

POLITECHNIKA WROCŁAWSKA  
WYDZIAŁ ELEKTRONIKI

---

KIERUNEK: Automatyka i Robotyka (AiR)  
SPECJALNOŚĆ: Robotyka (ARR)

PROJEKT INŻYNIERSKI

Model robota mobilnego napędzanego  
za pośrednictwem półsfery

Model of mobile robot with HOG wheel

AUTOR:  
Michał Rybczyński

PROWADZĄCY PROJEKT:  
dr inż. Robert Muszyński

OCENA PROJEKTU:



# Spis treści

<b>1</b>	<b>Wprowadzenie</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Model matematyczny robota mobilnego</b>	<b>7</b>
<b>3</b>	<b>Kinematyka robota napędzanego półsferą</b>	<b>9</b>
3.1	Definicja układów współrzędnych . . . . .	9
3.2	Pełny model kinematyki . . . . .	11
3.2.1	Ograniczenia nieholonomiczne . . . . .	11
3.2.2	Równania kinematyki . . . . .	13
3.3	Uproszczony model kinematyki . . . . .	14
3.3.1	Model samochodu kinematycznego . . . . .	14
3.3.2	Model zastępczego koła przedniego . . . . .	15
3.3.3	Równania kinematyki . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Linearyzacja modelu kinematyki</b>	<b>19</b>
4.1	Model kinematyki z wyjściem . . . . .	19
<b>5</b>	<b>Badania porównawcze</b>	<b>21</b>
5.1	Opis implementacji . . . . .	21
5.2	Wyniki badań . . . . .	21
5.2.1	Model pełny i uproszczony . . . . .	21
5.2.2	Model z wyjściem linearyzującym . . . . .	27
<b>6</b>	<b>Podsumowanie</b>	<b>35</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>35</b>



# Rozdział 1

## Wprowadzenie

W dzisiejszych czasach roboty mobilne znajdują zastosowanie w wielu dziedzinach życia. Kołowe roboty mobilne są jedną z podgrup naziemnych robotów mobilnych, mających ogromny obszar zastosowań – możemy wyróżnić m.in roboty wartownicze, antyterrorystyczne, inspekcyjne, ratownicze czy transportowe. Systemy jezdne kołowych robotów mobilnych możemy sklasyfikować określając stopień sterowania napędem oraz stopień sterowania kierunkiem. Poprzez stopień sterowania napędem rozumiemy liczbę niezależnych sterowań prędkością kół, natomiast poprzez stopień sterowania kierunkiem – liczbę niezależnych sterowań orientacją kół.

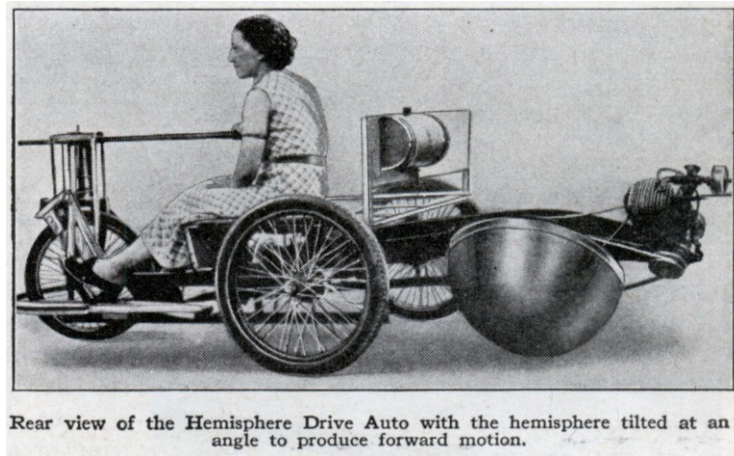
Najczęściej budowanymi kołowymi robotami mobilnymi przez konstruktorów-amatorów są roboty klasy  $(2,0)$ , posiadające dwa niezależnie napędzane koła, a także roboty klasy  $(1,1)$ , posiadające jedną oś napędową oraz jedną oś skrętną. Ze względu na analogię do samochodowego systemu jezdny, model robota klasy  $(1,1)$  nazywamy modelem samochodu kinematycznego. Roboty te ze względu na najczęściej realizowane zadanie śledzenia ścieżki nazywane są linefollowerami.

Napęd kołowy jest jednym z najpopularniejszych i najlepiej zbadanych rodzajów napędu, stosowanych w naziemnych robotach mobilnych. Na przeciwległym biegunie znajduje się napęd realizowany za pośrednictwem półsfery – mimo tego, że pierwsze wzmianki dotyczące napędu tego typu pojawiły się w „Mechanics and Handicraft Magazine“ z 1938r. [2] (rys. 1.1, 1.2), dopiero w ostatnich latach konstruktorzy robotów zwrócili na niego swoją uwagę. W ramach projektu zrealizowanego w Kole Naukowym Robotyków „KoNaR” powstała prototypowa konstrukcja z opisywanym napędem półsferycznym – robot Hogger (rys. 1.3).

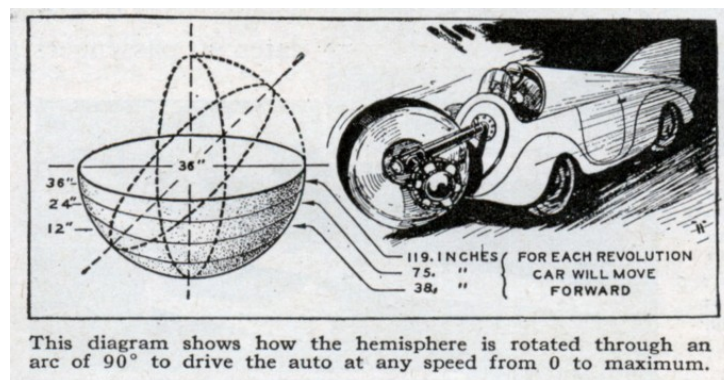
Istotą napędu tego rodzaju jest wprawienie sfery w ruch wirowy wokół wybranej osi (zazwyczaj z dużą prędkością). Jeśli punktem kontaktu tak wirującej sfery z płaszczyzną podłoża będzie jeden z punktów jej przecięcia z osią wirowania (kiedy to oś ta jest prostopadła do płaszczyzny podłoża), napędzany sferą pojazd będzie pozostawał w bezruchu<sup>1</sup>. Równocześnie każdorazowe odchylenie osi wirowania od pozycji pionowej spowoduje przemieszczanie się pojazdu. Przy sferze wirującej ze stałą prędkością, o kierunku i prędkości tego przemieszczania decydują wartości kątów określających stopień wychylenia osi od pionu. W robocie Hogger zakres zmian kątów określających orientację osi wirowania jest konstrukcyjnie ograniczony – konstrukcja mechaniczna robota oraz

---

<sup>1</sup>oczywiście, przy przy założeniu braku poślizgów



Rysunek 1.1 Poglądowa ilustracja wózka z napędem półsferycznym [1]

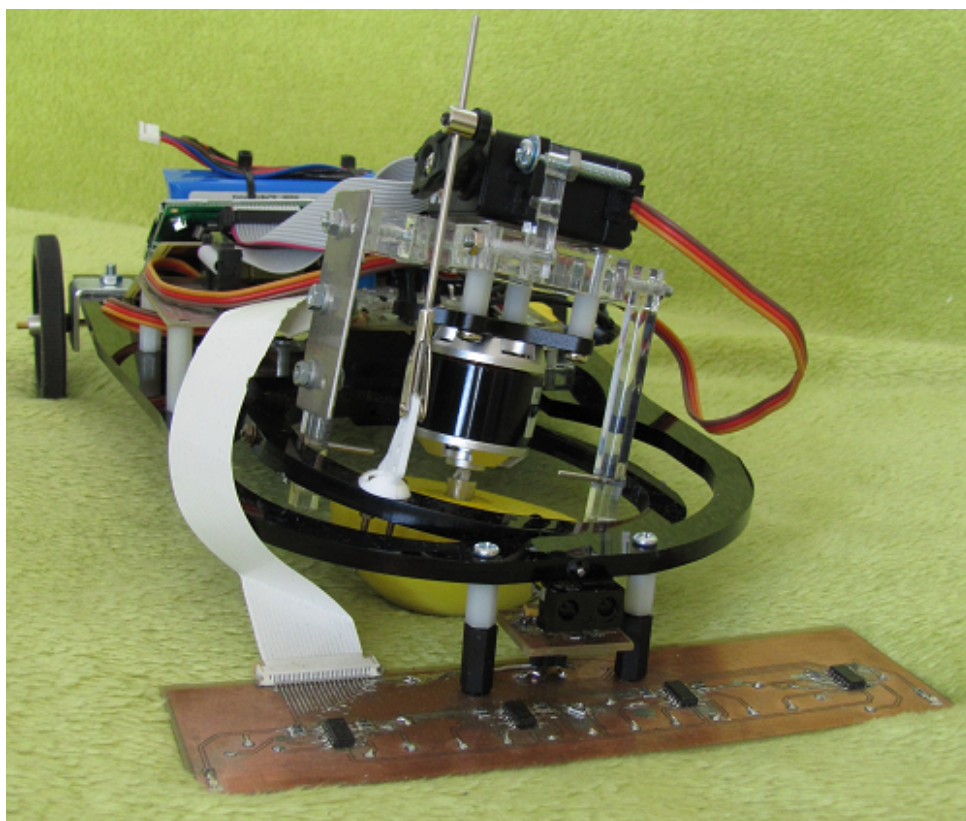


Rysunek 1.2 Poglądowa ilustracja zasady działania [1]

zakres działania serwomechanizmów realizujących pochylenie osi pozwala na zmianę kątów jej nachylenia w zakresie  $\pm \frac{\pi}{4}$ . Oczywiście obrót półsfery wokół osi wirowania w konstrukcji tej jest nieograniczony.

Celem pracy jest wyprowadzenie pełnego i uproszczonego modelu kinematyki robota napędzanego półsferą, zaproponowanie sprzężenia linearyzującego wybrane wyjścia układu, zbadanie zachowania modeli w środowisku MATLAB, porównanie wyników symulacji oraz odniesienie ich do zachowania rzeczywistego obiektu.

Układ niniejszej pracy jest następujący. W rozdziale 2 znajduje się wprowadzenie teoretyczne dotyczące modelowania matematycznego robotów. W rozdziale 3 wprowadzono model kinematyki robota, uwzględniający wszystkie zjawiska kinematyki ruchu półsfery napędowej oraz model traktujący półsferę w uproszczeniu, rozdział 4 zawiera opis sprzężenia linearyzującego pełny model robota. Wyniki badań symulacyjnych przedstawiono w rozdziale 5. Rozdział 6 podsumowuje pracę.



Rysunek 1.3 Robot mobilny Hogger – twórcy: Michał Rybczyński, Przemysław Janowski





## Rozdział 2

# Model matematyczny robota mobilnego

Zachowanie robota mobilnego można opisać używając współrzędnych uogólnionych  $q(t) \in \mathbb{R}^n$ , a także prędkości uogólnionych  $\dot{q}(t) \in \mathbb{R}^n$  [5]. Ograniczenia w ruchu robota można zaobserwować, gdy nie wszystkie trajektorie mogą zostać zrealizowane. Ograniczenia te dzielimy na konfiguracyjne, wynikające z konstrukcji układu, oraz na fazowe, wynikające ze sposobu realizacji ruchu. Wśród ograniczeń fazowych wyróżniamy ograniczenia holonomiczne, zmniejszające wymiar przestrzeni konfiguracyjnej oraz nieholonomiczne, redukujące wymiar przestrzeni dopuszczalnych prędkości.

W robotach mobilnych ograniczenia nieholonomiczne wynikają z założenia braku poślizgu w punkcie styczności kół z podłożem – zazwyczaj założenie to przyjmuje się w postaci założenia braku poślizgów wzdłużnych i poprzecznych. Równania wiążące zachowanie platformy z zadanymi ograniczeniami fazowymi można zapisać w postaci Pfaffa [5]

$$A(q)\dot{q} = 0, \quad (2.1)$$

gdzie  $A(q)$  – macierz ograniczeń. Jeżeli scałkowanie ograniczeń (2.1) jest możliwe, oznacza to, że ograniczenia te są holonomiczne. Ponieważ ograniczają one przestrzeń konfiguracyjną, możemy je włączyć do ograniczeń konfiguracyjnych.

Dla tak opisanego obiektu model jego kinematyki można przedstawić w formie bezdryfowego układu sterowania postaci

$$\dot{q} = G(q)\eta, \quad (2.2)$$

gdzie  $\eta$  – wektor prędkości pomocniczych, będących pewną kombinacją składowych prędkości uogólnionych [6], a  $G(q)$  – macierz sterowań, spełniająca równanie

$$A(q)G(q) = 0. \quad (2.3)$$



# Rozdział 3

## Kinematyka robota napędzanego półsferą

W niniejszym rozdziale wyprowadzimy dwa modele matematyczne analizowanego robota. Modelowany robot jest platformą mobilną o dwóch kołach ustalonych, tworzących oś tylną. Napęd robota tworzy półsfera o promieniu  $R$ , wirująca wokół własnej osi symetrii, zawieszona na przegubie o dwóch stopniach swobody w odległości  $l$  od osi tylnej, o rozstawie kół  $d$ . Konstrukcja tego przegubu umożliwia obracanie półsfery wokół dwóch wzajemnie prostopadłych osi, leżących na płaszczyźnie prostopadłej do osi symetrii półsfery. Punkt przecięcia tych trzech osi znajduje się w środku koła wielkiego półsfery i jest początkiem pewnych trzech układów współrzędnych, pomocnych przy wyprowadzaniu modelu.

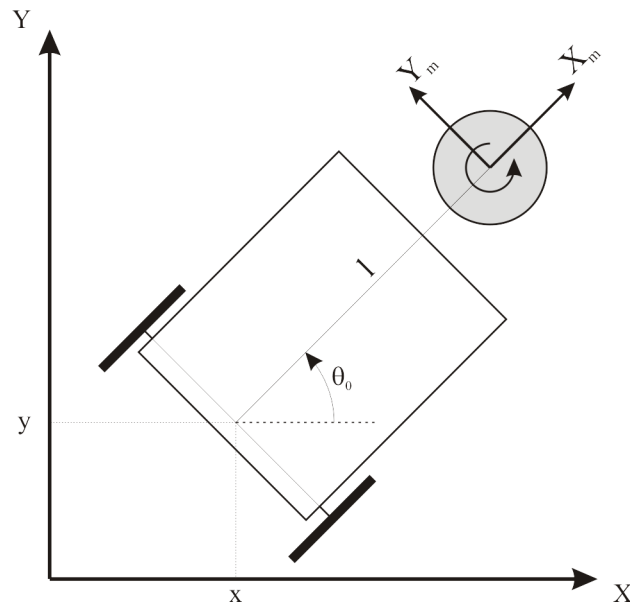
### 3.1 Definicja układów współrzędnych

Zdefiniujmy zewnętrzny, kartezjański układ odniesienia  $XYZ$ , który będziemy nazywać układem globalnym. Następnie zdefiniujmy pierwszy ze wspomnianych wcześniej układów o początku w środku koła wielkiego półsfery, nazwijmy go układem mocowania półsfery i oznaczmy jako  $X_m Y_m Z_m$  (zobacz rys. 3.1). Transformacja z globalnego układu współrzędnych do układu mocowania ma postać

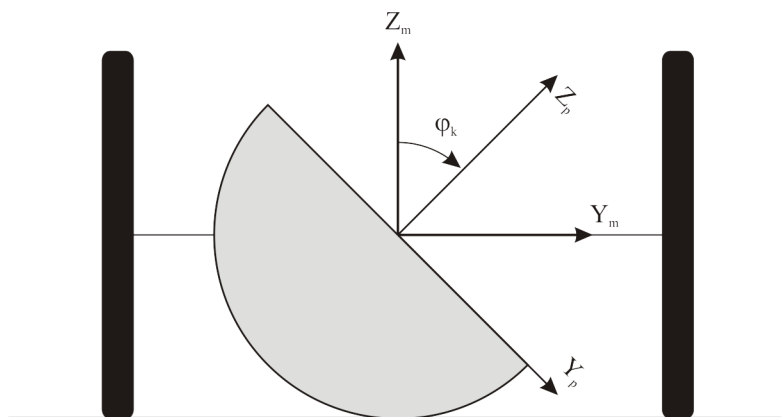
$$A_G^M = \text{Trans}(X, x)\text{Trans}(Y, y)\text{Trans}(Z, R)\text{Rot}(Z, \theta_0)\text{Trans}(X, l), \quad (3.1)$$

gdzie  $x, y$  – położenie środka tylnej osi w układzie globalnym,  $R$  – promień półsfery,  $\theta_0$  – orientacja robota względem układu globalnego,  $l$  – odległość pomiędzy tylną osią robota a środkiem półsfery. Należy zauważyć, że układ ten przemieszcza się wraz z robotem jedynie w płaszczyźnie  $XY$ , natomiast nie ulega on przemieszczeniu w osi  $Z$  – decyduje o tym konstrukcja przegubu, która jest taka, że przy poruszaniu nim wysokość punktu mocowania półsfery nie ulega zmianie. Równocześnie orientacja układu mocowania zmienia się jedynie względem osi  $Z$  układu globalnego – kąt pomiędzy osiami  $X$  i  $X_m$  jest tożsamy z orientacją robota  $\theta_0$ .

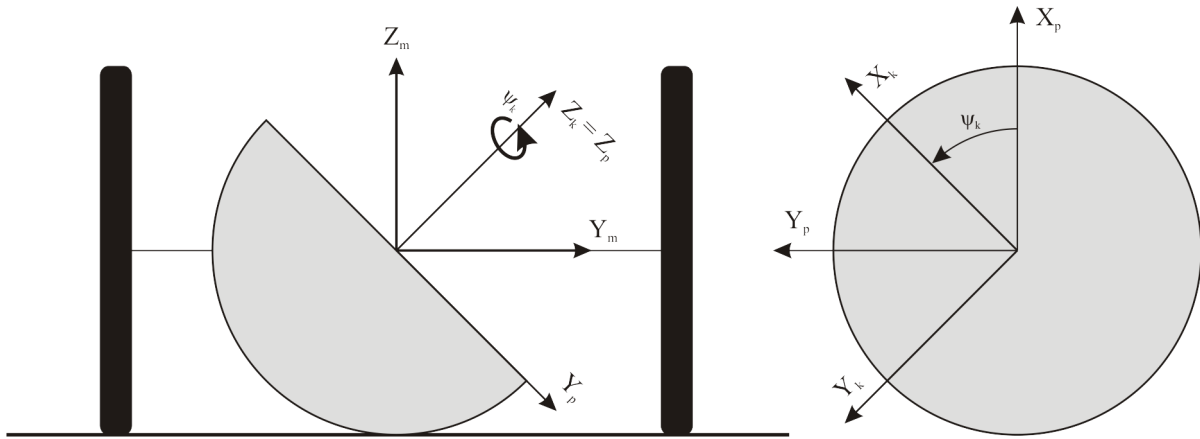
Kolejny definiowany układ współrzędnych nazwijmy układem przegubu i oznaczmy jako  $X_p Y_p Z_p$ . Płaszczyzna  $X_p Y_p$  tego układu zawiera w sobie płaszczyznę koła wielkiego półsfery, a oś  $Z_p$  pokrywa się z osią symetrii półsfery (rys. 3.2). Transformacja z układu mocowania do układu przegubu ma postać



Rysunek 3.1 Transformacja z globalnego układu do układu w miejscu mocowania. Dla uproszczenia rysunku pominięto elementy konstrukcji mechanicznej.



Rysunek 3.2 Transformacja z układu mocowania do układu przegubu – widok z przodu robota



Rysunek 3.3 Transformacja z układu przegubu do układu półsfery – widok z przodu robota oraz widok na koło wielkie półsfery

$$A_M^P = \text{Rot}(X_m, \varphi_k) \text{Rot}(Y_m, \theta_k), \quad (3.2)$$

gdzie  $\varphi_k$  – kąt obrotu półsfery wokół osi  $X_m$ ,  $\theta_k$  – kąt obrotu półsfery wokół osi  $Y_m$ .

Ostatnim układem współrzędnych, mającym początek w punkcie mocowania, jest układ związany z półsferą, nazwany układem półsfery i oznaczony jako  $X_k Y_k Z_k$ . Układ ten pozwoli na zdefiniowanie ruchu wirowego półsfery, decydującego o jej właściwościach napędowych (rys. 3.3). Płaszczyzna  $X_k Y_k$  tego układu, podobnie jak płaszczyzna  $X_p Y_p$  układu przegubu, zawiera w sobie płaszczyznę koła wielkiego półsfery, jednakże w odróżnieniu od układu  $X_p Y_p Z_p$  układ ten na stałe jest związany z półsferą. Transformacja z układu przegubu do układu półsfery jest dana wzorem

$$A_p^K = \text{Rot}(Z_p, \psi_k), \quad (3.3)$$

gdzie  $\psi_k$  – kąt obrotu półsfery wokół osi  $Z_p$ . Występujące w zdefiniowanych powyżej transformacjach parametry  $x, y, \theta_0, \varphi_k, \theta_k$  i  $\psi_k$  tworzą wektor współrzędnych określających położenie robota.

## 3.2 Pełny model kinematyki

Poniżej wyprowadzimy pełny model kinematyki robota napędzanego półsferą. W tym celu zdefiniujemy kilka punktów charakterystycznych związanych z konstrukcją robota, a następnie zażądamy, aby ich prędkości spełniały ograniczenia zapewniające brak poślizgu.

### 3.2.1 Ograniczenia nieholonomiczne

Wyprowadzenie pełnego modelu kinematyki opisanego przy pomocy współrzędnych uogólnionych

$$q = (x, y, \theta_0, \varphi_k, \theta_k, \psi_k)^T, \quad (3.4)$$

wymaga zdefiniowania ograniczeń, wynikających z ruchu modelowanego robota. Jak wspomniano w rozdziale 2, ograniczenia nieholonomiczne wynikają z założenia braku

poślizgu w punkcie styczności pomiędzy podłożem a kołami robota. W analizowanym przypadku brak poślizgu poprzecznego tylnej osi robota opisuje równanie

$$\dot{x} \sin \theta_0 - \dot{y} \cos \theta_0 = 0. \quad (3.5)$$

W celu zapisania warunków określających brak poślizgu półsfery należy zażądać, by prędkość przemieszczania punktu kontaktu półsfery z podłożem była równa prędkości przemieszczania punktu jej mocowania. Łatwo zauważyć, że punkt kontaktu półsfery z podłożem w układzie mocowania ma współrzędne

$$P_{kM} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -R \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Poddając go transformacji do układu półsfery

$$P_{kK} = (A_M^P A_P^K)^{-1} P_{kM}$$

otrzymujemy

$$P_{kK} = \begin{pmatrix} R(\cos \varphi_k \cos \psi_k \sin \theta_k - \sin \varphi_k \sin \psi_k) \\ -R(\cos \psi_k \sin \theta_k + \cos \varphi_k \sin \theta_k \sin \psi_k) \\ -R \cos \theta_k \cos \varphi_k \end{pmatrix}.$$

Prędkość przemieszczania się tego punktu, gdy półsfera porusza się z prędkościami  $(\dot{\varphi}_k, \dot{\theta}_k, \dot{\psi}_k)$ , jest dana wzorem

$$\dot{P}_{kK} = \frac{\partial P_{kK}}{\partial \varphi_k} \dot{\varphi}_k + \frac{\partial P_{kK}}{\partial \theta_k} \dot{\theta}_k + \frac{\partial P_{kK}}{\partial \psi_k} \dot{\psi}_k. \quad (3.7)$$

Prędkość ta, wyrażona w układzie mocowania, przyjmuje postać

$$\dot{P}_{kM} = A_M^P A_P^K \dot{P}_{kK} = \begin{pmatrix} R(\dot{\theta}_k \cos \varphi_k - \dot{\psi}_k \cos \theta_k \sin \varphi_k) \\ -R(\dot{\varphi}_k + \dot{\psi}_k \sin \theta_k) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Identyczne transformacje przeprowadzamy dla punktu mocowania półsfery, który w układzie mocowania ma współrzędne

$$P_{mM} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

natomiast w układzie globalnym

$$P_{mG} = A_G^M P_{mM} = \begin{pmatrix} x + l \cos \theta_0 \\ y + l \sin \theta_0 \\ R \end{pmatrix}.$$

Wyznaczenie prędkości punktu mocowania przeprowadzamy analogicznie jak w (3.7)

$$\dot{P}_{mG} = \frac{\partial P_{mG}}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial P_{mG}}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial P_{mG}}{\partial \theta_0} \dot{\theta}_0. \quad (3.9)$$

Wyrażając tę prędkość w układzie mocowania

$$\dot{P}_{m_M} = (A_G^M)^{-1} \dot{P}_{m_G},$$

otrzymujemy

$$\dot{P}_{m_M} = \begin{pmatrix} \dot{x} \cos \theta_0 + \dot{y} \sin \theta_0 \\ l\dot{\theta}_0 + \dot{y} \cos \theta_0 - \dot{x} \sin \theta_0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

W wyniku porównania prędkości (3.8) i (3.10) otrzymujemy dwa równania ograniczeń nieholonomicznych na brak poślizgu półsfery, a mianowicie

$$\begin{cases} \dot{x} \cos \theta_0 + \dot{y} \sin \theta_0 = R(\dot{\theta}_k \cos \varphi_k - \dot{\psi}_k \cos \theta_k \sin \varphi_k), \\ l\dot{\theta}_0 + \dot{y} \cos \theta_0 - \dot{x} \sin \theta_0 = -R(\dot{\varphi}_k + \dot{\psi}_k \sin \theta_k). \end{cases} \quad (3.11)$$

Sumarycznie, ograniczenia (3.5), (3.11), możemy zapisać w postaci Pfaffa (2.1)

$$\begin{bmatrix} \sin \theta_0 & -\cos \theta_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos \theta_0 & \sin \theta_0 & 0 & 0 & -R \cos \varphi_k & R \sin \varphi_k \cos \theta_k \\ -\sin \theta_0 & \cos \theta_0 & l & R & 0 & R \sin \theta_k \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta}_0 \\ \dot{\varphi}_k \\ \dot{\theta}_k \\ \dot{\psi}_k \end{pmatrix} = 0. \quad (3.12)$$

### 3.2.2 Równania kinematyki

Bazując na ograniczeniach (3.12) i równaniu (2.2), wyznaczmy macierz sterowań

$$G(q) = (g_1(q), g_2(q), g_3(q))$$

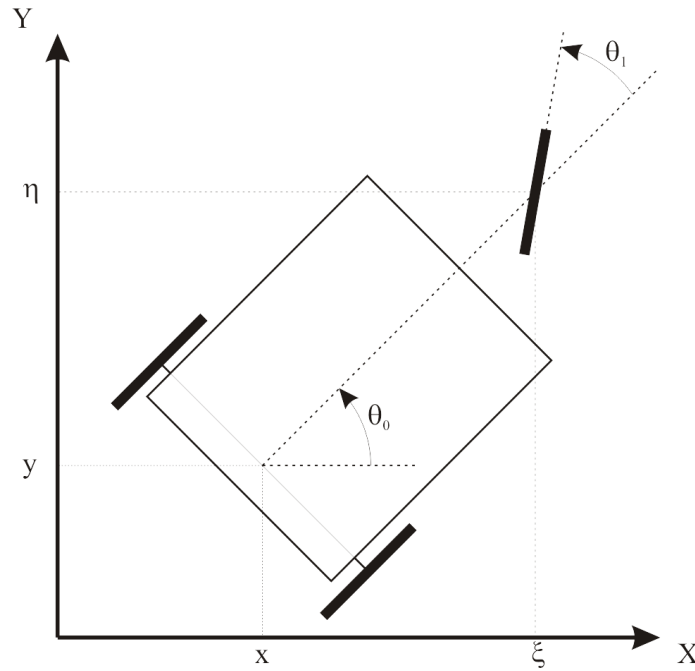
w taki sposób, aby wybrane elementy wektora  $\eta$  miały sens sterowania prędkościami zmian kątów  $\varphi_k$ ,  $\theta_k$  oraz  $\psi_k$ . Wówczas macierz  $G$  ma postać

$$G(q) = \begin{bmatrix} 0 & R \cos \varphi_k \cos \theta_0 & -R \cos \theta_0 \cos \theta_k \sin \varphi_k \\ 0 & R \cos \varphi_k \sin \theta_0 & -R \cos \theta_k \sin \varphi_k \sin \theta_0 \\ -\frac{R}{l} & 0 & -\frac{R \sin \theta_k}{l} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

a cały układ sterowania

$$\begin{cases} \dot{x} = R \cos \varphi_k \cos \theta_0 \eta_2 - R \cos \theta_0 \cos \theta_k \sin \varphi_k \eta_3 \\ \dot{y} = R \cos \varphi_k \sin \theta_0 \eta_2 - R \cos \theta_k \sin \varphi_k \sin \theta_0 \eta_3 \\ \dot{\theta}_0 = -\frac{R}{l} \eta_1 - \frac{R \sin \theta_k}{l} \eta_3 \\ \dot{\varphi}_k = \eta_1 \\ \dot{\theta}_k = \eta_2 \\ \dot{\psi}_k = \eta_3 \end{cases} \quad (3.14)$$

Taki układ sterowania jest modelem kinematyki badanego robota napędzanego półsferą. Korzystając z otrzymanego modelu możemy symulować i badać jego zachowanie oraz podjąć próbę konstrukcji dedykowanych algorytmów sterowania.



Rysunek 3.4 Model samochodu kinematycznego

### 3.3 Uproszczony model kinematyki

Poniżej, wychodząc od klasycznego modelu samochodu kinematycznego, wyprowadzimy alternatywny model robota napędzanego półsferą. W podejściu tym zamodelujemy półsferę napędową jako zastępcze koło przednie, będące zarówno kołem skrętnym, jak i napędowym. Następnie, w wyprowadzonym modelu samochodu kinematycznego dokonamy zmiany współrzędnych uogólnionych ze współrzędnych samochodu na współrzędne robota z półsferą, uwzględniając model koła zastępczego.

#### 3.3.1 Model samochodu kinematycznego

Samochód kinematyczny to nieholonomiczny robot mobilny klasy (1,1), przedstawiony na rysunku (3.4), opisywany we współrzędnych uogólnionych

$$q = (x, y, \theta_0, \theta_1, \varphi)^T, \quad (3.15)$$

gdzie  $x, y$  – położenie środka tylnej osi samochodu,  $\theta_0$  jego orientacja w układzie globalnym ( $x, y$  i  $\theta_0$  są tożsame ze współrzędnymi w pełnym modelu z podrozdziału 3.2),  $\theta_1$  to kąt skrętu przedniego koła, zaś  $\varphi$  kąt jego obrotu.

Zdefiniujmy ograniczenie na brak poślizgu poprzecznego tylnej osi, równoważne z (3.5)

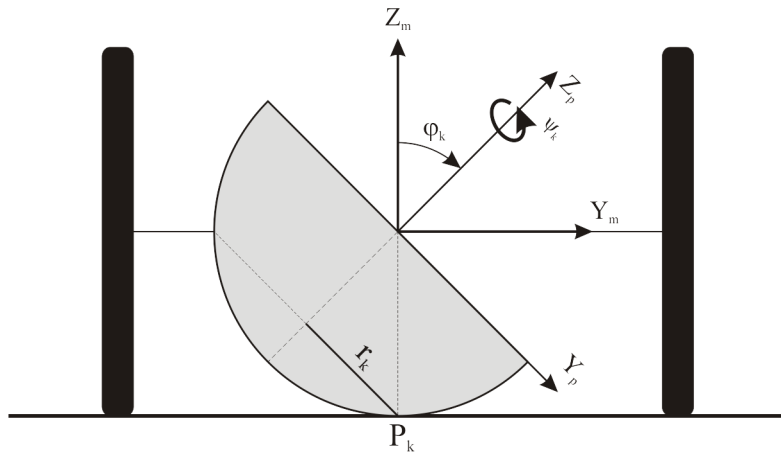
$$\dot{x} \sin \theta_0 - \dot{y} \cos \theta_0 = 0. \quad (3.16)$$

Następnie zdefiniujmy ograniczenie dotyczące braku poślizgu poprzecznego koła przedniego

$$\dot{\xi} \sin(\theta_0 + \theta_1) - \dot{\eta} \cos(\theta_0 + \theta_1) = 0, \quad (3.17)$$

gdzie  $\xi = x + l \cos \theta_0$ ,  $\eta = y + l \sin \theta_0$  – położenie środka przedniego koła,  $\dot{\xi} = \dot{x} - l \dot{\theta}_0 \sin \theta_0$  oraz  $\dot{\eta} = \dot{y} + l \dot{\theta}_0 \cos \theta_0$  – jego prędkość. Uwzględniając wyrażenia na  $\dot{\eta}$  i  $\dot{\xi}$  w (3.17)





Rysunek 3.5 Ilustracja idei koła zastępczego - widok z przodu robota

otrzymujemy ograniczenie dane równaniem

$$\dot{x} \sin(\theta_0 + \theta_1) - \dot{y} \cos(\theta_0 + \theta_1) - l\dot{\theta}_0 \cos \theta_1 = 0. \quad (3.18)$$

Ostatnie ograniczenie nieholonomiczne, które nakładamy na układ wynika z założenia braku poślizgu wzdłużnego koła przedniego, o postaci

$$\dot{\xi} \cos(\theta_0 + \theta_1) - \dot{\eta} \sin(\theta_0 + \theta_1) - r_k \dot{\phi} = 0, \quad (3.19)$$

gdzie  $r_k$  – promień koła.

Podobnie jak w przypadku (3.18), uwzględniając wyrażenie na  $\dot{\eta}$  i  $\dot{\xi}$  dostajemy

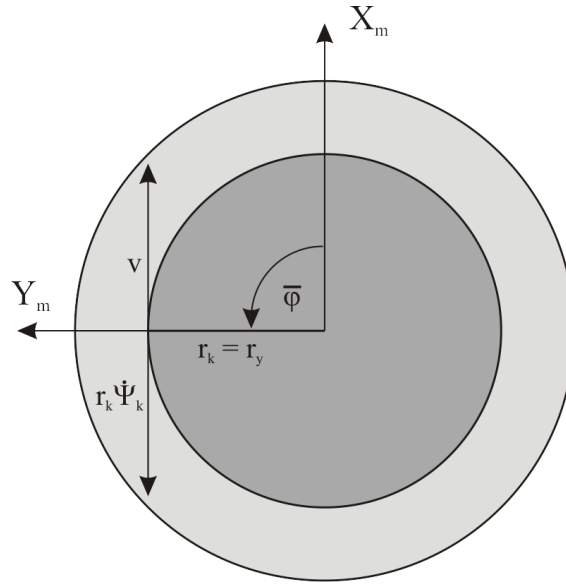
$$\dot{x} \cos(\theta_0 + \theta_1) + \dot{y} \sin(\theta_0 + \theta_1) + l\dot{\theta}_0 \sin \theta_1 - r_k \dot{\phi} = 0. \quad (3.20)$$

Ograniczenia (3.16), (3.18), (3.20) zapisujemy sumarycznie używając postaci Pfaffa (2.1)

$$\begin{bmatrix} \sin \theta_0 & -\cos \theta_0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin(\theta_0 + \theta_1) & -\cos(\theta_0 + \theta_1) & -l \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ \cos(\theta_0 + \theta_1) & \sin(\theta_0 + \theta_1) & l \sin \theta_1 & 0 & -r_k \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = 0. \quad (3.21)$$

### 3.3.2 Model zastępczego koła przedniego

W uzyskanym modelu samochodu kinematycznego musimy uwzględnić model zastępczego koła przedniego. W uproszczeniu półsferę napędową można potraktować jak skręcane i pochylane koło o zmiennym promieniu. Do takiego spojrzenia upoważnia nas fakt, że po ustaleniu kątów  $\varphi_k$  i  $\theta_k$ , punkt kontaktu pomiędzy podłożem a półsferą przemieszcza się wraz ze zmianą kąta  $\psi_k$  po pewnym jej równoleżniku o promieniu  $r_k$  (rys. 3.5). Możemy więc przyjąć, że w takiej konfiguracji półsferę traktujemy jako koło o promieniu równoleżnika i pewnym kącie nachylenia do pionu. Jak wspomniano w rozdziale 2, w analizowanym robocie zmienność promienia koła nie powoduje ruchu w osi Z układu globalnego – wynika to z konstrukcji przegubu. Co więcej, fakt pochylania koła nie wpływa na jego właściwości jezdne. Stąd, by wyznaczyć parametry koła



Rysunek 3.6 Rzut półsfery na płaszczyznę  $X_m Y_m$  w układzie mocowania – przypadek dla  $\theta_k = 0$  i  $\varphi_k = -\frac{\pi}{4}$ .

zastępczego należy znaleźć długość promienia równoleżnika  $r_k$  oraz kąt skręcenia koła  $\theta_1$  w funkcji współrzędnych  $\varphi_k$ ,  $\theta_k$ ,  $\psi_k$ .

Punkt kontaktu  $P_k$  półsfery z podłożem w układzie mocowania ma współrzędne (3.6). Wyraźmy ten punkt w układzie przegubu

$$P_{kp} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} = (A_M^P)^{-1} P_{kM} = \begin{pmatrix} R \cos \varphi_k \sin \theta_k \\ -R \sin \varphi_k \\ -R \cos \varphi_k \cos \theta_k \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Jak wspomniano, przy ustalonych wartościach  $\varphi_k$  i  $\theta_k$  punkt ten przemieszcza się po pewnym równoleżniku. Zrzutujmy półsferę z rysunku 3.5 na płaszczyznę  $X_m Y_m$  układu mocowania (rys. 3.6). Jak widać, długość promienia równoleżnika  $r_k$  możemy wyznaczyć korzystając ze współrzędnych punktu  $P_{kp}$  (3.22). W efekcie promień koła zastępczego  $r_k = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}$  ma wartość

$$r_k = R \sqrt{\cos^2 \varphi_k (\sin^2 \theta_k - 1) + 1}, \quad (3.23)$$

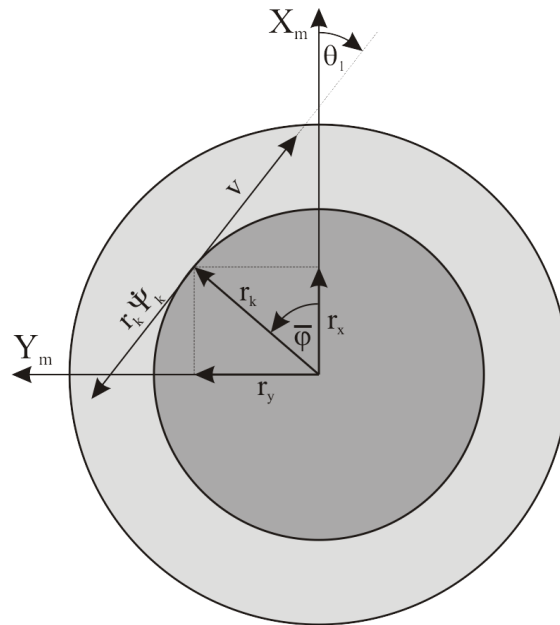
zaś wartość kąta skręcenia koła zastępczego  $\theta_1$  (rys. 3.6) jest wyrażona jako

$$\theta_1 = \bar{\varphi} - \frac{\pi}{2},$$

gdzie  $\bar{\varphi} = \arctan \frac{r_y}{r_x}$ , co po uwzględnieniu (3.23) daje ostateczną postać

$$\theta_1 = -\arctan \frac{\sin \varphi_k}{\cos \varphi_k \sin \theta_k} - \frac{\pi}{2}. \quad (3.24)$$

W sytuacji przedstawionej na rysunku 3.5 półsfera obrócona jest o kąty  $\varphi_k = -\frac{\pi}{4}$ ,  $\theta_k = 0$ . W efekcie, promień koła zastępczego ma długość  $r_k = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ , natomiast kąt jego skręcenia wynosi  $\theta_1 = 0$ . Dla lepszego zrozumienia rozpatrzmy sytuację, w której półsfera obrócona jest o kąty  $\varphi_k = -\frac{\pi}{6}$ ,  $\theta_k = \frac{\pi}{6}$  (rys. 3.7). Dla takiej orientacji półsfery promień koła zastępczego ma długość  $r_k = \frac{R\sqrt{7}}{4}$ , a kąt skręcenia wynosi  $\theta_1 = -0.71$ .



Rysunek 3.7 Rzut półsfery na płaszczyznę  $X_m Y_m$  w układzie mocowania – przypadek dla  $\theta_k = \frac{\pi}{6}$  i  $\varphi_k = -\frac{\pi}{6}$ .

### 3.3.3 Równania kinematyki

W celu wyprowadzenia modelu robota napędzanego półsferą, na podstawie modelu klasycznego samochodu (3.21), należy w modelu tym zastąpić wektor współrzędnych (3.15) wektorem (3.4). W obu tych wektorach współrzędne  $x$ ,  $y$  i  $\theta_0$  są tożsame. Kąt skręcenia koła  $\theta_1$  jest funkcją kątów obrotu półsfery  $\varphi_k$  i  $\theta_k$ , natomiast funkcję kąta obrotu koła  $\varphi$  przyjmuje kąt obrotu półsfery  $\psi_k$ . Po uwzględnieniu tych zależności ograniczenia (3.16), (3.18), (3.20) w postaci Pfaffa przyjmują postać

$$\begin{bmatrix} \sin \theta_0 & -\cos \theta_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin(\theta_0 + \theta_1) & -\cos(\theta_0 + \theta_1) & -l \cos \theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\theta_0 + \theta_1) & \sin(\theta_0 + \theta_1) & l \sin \theta_1 & 0 & 0 & -r_k \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta}_0 \\ \dot{\varphi}_k \\ \dot{\theta}_k \\ \dot{\psi}_k \end{pmatrix} = 0. \quad (3.25)$$

Bazując na wyprowadzonych ograniczeniach (3.25) i równaniu (2.2), wyznaczmy macierz sterowań

$$G(q) = (g_1(q), g_2(q), g_3(q))$$

w taki sposób, aby wybrane elementy wektora  $\eta$  miały sens sterowania prędkościami zmian kątów  $\varphi_k$ ,  $\theta_k$  oraz  $\psi_k$  (tak, jak w przypadku pełnego modelu). Wyznaczona

macierz  $G(q)$  ma postać

$$G(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & r_k \cos \theta_0 \cos \theta_1 \\ 0 & 0 & r_k \sin \theta_0 \cos \theta_1 \\ 0 & 0 & \frac{r_k \sin \theta_1}{l} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.26)$$

zaś układ sterowania

$$\begin{cases} \dot{x} = r_k \cos \theta_0 \cos \theta_1 \eta_3 \\ \dot{y} = r_k \sin \theta_0 \cos \theta_1 \eta_3 \\ \dot{\theta}_0 = \frac{r_k \sin \theta_1}{l} \eta_3 \\ \dot{\varphi}_k = \eta_1 \\ \dot{\theta}_k = \eta_2 \\ \dot{\psi}_k = \eta_3 \end{cases} \quad (3.27)$$

gdzie  $\theta_1 = -\arctan \frac{\sin \varphi_k}{\cos \varphi_k \sin \theta_k} - \frac{\pi}{2}$ .

Taki układ sterowania jest uproszczonym modelem kinematyki badanego robota napędzanego półsferą. Przyjęte uproszczenie powoduje, że zmiana współrzędnych  $\varphi_k$  i  $\theta_k$  nie powoduje ruchu robota w globalnym układzie współrzędnych, co w rzeczywistości ma miejsce. Uznano jednak, że ruch robota wynikający z wspomnianej zmiany współrzędnych jest znikomy w odniesieniu do ruchu wynikającego z wpływu wirowania półsfery, co upoważnia do przyjętego uproszczenia.

# Rozdział 4

## Linearyzacja modelu kinematyki

W obu wyprowadzonych w poprzednim rozdziale modelach kinematyki sterowania w sensie fizycznym są prędkościami półsfery (kąty  $\varphi_k$ ,  $\theta_k$  oraz  $\psi_k$ ). Sposób przemieszczania robota w globalnym układzie współrzędnych wynika z doboru odpowiednich konfiguracji wspomnianych kątów. Z punktu widzenia realizacji zadania śledzenia trajektorii stawianego przed robotem, bardziej korzystnym byłoby sterowanie w oparciu o współrzędne związane z położeniem wybranego punktu robota – dla naszego robota zdefiniujemy współrzędne wyjściowe, z pomocą których dokonamy linearyzacji pełnego modelu robota.

### 4.1 Model kinematyki z wyjściem

Jak wspomniano w rozdziale 2, model kinematyki robota można przedstawić w formie bezdryfowego układu sterowania postaci

$$\dot{q} = G(q)\eta, \quad (4.1)$$

gdzie  $\eta$  – wektor prędkości pomocniczych, a  $G(q)$  – macierz sterowań. Zdefiniujmy współrzędne linearyzujące

$$y = k(q) = \begin{pmatrix} x + l \cos \theta_0 + e \cos(\theta_0 + \theta_1) \\ y + l \sin \theta_0 + e \sin(\theta_0 + \theta_1) \\ \psi_k \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

które określają położenie punktu znajdującego się w odległości  $e$  od punktu mocowania półsfery, w kierunku jej jazdy. Wybór takiego wyjścia wynika z konieczności spełnienia warunków pozwalających na linearyzację modelu [4], zaś liczba jego składowych z faktu, iż liczba współrzędnych, które mogą zostać zlinearyzowane w sposób statyczny, jest równa wymiarowi dostępnych sterowań [3] Uwzględniając (4.1) i (4.2), zachowanie układu można scharakteryzować układem równań

$$\begin{cases} \dot{q} = G(q)\eta \\ y = k(q) \end{cases}, \quad (4.3)$$

gdzie  $y$  – nowe wyjście układu. Różniczkując równanie (4.2) względem czasu otrzymujemy

$$\dot{y} = \frac{\partial k}{\partial q} \dot{q}. \quad (4.4)$$

Uwzględniając (4.1) powyższą zależność można zapisać jako

$$\dot{y} = \frac{\partial k}{\partial q} G(q) \eta = v, \quad (4.5)$$

gdzie  $v$  – nowe wejście układu, którego składowe mają sens prędkości wybranego punktu w kierunku osi  $X$  i  $Y$  układu globalnego, a także prędkości wirowania półsfery wokół jej osi  $Z$ . Na podstawie tego równania możemy zdefiniować sprzężenie linearyzujące postaci

$$\eta = \left( \frac{\partial k}{\partial q} G(q) \right)^{-1} v. \quad (4.6)$$

Ostatecznie, model kinematyki z wyjściem linearyzującym zapisujemy jako

$$\begin{cases} \dot{q} = G(q) \left( \frac{\partial k}{\partial q} G(q) \right)^{-1} v \\ \dot{y} = v \\ y = k(q) \end{cases} . \quad (4.7)$$

Efektem dokonanej linearyzacji modelu jest możliwość łatwego sterowania położeniem robota w globalnym układzie współrzędnych, poprzez określanie prędkości poruszania się punktu wysuniętego przed półsferę, a także jej prędkości obrotowej.

# Rozdział 5

## Badania porównawcze

### 5.1 Opis implementacji

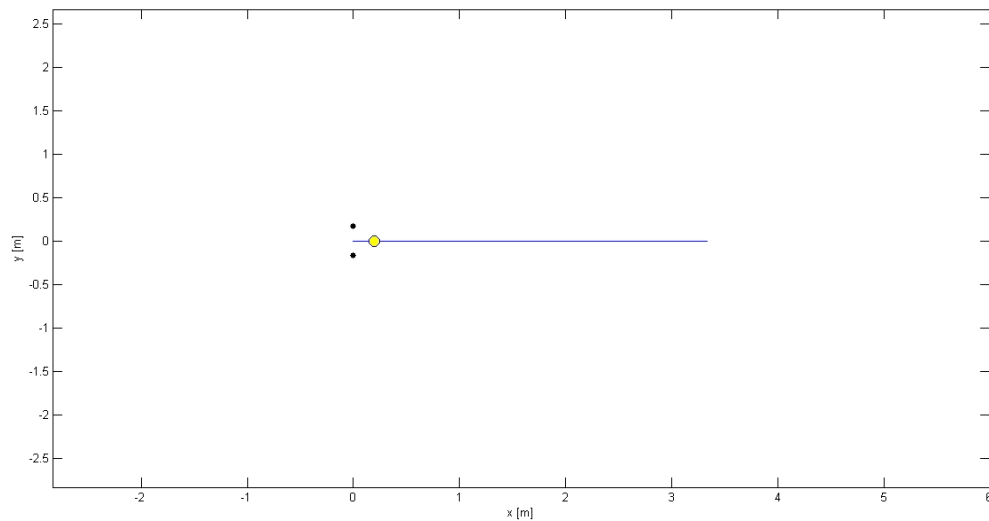
Implementacji modeli dokonano w środowisku MATLAB, wykorzystując do rozwiązywania równań różniczkowych metodę całkowania Dormanda–Prince’a (ode45). Symulator podzielono na trzy zasadnicze moduły – moduł testowy, moduł kinematyczny i moduł graficzny. Pierwszy z nich służy do inicjalizacji wszystkich zmiennych, ustalenia parametrów, współrzędnych oraz warunków początkowych robota. Wartości te przekazywane są do modułu kinematycznego – każdy z zaimplementowanych modeli posiada swój odrębny moduł, w którym zapisano odpowiadającą mu macierz  $G(q)$  oraz w przypadku modelu zlinearyzowanego sprzężenie zwrotne (4.6). Na podstawie tych macierzy dla zadawanych wartości sterowań zawartych w module rozwiązywane jest równanie ruchu (2.2) w zadanym okresie. Wyniki symulacji ilustrowane są na wykresach przez moduł graficzny.

### 5.2 Wyniki badań

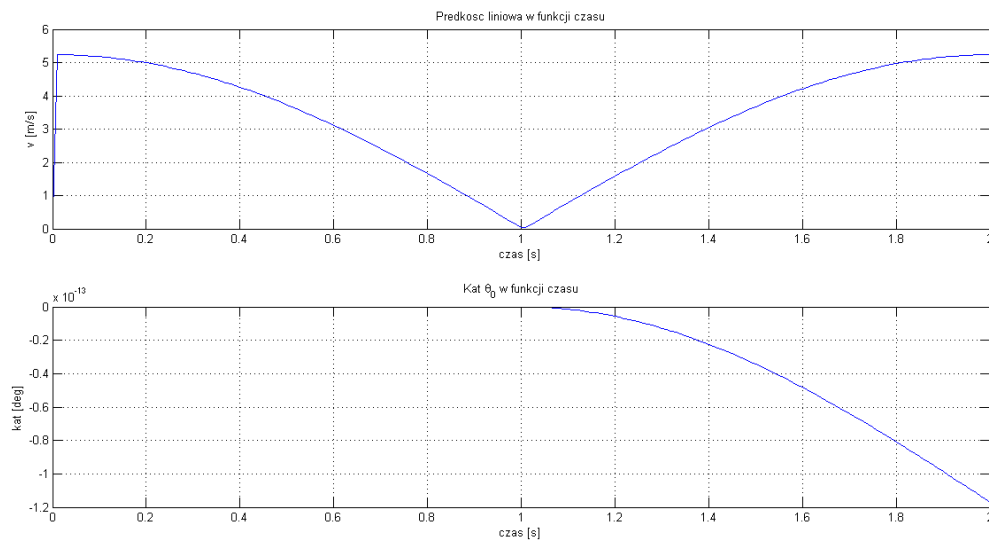
#### 5.2.1 Model pełny i uproszczony

Wszystkie opisane poniżej badania przeprowadzono zarówno dla pełnego modelu kinematyki robota jak i modelu z kołem zastępczym. Jako parametry robota przyjęto:  $l = 0.2\text{m}$ ,  $d = 0.17\text{m}$ ,  $R = 0.05\text{m}$  (dobre na podstawie parametrów fizycznych robota Hogger). Pierwsze przeprowadzone badanie dotyczyło sprawdzenia poprawności wyprowadzonych modeli. W tym celu zadano zerowe sterowania. Zgodnie z oczekiwaniami, żadna ze współrzędnych robota nie uległa zmianie. Następnie sprawdzono zachowanie modeli przy podstawowych wartościach sterowań – po ustaleniu warunków początkowych dla kątów  $(\varphi_{k0}, \theta_{k0}, \psi_{k0}) = (-\frac{\pi}{6}, 0, 0)$  i zadaniu sterowania  $(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (0, 0, 2000\frac{\pi}{s})$ , gdzie  $\eta_3 = \dot{\psi}_k$ , robot w obu przypadkach jechał do przodu po linii prostej. Dla dodatniej wartości początkowej kąta  $\varphi_k$ , zgodnie z oczekiwaniami robot jechał do tyłu. Podobne badanie wykonano dla niezerowych wartości kąta  $\theta_k$  – przy dodatniej wartości początkowej robot skręca w prawo, natomiast przy ujemnej – w lewo.

Kolejne badanie dotyczyło wpływu sterowania kątem  $\varphi_k$  na prędkość jazdy – jako



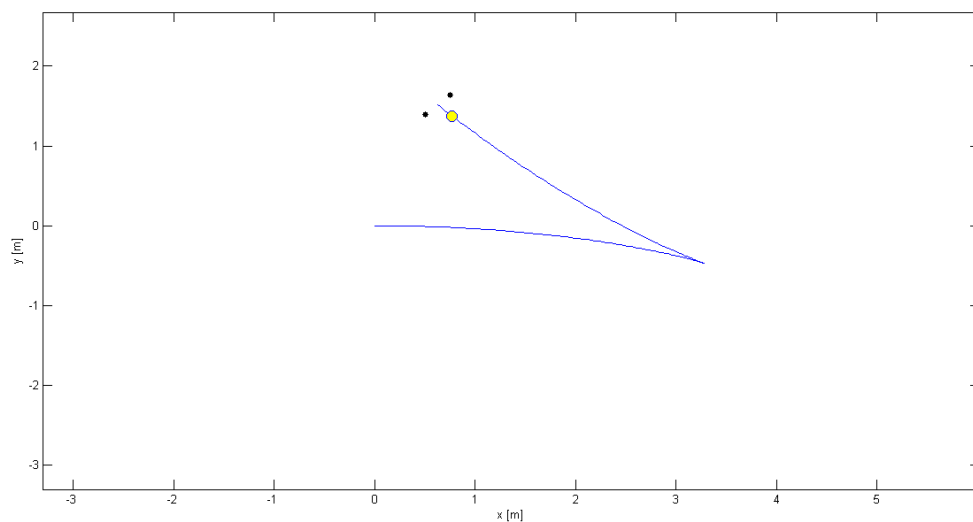
Rysunek 5.1 Ślad ruchu robota przy badaniu wpływu kąta  $\varphi_k$  na prędkość i kierunek jazdy – model uproszczony



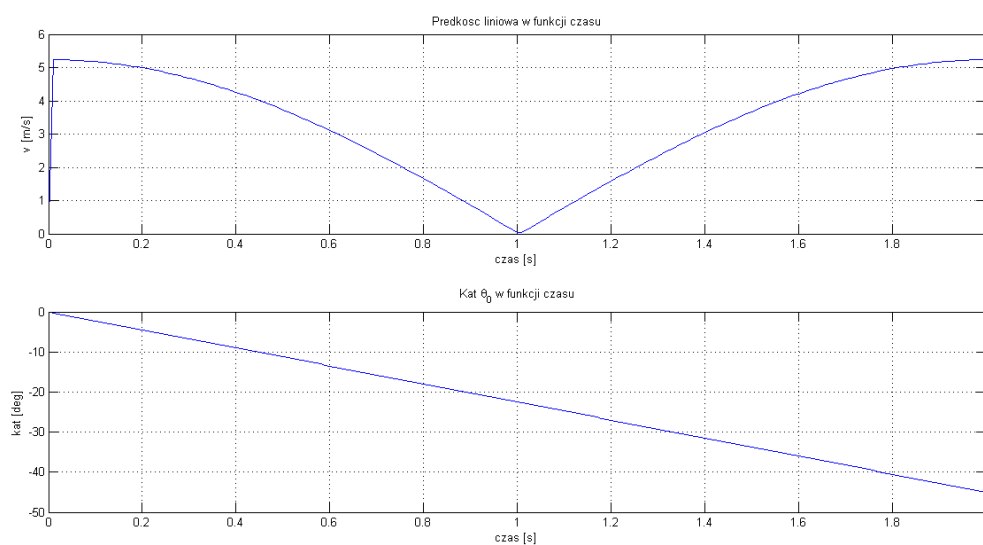
Rysunek 5.2 Prędkość jazdy i orientacja  $\theta_0$  w funkcji czasu przy badaniu wpływu kąta  $\varphi_k$  na prędkość i kierunek jazdy – model uproszczony

warunki początkowe ustalono wartości kątów  $(\varphi_{k0}, \theta_{k0}, \psi_{k0}) = (-\frac{\pi}{2}, 0, 0)$  i zadano sterowanie  $(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (\frac{\pi}{2s}, 0, 2000\frac{\pi}{s})$  w czasie  $t = 2s$ , powodujące liniową zmianę wartości  $\varphi_k$  do  $\frac{\pi}{2}$ . W rezultacie teraz robot przez pierwszą sekundę jedzie do przodu z malejącą prędkością aż do zatrzymania, po czym rozpędza się jadąc do tyłu. Porównując wyniki uzyskane w tym przypadku dla obu modeli (zobacz rys. 5.1, 5.2 i 5.3, 5.4, gdzie niebieskim kolorem zaznaczono ślad ruchu środka tylnej osi robota, a żółtym półsfery napędową) możemy dostrzec pomiędzy nimi różnicę – w pełnym modelu orientacja robota  $\theta_0$  w trakcie realizacji ruchu zmienia się, podczas gdy w modelu uproszczonym jest stała. Wynika to z faktu, iż przy zmianie kąta  $\varphi_k$  półsfera toczy się w kierunku osi  $Y_m$ , co powoduje lekkie skręcanie robota, którego to zjawiska nie uwzględnia model

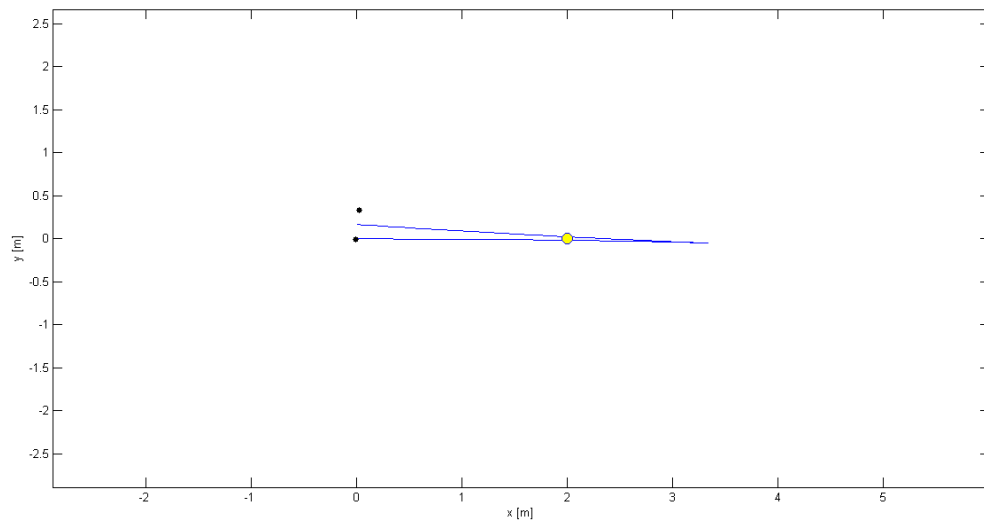




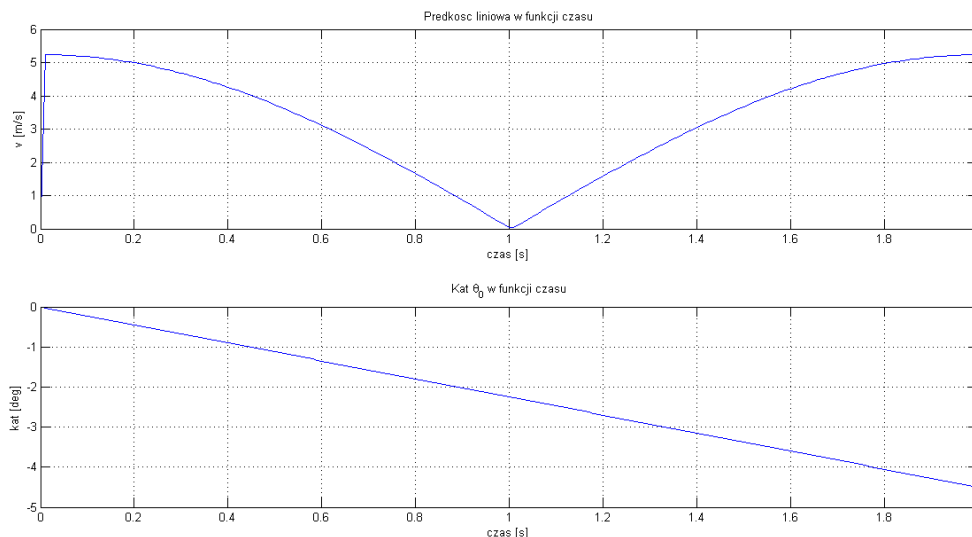
Rysunek 5.3 Ślad ruchu robota przy badaniu wpływu kąta  $\varphi_k$  na prędkość i kierunek jazdy – model pełny



Rysunek 5.4 Prędkość jazdy i orientacja  $\theta_0$  w funkcji czasu przy badaniu wpływu kąta  $\varphi_k$  na prędkość i kierunek jazdy – model pełny



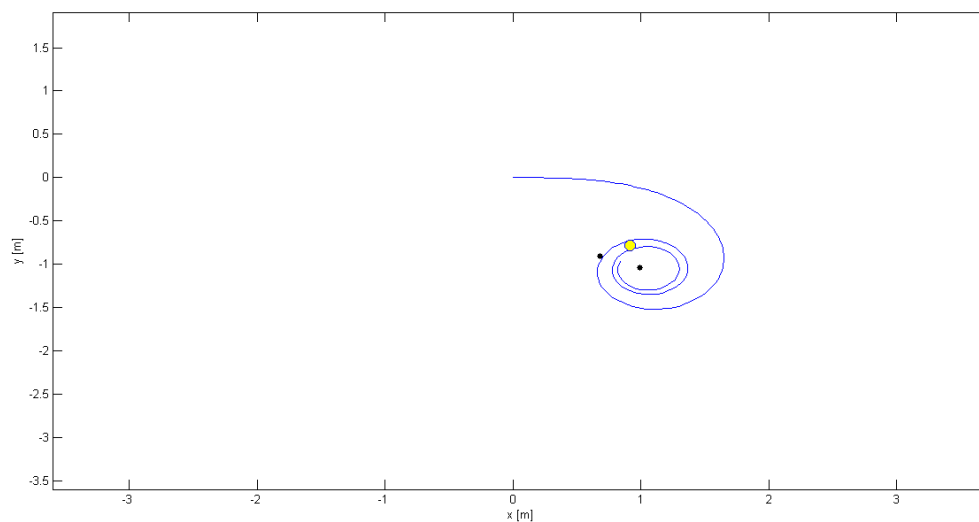
Rysunek 5.5 Ślad ruchu robota przy badaniu wpływu parametru  $l = 2\text{m}$  na prędkość i kierunek jazdy – model pełny



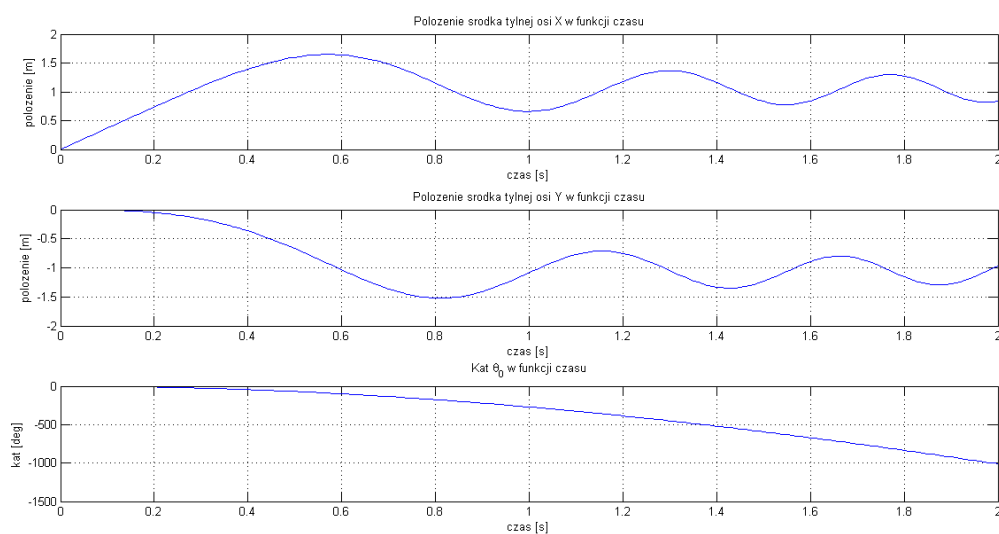
Rysunek 5.6 Prędkość jazdy i orientacja  $\theta_0$  w funkcji czasu przy badaniu wpływu parametru  $l = 2\text{m}$  na prędkość i kierunek jazdy – model pełny

uproszczony. Efekt ten zmniejsza się przy zwiększaniu stosunku parametru  $l$  do  $R$ . Wyniki badań dla takich samych warunków początkowych i sterowań jak powyżej, lecz dla  $l = 2\text{m}$  ilustrują rysunki 5.5, 5.6.

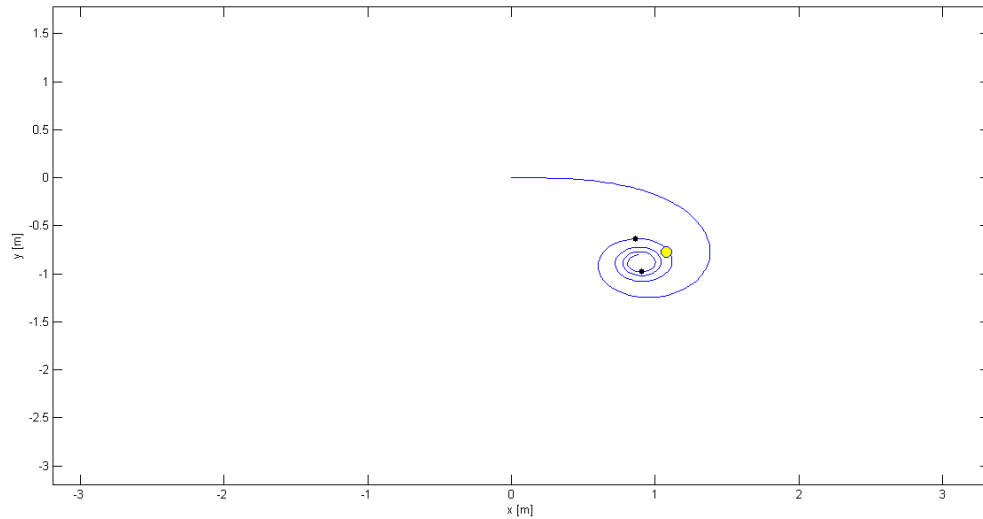
Ostatnie badanie własności modeli bez linearyzacji przeprowadzono dla warunków początkowych  $(\varphi_{k0}, \theta_{k0}, \psi_{k0}) = (-\frac{\pi}{4}, 0, 0)$  i sterowań  $(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (0, \frac{\pi}{6s}, 2000\frac{\pi}{s})$  w czasie  $t = 2\text{s}$ . Dzięki temu zbadamy zachowanie modeli w trakcie ruchu ze zmiennym kierunkiem jazdy. W efekcie zastosowania takiego sterowania robot zaczyna jechać po spirali. Zaobserwowana różnica zachowania modelu uproszczonego i pełnego jest w tym przypadku nieznacząca (porównaj rys. 5.7, 5.8 z 5.9, 5.10).



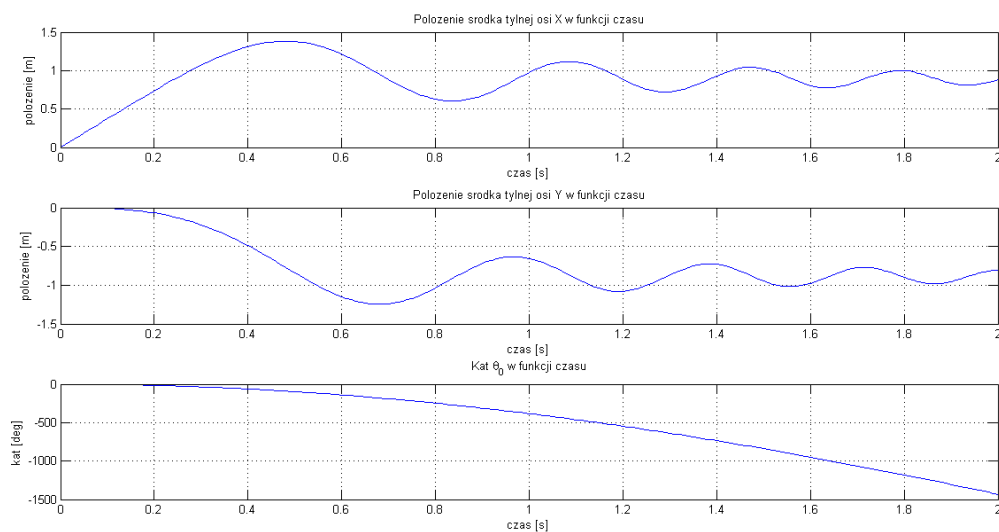
Rysunek 5.7 Ślad ruchu robota przy badaniu wpływu kąta  $\theta_k$  na położenie środka tylnej osi i kierunek jazdy – model uproszczony



Rysunek 5.8 Położenie  $x$ ,  $y$  środka tylnej osi i kierunek jazdy  $\theta_1$  przy badaniu wpływu kąta  $\theta_k$  na położenie środka tylnej osi i kierunek jazdy – model uproszczony



Rysunek 5.9 Ślad ruchu robota przy badaniu wpływu kąta  $\theta_k$  na położenie środka tylnej osi i kierunek jazdy – model pełny



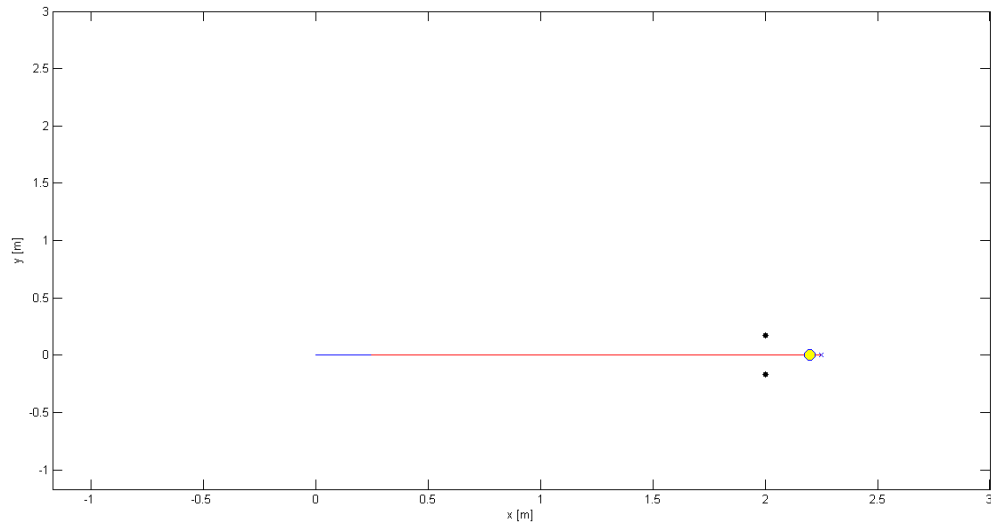
Rysunek 5.10 Położenie  $x, y$  środka tylnej osi i kierunek jazdy  $\theta_1$  przy badaniu wpływu kąta  $\theta_k$  na położenie środka tylnej osi i kierunek jazdy – model pełny

### 5.2.2 Model z wyjściem linearyzującym

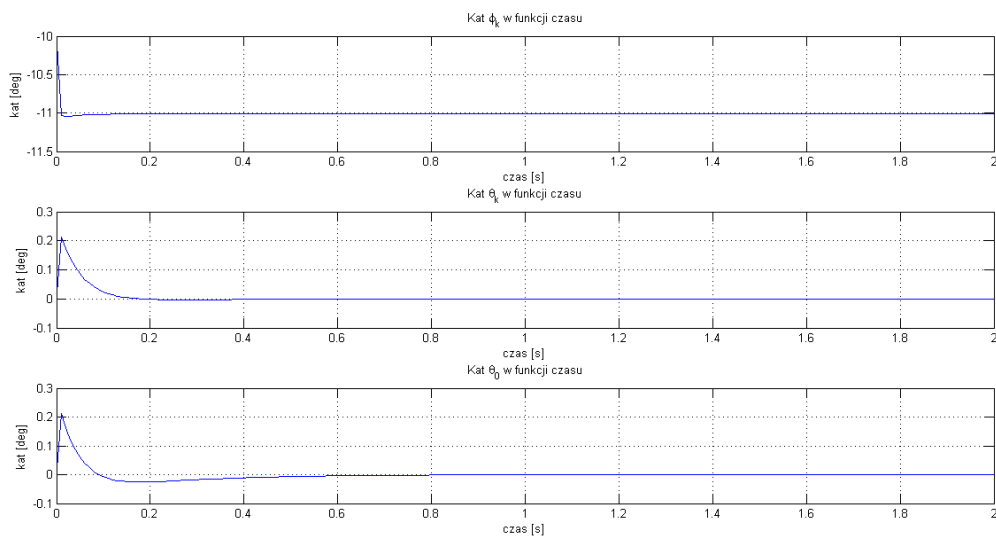
Podobnie jak w przypadku opisanym w poprzednim podrozdziale, przed rozpoczęciem zasadniczych badań przetestowano poprawność zachowania modelu z wyjściem linearyzującym w podstawowych sytuacjach: przy braku sterowań, a także stałych sterowaniach. We wszystkich badaniach, jeżeli nie napisano inaczej, warunki początkowe ustalono na  $(x_0, y_0, \theta_{00}, \varphi_{k0}, \theta_{k0}, \psi_{k0}) = (0, 0, 0, -0.17, 0, 0)$ . Na początku zażądano, aby robot jechał prosto ze stałą prędkością w kierunku osi X zadając sterowania  $(v_1, v_2, v_3) = (1 \frac{m}{s}, 0, 2000 \frac{\pi}{s})$  w czasie  $t = 2s$  (rys. 5.11, 5.12, gdzie dodatkowo kolorem czerwonym oznaczono ślad ruchu punktu przyjętego jako składowe współrzędnych wyjściowych  $y$ ). Następnie, dla tej samej prędkości liniowej w kierunku osi X, zmieniono prędkość obrotową półsfery –  $v_3 = 4000 \frac{\pi}{s}$  (rys. 5.13, 5.14). W efekcie zmniejszeniu uległy wartości kątów  $\varphi_k$  i  $\theta_k$ , co jest zgodne z oczekiwaniami – przy większej prędkości obrotowej półsfery potrzeba bowiem mniejszego jej wychylenia do uzyskania takiej samej prędkości postępowej. Badania powtórzono przy zmianie orientacji początkowej robota na  $\theta_{00} = \frac{\pi}{2}$  oraz  $\theta_{00} = \pi$ . W rezultacie orientacja robota  $\theta_0$  podczas ruchu robota zmienia się tak, aby realizowane było zadanie jazdy w kierunku osi X ze stałą prędkością liniową. Sytuacje te są zilustrowane na rysunkach 5.15, 5.16 i 5.17, 5.18. Robot zachowuje się analogicznie przy wymuszaniu jazdy po prostej w kierunku osi Y czy pod kątem.

Kolejnym badaniem była realizacja jazdy po kwadracie o boku 4m, ze stałą zadaną prędkością liniową równą  $4 \frac{m}{s}$  wzdłuż każdego boku. Badania ponownie wykonano dla dwóch wartości prędkości obrotowej półsfery. Uzyskane wyniki ilustrują wykresy 5.19, 5.20 oraz 5.21, 5.22.

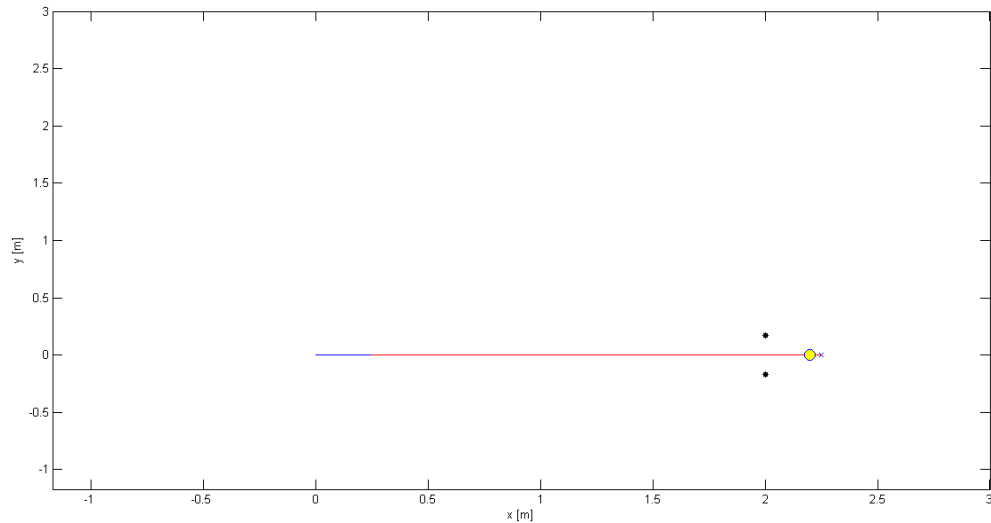
Ostatni eksperyment dotyczył zbadania działania algorytmu linearyzacji oraz używanych wyników dla praktycznie nieosiągalnej trajektorii – zażądano, aby robot poruszał się po linii prostej z prędkością  $v_1 = 1 \frac{m}{s}$  z zerową prędkością obrotową  $\psi_k$  półsfery – zadano wektor sterowań postaci  $(v_1, v_2, v_3) = (1 \frac{m}{s}, 0, 0)$ . Ponieważ wyprowadzony model nie uwzględnia występujących w rzeczywistym robocie ograniczeń konfiguracyjnych, wynikających z dopuszczalnego zakresu ruchu kątów  $\varphi_k$  i  $\theta_k$ , w uzyskanym tutaj rozwiązaniu zadany ruch odbywa się dzięki jednostajnej zmianie kąta  $\theta_k$  przy równoczesnej korekcji toru ruchu poprzez dostrajanie kąta  $\varphi_k$ , co ilustrują wykresy 5.23, 5.24. Należy zauważyć, że te dwa kąty nie podlegają bezpośredniej kontroli w naszym zlinearyzowanym układzie.



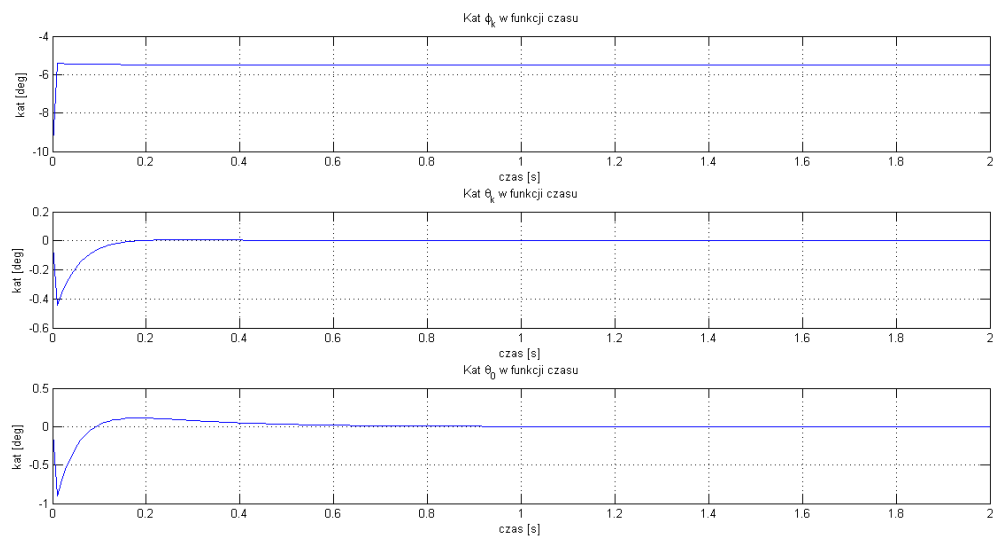
Rysunek 5.11 Ślad ruchu robota przy zadaniu ruchu w kierunku osi X z prędkością  $v_3 = 2000 \frac{\pi}{s}$  dla orientacji początkowej  $\theta_{00} = 0$  – model zlinearyzowany



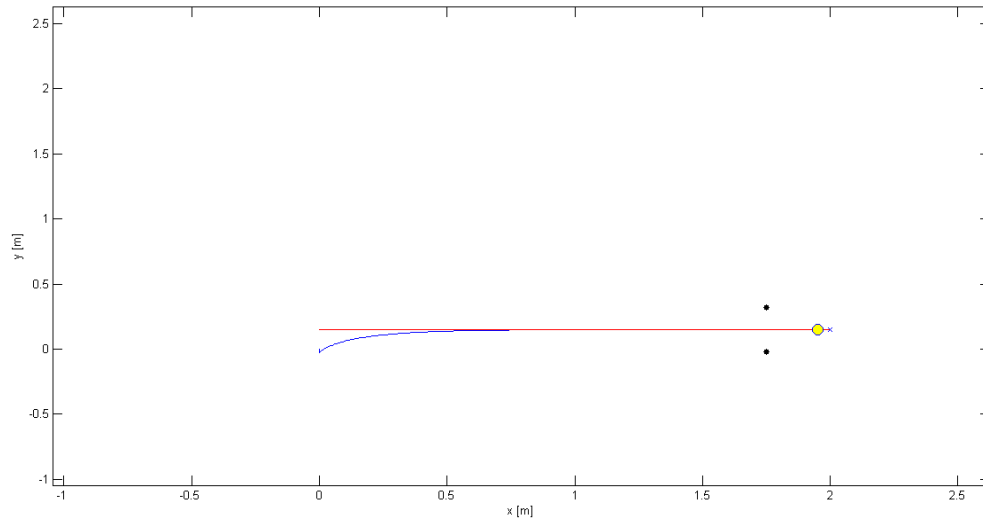
Rysunek 5.12 Kąty  $\theta_0$ ,  $\varphi_k$  i  $\theta_k$  w funkcji czasu przy zadaniu ruchu w kierunku osi X z prędkością  $v_3 = 2000 \frac{\pi}{s}$  dla orientacji początkowej  $\theta_{00} = 0$  – model zlinearyzowany



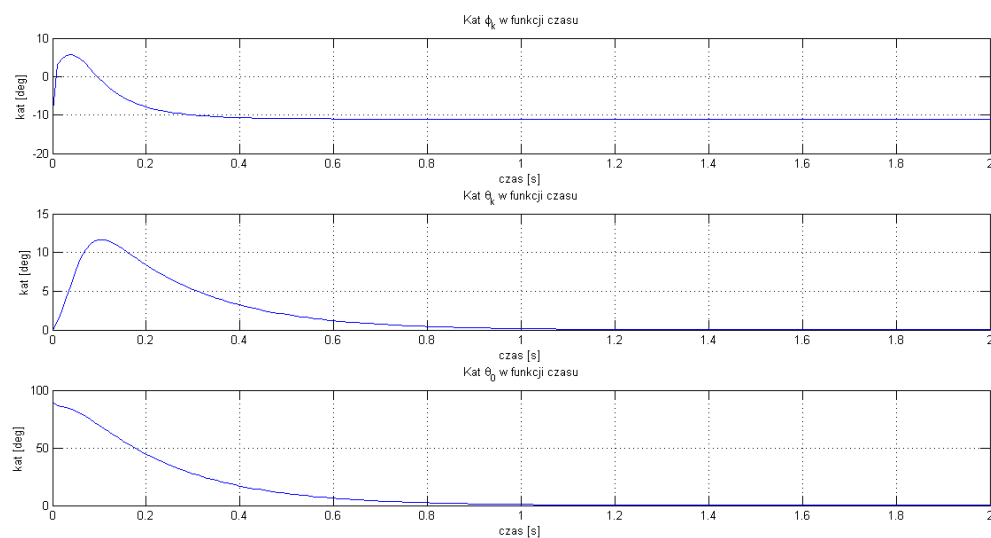
Rysunek 5.13 Ślad ruchu robota przy zadaniu ruchu w kierunku osi X z prędkością  $v_3 = 4000 \frac{\pi}{s}$  dla orientacji początkowej  $\theta_{00} = 0$  – model zlinearyzowany



Rysunek 5.14 Kąty  $\theta_0$ ,  $\varphi_k$  i  $\theta_k$  w funkcji czasu przy zadaniu ruchu w kierunku osi X z prędkością  $v_3 = 4000 \frac{\pi}{s}$  dla orientacji początkowej  $\theta_{00} = 0$  – model zlinearyzowany

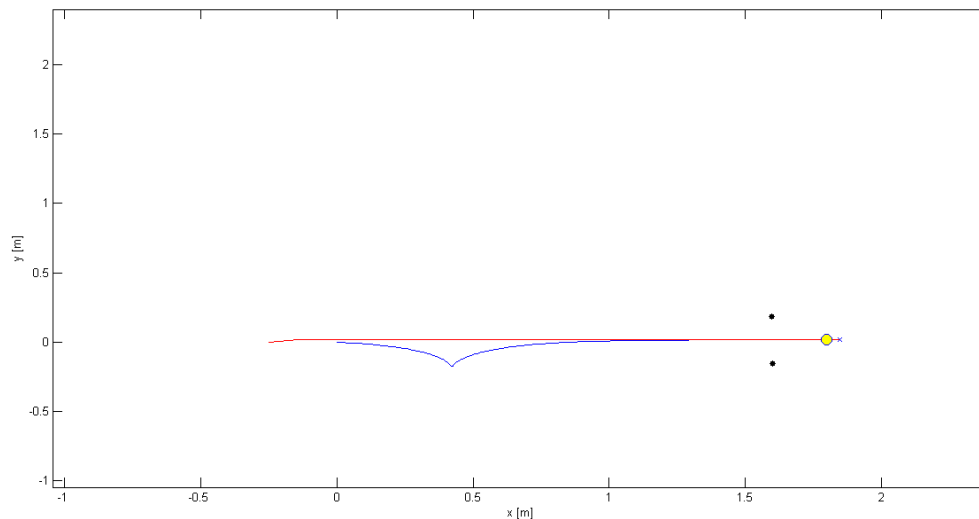


Rysunek 5.15 Ślad ruchu robota przy zadaniu ruchu w kierunku osi X z prędkością  $v_3 = 2000 \frac{\pi}{s}$  dla orientacji początkowej  $\theta_{00} = \frac{\pi}{2}$  – model zlinearyzowany

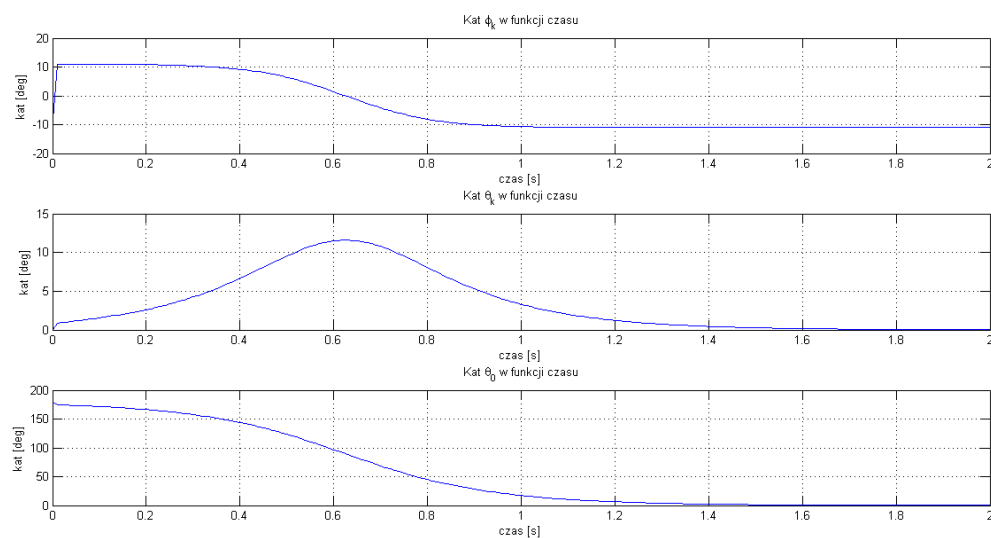


Rysunek 5.16 Kąty  $\theta_0$ ,  $\phi_k$  i  $\theta_k$  w funkcji czasu przy zadaniu ruchu w kierunku osi X z prędkością  $v_3 = 2000 \frac{\pi}{s}$  dla orientacji początkowej  $\theta_{00} = \frac{\pi}{2}$  – model zlinearyzowany

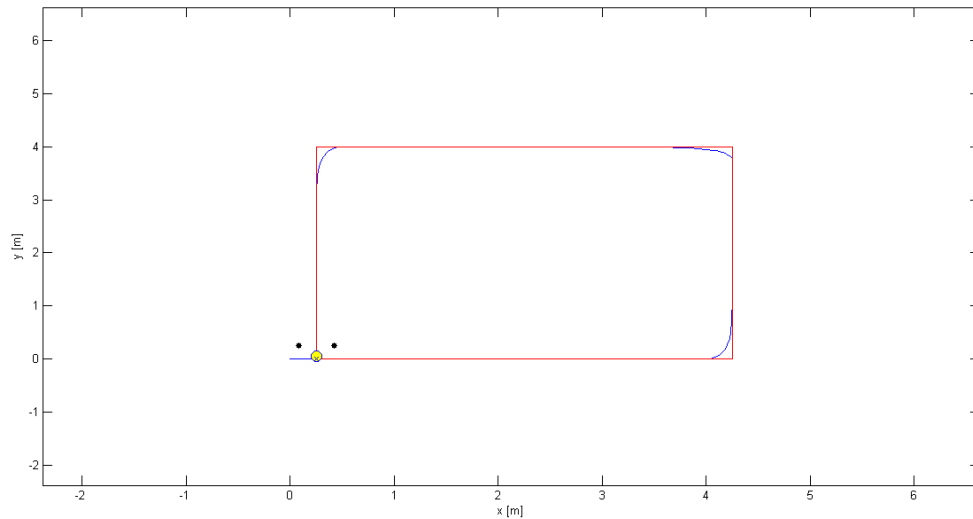




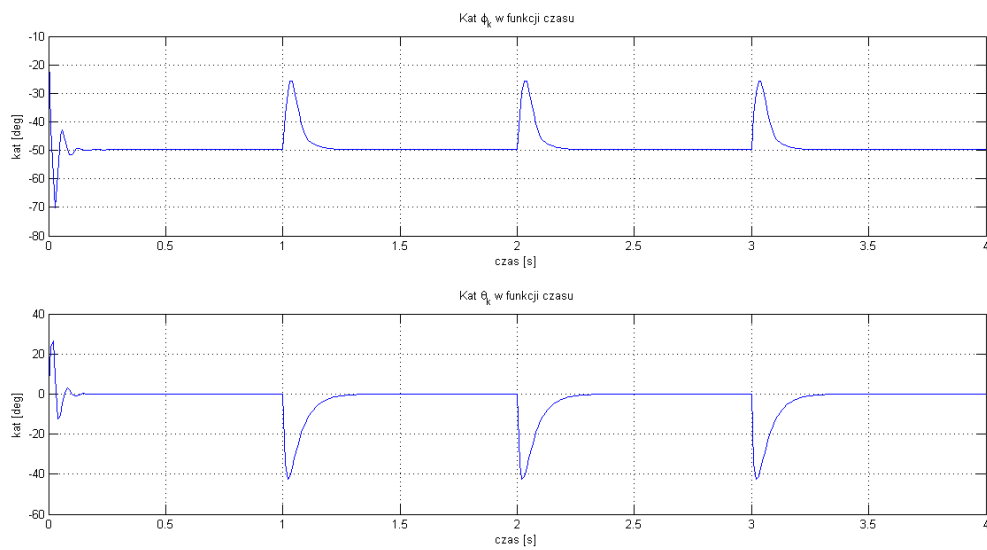
Rysunek 5.17 Ślad ruchu robota przy zadaniu ruchu w kierunku osi X z prędkością  $v_3 = 2000 \frac{\pi}{s}$  dla orientacji początkowej  $\theta_{00} = \pi$  – model zlinearyzowany



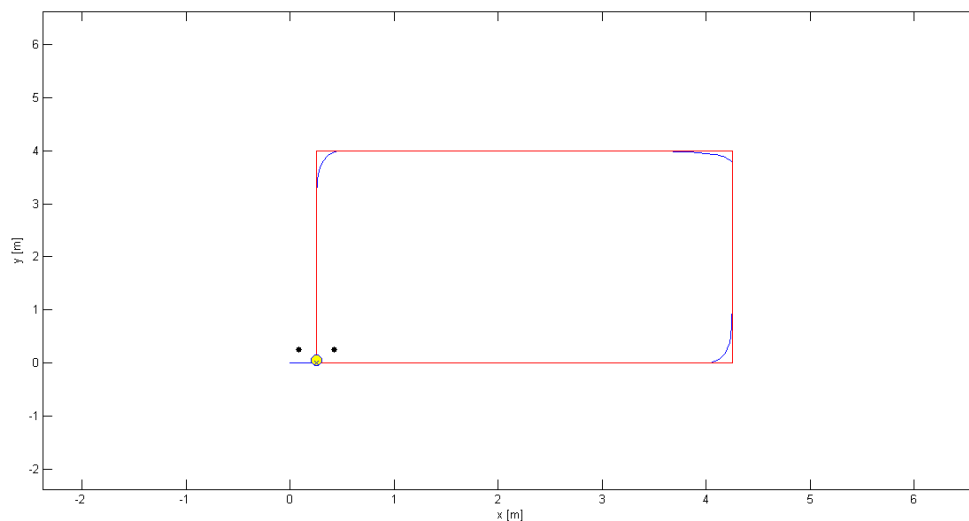
Rysunek 5.18 Kąty  $\theta_0$ ,  $\phi_k$  i  $\theta_k$  w funkcji czasu przy zadaniu ruchu w kierunku osi X z prędkością  $v_3 = 2000 \frac{\pi}{s}$  dla orientacji początkowej  $\theta_{00} = \pi$  – model zlinearyzowany



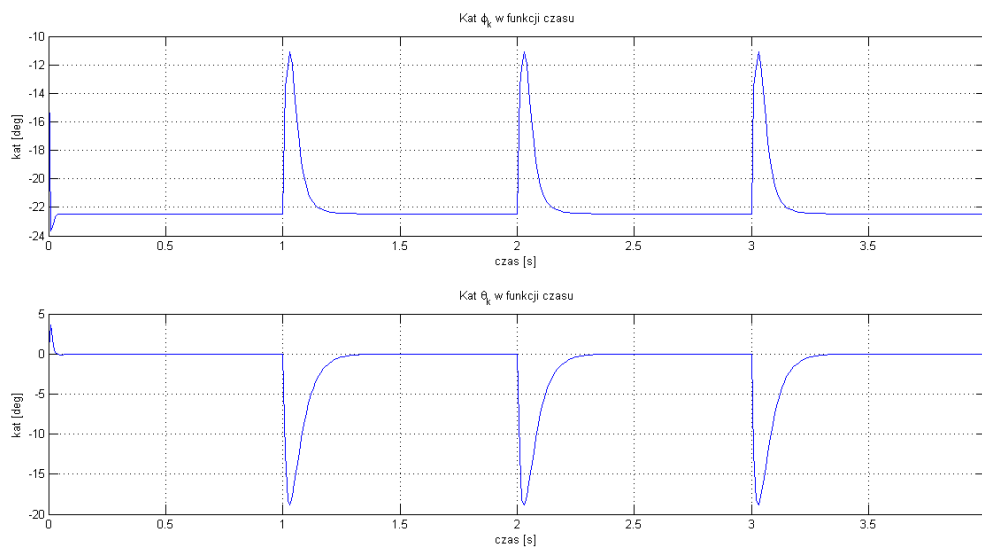
Rysunek 5.19 Ślad ruchu robota przy zadaniu jazdy po kwadracie w modelu zlinearyzowanym przy sterowaniu  $v_3 = 2000 \frac{\pi}{s}$



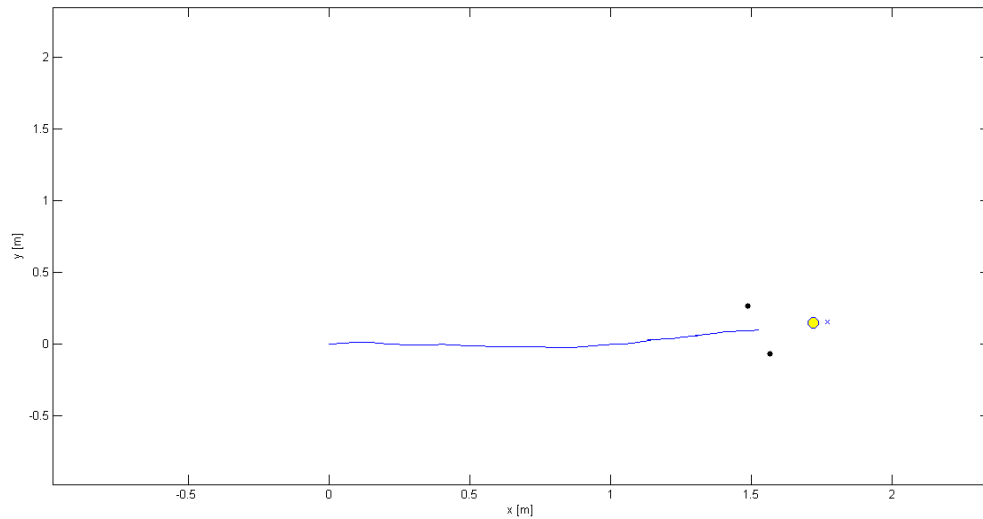
Rysunek 5.20 Kąty  $\varphi_k$ ,  $\theta_k$  w funkcji czasu dla realizacji jazdy po kwadracie w modelu zlinearyzowanym przy sterowaniu  $v_3 = 2000 \frac{\pi}{s}$



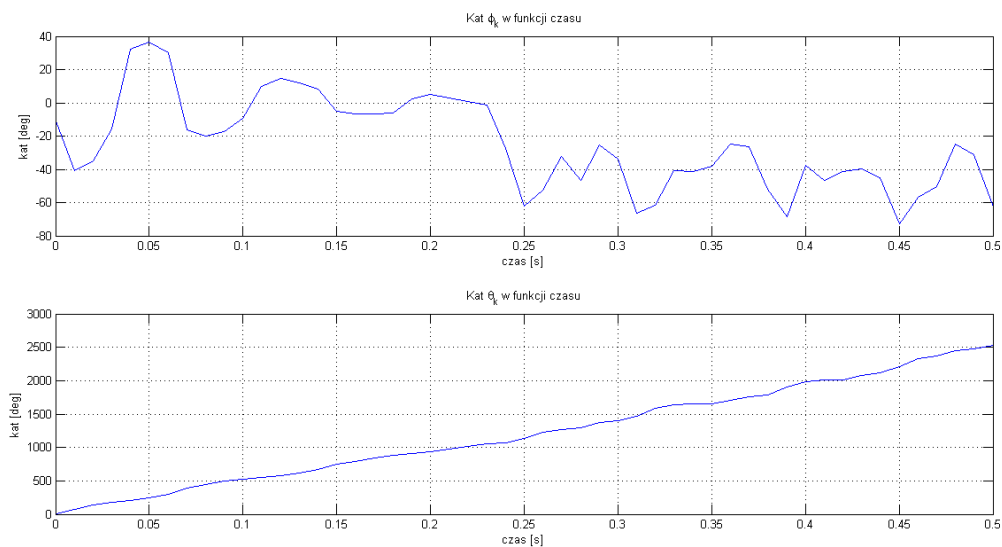
Rysunek 5.21 Ślad ruchu robota przy zadaniu jazdy po kwadracie w modelu zlinearyzowanym przy sterowaniu  $v_3 = 4000 \frac{\pi}{s}$



Rysunek 5.22 Kąty  $\varphi_k$ ,  $\theta_k$  w funkcji czasu dla realizacji jazdy po kwadracie w modelu zlinearyzowanym przy sterowaniu  $v_3 = 4000 \frac{\pi}{s}$



Rysunek 5.23 Ślad ruchu robota przy badaniu wpływu sterowania  $v_3 = 0$  na wartości kątów  $\varphi_k$ ,  $\theta_k$  w modelu zlinearyzowanym



Rysunek 5.24 Kąty  $\varphi_k$ ,  $\theta_k$  w funkcji czasu przy badaniu wpływu sterowania  $v_3 = 0$  na wartości kątów  $\varphi_k$ ,  $\theta_k$  w modelu zlinearyzowanym

# Rozdział 6

## Podsumowanie

Celem projektu było wyprowadzenie pełnego i uproszczonego modelu kinematyki robota napędzanego półsferą, zaproponowanie sprzężenia linearyzującego wybrane wyjścia układu, zbadanie zachowania modeli w środowisku MATLAB, porównanie wyników symulacji oraz odniesienie ich do zachowania rzeczywistego obiektu. Wszystkie cele pracy zostały zrealizowane.

Przeprowadzone w ramach projektu symulacje zachowania modeli pozwalają stwierdzić, że w dużym stopniu odwzorowują one zachowanie rzeczywistego obiektu – robota mobilnego Hogger, jednak dla dokładniejszej analizy tego zagadnienia należy rozwinąć konstrukcję robota tak, by umożliwić uzyskiwanie informacji o jego wektorze stanu. Jak można się było spodziewać, badania wykazały pewne różnice w zachowaniu modeli, wynikające z założonych uproszczeń, dotyczących wpływu zmian kątów  $\theta_k$  i  $\varphi_k$  na zmianę położenia i orientacji robota w układzie globalnym. Różnice te dotyczą przede wszystkim zmian orientacji korpusu robota i są wyraźnie zauważalne, jednakże ostatecznej oceny ich istotności można będzie dokonać dopiero po dokładniejszym porównaniu zachowania modeli z obiektem rzeczywistym. Niewykluczone, że porównanie to wykaże inne, bardziej istotne źródła rozbieżności zachowania robota i modelu. Warto jedynie zauważyć, iż w przypadku wykorzystania modelu robota w sprzętowej implementacji jego sterownika łatwiej będzie to zrobić dla przypadku modelu uproszczonego.

W dalszych pracach należy podjąć próbę wyprowadzenia modelu dynamiki robota, uwzględniającego wszystkie zjawiska związane z zastosowanym w nim napędem. Wyprowadzenie modelu dynamiki i uwzględnienie go w procesie sterowania jest o tyle istotne, że w trakcie jazdy rzeczywistego robota z szybko wirującą półsferą zachowuje się on zdecydowanie inaczej przy skręcaniu w lewo niż w prawo. Wynika to zapewne z dynamicznego oddziaływania wirującej półsfery, która oddziałuje na korpus robota jak żyroskop. Uwzględnienie tego zjawiska w algorytmie sterowania robota zapewne zniweluje to oddziaływanie. Należy również rozważyć zastosowanie nieliniowych algorytmów sterowania, jak np. algorytm endogenicznej przestrzeni konfiguracyjnej czy algorytm linearyzacji dynamicznej, zwracając szczególną uwagę na wpływ wybranych współrzędnych oraz występowanie ograniczeń konfiguracyjnych, wynikających z ograniczonego zakresu dopuszczalnych wartości kątów odchylenia półsfery.



# Bibliografia

- [1] Modern mechanix. <http://blog.modernmechanix.com/hemisphere-drive-speedster/#more>.
- [2] E. Ackerman. You've never seen a robot drive system like this before. <http://spectrum.ieee.org/automaton/robotics/diy/youve-never-seen-a-drive-system-like-this-before>, 2011.
- [3] G. Campion, G. Bastin, B. d'Andréa Novel. *Structural Properties and Classification of Kinematic and Dynamic Models of Wheeled Mobile Robots*. 1993.
- [4] C. C. de Wit, B. Siciliano, G. Bastin. *Theory of Robot Control*. Springer-Verlag, London, 1996.
- [5] A. Mazur. *Sterowanie oparte na modelu dla nieholonomicznych manipulatorów mobilnych*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 2009.
- [6] K. Tchoń, A. Mazur, I. Dulęba, R. Hossa, R. Muszyński. *Manipulatory i roboty mobilne: modele, planowanie ruchu, sterowanie*. Akademicka Oficyna Wydawnicza, Warszawa, 2000.