

POLITECHNIKA WROCŁAWSKA
WYDZIAŁ ELEKTRONIKI

KIERUNEK: Automatyka i Robotyka (AIR)
SPECJALNOŚĆ: Robotyka (ARR)

PROJEKT INŻYNIERSKI

Badania symulacyjne zachowania robota
mobilnego napędzanego dwiema półsferami

Analysis of two HOG wheel
mobile robot behaviour

AUTOR:
Paweł Joniak

PROWADZĄCY PROJEKT:
dr inż. Robert Muszyński

OCENA PROJEKTU:

Spis treści

1	Wprowadzenie	3
2	Opis matematyczny robota mobilnego	5
3	Konstrukcja i model robota napędzanego dwiema półsferami	7
3.1	Konstrukcja robota	7
3.2	Współrzędne uogólnione	7
3.3	Przekształcenia układów współrzędnych	7
3.4	Ograniczenia nieholonomiczne	8
3.5	Bezdryfowy układ sterowania	12
3.5.1	Bezpośrednie sterowanie wychyleniami i jednym wirowaniem	13
3.5.2	Bezpośrednie sterowanie wirowaniami i trzema wychyleniami	14
4	Uproszczony model kinematyki robota	15
4.1	Model koła zastępczego	15
4.2	Ograniczenia nieholonomiczne	16
4.3	Bezdryfowy układ sterowania	18
4.4	Przypadek specjalny	19
5	Badania symulacyjne	21
5.1	Model pełny	21
5.1.1	Bezpośrednie sterowanie wychyleniami i jednym wirowaniem	21
5.1.2	Bezpośrednie sterowanie wirowaniami i trzema wychyleniami	22
5.2	Model uproszczony	24
5.2.1	Sterowanie dwoma skręceniami i jednym wirowaniem	25
5.2.2	Przypadek specjalny. Kąty $\theta_{u1} = \theta_{u2} = \theta$	27
5.3	Przeniesienie sterowań z modelu uproszczonego do pełnego	28
6	Podsumowanie	33
A	Galeria	35

Rozdział 1

Wprowadzenie

Przedmiotem niniejszej pracy jest robot mobilny napędzany wirującymi półsferami (ang. HOG wheel [1]). Pierwsze wzmianki o pojazdach tego typu pochodzą z lat 30. poprzedniego stulecia. Napęd HOG był wówczas przedstawiany jako napęd przyszłości, lepsza alternatywa dla pojazdów kołowych i rzeczywiście w teorii ma wiele przewag. Podczas gdy standardowe pojazdy kołowe (samochód, rower) przy starcie muszą za każdym razem na nowo rozpędzić koła, tak w napędzie typu HOG półsfera, na której porusza się pojazd, nigdy nie przestaje wirować. Jest ona więc swego rodzaju magazynem energii. Napęd ten zakłada że w trakcie postoju półsfera stoi pionowo, a aby wprowadzić pojazd w ruch należy wychylić półsferę. Już małe wychylenia od pionu znacząco zwiększają prędkość postępowania. Kolejną zaletą jest zwrotność. Półsfera jest w stanie pojechać w dowolnym kierunku i bardzo szybko zmieniać swoją orientację. Mimo tak wielu zalet napęd ten nie stał się popularny. Przez wiele lat nie były badane pełne możliwości napędu, ani nie powstał żaden prototyp. Jednym z powodów takiego stanu rzeczy jest skomplikowana konstrukcja mechaniczna. Ponadto sterowanie tego typu pojazdem jest trudne i nieintuicyjne. Obecnie, prawie po 100 latach wzrasta zainteresowanie konstrukcjami tego typu. Powstają pierwsze prototypy, których zachowanie nie zawsze jest przewidywalne. Stąd pojawia się potrzeba badań symulacyjnych, które pozwolą przewidzieć zachowanie robota oraz zbadać jego reakcje na różnego rodzaju sterowania. Naprzeciw tym potrzebom wychodzi niniejsza praca.

Celem pracy jest wprowadzenie modelu kinematyki robota poruszającego się na dwóch półsferach przy założeniu braku poślizgów. Wyprowadzony zostanie dodatkowo model uproszczony robota z dwoma kołami skrętnymi. Następnie oba modele zostaną poddane analizie własności i porównane.

Układ pracy jest następujący. W rozdziale 2 przedstawiliśmy ogólny sposób opisu kinematyki robota mobilnego. W rozdziale 3 opisaliśmy konstrukcję i model analizowanego robota. Pokazaliśmy równoważność wirującej półsfery ze skrętnym kołem o zmiennym promieniu (sekcja 4.1), co pozwoliło na zastąpienie półsfer takimi kołami i wyprowadzenie uproszczonego modelu robota (rozdział 4). W dalszej części przedstawiliśmy wyniki badań symulacyjnych pokazujące wpływ sterowań i warunków początkowych na zachowanie robota i otrzymywane trajektorie (rozdział 5). Praca została podsumowana w rozdziale 6.

Rozdział 2

Opis matematyczny robota mobilnego

Wyprowadzenie modelu matematycznego robota rozpoczyna się od wyboru odpowiedniego wektora współrzędnych uogólnionych $q(t) \in \mathbb{R}^n$ oraz prędkości $\dot{q}(t) \in \mathbb{R}^n$ [4]. Ruch kołowych robotów mobilnych podlega ograniczeniom prędkościowym, co uniemożliwia im obranie dowolnej trajektorii ruchu i zmniejsza liczbę dostępnych sterowań. Ograniczenia te wynikają z przyjmowanego założenia o braku poślizgów. Zazwyczaj jest to założenie o braku poślizgu wzdłużnego oraz poprzecznego koła. Wynikające z niego równania ograniczeń zapisujemy w postaci Pfaffa

$$A(q)\dot{q} = 0, \quad (2.1)$$

gdzie $A(q) \in \mathbb{R}^{l \times n}$ – macierz ograniczeń. Liczba ograniczeń l równa jest rzędowi macierzy $A(q)$, a liczba sterowań $m = n - l$. Mając zdefiniowane ograniczenia możemy przedstawić model w postaci bezdryfowego układu sterowania postaci

$$\dot{q} = G(q)\eta, \quad (2.2)$$

gdzie $\eta \in \mathbb{R}^m$ – wektor prędkości pomocniczych (sterowań) a $G(q) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ – macierz sterowań. Macierz $G(q)$ składa się z wektorów należących do jądra macierzy $A(q)$ i może być wyliczona z równania

$$A(q)G(q) = 0. \quad (2.3)$$

Rozdział 3

Konstrukcja i model robota napędzanego dwiema półsferami

3.1 Konstrukcja robota

Układ składa się z dwóch wirujących półsfer o promieniu R o środkach oddalonych o $2l$. Każda półsfera może obracać się niezależnie wokół 3 osi (zobacz rysunek 3.1). Podobne podejście pokazano w pracy [2]. Półsfera może być wychylana wokół osi łączącej środki półsfer oraz osi leżącej w płaszczyźnie koła wielkiego sfery i prostopadłej do osi łączącej środki półsfer, a także wirować wokół swojej osi symetrii. Na rysunku 3.2 pokazano przykładową konstrukcję mechaniczną realizującą model. W przyjętej konstrukcji wychylenie w 2 osiach jest ograniczone do przedziału $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$, a kąt w trzeciej osi może zmieniać się bez ograniczeń. W wyprowadzonym modelu kinematyki schemat robota został przyjęty jak na rysunku 3.3, a ograniczenia na wychylenie kątów nie zostaną uwzględnione.

3.2 Współrzędne uogólnione

Przyjmijmy, że robot porusza się w globalnym, kartezjańskim układzie odniesienia. Opis robota rozpoczynamy od wyboru wektora współrzędnych uogólnionych, które w jednoznaczny sposób opisuje położenie robota w każdej chwili. Położenie i orientacja korpusu robota opisane są współrzędnymi x, y, θ_0 , zaś każda z półsfer trzema kątami ϕ_i, θ_i, ψ_i , oznaczającymi odpowiednio dwa kąty wychylenia oraz kąt wirowania. Wprowadzone zmienne pokazano schematycznie na rysunku 3.3. Razem tworzą one wektor konfiguracji. Powyższy opis należy zapisać formalnie w postaci

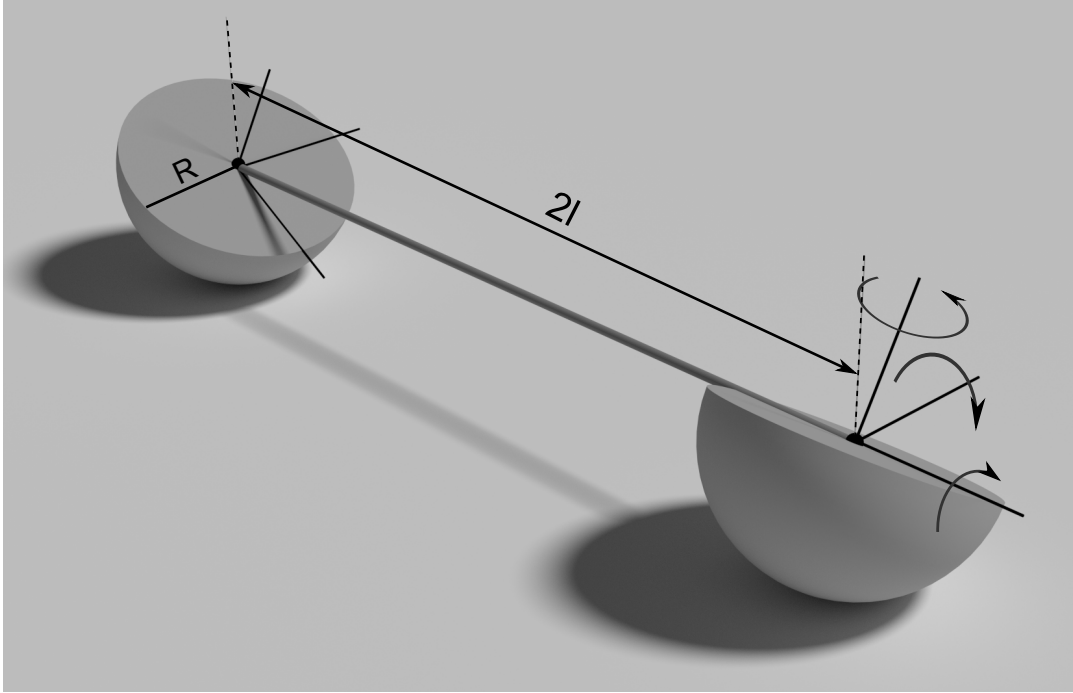
$$q(t) \in \mathbb{R}^9, \quad (3.1)$$

takiej że

$$q = (x, y, \theta_0, \phi_1, \theta_1, \psi_1, \phi_2, \theta_2, \psi_2)^T. \quad (3.2)$$

3.3 Przekształcenia układów współrzędnych

Aby ułatwić opis robota zdefiniujmy pomocnicze układy odniesienia. Pierwszymi z nich będą, przedstawione na rysunku 3.4, układy nazwane układami mocowania. Ich początki są umieszczone w punktach mocowań poszczególnych półsfer. Punktem mocowania



Rysunek 3.1 Model robota napędzanego dwiema półsferami

nazywamy środek koła wielkiego sfery. Transformacje z układu globalnego do układu mocowania mają postać

$$A_G^{M_1} = \text{Trans}(X, x)\text{Trans}(Y, y)\text{Trans}(Z, R)\text{Rot}(Z, \theta_0), \quad (3.3)$$

$$A_G^{M_2} = \text{Trans}(X, x)\text{Trans}(Y, y)\text{Trans}(Z, R)\text{Rot}(Z, \theta_0)\text{Trans}(Y, -2l), \quad (3.4)$$

gdzie x, y – położenie robota, θ_0 – jego orientacja.

Następnie dla każdej z półsfery definiujemy układ przegubu, taki że płaszczyzna XY tego układu zawiera płaszczyznę koła wielkiego półsfery a oś Z pokrywa się z jej osią symetrii (zobacz rysunek 3.5). Przekształcenie z układu mocowania do układu przegubu dla obu półsfery wygląda tak samo i ma postać

$$A_{M_i}^{P_i} = \text{Rot}(X, \phi_i)\text{Rot}(Y, \theta_i), \quad (3.5)$$

gdzie ϕ_i – kąt obrotu wokół osi łączącej półsfery, a θ_i – kąt obrotu wokół osi leżącej w półpłaszczyźnie koła wielkiego i prostopadłej do osi łączącej środki półsfery, $i = 1, 2$.

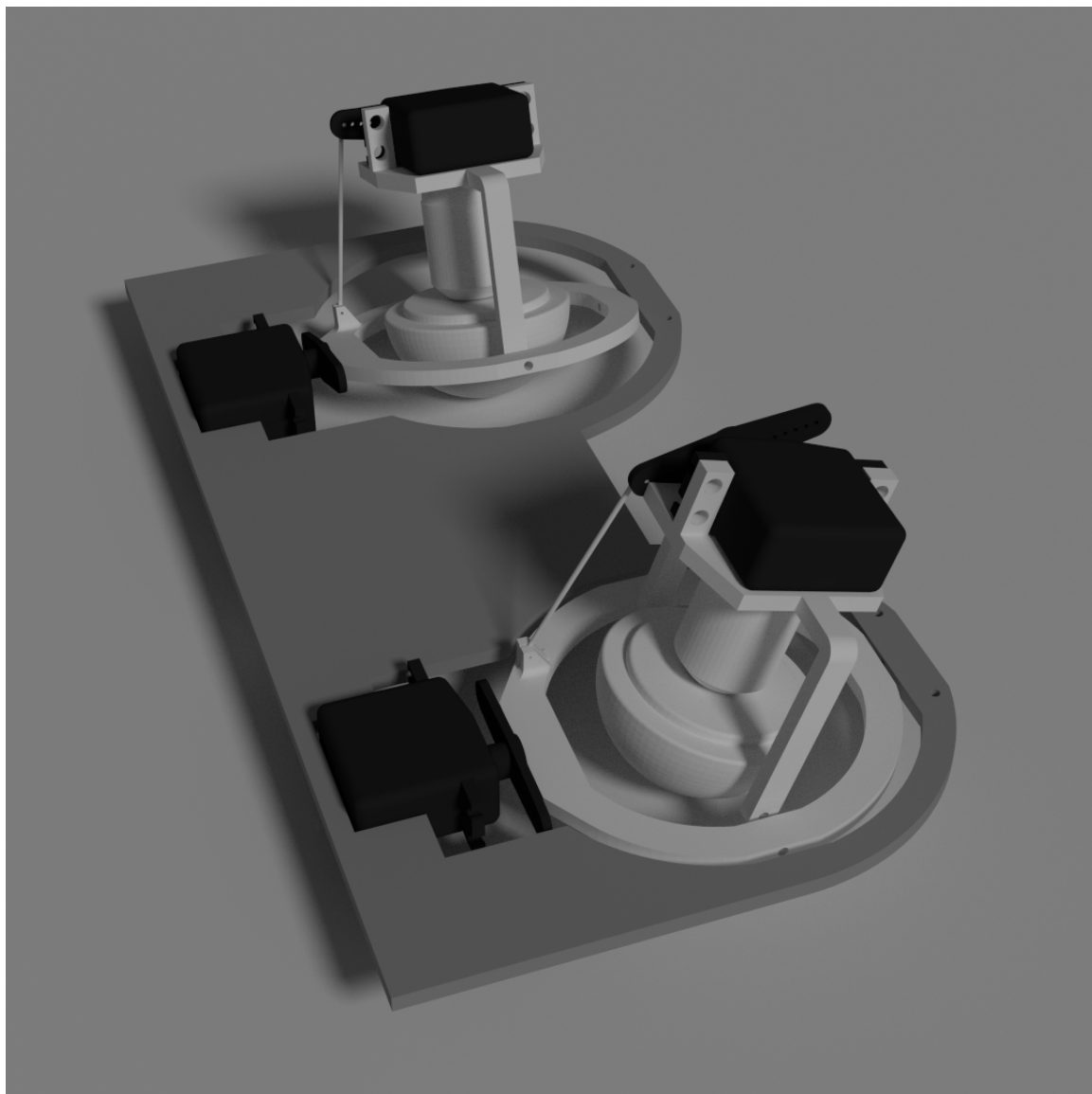
Ostatnimi układami będą układy półsfery powstałe poprzez obrót układów przegubów wokół ich osi Z (zobacz rysunek 3.6). Transformacja z układu przegubu do układu półsfery ma więc postać

$$A_{P_i}^{K_i} = \text{Rot}(Z, \psi_i), \quad (3.6)$$

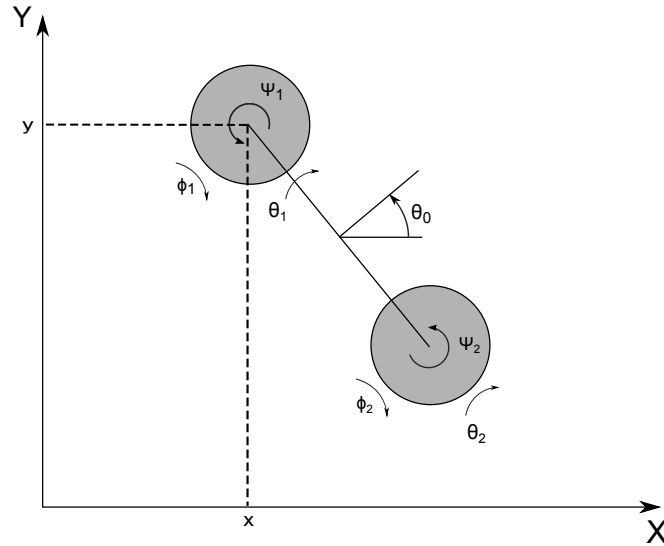
gdzie ψ_i – skręcenie półsfery.

3.4 Ograniczenia nieholonomiczne

Zdefiniujemy teraz ograniczenia jakim poddany jest robot. Punkt kontaktu półsfery z podłożem przemieszcza się po półsferze. Aby nie dochodziło do poślizgów prędkość tego przemieszczania musi być taka sama jak prędkość postępową punktu mocowania każdej półsfery. Sposób uwzględnienia tego faktu dla obu półsfery jest identyczny, jedyną różnicę



Rysunek 3.2 Konstrukcja robota napędzanego dwiema półsferami



Rysunek 3.3 Współrzędne konfiguracyjne robota

stanowi wyrażone w układzie globalnym położenie punktu mocowania. Zauważmy, że dla każdej półsfery punkt kontaktu P_{K_1} w jej układzie mocowania ma współrzędne

$$P_{K_i}^{M_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -R \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Położenie tego punktu w układzie półsfery jest dane jako

$$P_{K_i}^{K_i} = (A_M^P A_P^K)^{-1} P_{K_i}^{M_i} = \begin{pmatrix} R(\cos \phi_1 \cos \psi_1 \sin \theta_1 - \sin \phi_1 \sin \psi_1) \\ -R(\cos \phi_1 \sin \psi_1 + \cos \psi_1 \sin \theta_1 \sin \phi_1) \\ -R \cos \theta_1 \cos \phi_1 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Różniczkując po czasie powyższe wyrażenie otrzymamy prędkość, która wyrażona w układzie mocowania ma postać

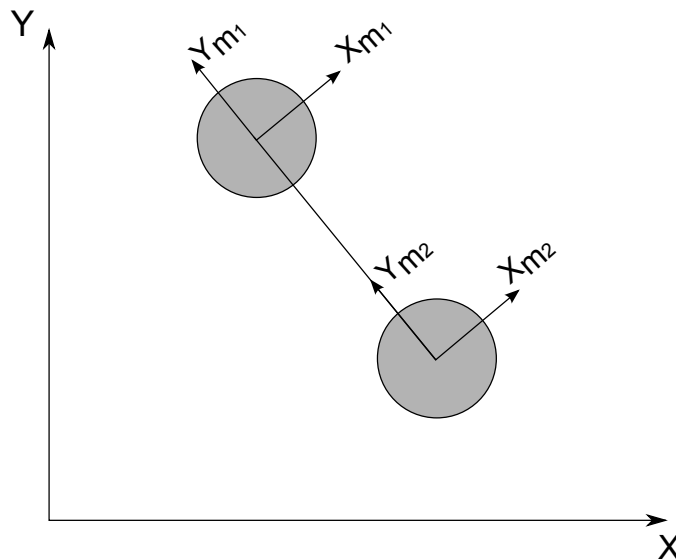
$$\dot{P}_{K_i}^{M_i} = (A_M^P A_P^K) \dot{P}_{K_i}^{K_i} = \begin{pmatrix} R(\dot{\theta}_1 \cos \phi_1 - \dot{\psi}_1 \cos \theta_1 \sin \phi_1) \\ -R(\dot{\phi}_1 + \dot{\psi}_1 \sin \theta_1) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Kolejno podobne transformacje stosujemy do punktów mocowania, których współrzędne w układach mocowania wynoszą

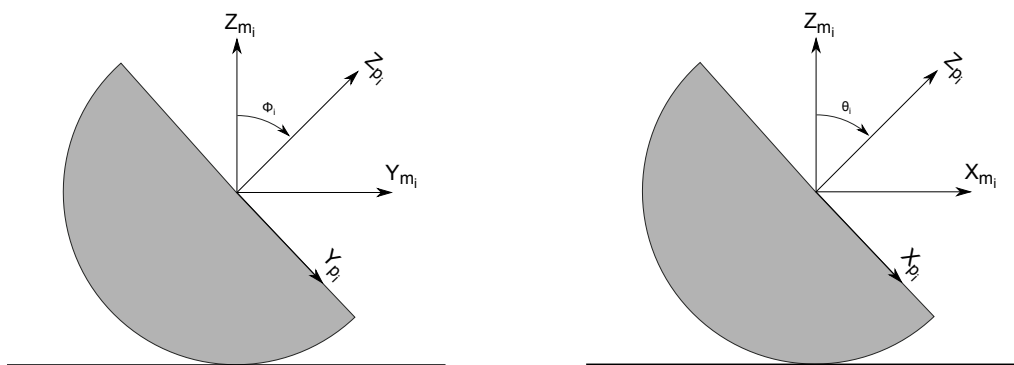
$$P_{M_i}^{M_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

a w układzie globalnym dla punktu mocowania pierwszej półsfery

$$P_{M_1}^G = A_G^{M_1} P_{M_1}^{M_1} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ R \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$



Rysunek 3.4 Pomocnicze układy mocowania półsfer



Rysunek 3.5 Transformacja do układu przegubu, widok prostopadły i równoległy do osi robota

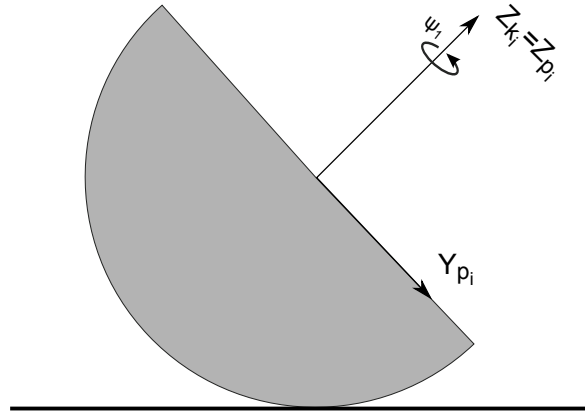
i odpowiednio dla drugiej

$$P_{M_2}^G = A_G^{M_2} P_{M_2}^{M_2} = \begin{pmatrix} x + 2l \sin \theta_0 \\ y - 2l \cos \theta_0 \\ R \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Stąd prędkości tych punktów wyrażone w odpowiadających układach mocowania mają postać odpowiednio

$$\dot{P}_{M_1}^{M_1} = (A_G^{M_1})^{-1} \dot{P}_{M_1}^G = \begin{pmatrix} \dot{x} \cos \theta_0 + \dot{y} \sin \theta_0 \\ \dot{y} \cos \theta_0 - \dot{x} \sin \theta_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

$$\dot{P}_{M_2}^{M_2} = (A_G^{M_2})^{-1} \dot{P}_{M_2}^G = \begin{pmatrix} \dot{x} \cos \theta_0 + \dot{y} \sin \theta_0 + 2l\dot{\theta}_0 \\ \dot{y} \cos \theta_0 - \dot{x} \sin \theta_0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$



Rysunek 3.6 Transformacja do układu półsfery, widok prostopadły do osi robota

Porównując prędkości (3.9) i (3.13) otrzymujemy dwa równania ograniczeń nieholonomicznych wynikające z braku poślizgów pierwszej półsfery

$$\begin{cases} R(\dot{\theta}_1 \cos \phi_1 - \dot{\psi}_1 \cos \theta_1 \sin \phi_1) = \dot{x} \cos \theta_0 + \dot{y} \sin \theta_0 \\ -R(\dot{\phi}_1 + \dot{\psi}_1 \sin \theta_1) = \dot{y} \cos \theta_0 - \dot{x} \sin \theta_0 \end{cases} \quad (3.15)$$

Analogiczne porównanie (3.9) z (3.14) dla drugiej półsfery prowadzi do dwóch kolejnych ograniczeń w postaci

$$\begin{cases} R(\dot{\theta}_2 \cos \phi_1 - \dot{\psi}_2 \cos \theta_2 \sin \phi_2) = \dot{x} \cos \theta_0 + 2l\dot{\theta}_0 + \dot{y} \sin \theta_0 \\ -R(\dot{\phi}_2 + \dot{\psi}_2 \sin \theta_2) = \dot{y} \cos \theta_0 - \dot{x} \sin \theta_0 \end{cases} \quad (3.16)$$

Sumarycznie ograniczenia (3.15), (3.16) można zapisać w postaci Pfaffa (2.1) jako

$$\begin{bmatrix} -c_{\theta_0} & -s_{\theta_0} & 0 & 0 & Rc_{\phi_1} & -Rc_{\theta_1}s_{\phi_1} & 0 & 0 & 0 \\ s_{\theta_0} & -c_{\theta_0} & 0 & -R & 0 & -Rs_{\theta_1} & 0 & 0 & 0 \\ -c_{\theta_0} & -s_{\theta_0} & -2l & 0 & 0 & 0 & 0 & Rc_{\phi_2} & -Rc_{\theta_2}s_{\phi_2} \\ s_{\theta_0} & -c_{\theta_0} & 0 & 0 & 0 & 0 & -R & 0 & -Rs_{\theta_2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta}_0 \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\psi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\psi}_2 \end{pmatrix} = 0. \quad (3.17)$$

3.5 Bezdryfowy układ sterowania

Przystępując do wyznaczenia postaci bezdryfowego układu sterowania należy podjąć decyzję o wyborze sterowań. Ponieważ wymiar uogólnionego wektora położeń $q(t)$, $n = \dim(q(t)) = 9$, a liczba ograniczeń $l = 4$ to liczba dostępnych sterowań wynosi $m = n - l = 5$. Najlepszym rozwiązaniem byłoby wybranie sterowań tak, aby odzwierciedlały fizycznie

dostępne sterowania. Oznaczałoby to wybranie sterowań wpływających bezpośrednio na prędkości $\dot{\phi}_1, \dot{\theta}_1, \dot{\psi}_1, \dot{\phi}_2, \dot{\theta}_2, \dot{\psi}_2$. Jednakże dostępna liczba sterowań nie pozwala na dokonanie takiego wyboru, zmuszając nas do rezygnacji ze sterowania jednym z powyższych kątów. Ponieważ robot jest symetryczny pozostają 3 możliwości wyboru sterowania. Jednakże równanie (2.3) dla przypadku, gdy rezygnujemy z bezpośredniego sterowania kątem θ_i , nie daje rozwiązań. W dalszej części rozważane są pozostałe dwa przypadki.

3.5.1 Bezpośrednie sterowanie wychyleniami i jednym wirowaniem

Po wybraniu jako wejść sterujących prędkości $\dot{\phi}_1, \dot{\theta}_1, \dot{\psi}_1, \dot{\phi}_2, \dot{\theta}_2$, na podstawie ograniczeń (3.17) oraz równania (2.3) otrzymujemy macierz sterowań układu w postaci

$$G(q) = \begin{bmatrix} Rs_{\theta_0} & Rc_{\theta_0}c_{\phi_1} & Rcc & 0 & 0 \\ Rc_{\theta_0} & Rs_{\theta_0}c_{\phi_1} & -Rsc & 0 & 0 \\ -R^* \cot \theta_2 s_{\phi_2} & -R^* c_{\phi_1} & R^* d & R^* \cot \theta_2 s_{\phi_2} & R^* c_{\phi_2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{s_{\theta_2}} & 0 & \frac{s_{\theta_1}}{s_{\theta_2}} & -\frac{1}{s_{\theta_2}} & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.18)$$

gdzie $R^* = \frac{R}{2l}$, $cc = s_{\theta_0}s_{\theta_1} - c_{\theta_0}c_{\theta_2}s_{\phi_2}$, $sc = c_{\theta_0}s_{\theta_1} + s_{\theta_0}c_{\theta_2}s_{\phi_2}$, $d = c_{\theta_1}s_{\phi_1} - \cot \theta_2 s_{\theta_1}s_{\phi_2}$, co prowadzi do bezdryfowego układu sterowania (2.2) danego jako

$$\begin{cases} \dot{x} = Rs_{\theta_0}\eta_1 + Rc_{\theta_0}c_{\phi_1}\eta_2 + R(s_{\theta_0}s_{\theta_1} - c_{\theta_0}c_{\theta_2}s_{\phi_2})\eta_3 \\ \dot{y} = Rc_{\theta_0}\eta_1 + Rs_{\theta_0}c_{\phi_1}\eta_2 - R(c_{\theta_0}s_{\theta_1} + s_{\theta_0}c_{\theta_2}s_{\phi_2})\eta_3 \\ \dot{\theta}_0 = R^*(-\cot \theta_2 s_{\phi_2}\eta_1 - c_{\phi_1}\eta_2 + (c_{\theta_2}s_{\phi_2} - \cot \theta_2 s_{\phi_2}s_{\phi_2})\eta_3 + \cot \theta_2 s_{\phi_2}\eta_4 + c_{\phi_2}\eta_5) \\ \dot{\phi}_1 = \eta_1 \\ \dot{\theta}_1 = \eta_2 \\ \dot{\psi}_1 = \eta_3 \\ \dot{\phi}_2 = \eta_4 \\ \dot{\theta}_2 = \eta_5 \\ \dot{\psi}_2 = \csc \theta_2(\eta_1 + \sin \theta_1\eta_3 - \eta_4) \end{cases} \quad (3.19)$$

3.5.2 Bezpośrednie sterowanie wirowaniami i trzema wychyleniami

Po wybraniu jako wejść sterujących prędkości $\dot{\phi}_1, \dot{\theta}_1, \dot{\psi}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\psi}_2$, na podstawie ograniczeń (3.17) oraz równania (2.3) otrzymujemy macierz sterowań układu w postaci

$$G(q) = \begin{bmatrix} Rs_{\theta_0} & Rc_{\theta_0}c_{\phi_1} & R(s_{\theta_0}s_{\theta_1} - c_{\theta_0}c_{\theta_1}s_{\phi_1}) & 0 & 0 \\ -Rc_{\theta_0} & Rs_{\theta_0}c_{\phi_1} & -R(c_{\theta_0}s_{\theta_1} - s_{\theta_0}c_{\theta_1}s_{\phi_1}) & 0 & 0 \\ 0 & -R^*c_{\phi_1} & -R^*c_{\theta_1}s_{\phi_1} & -R^*c_{\phi_2} & -R^*c_{\theta_2}s_{\phi_2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & s_{\theta_1} & 0 & -s_{\theta_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

co prowadzi do bezdryfowego układu sterowania (2.2) danego jako

$$\begin{cases} \dot{x} = Rs_{\theta_0}\eta_1 + Rc_{\theta_0}c_{\phi_1}\eta_2 + R(s_{\theta_0}s_{\theta_1} - c_{\theta_0}c_{\theta_1}s_{\phi_1})\eta_3 \\ \dot{y} = -Rc_{\theta_0}\eta_1 + Rs_{\theta_0}c_{\phi_1}\eta_2 - R(c_{\theta_0}s_{\theta_1} + s_{\theta_0}c_{\theta_1}s_{\phi_1})\eta_3 \\ \dot{\theta}_0 = R^*(-c_{\phi_1}\eta_2 - c_{\theta_1}s_{\phi_1}\eta_3 - c_{\phi_2}\eta_4 - c_{\theta_2}s_{\phi_2}\eta_5) \\ \dot{\phi}_1 = \eta_1 \\ \dot{\theta}_1 = \eta_2 \\ \dot{\psi}_1 = \eta_3 \\ \dot{\phi}_2 = \eta_1 + s_{\theta_1}\eta_3 - s_{\theta_2}\eta_5 \\ \dot{\theta}_2 = \eta_4 \\ \dot{\psi}_2 = \eta_5 \end{cases}. \quad (3.21)$$

Rozdział 4

Uproszczony model kinematyki robota

W celu lepszego zrozumienia zachowania robota poruszającego się na dwóch półsferych wyprowadzono jego model uproszczony. W modelu uproszczonym zastąpiono półsfery skrętnymi kołami o zmiennej średnicy. Takie podejście umożliwia lepsze poznanie wpływu sterowań na trajektorie robota. W dalszej części wprowadzimy pojęcie koła zastępczego, wyprowadzimy model uproszczony, a także pokażemy jakie skutki ma przeniesienie sterowań z modelu uproszczonego do pełnego.

4.1 Model koła zastępczego

Warto zauważyć, że w uproszczeniu wirująca półsfera może zostać potraktowana jako obracające się koło¹ o zmiennym promieniu i z możliwością skręcania. Takie spostrzeżenie pozwala spojrzeć na robota poruszającego się na dwóch półsferych jako na robota klasy (1,2), posiadającego dwa koła skrętne o zmiennym promieniu². Aby móc połączyć oba modele ze sobą należy znaleźć przekształcenia między współrzędnymi opisującymi półsferę a współrzędnymi opisującymi koło zastępcze (rysunek 4.1). W pracy [5] zostały pokazane zależności między współrzędnymi półsfery na współrzędnymi koła zastępczego. Zależności te można zapisać w postaci

$$\phi_u = \psi, \quad (4.1)$$

$$r = R\sqrt{\cos^2 \phi (\sin^2 \theta - 1) + 1}, \quad (4.2)$$

$$\theta_u = \arctan \frac{\sin \theta}{\cos \theta \sin \phi}, \quad (4.3)$$

gdzie r to promień koła, θ_u kąt jego skręcenia a ϕ_u kąt obrotu. Ponieważ naszym celem jest przeniesienie sterowań z modelu uproszczonego do pełnego wyliczymy przekształcenia odwrotne w postaci

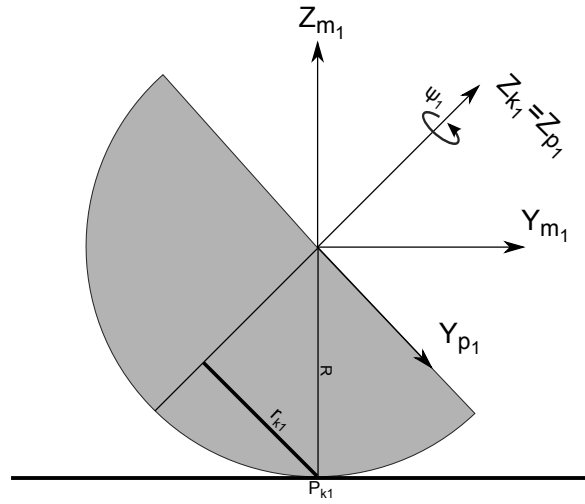
$$\psi = \phi_u \quad (4.4)$$

$$\phi = \pm \arccos \left(\frac{\sqrt{r^2 - R^2} \sqrt{\tan^2(\theta_u) + 1}}{\sqrt{-R^2 - R^2 \tan^2(\theta_u) + r^2 \tan^2(\theta_u)}} \right), \quad (4.5)$$

$$\theta = \pm \arcsin \left(\frac{r \tan(\theta_u)}{R \sqrt{\tan^2(\theta_u) + 1}} \right). \quad (4.6)$$

¹w celu ujednoczenia nazewnictwa obracanie się koła będzie nazywane wirowaniem

²takie uproszczenie modelu nie uwzględnia przemieszczania się korpusu robota wynikającego z pochylania półsfery, ale pozostałe cechy modelu zostają zachowane.



Rysunek 4.1 Model koła zastępczego

Znak wyrażeń (4.5), (4.6) jest zależny od wartości kąta θ_u (plus dla $\theta_u \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, minus dla $\theta_u \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \cup (-\pi, -\frac{\pi}{2})$). Powyższe równania umożliwią zadanie takich sterowań dla robota, aby jego trajektoria naśladowała trajektorię łatwiejszego do sterowania modelu uproszczonego. Oczywiście trajektoria nigdy nie będzie oddana idealnie ponieważ model uproszczony pomija niektóre zjawiska. Jednakże ogólny wygląd śladu robota powinien zostać zachowany.

Podobnie jak w przypadku modelu pełnego i tu za położenie robota (x, y) przyjmujemy położenie środka jednego z kół (rysunek 4.2). Wektor współrzędnych uogólnionych wybieramy w postaci

$$q(t) = (x, y, \theta_0, \theta_{u1}, \phi_{u1}, \theta_{u2}, \phi_{u2}, r_1, r_2)^T, \quad (4.7)$$

gdzie x, y – położenie robota, θ_0 – jego orientacja, θ_{u1}, θ_{u2} – kąt skręcenia kół, ϕ_{u1}, ϕ_{u2} – kąt ich obrotu, r_1, r_2 – promienie kół.

4.2 Ograniczenia nieholonomiczne

Położenie koła pierwszego jest takie samo jak położenie całego robota

$$\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = y \end{cases}, \quad (4.8)$$

a jego prędkość wynosi

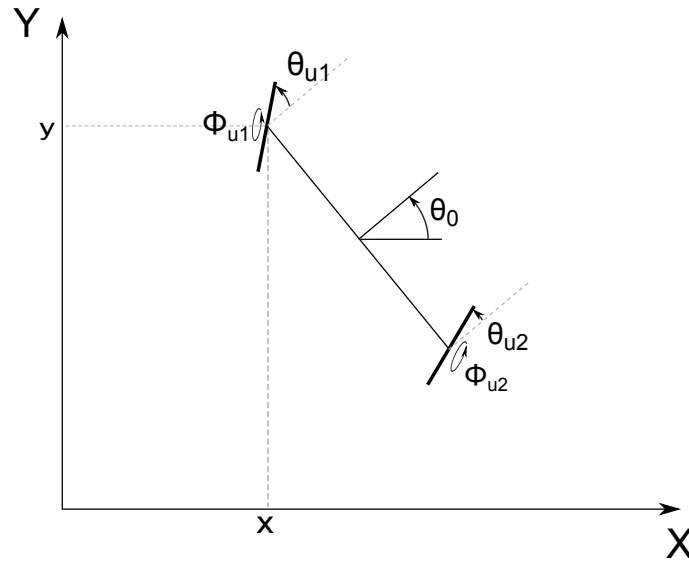
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{x} \\ \dot{y}_1 = \dot{y} \end{cases}. \quad (4.9)$$

Stąd ograniczenia wynikające z braku poślizgu poprzecznego tego koła przyjmują postać

$$\dot{x} \sin(\theta_0 + \theta_{u1}) - \dot{y} \cos(\theta_0 + \theta_{u1}) = 0, \quad (4.10)$$

zaś brak poślizgu wzdłużnego

$$\dot{x} \cos(\theta_0 + \theta_{u1}) + \dot{y} \sin(\theta_0 + \theta_{u1}) - r_1 \dot{\phi}_{u1} = 0, \quad (4.11)$$



Rysunek 4.2 Model uproszczony – robot dwukołowy. Współrzędne konfiguracyjne

gdzie r_1 to promień koła pierwszego.

Analogicznie, położenie koła drugiego

$$\begin{cases} x_2 = x + 2l \sin \theta_0 \\ y_2 = y - 2l \cos \theta_0 \end{cases}, \quad (4.12)$$

i jego prędkość

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = \dot{x} + 2l \cos \theta_0 \dot{\theta}_0 \\ \dot{y}_2 = \dot{y} + 2l \sin \theta_0 \dot{\theta}_0 \end{cases}. \quad (4.13)$$

Ograniczenia wynikające z braku poślizgu poprzecznego przyjmuje teraz postać

$$\dot{x} \sin(\theta_0 + \theta_{u2}) - \dot{y} \cos(\theta_0 + \theta_{u2}) + 2l \sin(\theta_{u2}) \dot{\theta}_0 = 0, \quad (4.14)$$

zaś wzdłużnego

$$\dot{x} \cos(\theta_0 + \theta_{u1}) + \dot{y} \sin(\theta_0 + \theta_{u1}) + 2l \cos(\theta_{u2}) \dot{\theta}_0 - r_2 \dot{\phi}_{u2} = 0, \quad (4.15)$$

gdzie r_2 to promień koła drugiego. Otrzymane ograniczenia można zapisać w postaci Pfaffa (2.1) jako

$$\begin{bmatrix} s_{0u1} & -c_{0u1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{0u1} & s_{0u1} & 0 & 0 & -r_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_{0u2} & -c_{0u2} & 2ls_{u2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{0u2} & s_{0u2} & 2lc_{u2} & 0 & 0 & 0 & -r_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_{u1} \\ \dot{\phi}_{u1} \\ \dot{\theta}_{u2} \\ \dot{\phi}_{u2} \end{pmatrix} = 0, \quad (4.16)$$

gdzie $s_{0u1} = \sin(\theta_0 + \theta_{u1})$, $c_{0u1} = \cos(\theta_0 + \theta_{u1})$, $s_{0u2} = \sin(\theta_0 + \theta_{u2})$, $c_{0u2} = \cos(\theta_0 + \theta_{u2})$, $s_{u2} = \sin \theta_{u2}$, $c_{u2} = \cos \theta_{u2}$.

4.3 Bezdryfowy układ sterowania

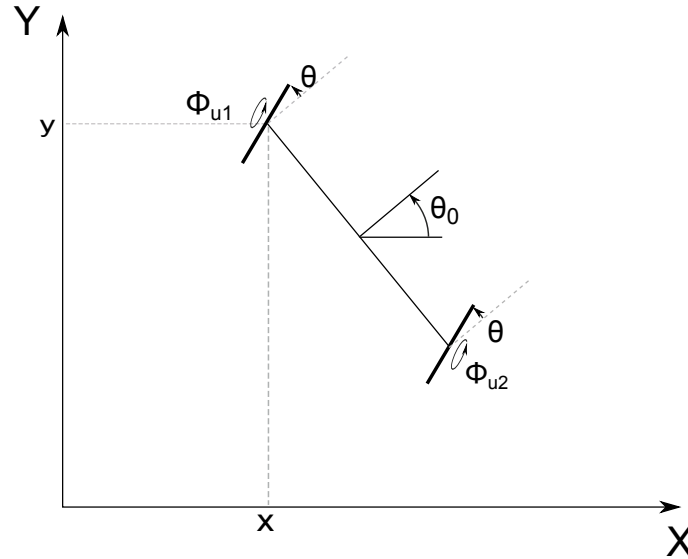
Ponieważ wymiar uogólnionego wektora położeń $q(t)$ $n = \dim(q(t)) = 9$ a liczba ograniczeń $l = 4$ to liczba dostępnych sterowań wynosi $m = n - l = 5$. Przyjmując, że dwa z tych sterowań będą określały zmianę promienie kół, podobnie jak w modelu pełnym mamy do czynienia z niedoborem jednego sterowania względem fizycznie dostępnych $(\theta_{u1}, \theta_{u2}, \phi_{u1}, \phi_{u2})$. Dla przypadku, w którym rezygnujemy z bezpośredniego sterowania skręceniem koła (zarówno pierwszego jak i drugiego) równanie (2.3) nie ma rozwiązań. Musimy zatem przyjąć bezpośrednie sterowanie dwoma skręczeniami i jedną prędkością obrotową, pozwalając aby druga prędkość ($\dot{\phi}_{u2}$) była wyliczana automatycznie. Przy takich założeniach oraz ograniczeniach (4.16) możemy wyliczyć macierz sterowania (2.3) w postaci

$$G(q) = \begin{bmatrix} 0 & \cos(\theta_0 + \theta_{u1})r_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(\theta_0 + \theta_{u1})r_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \csc(\theta_{u2}) \sin(\theta_{u1} - \theta_{u2}) \frac{r_1}{2l} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \csc(\theta_{u2}) \sin \theta_{u1} \frac{r_1}{r_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

oraz układ sterowania (2.2) w postaci

$$\begin{cases} \dot{x} = \cos(\theta_0 + \theta_{u1})r_1\eta_2 \\ \dot{y} = \sin(\theta_0 + \theta_{u1})r_1\eta_2 \\ \dot{\theta}_0 = \csc(\theta_{u2}) \sin(\theta_{u1} - \theta_{u2}) \frac{r_1}{2l} \eta_2 \\ \dot{\theta}_{u1} = \eta_1 \\ \dot{\phi}_{u1} = \eta_2 \\ \dot{\theta}_{u2} = \eta_3 \\ \dot{\phi}_{u2} = \csc(\theta_{u2}) \sin \theta_{u1} \frac{r_1}{r_2} \eta_2 \\ \dot{r}_1 = \eta_4 \\ \dot{r}_2 = \eta_5 \end{cases}. \quad (4.18)$$

Warto zauważyć, że zgodnie z otrzymanym modelem zarówno sterowanie prędkością wirowania koła jak i jego promieniem ma wpływ na jego prędkość postępową. Stąd takie same trajektorie ruchu można osiągnąć poprzez zmianę prędkości obrotowej przy niezmiennym promieniu oraz poprzez zmianę promienia i pozostawienie stałej prędkości wirowania. Prędkość postępową koła jest iloczynem prędkości wirowania i promienia. Z tego powodu pierwszy przypadek jest bardziej intuicyjny, gdyż sterowanie bezpośrednio wpływa na prędkość postępową i umożliwia natychmiastową jej zmianę. Jednakże przy przenoszeniu sterowań z modelu uproszczonego do pełnego prędkość wirowania koła odpowiada prędkości wirowania półsfery i wskazane jest, aby była niezmienna, a zwalnianie i przyspieszanie było realizowane poprzez zmianę promienia. Przyjmijmy sterowanie prędkością wirowania $\dot{\phi}_{ui}(t) = \dot{\phi}_d(t)$ oraz $r_i(t) = r_0$, gdzie $\dot{\phi}_d(t)$ – zadana funkcja, r_0 – zadany (stały) promień koła. Takie sterowanie można przekształcić do zadania stałej prędkości wirowania $\dot{\phi}_{u1} = const$ oraz zmiennego promienia $r(t) = \frac{\dot{\phi}_d(t) \cdot r_0}{\dot{\phi}_{u1}}$, które po zróżniczkowaniu po czasie pozwolą wyliczyć sterowanie promieniem $\dot{r}(t)$.



Rysunek 4.3 Przypadek specjalny modelu uproszczonego

4.4 Przypadek specjalny

W celu lepszego zrozumienia reakcji robota na sterowania wyprowadzony został dodatkowo model, w którym $\theta_{u1} = \theta_{u2} = \theta$, a także $r_1 = r_2 = r$ (rysunek 4.3). Ponadto przyjmujemy stałe wartości r co redukuje wektor współrzędnych uogólnionych do 6 elementowego $q = (x, y, \theta_0, \theta, \phi_{u1}, \phi_{u2})^T$. Macierz ograniczeń przyjmuje wówczas postać

$$\begin{bmatrix} \sin(\theta_0 + \theta) & -\cos(\theta_0 + \theta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\theta_0 + \theta) & \sin(\theta_0 + \theta) & 0 & -r & 0 & 0 \\ \sin(\theta_0 + \theta) & -\cos(\theta_0 + \theta) & 2l \sin \theta & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\theta_0 + \theta) & \sin(\theta_0 + \theta) & 2l \cos \theta & 0 & 0 & -r \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi}_{u1} \\ \dot{\phi}_{u2} \end{pmatrix} = 0 \quad (4.19)$$

a macierz sterowań (przy $\theta \neq 0$)

$$G(t) = \begin{bmatrix} 0 & r \cos(\theta_0 + \theta) \\ 0 & r \sin(\theta_0 + \theta) \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.20)$$

co daje układ sterowania w postaci

$$\begin{cases} \dot{x} = r \cos(\theta_0 + \theta)\eta_2 \\ \dot{y} = r \sin(\theta_0 + \theta)\eta_2 \\ \dot{\theta}_0 = 0 \\ \dot{\phi}_{u1} = \eta_1 \\ \dot{\theta}_{u2} = \eta_2 \\ \dot{\phi}_{u2} = \eta_2 \end{cases} \quad (4.21)$$

Z otrzymanego układu sterowania widać, że robot w trakcie ruchu nie jest w stanie zmieniać swojej orientacji a prędkości obrotowe obu kół są takie same. Interesująca sytuacja ma miejsce, gdy kąt θ osiągnie zero. W takim przypadku macierz ograniczeń (4.19) nie ma pełnego rzędu a wiersz 1 i 3 są identyczne. To powoduje pojawienie się dodatkowego sterowania η_3 i odpowiadającej mu kolumny w macierzy sterowań (4.20) $g_3 = (0, 0, \frac{r}{2l}, 0, 0)^T$ a sterowanie η_2 przestaje mieć wpływ na prędkość drugiego koła i jest postaci $g_2 = (r \cos \theta_0, r \sin \theta_0, -\frac{r}{2l}, 0, 1, 0)^T$. Nowa macierz sterowań ma postać

$$G(t) = \begin{bmatrix} 0 & r \cos \theta_0 & 0 \\ 0 & r \sin \theta_0 & 0 \\ 0 & -\frac{r}{2l} & \frac{r}{2l} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

Ostatecznie możemy zapisać bezdryfowy układ sterowania w postaci

$$\begin{cases} \dot{x} = r \cos \theta_0 \eta_2 \\ \dot{y} = r_1 \sin \theta_0 \eta_2 \\ \dot{\theta}_0 = -\frac{r}{2l}(\eta_3 - \eta_2) \\ \dot{\phi}_{u1} = \eta_1 \\ \dot{\theta}_{u2} = \eta_2 \\ \dot{\phi}_{u2} = \eta_3 \end{cases} \quad (4.23)$$

W takim przypadku model robot został sprowadzony do modelu robota klasy (2,0), jednak gdy tylko kąt θ przyjmuje wartości różne od zera dodatkowe sterowanie przestaje oddziaływać i robot powraca do klasy (1,2).

Rozdział 5

Badania symulacyjne

Symulacje zostały przeprowadzone z użyciem środowiska Mathematica [3]. Przygotowano model robota z ograniczeniami, narzędzia do wizualizacji śladu ruchu robota i przebiegu trajektorii ruchu (oraz prędkości). Następnie przeprowadzono testy mające na celu weryfikację poprawności modelu oraz otrzymywanych trajektorii. Na wykresach ślad robota został przedstawiony za pomocą trzech krzywych (czerwona, niebieska, żółta) odpowiednio dla śladu środka, pierwszej i drugiej półsfery (koła).

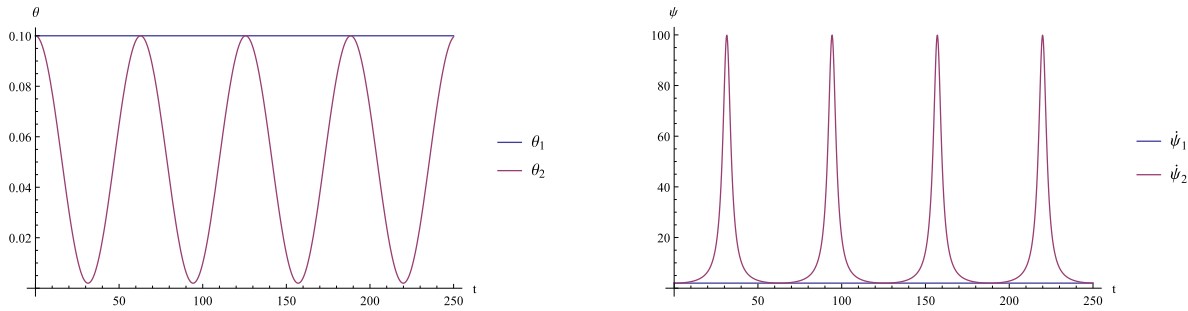
5.1 Model pełny

Badania pełnego modelu obejmowały sprawdzanie wpływu sterowań oraz warunków początkowych na otrzymywane trajektorie. Parametry robota zostały przyjęte jako $l = 0.1m$ a $R = 0.03m$. Dla zwiększenia czytelności warunki początkowe $x(0), y(0)$ zostały przyjęte tak, aby w chwili początkowej środek robota znajdował się w punkcie $(0, 0)$.

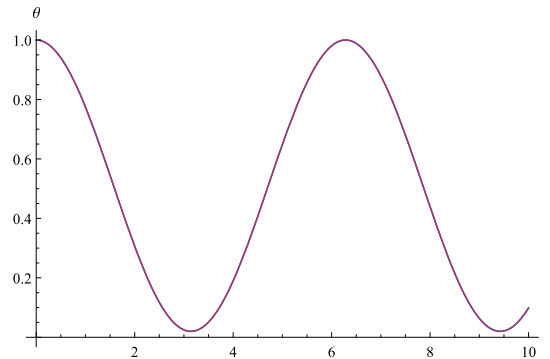
5.1.1 Bezpośrednie sterowanie wychyleniami i jednym wirowaniem

W pierwszych testach wszystkie sterowania poza ruchem wirowym zostały przyjęte jako zerowe ($\eta(t) = (0, 0, 2, 0, 0)^T$). W takich warunkach sprawdzono wpływ ustawień początkowych na zachowanie robota. Dla jednoczesnego (takiego samego) wychylenia kątów θ_i , przy zerowych wartościach początkowych pozostałych kątów, robot porusza się wzdłuż osi Y z prędkością postępową zależną od wielkości wychylenia θ_i . Jeśli do tego dodamy niezerowe (takie same) warunki początkowe na wychylenie ϕ_i robot porusza się po prostych nie zmieniając swojej orientacji. Prędkość wirowania drugiej półsfery przyjmuje wartości równe prędkości wirowania pierwszej półsfery. Dla różniących się kątów θ_i lub ϕ_i ślad ruchu robota jest wycinkiem okręgu, a prędkość wirowania drugiej półsfery dostosowuje się tak, aby zachować brak poślizgów. Przy doborze warunków początkowych należy pamiętać, że w modelu (3.19) występuje dzielenie przez $\sin \theta_2$, co uniemożliwia ustawienie $\theta_2 = 0$. Specjalnym przypadkiem jest sytuacja, gdy $\theta_1 = \theta_2 = 0$, wtedy robot stoi w miejscu (dla $\phi_1 = \phi_2 = 0$), porusza się wzdłuż osi X (dla $\phi_1 = \phi_2 \neq 0$) lub jedzie po okręgu (dla $\phi_1 \neq \phi_2 \neq 0$).

Następnie przeprowadzono testy wpływu zmieniającego się cyklicznie sterowania wychyleniem. Mając na względzie konstrukcję rzeczywistego robota funkcje sterowań należy tak dobrać, aby nie dopuścić do zbytniego wychylenia kątów θ i ϕ . W pierwszej kolejności sterowania przyjęto jako $\eta(t) = \left(0, 0, 2, 0, -0.004 \sin \frac{t}{10}\right)^T$ przy warunkach początkowych



Rysunek 5.1 Kąt wychYLENIA, oraz prędkości półsfery. Badanie prędkości drugiej półsfery



Rysunek 5.2 Kąt wychYLENIA. Badanie wpływu cyklicznych zmian kąta na położenie. Sterowanie nieobejmujące ψ_2

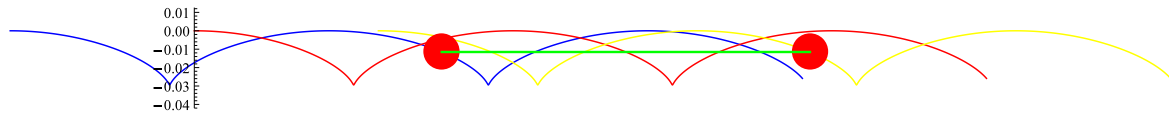
$q(0) = (0, 0.1, 0, 0, 0.1, 0, 0, 0.1, 0)^T$ co odpowiada wprawieniu pierwszej półsfery w ruch obrotowy i pochyłaniu i prostowaniu drugiej półsfery. Jak widać na rysunku 5.1, gdy kąt wychYLENIA θ_2 maleje to prędkość obrotowa drugiej półsfery zwiększa się w celu zapobieżenia poślizgom.

Kolejno warto przyjrzeć się reakcji robota na cykliczne, równoczesne zmiany kątów θ_1, θ_2 . Przyjmując następujące warunki początkowe $q(0) = (-0.1, 0, \frac{\pi}{2}, 0, 1, 0, 0, 1, 0)^T$ oraz sterowania $\eta(t) = (0, -0.49 \sin t, 2, 0, -0.49 \sin t)^T$, kąty θ_i zmieniają się od 0.1 do niemal 0 (rysunek 5.2). Analizując ślad (zobacz rysunek 5.3) obserwujemy "bujanie" się robota w osi X.

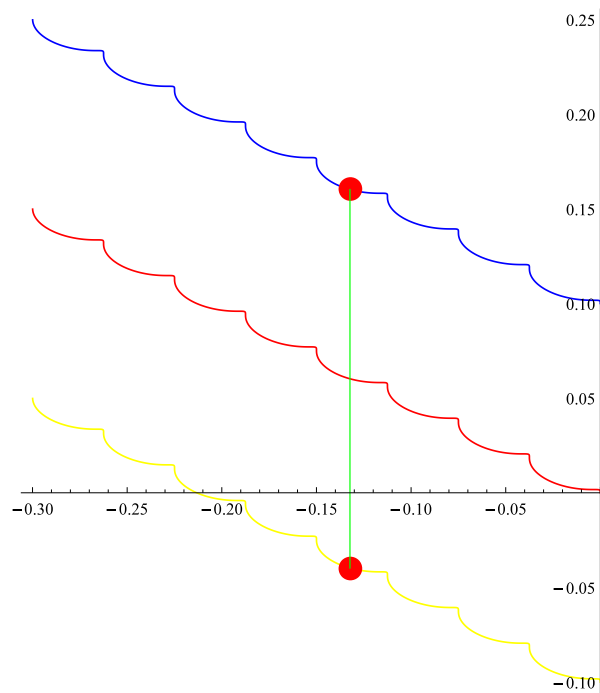
Podobne zachowanie obserwujemy dla cyklicznych zmian kąta ϕ_i . Przyjmijmy teraz $q(0) = (0, 0.1, 0, 0, -0.05, 0, 0, -0.05, 0)^T$ oraz $\eta(t) = (0.1 \sin t, 0, 2, 0.1 \sin t, 0)^T$. W wyniku takich sterowań powstaje trajektoria przedstawiona na rysunku 5.4, natomiast na wykresie prędkości 5.5 możemy zaobserwować, że gdy półsfery wyprostowują się spada prędkość postępowania.

5.1.2 Bezpośrednie sterowanie wirowaniami i trzema wychYLENIA-mi

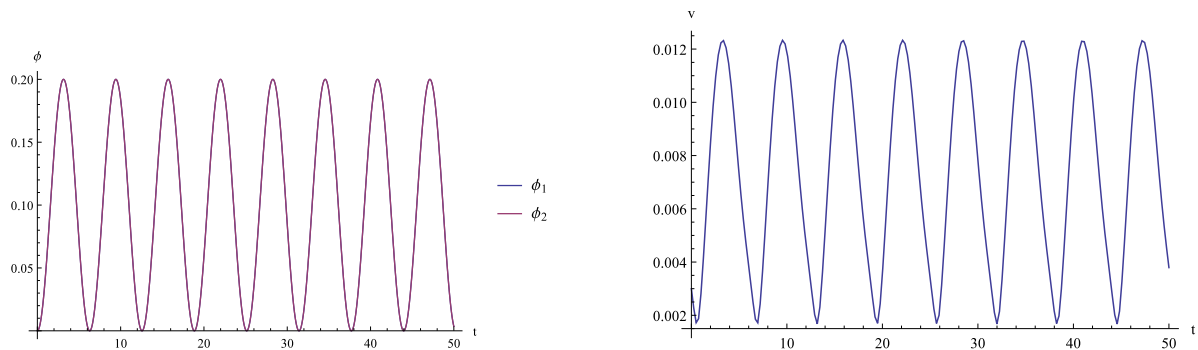
Podobnie jak w poprzednim przypadku testy rozpoczęto od sprawdzenia wpływu ustawień początkowych przy sterowaniach w postaci $\eta(t) = (0, 0, 2, 0, 2)^T$, czyli obu półsferych wprawionych w ruch wirowy z tą samą prędkością. Zgodnie z oczekiwaniami, gdy wychYLENIE $\theta_1 = \theta_2 \neq 0$ robot poruszał się wzdłuż osi Y. Przy ustaleniu kątów $\phi_1 = \phi_2 \neq 0$ ślad staje się linią prostą, a robot nie zmienia swojej orientacji. Dla $\phi_1 \neq \phi_2$ robot jeździ po okręgu. Jeśli prędkości wirowania są takie same oraz $\theta_1 = \theta_2$



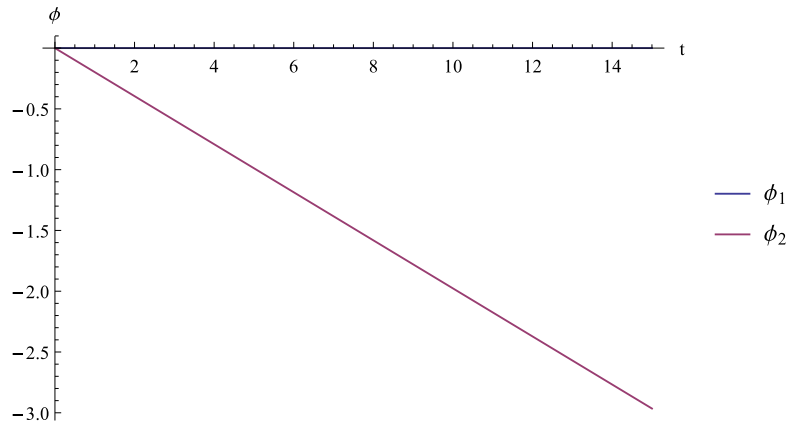
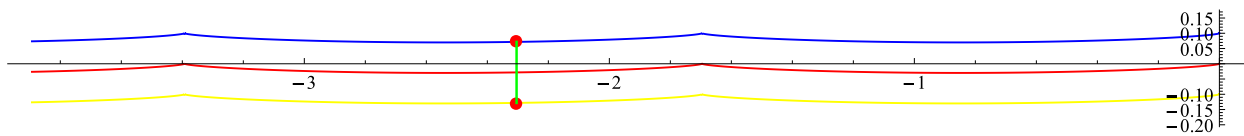
Rysunek 5.3 Ślad ruchu robota. Badanie wpływu cyklicznych zmian kąta na położenie. Sterowanie nieobejmujące ψ_2 .



Rysunek 5.4 Ślad ruchu robota. Badanie wpływu cyklicznych zmian kąta wychylenia na położenie. Sterowanie nie obejmujące ψ_2



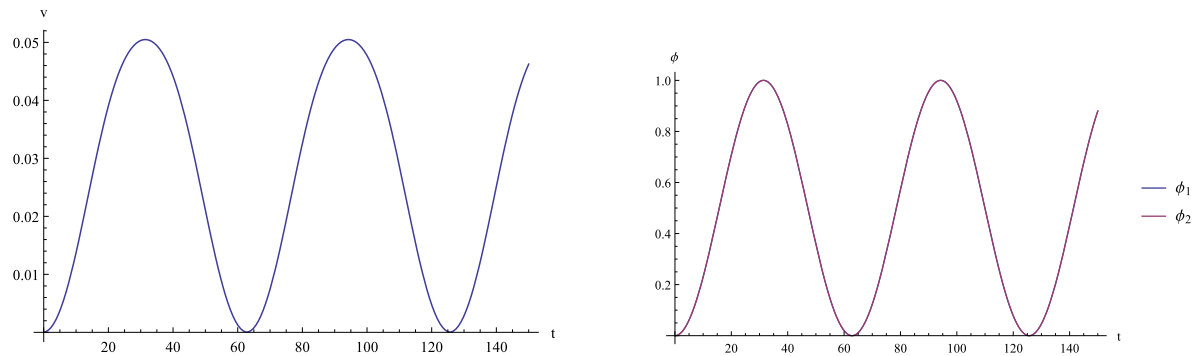
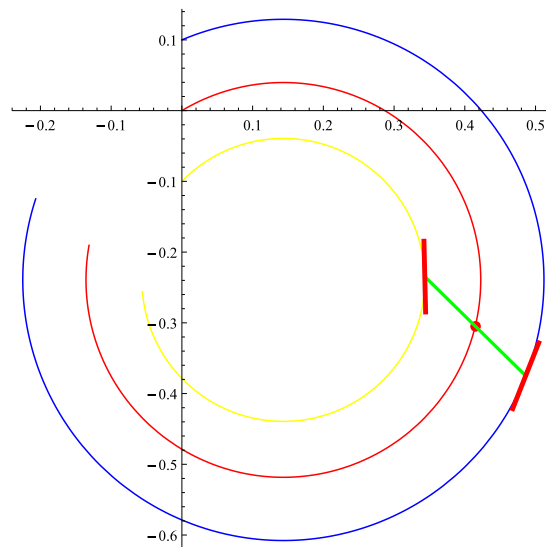
Rysunek 5.5 Kąt wychylenia, oraz prędkość liniowa środka robota. Badanie wpływu cyklicznych zmian kąta wychylenia na położenie. Sterowanie nieobejmujące ψ_2

Rysunek 5.6 Kąty ϕ przekraczający dozwolone wartościRysunek 5.7 Ślad ruchu robota. Sterowanie nieobejmujące ϕ_2

automatycznie wyliczana prędkość $\dot{\phi}_2$ równa się 0, a kąt ϕ_2 pozostaje niezmienny. Jednakże, gdy tylko kąty θ_i przyjmowały różne wartości automatycznie wyliczana prędkość $\dot{\phi}_2$ była różna od zera i stałego znaku, co w krótkim czasie prowadziło do przekroczenia ograniczeń wychylenia. Przykładowo wybierając $q(0) = (0, 0.1, 0, 0, 0.1, 0, 0, 0.2, 0)^T$, zgodnie z (3.21) prędkość $\dot{\phi}_2 = 0 + \sin(0.1) \cdot 2 - \sin(0.2) \cdot 2 \approx -0.2$, a co za tym idzie $\phi_2(t) = \int (\dot{\phi}_2(t)) dt = -0.2t$, czyli już po 8s kąt przekracza $-\frac{\pi}{2}$ (zobacz rysunek 5.6). Widać więc, że rezygnacja z bezpośredniego sterowania kątem ϕ_2 mimo iż pozwala uniknąć dzielenia przez zero przysparza innych problemów. Zgodnie z (3.21) prędkość $\dot{\phi}_2$ zależy od wielu zmiennych ($\dot{\phi}_2 \sim f(\eta_1, \theta_1, \eta_3, \theta_2, \eta_5)$) trudno jest więc zachować kontrolę nad jej wartością, a co za tym idzie samym wychyleniem ϕ_2 . W kolejnym kroku sprawdzono reakcję układu na cykliczne zmiany sterowań. Ślad otrzymany dla warunków początkowych $q(0) = (0, 0.1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$ oraz sterowań $\eta(t) = (0.05 \sin \frac{t}{10}, 0, 2, 0, 2)^T$ przedstawiono na rysunku 5.7. Obserwujemy cykliczne wychylenie się robota w osi Y. Podobnie jak kąt, cyklicznie zmienia się także prędkość postępową (rysunek 5.8). Kąt ϕ_2 w celu uniknięcia poślizgów przyjmuje takie same wartości jak sterowany bezpośrednio kąt ϕ_1 (zobacz rysunek 5.8).

5.2 Model uproszczony

W modelu uproszczonym przyjęto podobnie jak dla modelu pełnego $l = 0.1m$. Jeśli nie napisano inaczej promienie w chwili zero przyjęto jako $r_1 = r_2 = 0.02m$ natomiast sterowania im odpowiadające mają wartości zero.

Rysunek 5.8 Prędkość postępowa oraz kąty ϕ . Sterowanie nieobejmujące ϕ_2 

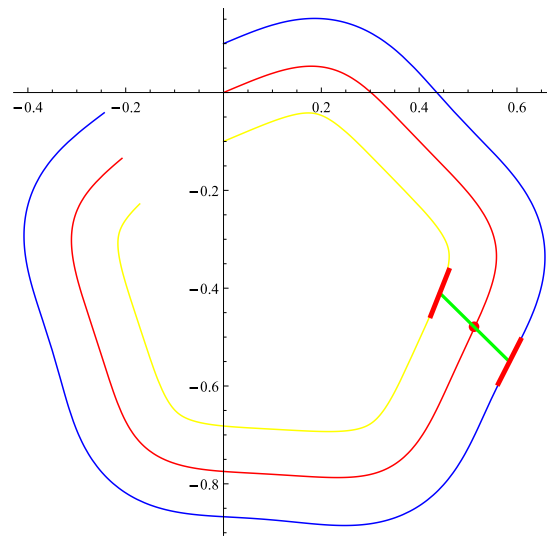
Rysunek 5.9 Ślad ruchu robota. Model uproszczony

5.2.1 Sterowanie dwoma skręceniami i jednym wirowaniem

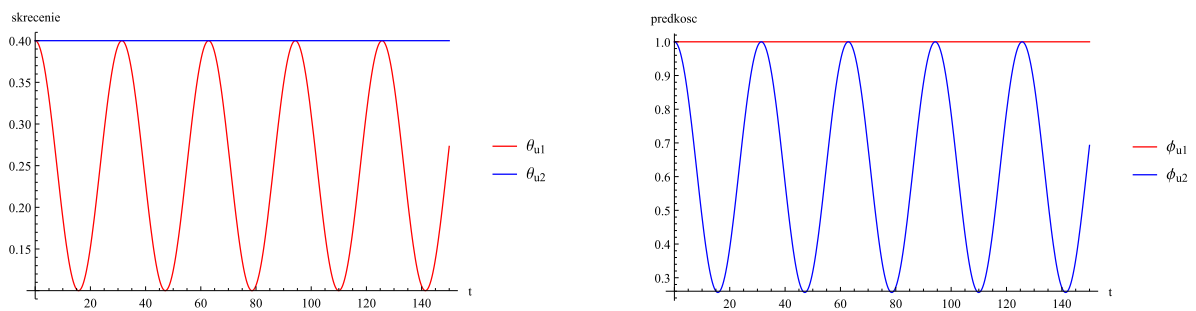
Ponownie testy zaczniemy od wprawienia pierwszego koła w ruch obrotowy ($\eta(t) = (0, 10, 0)^T$) i sprawdzenia wpływu ustawień początkowych na trajektorię. Gdy oba kąty skręcenia są równe, ale różne od zera ślad ruchu robota jest linią prostą, a prędkość obrotowa drugiego koła jest taka sama jak pierwszego. Gdy $\theta_{u1} \neq \theta_{u2}$ robot może poruszać się po okręgu. W zależności, czy drugie koło jest od wewnątrz czy od zewnątrz jego prędkość obrotowa odpowiednio się zmniejsza lub zwiększa. Przykładowo, dla warunków początkowych $q(0) = (0, 0.1, 0, 0.1, 0, 0.2, 0)^T$ otrzymujemy trajektorie przedstawioną na rysunku 5.9, a prędkość $\dot{\phi}_{u2} \approx 5.429$.

Przyjmijmy teraz sterowanie w postaci $\eta(t) = (-0.03 \sin(\frac{t}{5}), 1, 0)^T$ oraz warunki początkowe $q(0) = (0, 0.1, 0, 0.4, 0, 0.4, 0)^T$. Ślad ruchu przedstawiono na rysunku (5.10), natomiast na rysunku 5.11 możemy zaobserwować zmiany prędkości obrotowej drugiego koła przy zmianach kąta skręcenia.

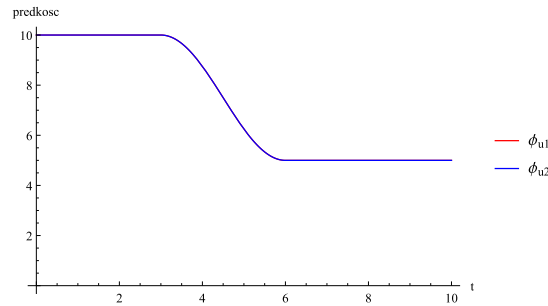
Jak opisano w rozdziale 4.3 sterowanie prędkością koła przy stałym promieniu może zostać zastąpione poprzez sterowanie zmianą jego promienia przy stałej prędkości obrotowej. Przyjmijmy warunki początkowe jako $q(0) = (0, 0.1, 0, \frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}, 0)^T$ oraz sterowanie tylko prędkością obrotową $\dot{\phi}_{u1}$ takie jak na wykresie 5.12 (prędkość $\dot{\phi}_{u2}$ przyjmuje takie same wartości, ponieważ promienie i kąty θ_{ui} są takie same). W efekcie otrzymujemy tra-



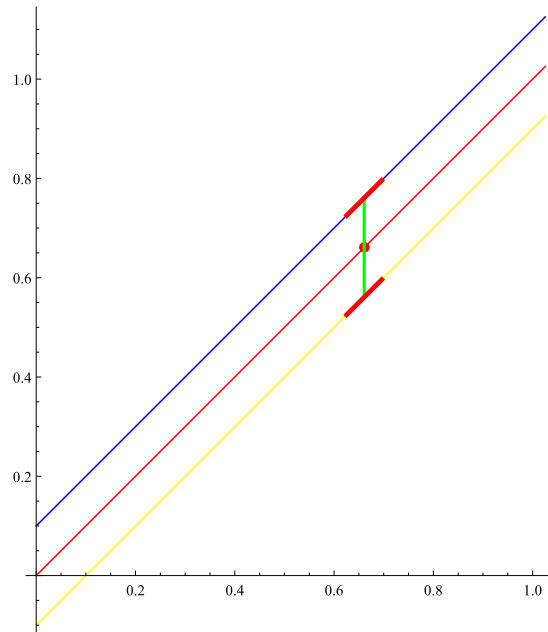
Rysunek 5.10 Ślad ruchu robota. Model uproszczony



Rysunek 5.11 Skrećenie oraz prędkość obrotowa kół. Model uproszczony



Rysunek 5.12 Prędkość obrotowa kół w modelu uproszczonym

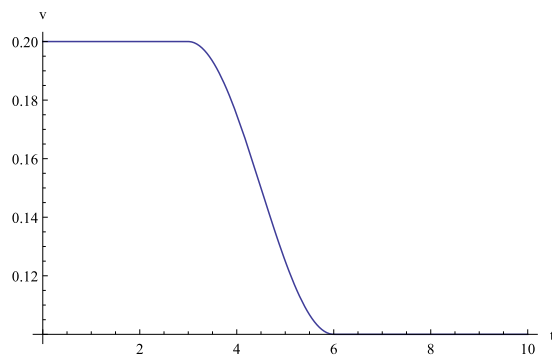


Rysunek 5.13 Ślad ruchu robota. Model uproszczony

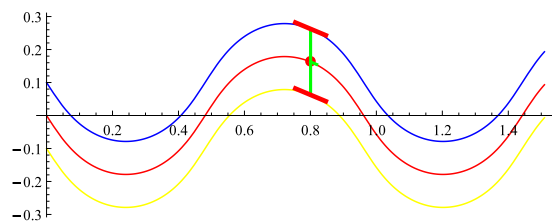
wektorem jak pokazano na rysunku 5.13, oraz prędkość postępową robota jak na rysunku 5.14. Następnie przyjęto stałą prędkość obrotową $\dot{\phi}_{u1} = 10$ oraz wyliczono $r(t) = \frac{\dot{\phi}_1 \cdot 0.02}{10}$. Otrzymany ślad oraz prędkość postępową były takie same jak wcześniej, co wskazuje na równowagę tych sterowań.

5.2.2 Przypadek specjalny. Kąty $\theta_{u1} = \theta_{u2} = \theta$

Jedną z podstawowych zalet modelu 4.21 jest eliminacja występującego w modelu 4.18 dzielenia przez $\sin \theta$ co umożliwia przechodzenie kątami skręcenia przez 0. Przykładowo ustalmy warunki początkowe jako $q(0) = (0, 0.1, 0, -1, 0, 0)^T$ oraz sterowania jako $\eta(t) = \left(0.1 \sin \frac{t}{10}, 1\right)^T$, ślad ruchu robota przedstawiono na rysunku 5.15. Robot porusza się wzdłuż osi X „oscylując” wokół niej. Jak wspomniano przy okazji wyprowadzania modelu, w przypadku gdy $\sin \theta \neq 0$, robot nie jest w stanie zmienić swojej orientacji, jednak gdy kąt θ osiągnie 0 pojawia się dodatkowe sterowanie. W takiej sytuacji możemy niezależnie sterować prędkością obrotową obu kół, co sprawia że robot może poruszać się po okręgach, tym samym zmieniając swoją orientację. Przykładowo przyjmując sterowanie



Rysunek 5.14 Prędkość postępową robota. Model uproszczony



Rysunek 5.15 Ślad ruchu robota. Przypadek specjalny modelu uproszczonego

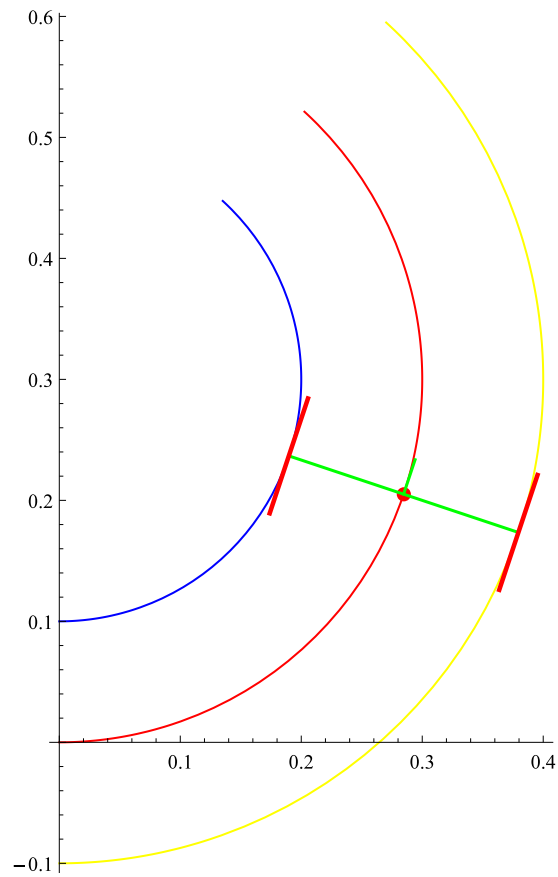
w postaci $\eta(t) = (0, 1, 2)^1$ robot porusza się po okręgu (rys 5.16) a jego orientacja ulega zmianie.

5.3 Przeniesienie sterowań z modelu uproszczonego do pełnego

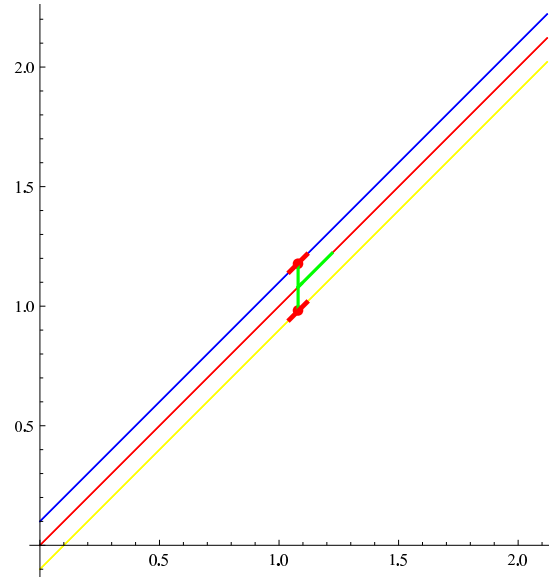
W podrozdziale 4.1 pokazano, że półsfery można zastąpić kołem skrętnym o zmiennym promieniu oraz, że taka transformacja jest odwracalna. Obecnie zilustrujemy wyniki otrzymywane w efekcie użycia trajektorii ruchu modelu uproszczonego do wyznaczenia sterowań modelu pełnego, co będziemy nazywać przeniesieniem sterowań. Aby przenieść sterowanie, wybieramy warunki początkowe i sterowania dla modelu uproszczonego i wyliczamy jego trajektorię ruchu. Następnie, korzystając ze wzorów 4.5, 4.6 wyliczmy trajektorię dla modelu pełnego i zadajemy jej pochodną jako sterowanie dla modelu pełnego.

Dla ilustracji jako model pełny wybrano ten z bezpośrednim sterowaniem wirowaniami i trzema wychyleniami (rozdział 3.5.2). Podobnie jak poprzednio, promień półsfery przyjęto jako $R = 0.03m$ a długość $l = 0.1m$. W pierwszej kolejności wprowadzono model uproszczony w ruch po linii prostej. W tym celu ustawiono warunki początkowe $q(0) = (0, 0.1, 0, \frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}, 0.02, 0.02)^T$, a sterowania przyjęto w postaci $\eta(t) = (0, 1, 0, 0, 0)^T$. Otrzymany ślad dla modelu uproszczonego i pełnego przedstawiono na rysunku 5.17. Jak widać ślady są identyczne. Następnie zmieniono sterowanie tak, aby robot zatrzymywał się i ruszał ($\eta(t) = (0, 5 \sin t + 5, 0, 0, 0)^T$). Po przeniesieniu sterowań oba modele zachowywały się tak samo, jednak zmiana prędkości postępowej dla pełnego modelu była realizowana poprzez zmianę prędkości wirowania. Następnie zgodnie z zasadą opisaną w rozdziale 4.3 zmieniono sterowania tak, aby prędkość postępową była stała i wynosiła $V_d = 10$, a zmia-

¹Należy zauważyć, że w tym przypadku, by zachować niezależne sterowanie prędkościami obrotowymi kół pierwsza składowa sterowania musi być równa zero.



Rysunek 5.16 Ślad ruchu robota. Przypadek specjalny modelu uproszczonego. Niezależne sterowanie prędkością kół.

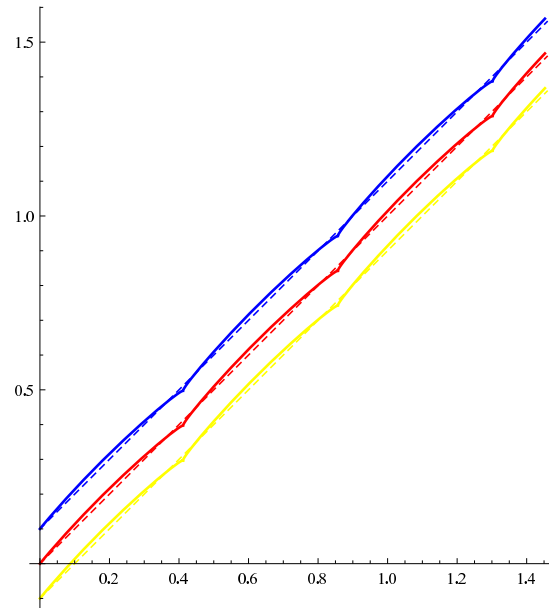


Rysunek 5.17 Ślad ruchu robota. Przeniesienie sterowań

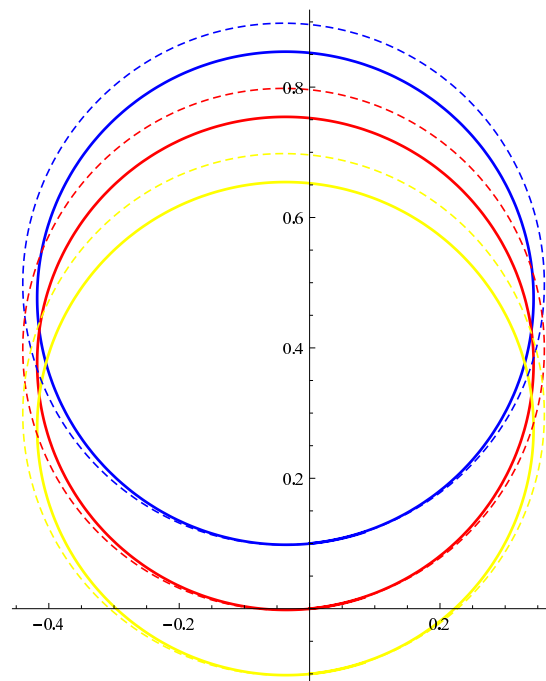
na prędkości była realizowana przez zmianę promienia kół zastępczych. Ślady robotów przedstawiono na rysunku 5.18 (liniami przerywanymi oznaczono ślad modelu uproszczonego). Jak widać model pełny „buja się” wokół śladu modelu uproszczonego. Dzieje się tak ponieważ zmiana promienia koła zastępczego powoduje zmianę wychyleń wirującej półsfery które z kolei wpływają na pozycję robota. Gdy zwiększa się prędkość V_d różnice stają się coraz mniej widoczne.

Ustawmy teraz warunki początkowe $q(0) = (0, 0.1, 0, 0.1, 0, 0.1, 0.02, 0.02)^T$ i sterowania $\eta(t) = (0.5, 10, 0.5, 0, 0)^T$, co odpowiada ciągłemu skręcaniu kół w jedną stronę. Po przeniesieniu sterowań możemy zaobserwować, iż ślady nie pokrywają się (rysunek 5.19). Wynika to z faktu, że model uproszczony nie uwzględnia zmiany pozycji robota wraz ze zmianą kąta skręcenia.

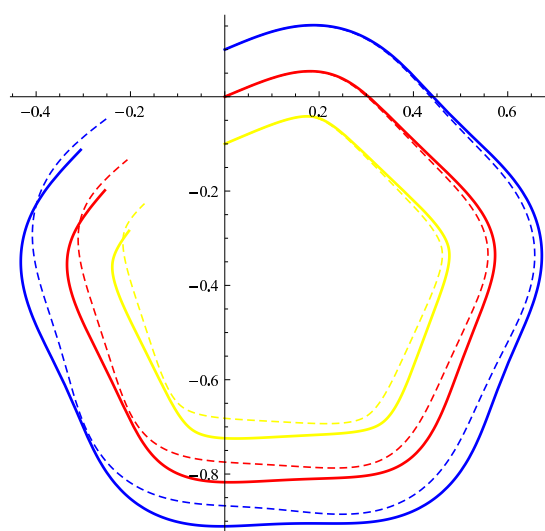
Jak wspomniano na początku tego podrozdziału, do ilustracji wykorzystano model pełny z bezpośrednim sterowaniem wirowaniami i trzema wychyleniami. Podobnie postępując, sterowania można również przenieść na model z bezpośrednim sterowaniem jednym wirowaniem i czterema wychyleniami. W większości przypadków modele zachowują się identycznie (wszystkie omówione wcześniej przypadki) – czasem jednak pojawiają się drobne różnice. Przyjmijmy sterowanie w postaci $\eta(t) = (-0.03 \sin(\frac{t}{5}), 1, 0, 0, 0)^T$ oraz warunki początkowe $q(0) = (0, 0.1, 0, 0.4, 0, 0.4, 0, 0.02, 0.02)^T$. Otrzymany dla nich ślad ruchu dla pierwszego modelu przedstawiono na rysunku (5.20). Możemy zauważyć, że w tym przypadku model pełny zostaje w tyle względem modelu uproszczonego. Natomiast gdy te sterowania zostały przeniesione na drugi model, ślady modelu uproszczonego i pełnego pokrywały się.



Rysunek 5.18 Ślad ruchu robota. Przeniesienie sterowań. Stała prędkości wirowania półsfer



Rysunek 5.19 Ślad ruchu robota. Przeniesienie sterowań



Rysunek 5.20 Ślad ruchu robota. Przeniesienie sterowań. Badania różnic między modelem uproszczonym a pełnym

Rozdział 6

Podsumowanie

Celem pracy było wyprowadzenie modelu kinematyki robota napędzanego dwiema półsferami oraz jego uproszczonej wersji z dwoma kołami skrętnymi, przeprowadzenie badań symulacyjnych wpływu sterowań i warunków początkowych na otrzymywane trajektorie oraz porównanie zachowań obu modeli poprzez przeniesienie sterowań z modelu uproszczonego na pełny. Wszystkie cele zostały zrealizowane.

Przeprowadzono liczne symulacje w celu zrozumienia zachowania robota oraz wpływu sterowań na otrzymywane trajektorie. Porównując dwa warianty modelu pełnego (bezpośrednie sterowanie wychyleniami i jednym wirowaniem, oraz bezpośrednie sterowanie wirowaniami i trzema wychyleniami) pokazaliśmy zalety i wady każdego z nich. W pierwszym przypadku w modelu pojawiają się dzielenia przez $\sin \theta_2$ co sprawia że nie możemy sterować w każdym punkcie. Dla drugiego przypadku, gdzie kąt ϕ_2 był wyliczany automatycznie mogło dojść do sytuacji gdy przekraczał on dopuszczalne wartości.

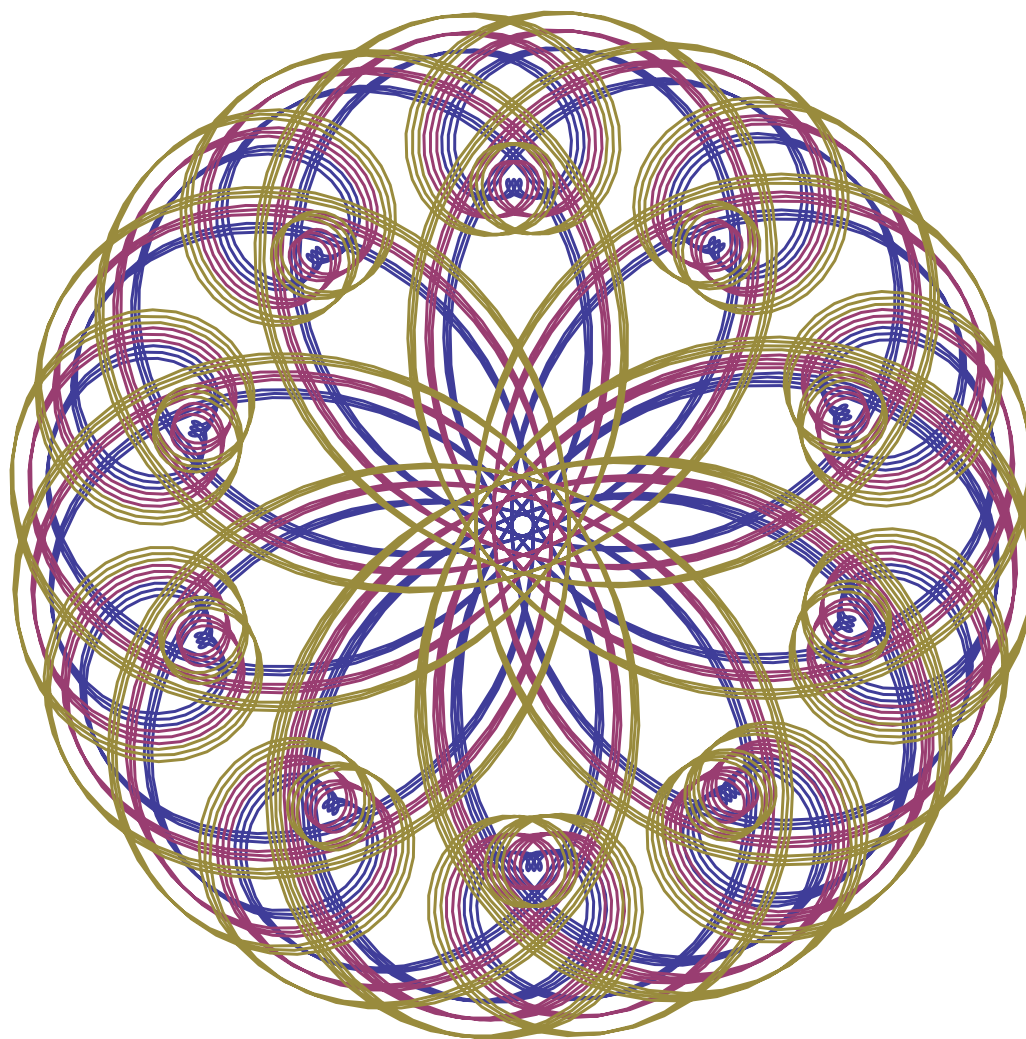
Wyprowadzenie modelu uproszczonego i badanie jego zachowań umożliwiło jeszcze lepsze zrozumienie zachowań robotów. Przy okazji wyprowadzania przypadku specjalnego dla modelu uproszczonego pokazano, że przy określonych warunkach pojawia się dodatkowe sterowanie. Na końcu pokazano iż mimo że w modelu uproszczonym nie uwzględniono wszystkich właściwości modelu pełnego zachowuje się on bardzo podobnie i możliwe jest przeniesienie sterowań z modelu uproszczonego na pełny. Daje to możliwość sterowania skomplikowanym robotem napędzanym dwoma półsferami, tak jakby był to bardziej intuicyjny robot z dwoma kołami skrętnymi.

W przyszłości należy sprawdzić teoretyczne eksperymenty z tej pracy na fizycznym modelu i porównać otrzymywane wyniki. Należy także rozbudować model o dynamikę robota. W szczególności ruch obrotowy półsfer może mieć znaczący wpływ na zachowanie robota. Kolejnym zadaniem do wykonania jest zaproponowanie sterownika zarówno kinematycznego jak i dynamicznego oraz wykonanie odpowiednich symulacji.

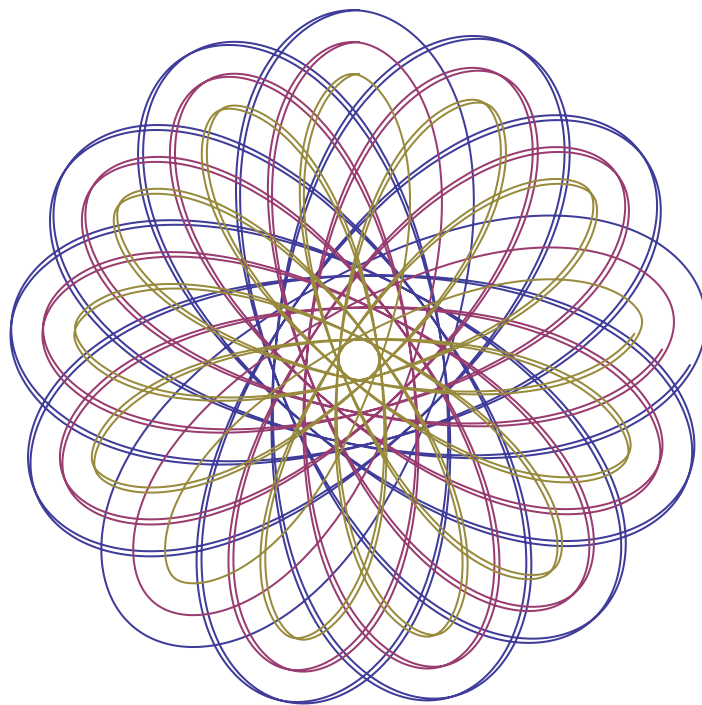
Dodatek A

Galeria

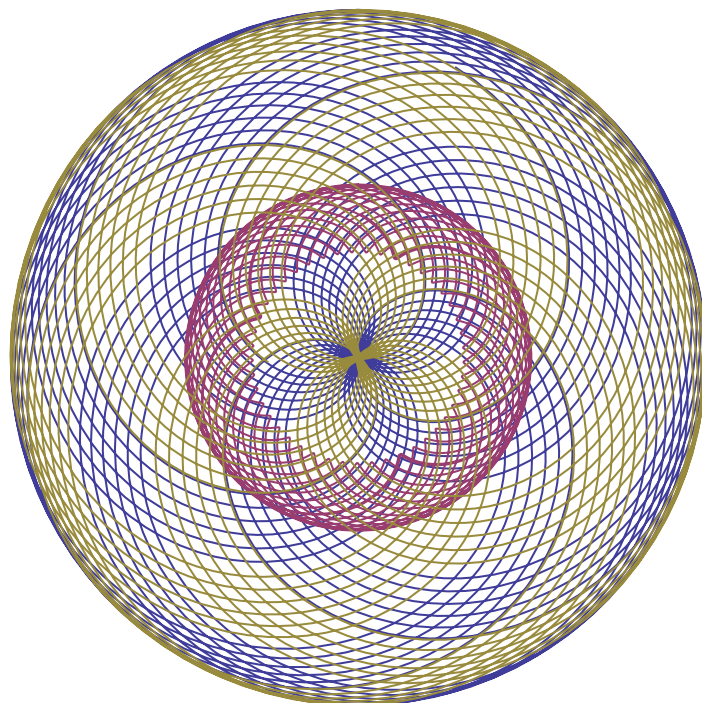
Ponieważ niektóre otrzymywane ślady ruchu robota były niezwykle artystyczne i wprawiły nas w zdumienie zdecydowaliśmy się pokazać co ciekawsze ku uciesze czytelnika. Ślad który najbardziej przypadł nam do gustu i był inspiracją do dalszego poszukiwania przedstawiono na rysunku [A.1](#). Niestety warunki początkowe i sterowania nie zostały zachowane.



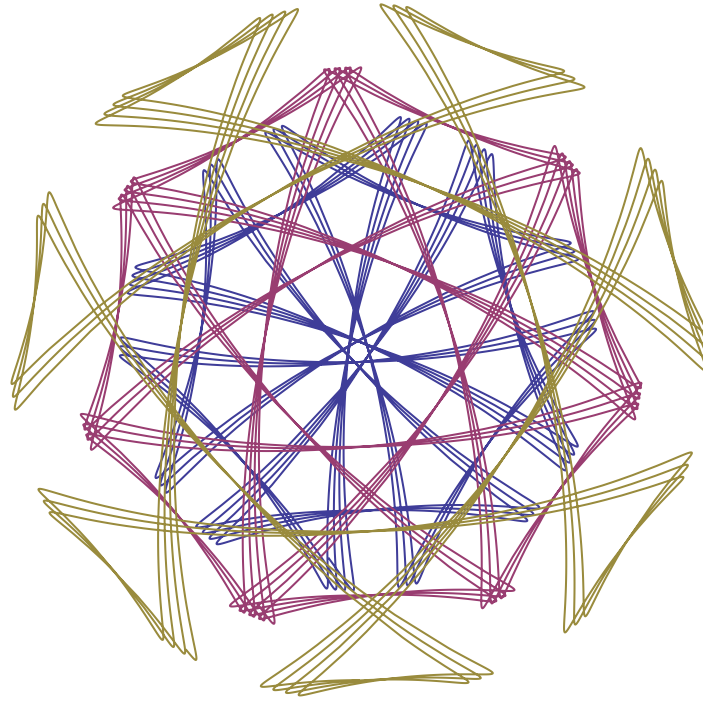
Rysunek A.1 Jeden z najładniejszych śladów ruchu robota. Niestety warunki początkowe i sterowania nie zostały zachowane



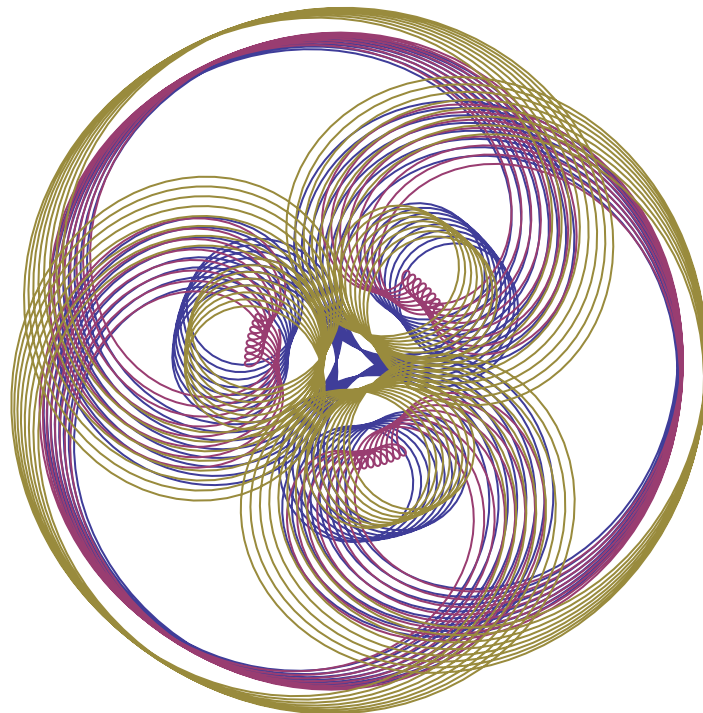
Rysunek A.2 $q(0) = (0, 0.1, 0, 0.4, 0, 0, 0.1, 0, 0)^T$, $\eta(t) = (0.05 \sin(\frac{t}{10}), 0, 2, 0, 2)^T$



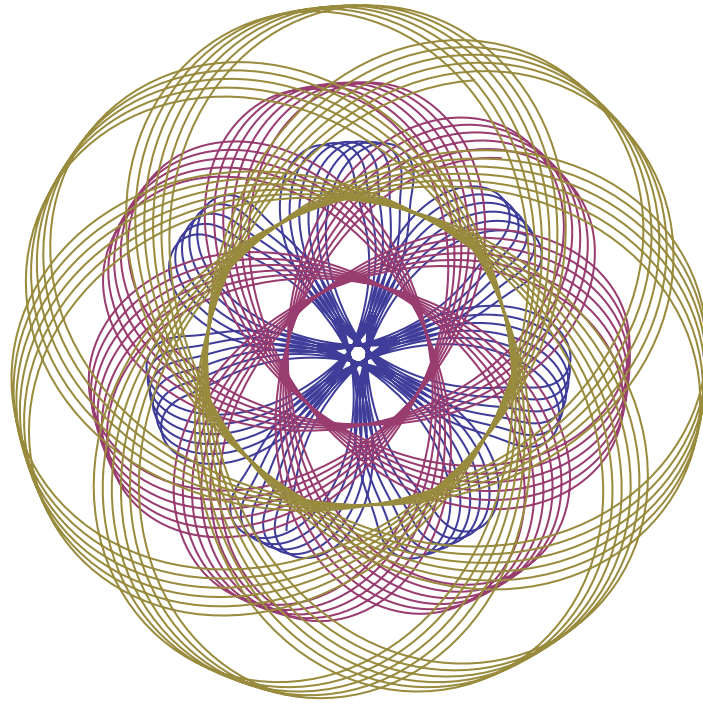
Rysunek A.3 $q(0) = (0, 0.1, 0, 0.5, 0, 0, -0.1, 0, 0)^T$, $\eta(t) = (-0.02 \sin(\frac{t}{10}), 0, 2, 0, 2)^T$



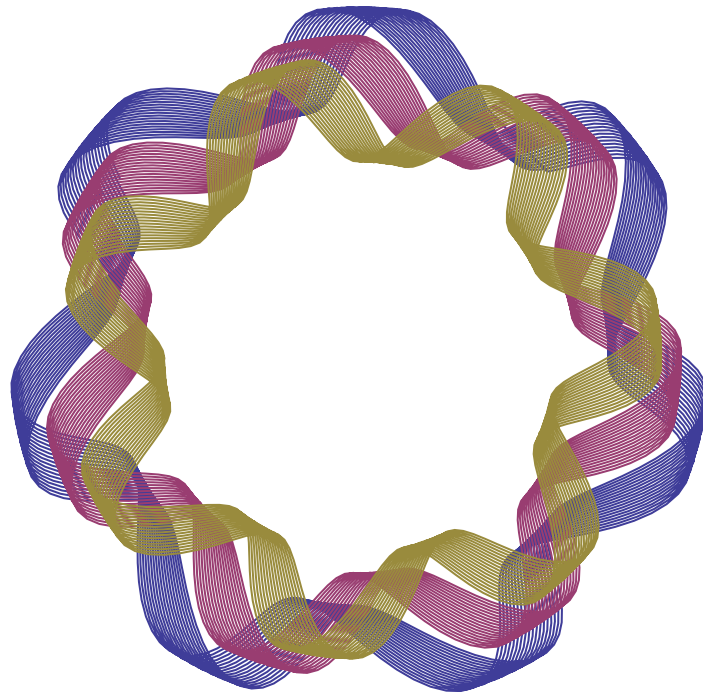
Rysunek A.4 $q(0) = (0, 0.1, 0, 0.35, 0, 0, 0.25, 0, 0)^T$, $\eta(t) = (-0.04 \sin \frac{t}{10}, 0, 2, 0, 2)^T$



Rysunek A.5 $q(0) = (0, 0.1, 0, 0.35, 0, 0, 0.25, 0, 0)^T$, $\eta(t) = (-0.02 \sin \frac{t}{10}, 0.05 \sin \frac{t}{10}, 2, 0.05 \sin \frac{t}{10}, 2)^T$



Rysunek A.6 $q(0) = (0, 0.1, 0, 0, -0.2, 0, 0.9, -0.2, 0)^T$, $\eta(t) = (0.04 \sin \frac{t}{8}, 0, 2, 0, 2)^T$



Rysunek A.7 $q(0) = (0, 0.1, 0, 0.15, -0.3, 0, 0.25, -0.3, 0)^T$, $\eta(t) = (-0.03 \sin \frac{t}{10}, 0.01 \sin \frac{t}{10}, 2, 0.01 \sin \frac{t}{10}, 2)^T$

Bibliografia

- [1] Hog wheel. http://en.wikipedia.org/wiki/Hemispherical_omnidirectional_gimbaled_wheel.
- [2] S. M. LaValle. *PLANNING ALGORITHMS*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [3] Wolfram Mathematica. <http://www.wolfram.com/mathematica/>.
- [4] A. Mazur. *Sterowanie oparte na modelu dla nieholonomicznych manipulatorów mobilnych*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 2009.
- [5] M. Rybczyński. Model robota mobilnego napędzanego za pośrednictwem półsfery. Praca inżynierska, Politechnika Wroclawska, 2011.