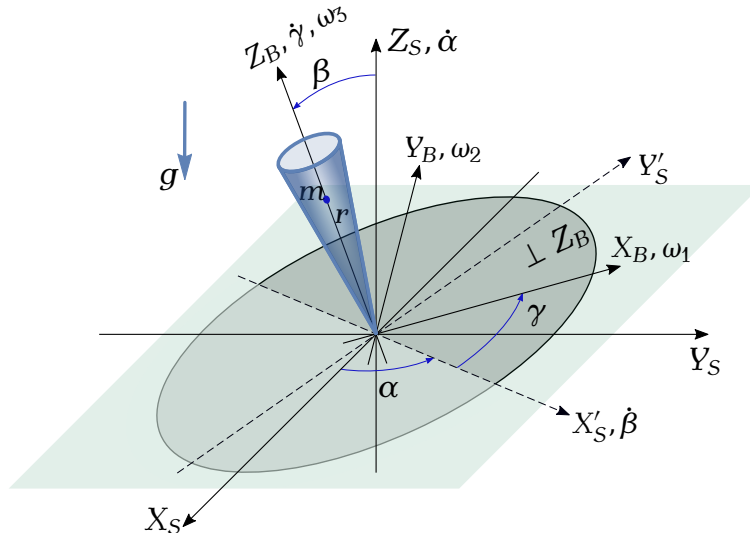
$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \gamma} = 0.$$

Zapisując równania Eulera-Lagrange'a dostaniemy układ trzech równań różniczkowych drugiego rzędu, z których dwa są stałe w czasie, wyznaczają więc pędy będące całkami pierwszymi

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} (\dot{\alpha} (I_1 \sin^2 \beta + I_3 \cos^2 \beta) + I_3 \dot{\gamma} \cos \beta) = 0 \\ I_1 \ddot{\beta} + (I_3 - I_1) \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta + I_3 \dot{\alpha} \dot{\gamma} \sin \beta - mgr \sin \beta = 0 \\ \frac{d}{dt} (I_3 (\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \cos \beta)) = 0 \end{cases} \quad (4.12)$$

Biorąc to pod uwagę możemy zapisać

$$\begin{cases} \dot{\alpha} (I_1 \sin^2 \beta + I_3 \cos^2 \beta) + I_3 \dot{\gamma} \cos \beta = \text{const} = m_3 \\ I_1 \ddot{\beta} + (I_3 - I_1) \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta + I_3 \dot{\alpha} \dot{\gamma} \sin \beta - mgr \sin \beta = 0 \\ I_3 (\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \cos \beta) = \text{const} = m_Z \end{cases} \quad (4.13)$$



Rysunek 4.6 Opis bąka Lagrange'a w kątach Eulera, [TM18]

gdzie pierwsze z równań opisuje rzut pędu na wersor  $\mathbf{e}_3$  układu przestrzeni. Możemy sprawdzić to dokonując rzutowania, a mianowicie

$$(\mathbf{I}_B \boldsymbol{\omega}_B, \mathbf{e}_3) = (\mathbf{I}_B \boldsymbol{\omega}_B, \mathbf{R}^T \mathbf{e}_z) = \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \sin \beta \sin \gamma + \dot{\beta} \cos \gamma \\ \dot{\alpha} \sin \beta \cos \gamma - \dot{\beta} \sin \gamma \\ \dot{\alpha} \cos \beta + \dot{\gamma} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \sin \beta \sin \gamma \\ \cos \gamma \sin \beta \\ \cos \beta \end{pmatrix} = \dot{\alpha} (I_1 \sin^2 \beta + I_3 \cos^2 \beta) + I_3 \dot{\gamma} \cos \beta \quad (4.14)$$

Ostatnie z równań (4.13) otrzymać możemy w analogiczny sposób, dokonując rzutowania wektora momentu pędu na wersor  $\mathbf{e}_z$ .

Wykorzystując całki ruchu, energię całkowitą układu możemy zapisać jako

$$E_C = \frac{1}{2} I_1 \dot{\beta}^2 + U(\beta), \quad (4.15)$$

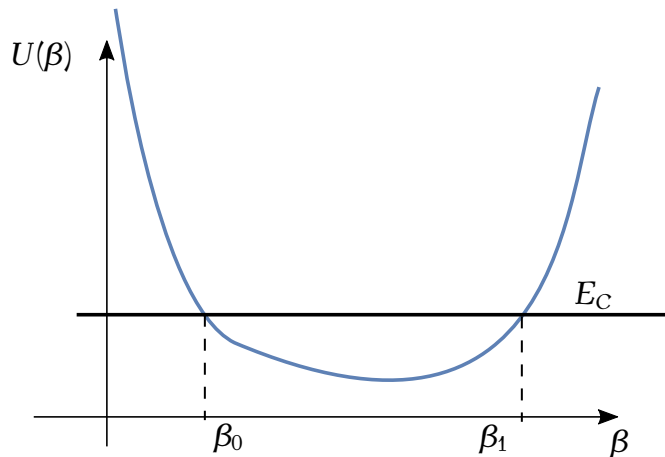
gdzie  $U(\beta)$  jest tak zwanym potencjałem efektywnym, który wyraża się wzorem

$$U(\beta) = \frac{m_z^2}{2I_3} + mgr \cos \beta + \frac{(m_3 - m_z \cos \beta)^2}{2I_1 \sin^2 \beta}.$$

Wykreślając funkcję efektywnego potencjału przy ustalonym  $m_z$ ,  $m_3$  oraz nanosząc wykres energii całkowitej układu otrzymujemy wartości graniczne dla kąta nutacji  $\beta_0$  oraz  $\beta_1$ , pomiędzy którymi bąk będzie się wahał. Ilustracja opisanej konstrukcji została przedstawiona na rysunku 4.7. Gdy wykres energii całkowitej nie przecina wykresu  $U(\beta)$  oznacza to, że układ taki jest nierealizowany fizycznie jako bąk – posiada ujemną energię kinetyczną.

W celu przeprowadzenia dokładniejszej analizy zachowania bąka Lagrange'a za-uważmy za [Arn81], że wyraz  $\frac{m_z^2}{2I_3}$  nie zależy od  $\beta$  w równaniu (4.15), możemy więc zapisać

$$\dot{\beta}^2 = \frac{1}{I_1} \left( 2E - \frac{(m_3 - m_z \cos \beta)^2}{I_1 \sin^2 \beta} - 2mgr \cos \beta \right), \quad (4.16)$$



Rysunek 4.7 Wykres efektywnego potencjału

gdzie  $E = E_C - \frac{m_z^2}{2I_3}$ . Podstawiając zmienną pomocniczą  $u = \cos \theta$  oraz oznaczając jak w [TM18]

$$a = \frac{2E}{I_1}, \quad b = \frac{2mgr}{I_1}, \quad c = \frac{m_3}{I_1}, \quad d = \frac{m_z}{I_1} \quad (4.17)$$

dostajemy funkcję

$$f(u) = \dot{u}^2 = (a - bu)(1 - u^2) - (c - du)^2, \quad (4.18)$$

opisującą kwadrat prędkości zmian wprowadzonej zmiennej pomocniczej  $u$ . Ze względu na którą interesuje nas nieujemna część wykresu w przedziale  $-1 \leq u \leq 1$ . Warto zauważyć, że parametry  $a, b, c, d$  nie są niezależne i z założenia, że  $f(u) \geq 0$  mamy przy zadanych  $b, c$  oraz  $d$  warunek dla  $a$

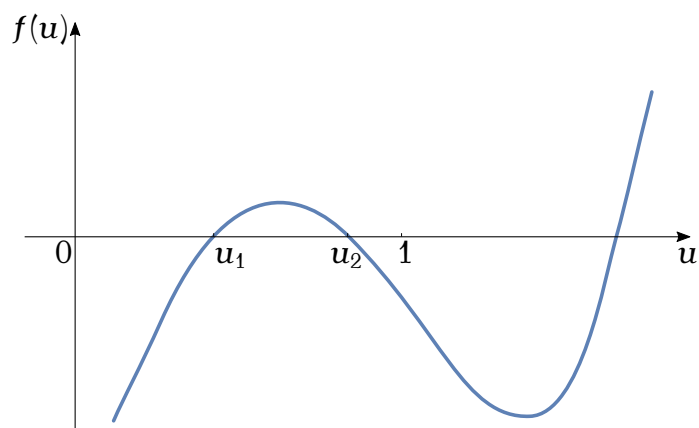
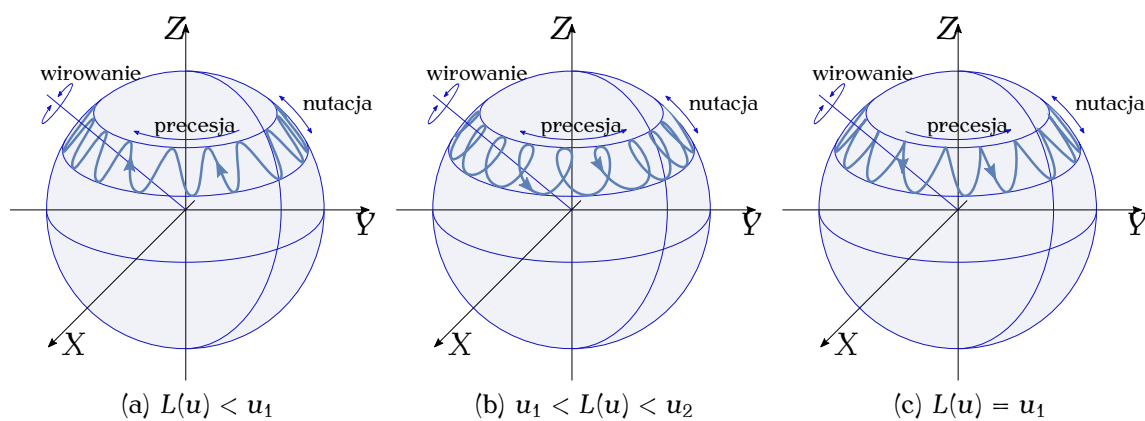
$$a \geq \frac{(c - du_0)^2}{1 - u_0^2} + bu_0, \quad (4.19)$$

gdzie  $u_0$  – warunek początkowy wynoszący  $u_0 = \cos \beta_0$ . Funkcja  $f(u)$  została przedstawiona na rysunku 4.8. Opisując zmianę kąta precesji w wprowadzonych parametrach otrzymujemy

$$\dot{\alpha} = \frac{c - du}{1 - u^2} = \frac{L(u)}{1 - u^2}. \quad (4.20)$$

Zauważając, że ze względu na dodatni mianownik, zmiana kąta zależy od znaku licznika oznaczonego jako  $L(u)$ . Analizując znak licznika możemy uzyskać następujące przypadki zachowań przedstawione na rysunku 4.9. Jeśli więc miejsce zerowe prostej  $L(u)$  leży poza przedziałem domkniętym  $(u_1, u_2)$ , przebieg zmienności kąta  $\alpha$  jest monotoniczny, czemu odpowiada rysunek 4.9a. Jeśli punkt przecięcia prostej  $L(u)$  z osią OU leży w przedziale  $(u_1, u_2)$ , wtedy w trakcie ewolucji układu pochodna kąta precesji zmienia znak, co zostało przedstawione na rysunku 4.9b. Jeżeli punkt przecięcia znajduje się na jednym z końców przedziału, wtedy koniec osi obrotu kreśli na sferze trajektorie ukazane na rysunku 4.9c.

Tą samą analizę można przeprowadzić z wykorzystaniem formalizmu Hamiltona, co zostało dokonane w [TM18].

Rysunek 4.8 Przebieg funkcji  $f(u)$ , [TM18]

Rysunek 4.9 Trajektorie Bąka Lagrange'a, [TM18]

### 4.2.2 Wzory asymptotyczne

Badając zachowanie funkcji  $f(u)$  (4.18) wymnóżmy nawiasy oraz uporządkujmy uzyskany wielomian według potęg. Otrzymamy wtedy

$$f(u) = bu^3 - (a + d^2)u^2 + (2cd - b)u + a - c^2. \quad (4.21)$$

Zakładając, że puszcza bąka z następującymi warunkami początkowymi

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = 0 \\ \dot{\beta} = 0 \\ \beta = \beta_0 \\ \dot{\gamma} = \dot{\gamma}_0 \end{cases}$$

otrzymujemy

$$m_3 = m_z = I_3 \omega_z,$$

z czego wynika

$$c = \frac{m_z \cos \beta_0}{I_1} = d \cos \beta_0,$$

a także

$$a = \frac{2mgr \cos \beta_0}{I_1} = b \cos \beta_0.$$

Zakładając dodatkowo, że  $b \ll d^2$  możemy napisać, że w przybliżeniu zachodzi

$$f(u) \approx -d^2 u^2 + d^2 \cos \beta_0 u - (d \cos \beta_0)^2.$$

Uproszczając otrzymujemy

$$f(u) \approx -d^2 (u - \cos \beta_0)^2 \quad (4.22)$$

z czego wynika, że przy  $\omega_z \rightarrow \infty$  bądź  $I_3 \rightarrow \infty$  istnieje podwójny pierwiastek w  $u = \cos \beta_0$ , a także zachodzi  $\dot{\alpha} = 0$ . Puszczone bąki pozostają w miejscu zdefiniowanym przez warunki początkowe. Dla zdefiniowanych założeń zachodzą również następujące wzory asymptotyczne

$$\begin{aligned} f_{nut} &\sim \frac{m_z}{I_1}, \\ a_{nut} &\sim \frac{I_1 mgr}{m_z^2} \sin \beta_0, \\ f_{prec} &\sim \frac{mgr}{m_z}. \end{aligned}$$

które zostały wyprowadzone oraz szczegółowo omówione w [Arn81].

## 5. Badania symulacyjne

Na podstawie wprowadzonych modeli dynamiki bąków przeprowadzono szereg symulacji komputerowych w celu sprawdzenia przewidywanych zachowań badanych obiektów. Program stworzono z wykorzystaniem systemu obliczeń symbolicznych i numerycznych Wolfram Mathematica [Mat], za pomocą którego dokonano również wizualizacji otrzymanych danych. W rozdziale tym zostaną przedstawione stworzone systemy do badań symulacyjnych oraz rezultaty symulacji dla bąków Eulera i Lagrange'a.

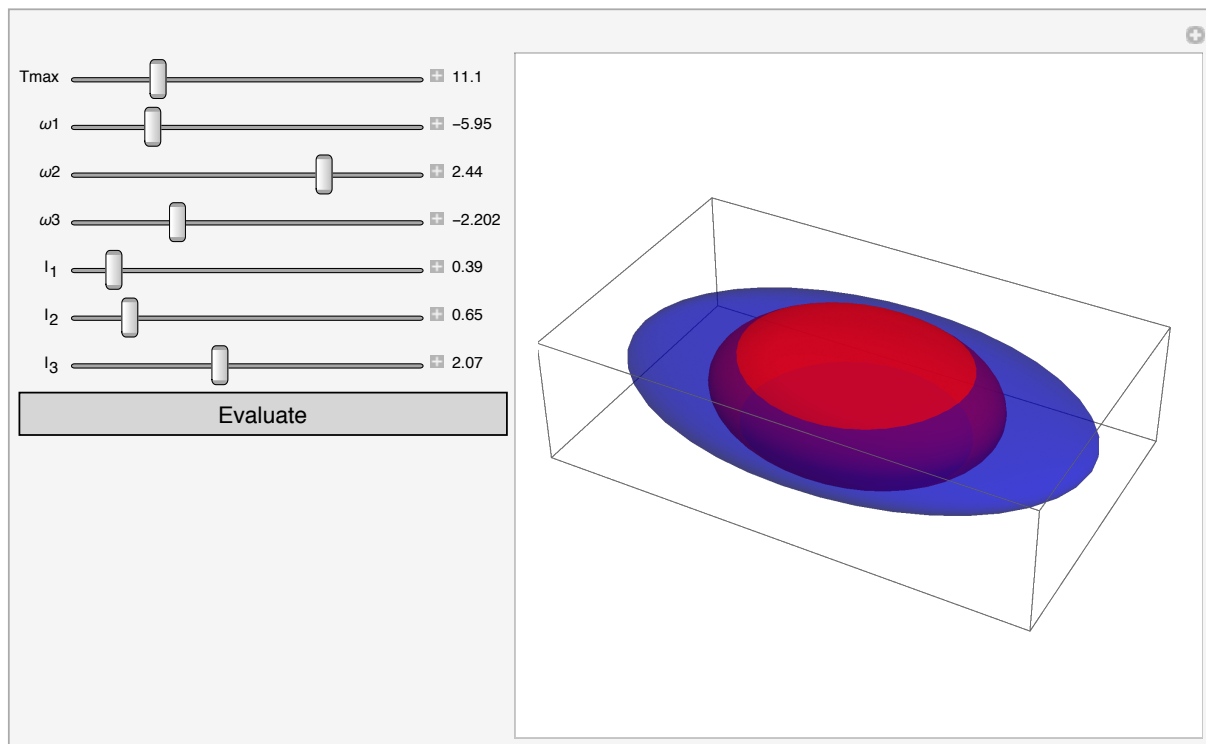
### 5.1 Bąk Eulera

Interfejs użytkownika skryptu symulacyjnego składa się z części udostępniającej panel kontrolny, pozwalający na ustawienie parametrów symulacji i podgląd elipsoid oraz z części wizualizującej zachowanie bąka Eulera – służący do wykreślenia polhodi i herpolhodi, a także wykresów przedstawiających zmianę kątów Eulera w czasie trwania symulacji. Wygląd interfejsu został przedstawiony na rysunku 5.1. Wyniki symulacji niesymetrycznego bąka Eulera zostały przedstawione na rysunku 5.2. Przypadek symetryczny został przedstawiony na rysunku 5.3.

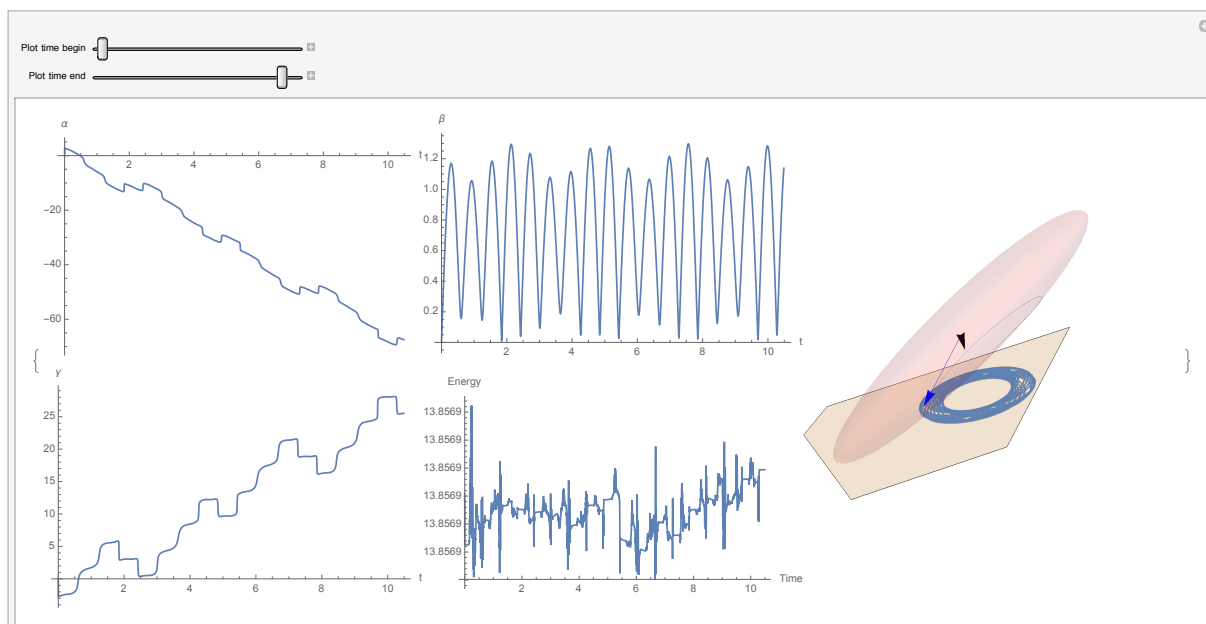
Zgodnie z przewidywaniami teoretycznymi udało się uzyskać przebiegi niesymetrycznego bąka Eulera, dla którego polhodia ma zawsze jeden punkt wspólny z herpolhodią leżącą na stałej płaszczyźnie  $\pi$ . W przypadku symetrycznego bąka Eulera, hodograf wektora prędkości kątowej przyjmuje postać okręgów na jego elipsoidzie bezwładności oraz na płaszczyźnie  $\pi$ .

### 5.2 Bąk Lagrange'a

Interfejs użytkownika skryptu do symulacji bąka Lagrange'a składa się z dwóch części przedstawionych na rysunku 5.4a i rysunku 5.4b. Pierwsza z nich pozwala na określenie parametrów symulacji oraz podglądu wykresów wykorzystywanych do analizy wprowadzonych w podrozdziale 4.2.1. Druga część wizualizuje rozwiązanie uzyskane za pomocą całkowania numerycznego. Na jej całość składają się wykresy zmian kątów Eulera w czasie, wykres energii całkowitej układu mający na celu weryfikację jego niezmienności w czasie, a także poprawności modelu, oraz trójwymiarowa wizualizacja przedstawiająca hodograf wektora położenia środka ciężkości.



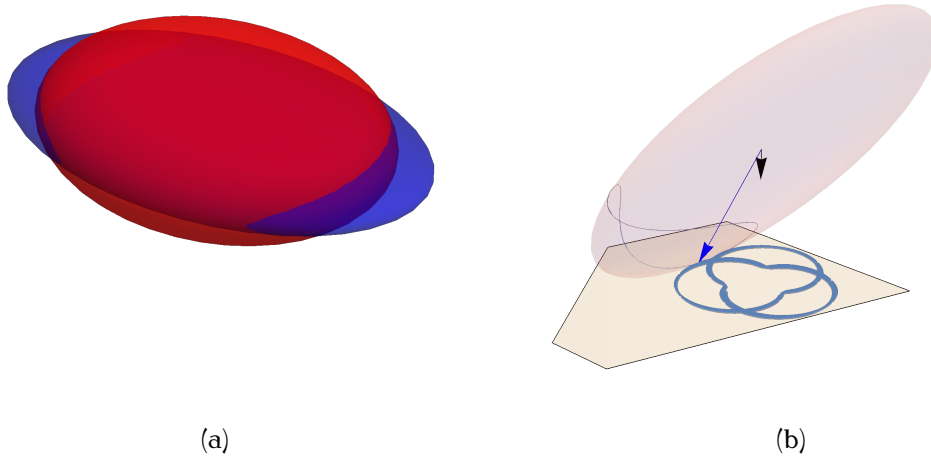
(a)



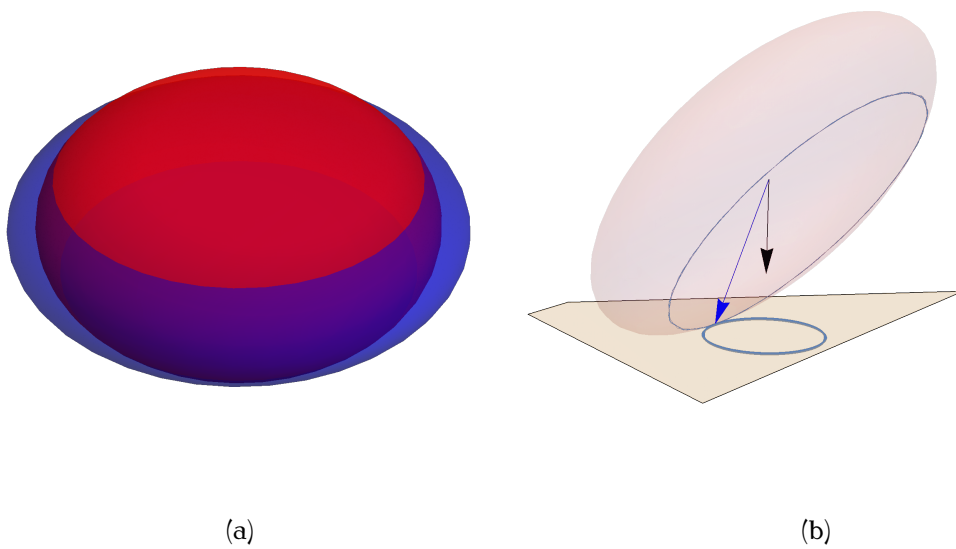
(b)

Rysunek 5.1 Interfejs użytkownika dla symulacji bąka Eulera

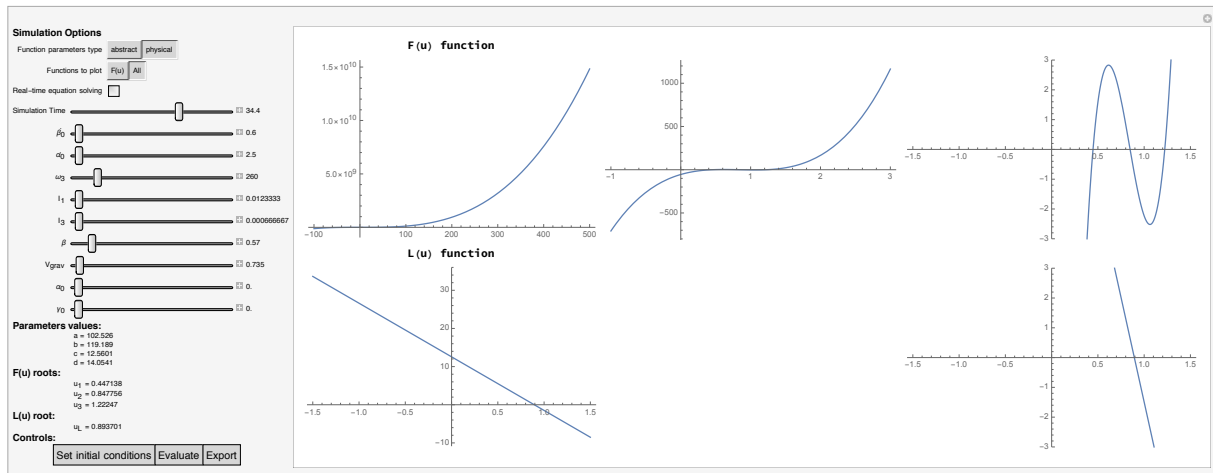




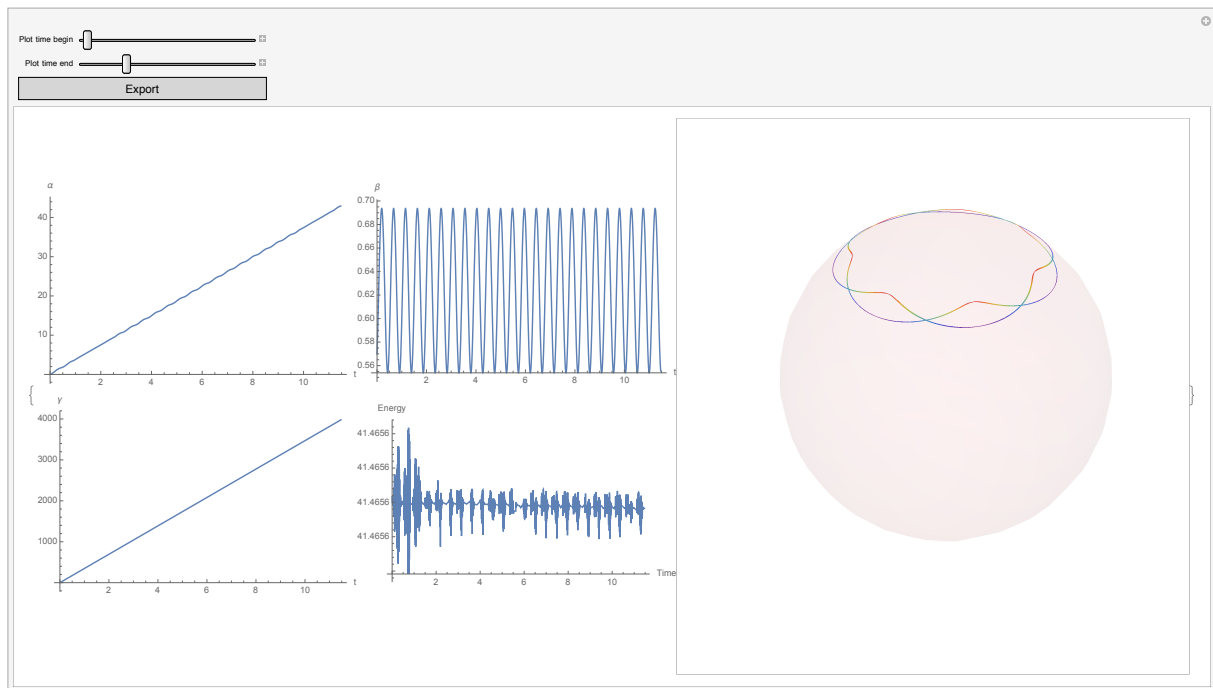
Rysunek 5.2 Symulacja niesymetrycznego bąka Eulera



Rysunek 5.3 Symulacja symetrycznego bąka Eulera

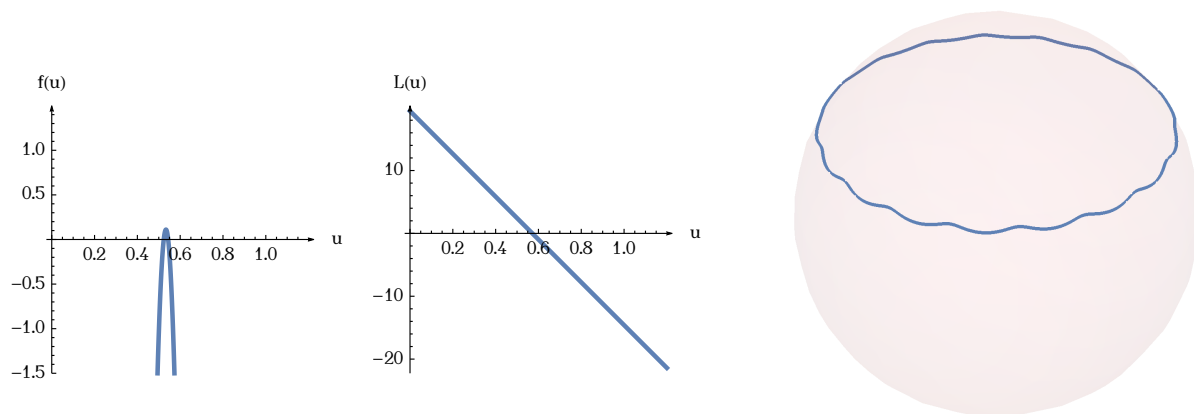


(a)



(b)

Rysunek 5.4 Interfejs użytkownika dla symulacji bąka Lagrange'a

Rysunek 5.5 Przebieg dla  $u_L > u_2$ ,  $a = 66.081$ 

### 5.2.1 Przebiegi bąka Lagrange'a

Zgodnie z teorią, dobrano tak parametry przedstawionej w podrozdziale 4.2.1 funkcji  $f(u)$  oraz warunki początkowe układu równań różniczkowych opisujących ruch symetrycznego bąka ciężkiego, aby uzyskać charakterystyczne przebiegi hodografu. W celu przedstawienia przejścia pomiędzy trzema typowymi zachowaniami bąków zasymulowano równania ruchu (4.13) dla pięciu przypadków, gdy

$$u_L > u_2,$$

$$u_L \approx^+ u_2,$$

$$u_L = u_2,$$

$$u_L \approx^- u_2,$$

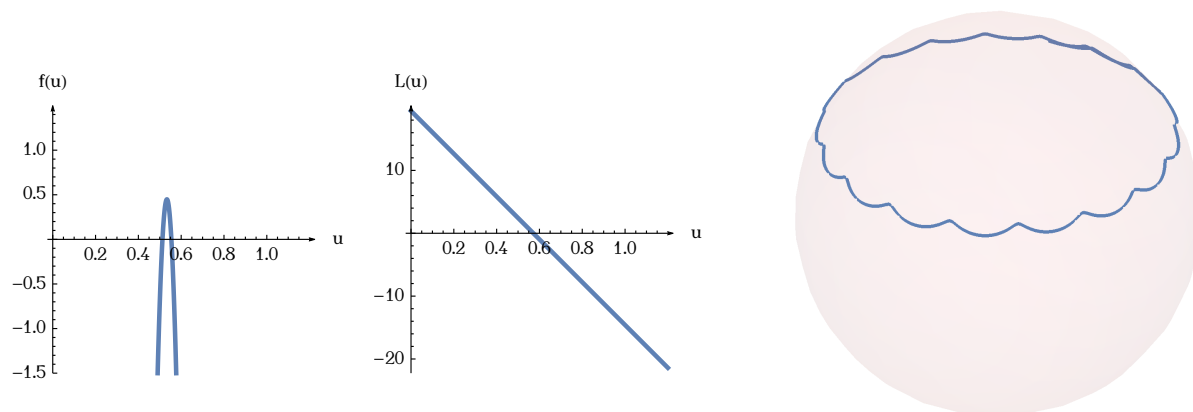
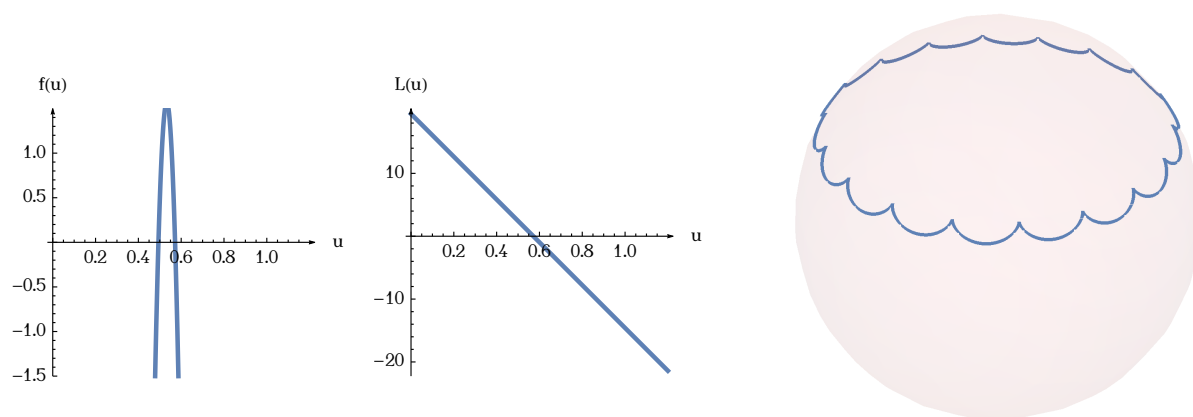
$$u_1 < u_L < u_2,$$

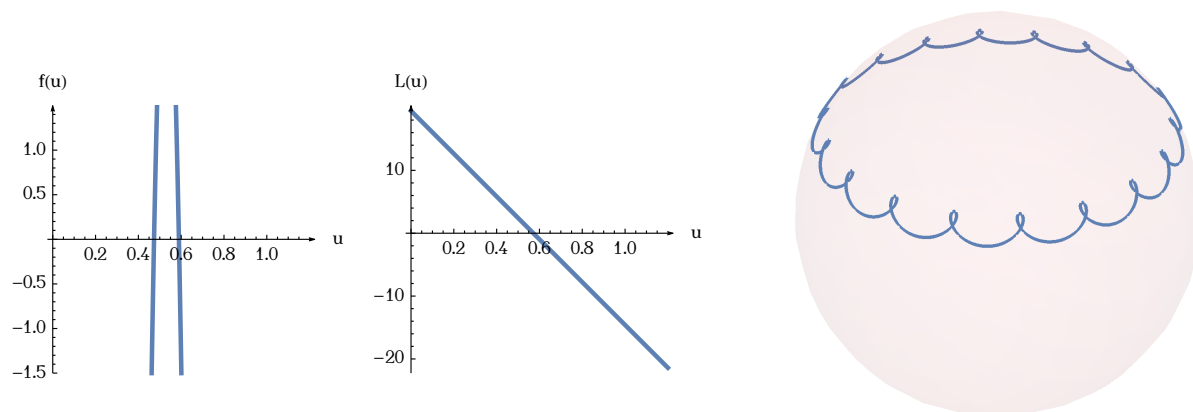
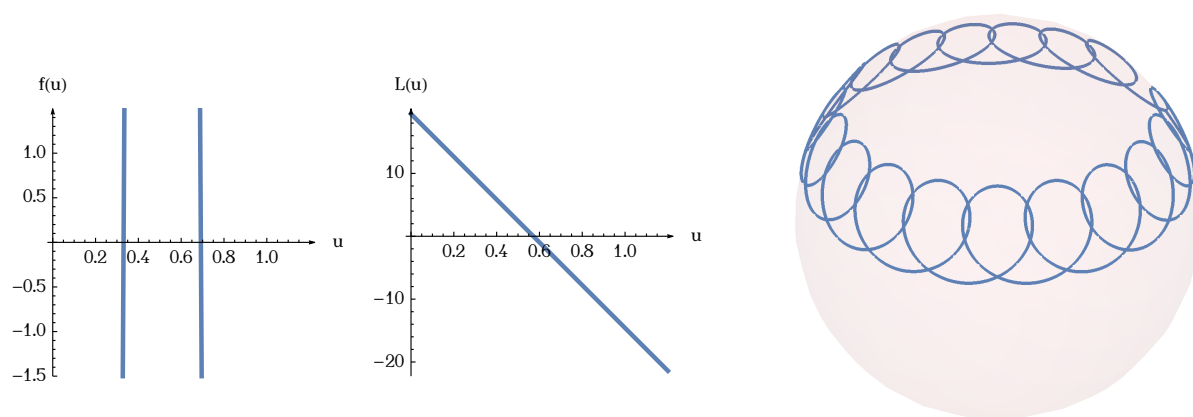
gdzie  $u_L$  jest miejscem zerowym funkcji  $L(u)$ ,  $\approx^+$  oznacza „w przybliżeniu ale większe od”, a  $\approx^-$  symetrycznie „w przybliżeniu ale mniejsze od”. Zostały one przedstawione na rysunkach 5.5 – 5.9 dla zmiennego parametru  $a$  oraz ustalonych parametrów  $b = 119.189$ ,  $c = 19.461$ ,  $d = 34.054$ .

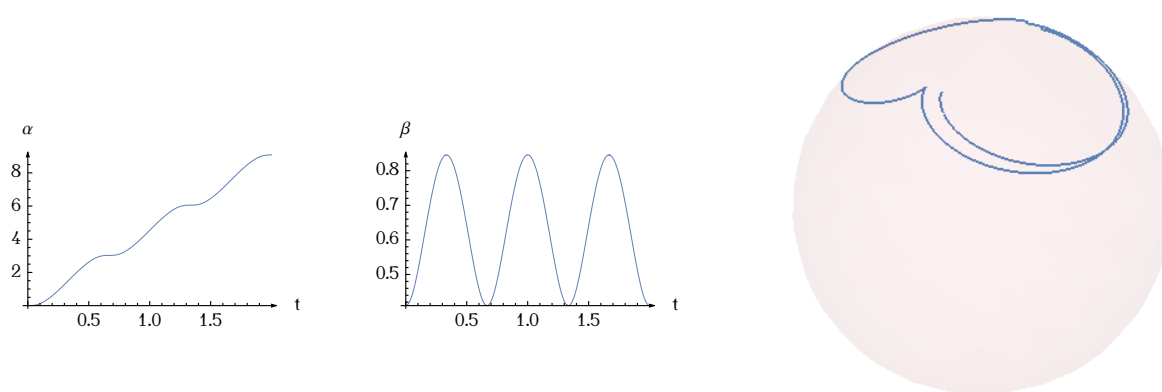
I tak, widzimy, że dla  $u_L$  leżącego poza przedziałem domkniętym  $(u_1, u_2)$  otrzymujemy przebieg podobny do sinusoidalnego (rysunek 5.5). Wraz, ze zbliżaniem się miejsca zerowego funkcji  $L(u)$ , opisanej w podrozdziale (4.2.1), do jednego z końców przedziału przebieg zaczyna formować ostrza (rysunek 5.6, rysunek 5.7). Gdy  $u_L$  zmniejsza się zaczyna formować pętle (rysunek 5.8, rysunek 5.9).

### 5.2.2 Zachowania szczególne

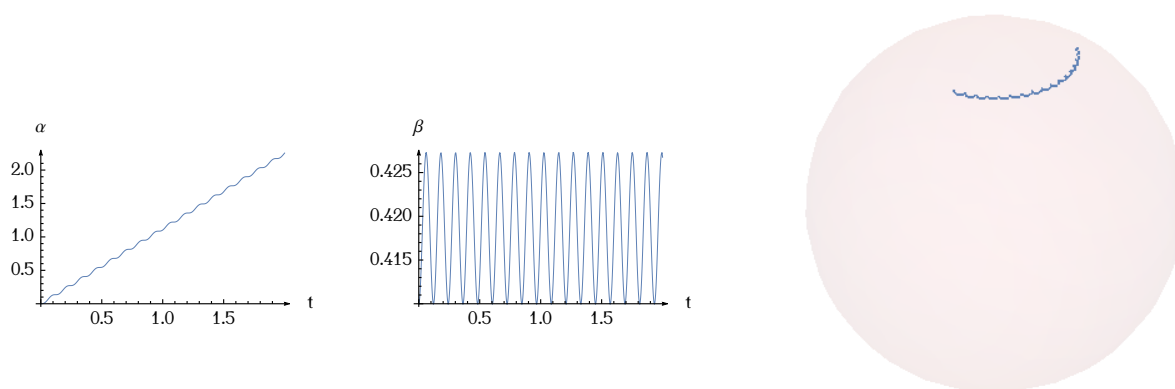
W celu zbadania zachowania oraz poprawności przewidywań wzorów asymptotycznych wykonano serię symulacji. Wyniki zostały przedstawione na rysunku 5.10,

Rysunek 5.6 Przebieg dla  $u_L \approx^+ u_2$ ,  $a = 66.554$ Rysunek 5.7 Przebieg dla  $u_L = u_2$ ,  $a = 68.115$

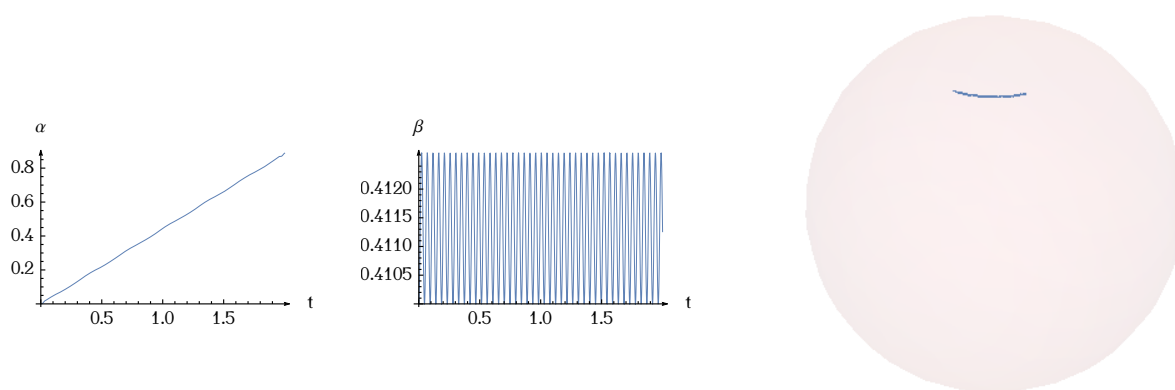
Rysunek 5.8 Przebieg dla  $u_L \approx^- u_2$ ,  $a = 70.831$ Rysunek 5.9 Przebieg dla  $u_1 < u_L < u_2$ ,  $a = 114.991$



(a)



(b)



(c)

Rysunek 5.10 Zachowanie asymptotyczne bąka przy  $m_z \rightarrow \infty$

gdzie przedstawiono wykresy zmiany kąta precesji oraz nutacji w czasie, a także hodograf wektora położenia środka ciężkości. Widoczne jest, że wraz ze zwiększeniem momentu pędu związanego z kątem rotacji wokół osi symetrii bąka zanika nutacja oraz precesja.

Przeprowadzono również symulację mającą na celu porównanie wahadła sferycznego z bąkiem Lagrange'a ze względu na to, że wahadło można traktować jako pewnego rodzaju przypadek szczególny tego bąka. Ciekawą obserwacją jest, że dla tych samych warunków początkowych, przebieg kąta rotacji bąka zmienia się w czasie jednakże nie powoduje to zmiany trajektorii pozostałych dwóch kątów, która to jest identyczna dla bąka i wahadła.

## 6. Podsumowanie

Celem pracy było zapoznanie z opisem dynamiki ruchu bąków ciężkich oraz przygotowanie systemu symulacji, umożliwiającego badanie zachowania układu w czasie, co zostało zrealizowane. W pracy przytoczono podstawowy aparat matematyczny niezbędny do zrozumienia przedstawianych treści. Podano w niej opis ruchu ciała sztywne z wykorzystaniem elementów specjalnej grupy euklidesowej  $SE(3)$  stanowiący podstawę analizy ewolucji zachowań bąków. Scharakteryzowano pojęcie macierzy bezwładności pozwalające na wprowadzenie równań dynamiki dla bryły sztywnej, a także podano jej interpretację geometryczną. Przedstawiono także formalizm Eulera-Newtona oraz formalizm Lagrange'a jako narzędzia pozwalające na modelowanie dynamiki zjawisk fizycznych. Pokazano równoznaczność opisu newtonowskiego oraz lagranżowskiego dla układów mechaniki klasycznej na przykładzie jednowymiarowego problemu ruchu punktu materialnego. Dla kompletności krótko scharakteryzowano mechanikę hamiltonowską wraz z jej narzędziami.

Przedstawiony w pracy ogólny opis dynamiki ruchu bąka został uzyskany z wykorzystaniem aparatu mechaniki lagranżowskiej. Na jego bazie scharakteryzowano dwa główne typy bąków. Opis zawarty w pracy umożliwia porównanie szczególnych przypadków bąka, dla których jesteśmy w stanie uzyskać analityczne rozwiązanie – bąka Eulera, Lagrange'a, Kowalewskiej i Goryacheva-Chaplygina. Matematyczne modele zostały poparte ich ilustracjami oraz o ile było to możliwe przykładem fizycznym.

W pracy kolejno przeprowadzono analizę jakościową równań opisujących dynamikę bąka Eulera oraz bąka Lagrange'a. Przedstawiono konstrukcję Poincaré pozwalającą na geometryczne wyznaczenie rozwiązań równań dynamiki dla bąka Eulera na podstawie interpretacji niezmienników – energii całkowitej układu oraz zachowanemu momentowi bezwładności. Analiza zachowania bąka Lagrange'a bazowała na badaniu przebiegu funkcji otrzymanej ze sprowadzenia opisu do przypadku jednowymiarowego.

W celu uzupełnienia opisu analitycznego badaniami symulacyjnymi stworzono program pozwalający na symulowanie zachowań bąków Eulera i Lagrange'a dla zadanych warunków początkowych. Dla każdego z bąków przedstawiono wyniki symulacji dla szczególnych przypadków zachowań przedstawionych w części analitycznej mające być potwierdzeniem matematycznych przewidywań.

Pomimo swojej prostoty bądź nawet prymitywności bąk potrafi zaciekać, a nawet zainspirować różnorodnością ruchów oraz ich ewolucji. W trakcie przeglądu literatury nie napotkano na obiekt będący uogólnieniem bąka, podobnym do uogólnienia,



jakim jest podwójne wahadło dla wahadła, które może stanowić źródło interesujących zachowań, również z punktu widzenia teorii układów chaotycznych. Bąki pełnią nie tylko rolę edukacyjną, jako wprowadzenie w arkana mechaniki analitycznej, ale również rozrywkową, a nawet estetyczną. Mamy nadzieję, że przybliżenie czytelnikowi tematyki bąków zaowocuje zaopatrzeniem się w jednego z nich, puszczeniem go i medytacją nad jedną z wielu jego twarzy.

# Literatura

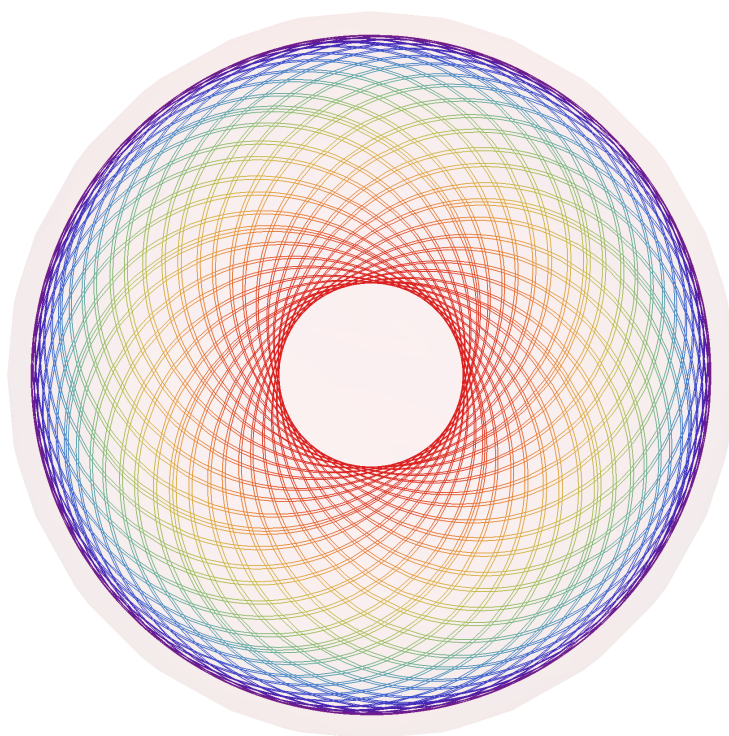
- [Arn81] W. I. Arnold, *Metody matematyczne mechaniki klasycznej*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1981.
- [Aud99] M. Audin, *Spinning tops. A Course on integrable systems*. Cambridge University Press, 1999.
- [Cop65] N. Copernicus, *De revolutionibus orbium coelestium*. Culture et civilization, 1965.
- [Eul36] L. Euler, *Mechanica sive motus scientia analytice exposita*. Ex Typographia Academia Scientiarum, 1736.
- [FLHB07] R.P. Feynman, R. Leighton, E. Hutchings, T. Bieroń, *"Pan raczy żartować, panie Feynman!": przypadki ciekawego człowieka*. Znak, 2007.
- [GPS00] H. Goldstein, C. P. Poole, J. L. Safko, *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, 2000.
- [Gus] E. Gustafson. Pauli and Bohr watch a spinning top. <https://www.nature.com/milestones/milespin/full/milespin03.html>.
- [Gó17] D. Góral, *Konstrukcja robota mobilnego napędzanego dwiema półsferami. Praca inżynierska*. Wydział Mechaniczny, Politechnika Wrocławska, 2017.
- [Hin] C. Hind. Gyroscopes. <http://hindocarina.com/about/gyroscope/>.
- [HSS09] D. D. Holm, T. Schmah, C. Stoica, *Geometric Mechanics and Symmetry: From Finite to Infinite Dimensions*. Oxford University Press, 2009.
- [Jad] A. Jadczyk. Układ otwarty. <https://www.salon24.pl/u/arkadiusz-jadczyk/>.
- [JM16] P. Joniak, R. Muszyński, Model robota mobilnego napędzanego dwiema półsferami. *Postępy robotyki*, strony 103–114, 2016.
- [JM17] P. Joniak, R. Muszyński, Path following for two hog wheels mobile robot. *Journal of Automation, Mobile Robotics & Intelligent Systems*, strony 75–81, 2017.

- [Jon14] P. Joniak, *Badania symulacyjne zachowania robota mobilnego napędzanego dwiema półsferami. Projekt inżynierski*. Wydział Elektroniki, Politechnika Wrocławska, 2014.
- [JS04] Lech Jankowski, Grzegorz Szkapiak, *Algebra Liniowa*. Uniwersytet Wrocławski, Wydział Matematyki i Informatyki, 2004.
- [Kow89] S. Kowalevskaya, Sur le probleme de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe. *Acta Math.*, 12:177–232, 1889.
- [Kow90] S. Kowalevskaya, Sur une propriété du système d'équations différentielles qui définit la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe. *Acta Math.*, 14:81–93, 1890.
- [Lag11] J. L. Lagrange, *Mécanique Analytique*. Courcier, 1811.
- [LaT] LaTiendaDelYoyo. Spinning tops IMPERIALS. <https://www.latiendadelyoyo.com/es/spin-tops/872-spinning-tops-imperials.html>.
- [Lei63] E. Leimanis, *The General Problem of the Motion of Coupled Rigid Bodies about a Fixed Point*. Springer-Verlag, 1963.
- [LL82] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Mechanics*. Butterworth-Heinemann, 1982.
- [Mac] MacTutor. Girolamo Cardano. <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Cardan.html>.
- [Mat] Wolfram Mathematica. <http://www.wolfram.com/mathematica/>.
- [New11] I. Newton, *Matematyczne zasady filozofii przyrody*. Copernicus Center Press, 2011.
- [oMa] Encyclopedia of Mathematics. Goryachev-chaplygin top. [https://www.encyclopediaofmath.org/index.php/Goryachev-Chaplygin\\_top](https://www.encyclopediaofmath.org/index.php/Goryachev-Chaplygin_top).
- [oMb] Encyclopedia of Mathematics. Kowalewski top. [https://www.encyclopediaofmath.org/index.php/Kowalewski\\_top](https://www.encyclopediaofmath.org/index.php/Kowalewski_top).
- [Poi52] L. Poinot, *Théorie nouvelle de la rotation des corps*. Bachelier, 1852.
- [RK12] W. Rubinowicz, W. Królikowski, *Mechanika teoretyczna*. Wydawnictwo Naukowe PWN, 2012.
- [Ryb13] M. Rybczyński, *Model robota mobilnego napędzanego za pośrednictwem półsfery. Projekt inżynierski*. Wydział Elektroniki, Politechnika Wrocławska, 2013.
- [TM18] K. Tchoń, R. Muszyński, *Mechanika analityczna. Notatki do wykładów z dziedziny automatyki i robotyki*. Katedra Cybernetyki i Robotyki, Wydział Elektroniki, Politechnika Wrocławska, 2018.

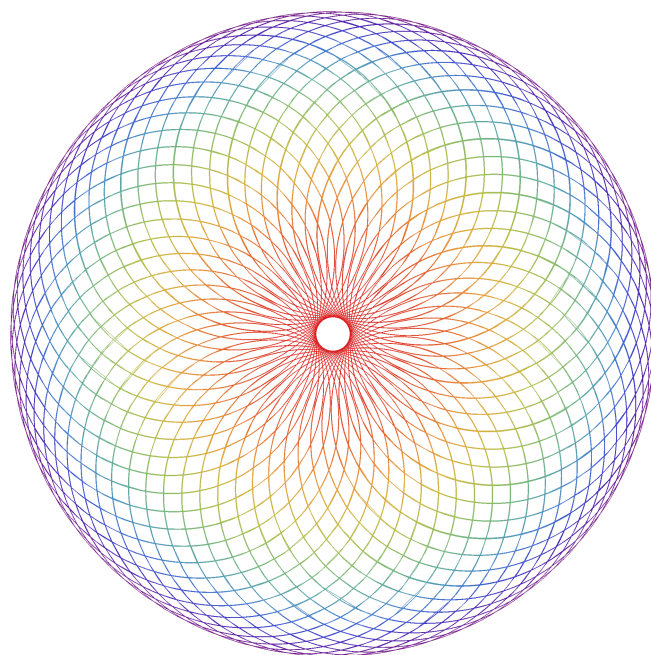
- [TMD<sup>+</sup>00] K. Tchoń, A. Mazur, I. Dulęba, R. Hossa, R. Muszyński, *Manipulatory i roboty mobilne*. Akademicka Oficyna Wydawnicza PLJ, 2000.
- [Wik] Wikipedia. Przegub cardana. [https://pl.wikipedia.org/wiki/Przegub\\_Cardana](https://pl.wikipedia.org/wiki/Przegub_Cardana).
- [ZRM08] R. K. P. Zia, Edward F. Redish, Susan R. McKay, *Making sense of the legendre transform*. 2008.

## A. Bąkiem malowane

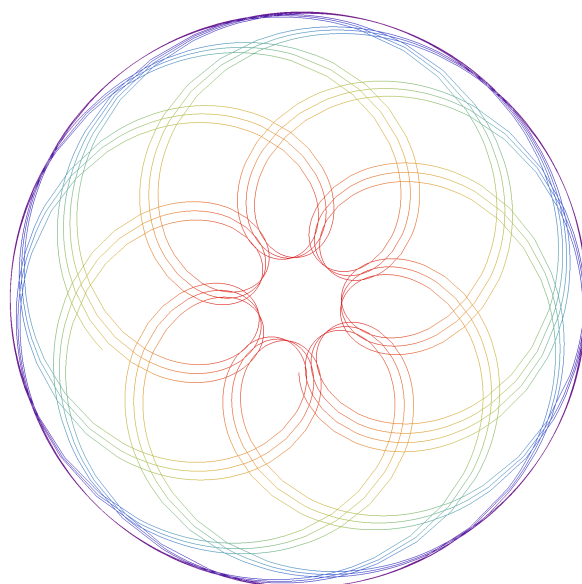
Ponieważ niektóre otrzymywane ślady ruchu bąków bywały niezwykle artystyczne i wprawiły nas w zdumienie zdecydowaliśmy się pokazać co ciekawsze ku ucie-sze czytelnika. Zestaw śladów, który najbardziej przypadł nam do gustu przedsta-wiono na rysunku [A.6 \[Jon14\]](#).



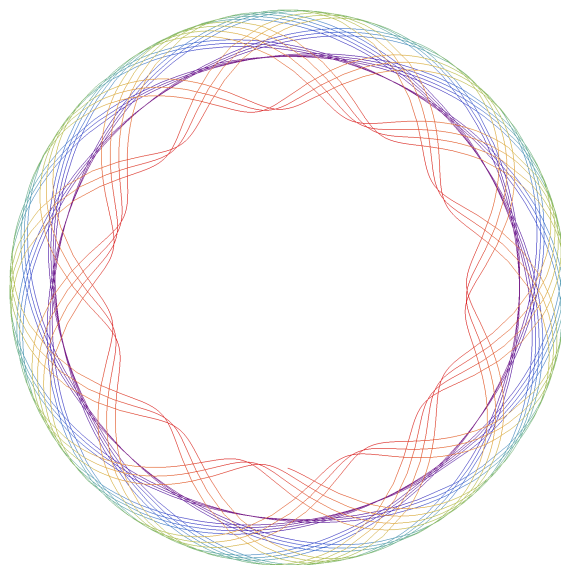
Rysunek A.1 Atom



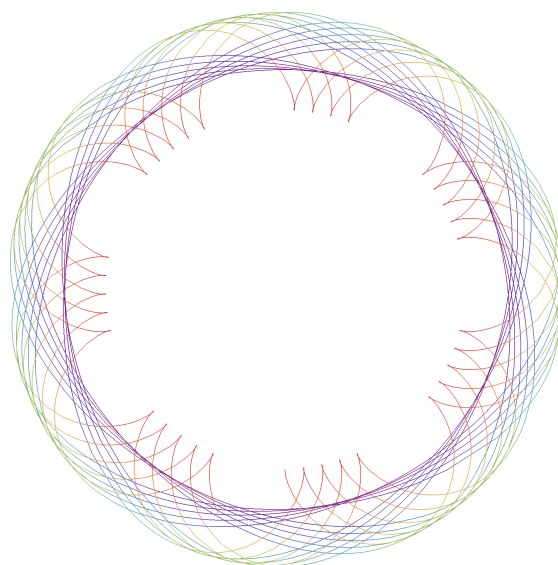
Rysunek A.2 Słonecznik



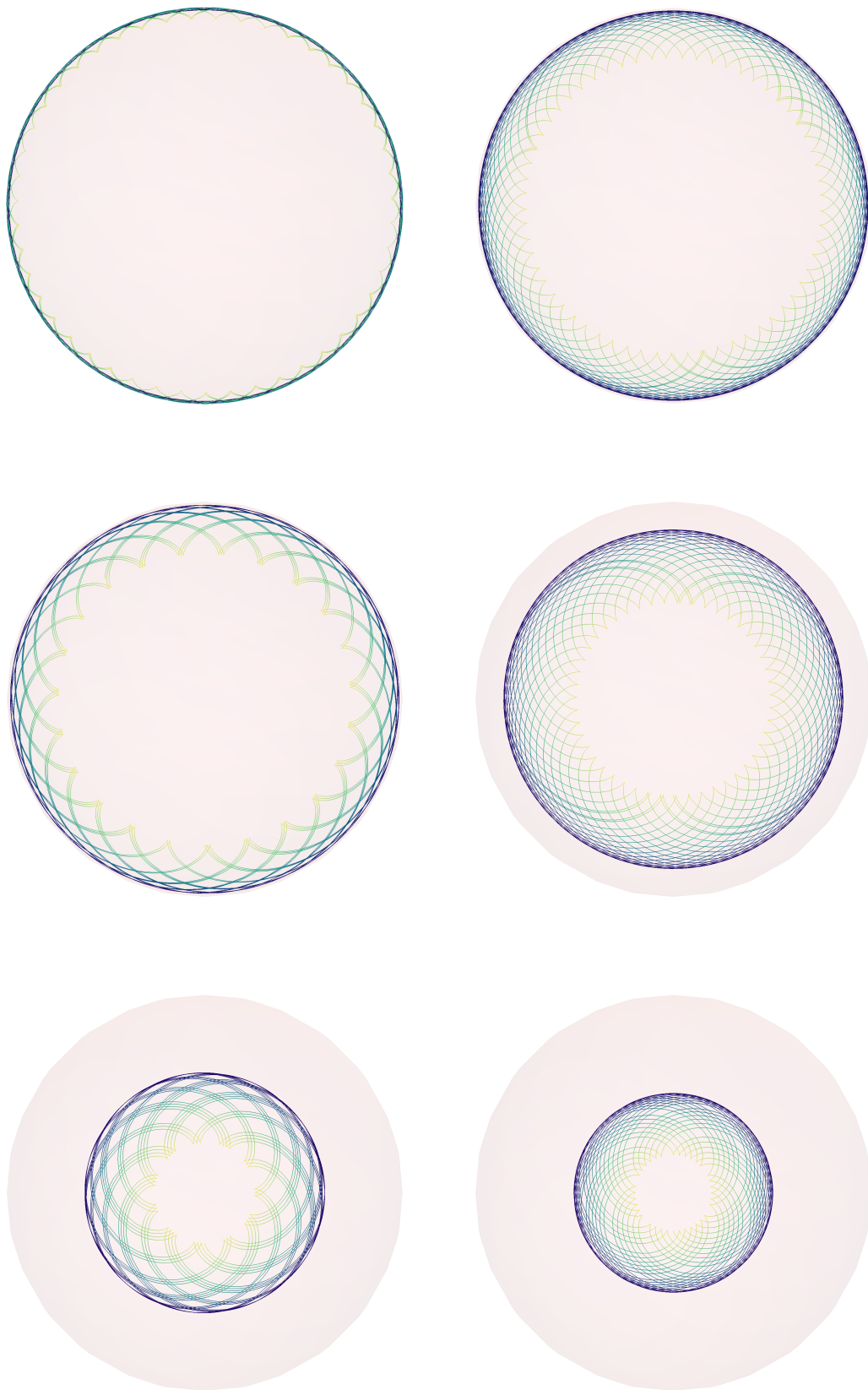
Rysunek A.3 Kwiat



Rysunek A.4 Gwiazda



Rysunek A.5 Paszcza



Rysunek A.6 Życie bąka