

POLITECHNIKA WROCŁAWSKA  
WYDZIAŁ ELEKTRONIKI

---

KIERUNEK: Automatyka i Robotyka (AIR)  
SPECJALNOŚĆ: Robotyka (ARR)

**PRACA DYPLOMOWA  
INŻYNIERSKA**

Balansowania kulą na ruchomej płaszczyźnie

Ball on plate balancing problem

AUTOR:  
Igor Gajewski

PROWADZĄCY PRACĘ:  
dr inż. Robert Muszyński. PWr, W4/K7

OCENA PRACY:



# Spis treści

<b>1</b>	<b>Wstęp</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Konstrukcja stanowiska</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Model układu</b>	<b>11</b>
3.1	Model uproszczony . . . . .	11
3.2	Model pełny . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Algorytmy sterowania</b>	<b>15</b>
4.1	Regulator PID . . . . .	15
4.2	Sterowanie rozmyte . . . . .	16
<b>5</b>	<b>Badania symulacyjne</b>	<b>19</b>
<b>6</b>	<b>Implementacja wybranych sposobów sterowania systemu</b>	<b>23</b>
6.1	Regulator PID . . . . .	23
6.2	Sterowanie rozmyte . . . . .	23
6.3	Rzeczywisty model systemu . . . . .	31
<b>7</b>	<b>Wnioski</b>	<b>35</b>



# Rozdział 1

## Wstęp

Wraz z rozwojem technologii coraz większą rolę w życiu człowieka odgrywają różnego rodzaju maszyny. Początkowo jedynie zwiększające nasze możliwości, aby ostatecznie stać się w pełni autonomicznymi robotami, które nie potrzebują ciągłej obsługi przez człowieka. Takie niezależne urządzenia wymagają odpowiednio zaprojektowanego algorytmu sterowania, który pozwoli im na poprawne wykonywanie zadań, do których zostały przeznaczone.

Jednym z tego typu urządzeń jest system balansowania kulą na równoważni, którego zadaniem jest przeprowadzenie kuli przez zadaną trajektorię lub utrzymanie jej pozycji w przestrzeni jednowymiarowej. Jego rozszerzoną wersją jest system balansowania kulą na płaszczyźnie wykonujący to samo zadanie w dwóch wymiarach. W literaturze dotyczącej sterowania można znaleźć wiele różnorodnych sposobów sterowania takim systemem. Najczęściej spotykanymi metodami jest zastosowanie regulatora PID [3], regulatora rozmytego [4] lub obserwatora stanu [5].

Celem pracy jest dokonanie przeglądu i implementacji wybranych metod sterowania kulą. W efekcie wśród zadań znajduje się wyprowadzenie i analiza modelu matematycznego kuli, skonstruowanie środowiska do implementacji metod sterowania, przegląd metod sterowania kulą, implementacja wybranych algorytmów i zbadanie ich własności.

Układ pracy jest następujący. W rozdziale 2 przedstawiono konstrukcję stanowiska wykorzystanego do przeprowadzenia badań. W rozdziale 3 wyprowadzono modele matematyczne kuli poruszającej się po płaszczyźnie. Kolejny rozdział zawiera przegląd istniejących metod sterowania. W rozdziale 5 przeprowadzono badania symulacyjne dotyczące analizy własności wyprowadzonych modeli matematycznych. Opracowanie metod sterowania, ich analiza oraz weryfikacja poprawności zaimplementowanych algorytmów zostały opisane w rozdziale 6. Całość podsumowuje rozdział 7.



# Rozdział 2

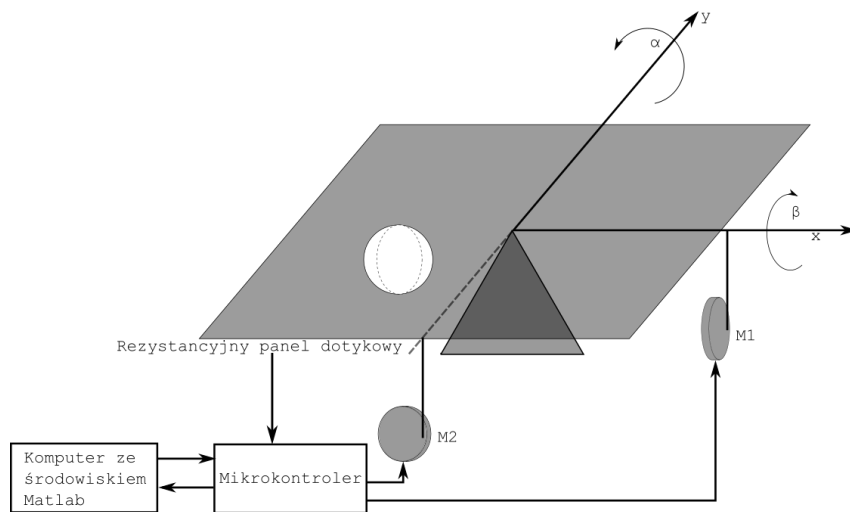
## Konstrukcja stanowiska

Skonstruowane stanowisko pozwala na przeprowadzenie badań skuteczności algorytmów balansowania kulą na płaszczyźnie. Jego architektura umożliwia implementację dowolnych algorytmów proponowanych przez eksperymentatora. Część mechaniczna stanowiska ma na celu umożliwić zadanie położenia kąтового powierzchni, na której znajduje się kula w dwóch wzajemnie prostopadłych osiach. Poprawność działania urządzenia zapewniona jest, gdy w pozycji spoczynkowej obie te osie są dodatkowo prostopadłe do linii pola grawitacyjnego. Schemat ideowy stanowiska został przedstawiony na rysunkach 2.1 i 2.2, gdzie  $\alpha, \beta$  – kąt nachylenia płaszczyzny do poziomu,  $x, y$  – współrzędne położenia kuli,  $R$  – jej promień,  $M1, M2$  – napędy. Użyty w stanowisku panel dotykowy pozwala na określenie położenia kuli, na podstawie którego realizowane jest zadanie sterowania, a następnie za pomocą napędów, ustawienie platformy w takiej pozycji, aby kula osiągnęła określoną trajektorię. Skonstruowane stanowisko zostało przedstawione na rysunku 2.3. Jego elementami składowymi są:

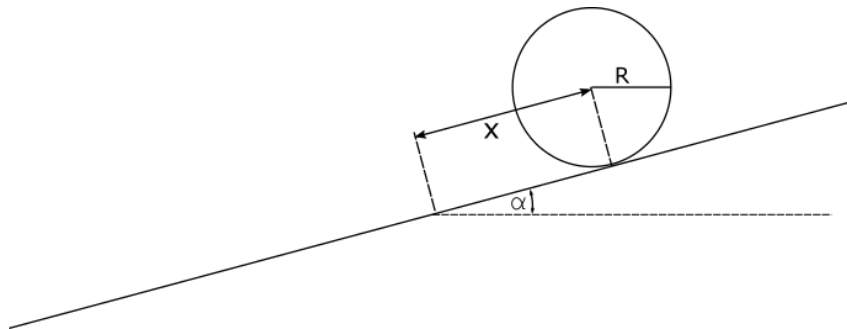
- powierzchnia, po której porusza się kula,
- silniki ustalające orientację platformy,
- element pomiarowy, określający położenie kuli na płaszczyźnie,
- mikrokontroler obsługujący element pomiarowy, silniki i realizujący komunikację z komputerem,
- komputer ze środowiskiem Simulink realizujący zadanie sterowania.

Jako powierzchnię po której porusza się kula wykorzystano czteroprzewodowy rezystancyjny panel dotykowy, który pełni również rolę elementu pomiarowego. W przypadku takiego panelu ustalanie współrzędnych, w których wystąpił dotyk polega na pomiarze napięcia na odpowiednich elektrodach. Do obsługi panelu wykorzystano przetwornik A/C z 10-bitową rozdzielczością co pozwoliło otrzymać  $1024 * 1024$  pozycje na platformie. Schemat wykonywania pomiarów został przedstawiony na rysunkach 2.4 i 2.5, gdzie  $Z1, Z2$  – wykorzystywane do detekcji dotyku,  $X, Y$  – służące określaniu współrzędnych dotyku.

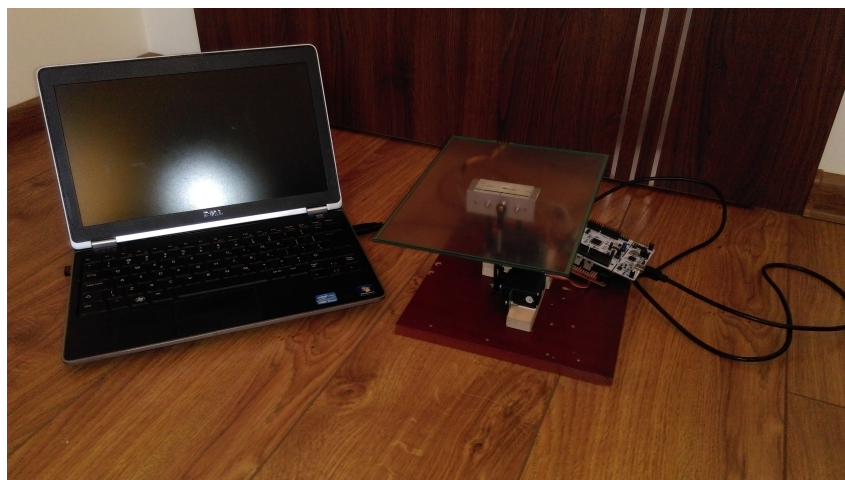
Rolę napędów ustalających orientację platformy pełnią dwa niezależne serwomechanizmy modelarskie TowerPro MG995, których moment obrotowy przy napięciu  $6V$  wynosi  $15[kg * cm]$  natomiast prędkość obrotowa  $\frac{60}{0.13} \left[ \frac{\circ}{s} \right] \approx 450 \frac{\circ}{s}$  [1]. Mikrokontrolerem umożliwiającym obsługę urządzeń peryferyjnych (panel dotykowy i serwomechanizmy) jest STM32F401 umieszczony na płycie rozwojowej Nucleo-F401RE, natomiast komunikacja z komputerem odbywa się za pomocą interfejsu USB.



Rysunek 2.1 Schemat ideowy stanowiska

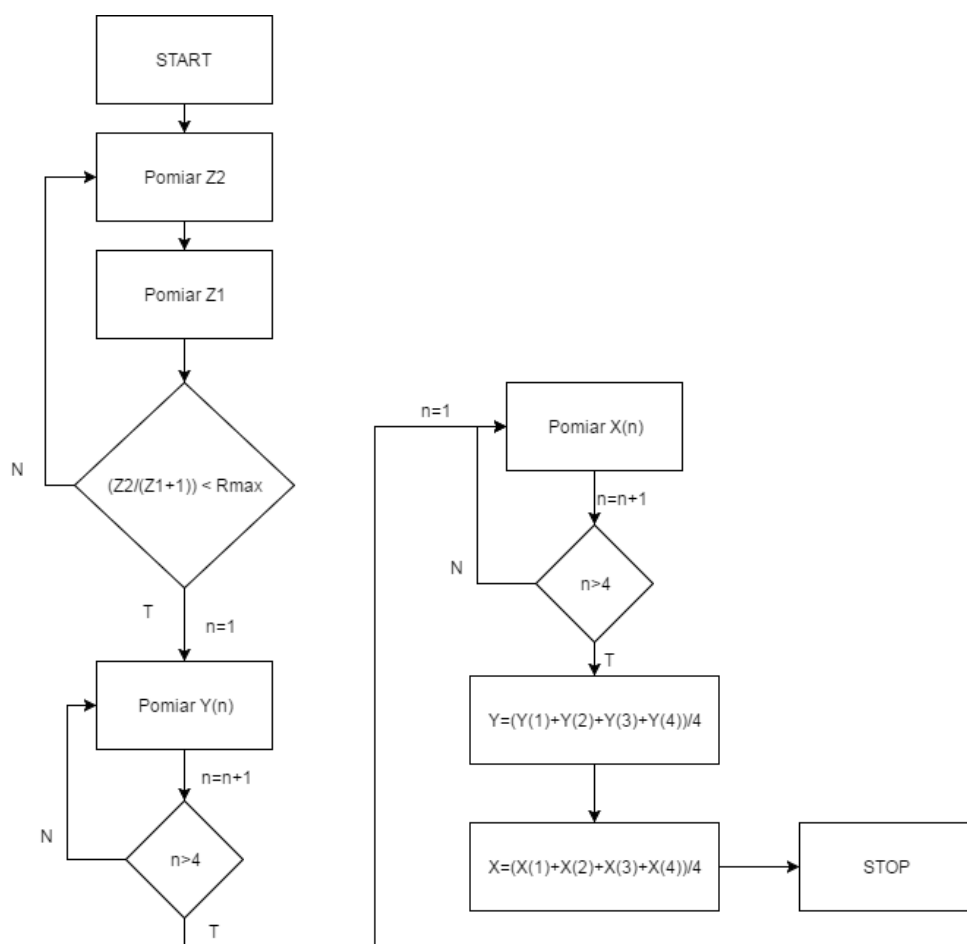


Rysunek 2.2 Schemat ideowy stanowiska – rzut z boku

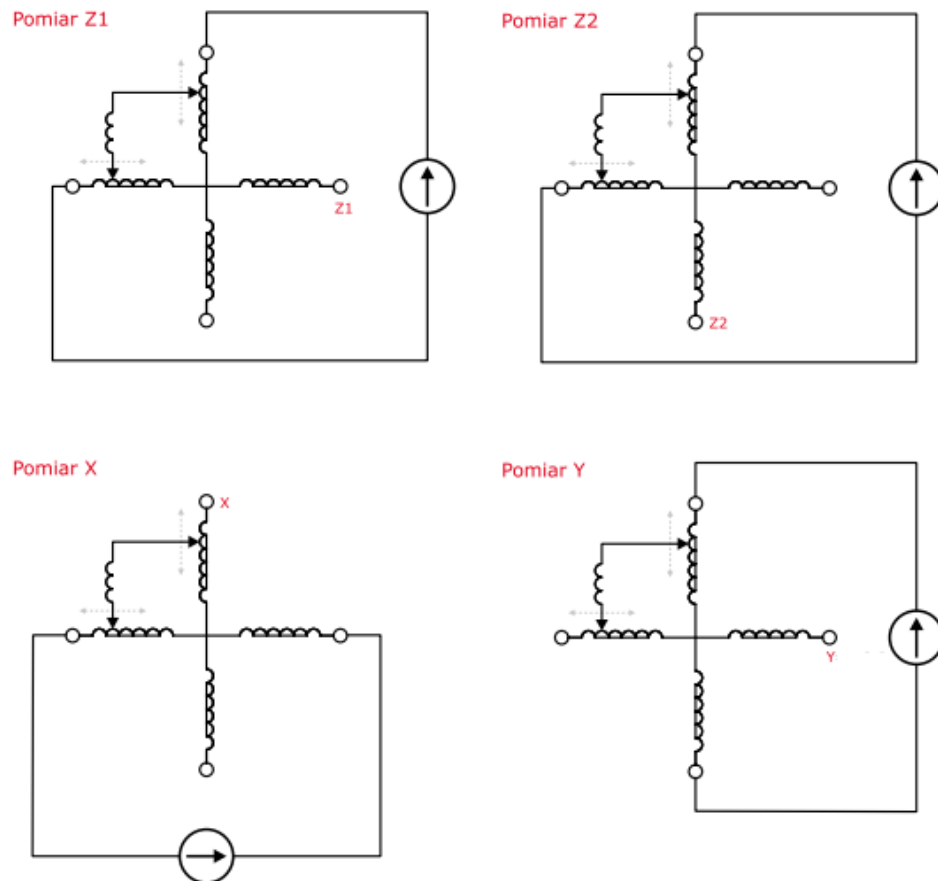


Rysunek 2.3 Skonstruowane stanowisko

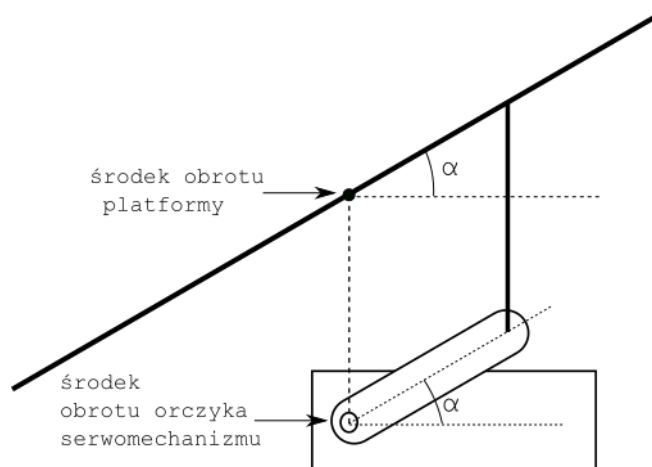




Rysunek 2.4 Schemat pełnego cyklu pomiarowego



Rysunek 2.5 Konfiguracja panelu dotykowego dla każdego z czterech kroków pomiarowych (na podstawie [11])



Rysunek 2.6 Schemat połączenia napędu z panelem rezystancyjnym

Schemat połączenia napędów z płaszczyzną po której porusza się kula został przedstawiony na rysunku 2.6. Konstrukcję wykonano w taki sposób, aby uniknąć wykonywania obliczeń związanych z zamianą położenia kąтового orczyka serwomechanizmu na położenie kątowe panelu dotykowego. W tym celu napędy usytowano tak, aby osie obrotu ich wałów były do siebie prostopadłe, natomiast punkt ich przecięcia był przesunięty względem środka geometrycznego panelu dotykowego jedynie w pionie. Połączenia orczyków z powierzchnią, na której znajduje się kula, dokonano za pomocą przekładni cięgnowej.



# Rozdział 3

## Model układu

W celu wyprowadzenia modelu matematycznego kuli poruszającej się po płaszczyźnie posłużono się formalizmem Eulera Lagrange'a. W pracy przyjęto następujące założenia:

- kula w żadnym przypadku nie traci kontaktu z platformą,
- pomiędzy kulą a platformą nie występuje poślizg.

Równanie Eulera-Lagrange'a dla układu kuli toczącej się po płaszczyźnie wyraża się wzorem

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, \quad (3.1)$$

gdzie  $q$  – wektor konfiguracyjny systemu,  $L$  – lagranżian, który w mechanice klasycznej jest dany jako

$$L = E_k - E_p, \quad (3.2)$$

gdzie  $E_k$  – energia kinetyczna układu,  $E_p$  – jego energia potencjalna.

Poniżej zostały wyprowadzone dwa modele układu balansowania kulą na płaszczyźnie różniące się od siebie składowymi energii kinetycznej.

### 3.1 Model uproszczony

Do wyznaczenia modelu uproszczonego założono, że na energię kinetyczną kuli składa się energia wynikająca z jej ruchu obrotowego i ruchu postępowego wzdłuż osi  $X$  i  $Y$ , co daje

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2} \left( m + \frac{I}{r^2} \right) (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad (3.3)$$

gdzie  $m, r$  – masa i promień kuli,  $v, \omega$  – jej prędkość liniowa i kątowna,  $I$  – jej moment bezwładności. Współrzędne położenia kuli  $x, y$  tworzą w tym wypadku wektor konfiguracji układu  $q = (x, y)^T$ . Energia potencjalna, zależna jedynie od położenia kuli wzdłuż linii pola grawitacyjnego, przyjmuje postać

$$E_p = mg(x \sin \alpha + y \sin \beta), \quad (3.4)$$

gdzie  $g$  – przyspieszenie grawitacyjne, zaś kąty  $\alpha$  i  $\beta$  określające orientację platformy będą traktowane jako parametry modelu. Stąd, lagranżian systemu przedstawia się w postaci

$$L = E_k - E_p = \frac{1}{2} \left( m + \frac{I}{r^2} \right) (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mg(x \sin \alpha + y \sin \beta). \quad (3.5)$$

Różniczkując wyrażenie (3.5) zgodnie z założeniami równania (3.1), otrzymujemy następujące składowe równań Eulera-Lagrange'a:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= \left(m + \frac{I}{r^2}\right) \dot{x}, & \frac{\partial L}{\partial x} &= -mg \sin \alpha, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= \left(m + \frac{I}{r^2}\right) \ddot{x}, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} &= \left(m + \frac{I}{r^2}\right) \dot{y}, & \frac{\partial L}{\partial y} &= -mg \sin \beta, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} &= \left(m + \frac{I}{r^2}\right) \ddot{y}.\end{aligned}$$

Zatem równania ruchu kuli na płaszczyźnie przyjmują postać

$$\begin{cases} \left(m + \frac{I}{r^2}\right) \ddot{x} + mg \sin \alpha = 0 \\ \left(m + \frac{I}{r^2}\right) \ddot{y} + mg \sin \beta = 0 \end{cases}. \quad (3.6)$$

## 3.2 Model pełny

W modelu pełnym w wyrażeniu na energię kinetyczną dodatkowo uwzględniono energię wynikającą z ruchu obrotowego platformy, któremu towarzyszy przemieszczanie kuli w pionie. W tym wypadku wektor konfiguracji  $q = (x, y, \alpha, \beta)^T$ . Obecnie

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv_o^2 + \frac{1}{2} \left(m(x^2 + y^2) + I_p\right) (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2), \quad (3.7)$$

gdzie  $v_o = \dot{\alpha}x + \dot{\beta}y$  – przybliżona prędkość ruchu postępowego kuli (dla  $\alpha, \beta \approx 0$ ) wynikającego z ruchu obrotowego platformy,  $I_p$  – moment bezwładności panelu dotykowego. Ostatecznie

$$\begin{aligned}E_k &= \frac{1}{2} \left(m + \frac{I}{r^2}\right) (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}m (\dot{\alpha}^2 x^2 + 2\dot{\alpha}x\dot{\beta}y + \dot{\beta}^2 y^2) + \\ &\quad \frac{1}{2} \left(m(x^2 + y^2) + I_p\right) (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2).\end{aligned} \quad (3.8)$$

Podobnie jak poprzednio

$$E_p = mg(x \sin \alpha + y \sin \beta). \quad (3.9)$$

Podstawiając równania (3.8) i (3.9) do równania (3.2) otrzymujemy lagranżian

$$\begin{aligned}L &= \frac{1}{2} \left(m + \frac{I}{r^2}\right) (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}m (\dot{\alpha}^2 x^2 + 2\dot{\alpha}x\dot{\beta}y + \dot{\beta}^2 y^2) + \\ &\quad \frac{1}{2} \left(m(x^2 + y^2) + I_p\right) (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) - mg(x \sin \alpha + y \sin \beta).\end{aligned} \quad (3.10)$$

Składowe równań Eulera-Lagrange'a przyjmują teraz postać:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= \left(m + \frac{I}{r^2}\right) \dot{x}, & \frac{\partial L}{\partial x} &= 2m\dot{\alpha}^2 x + m\dot{\alpha}\dot{\beta}y + m\dot{\beta}^2 x - mg \sin \alpha, \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= \left(m + \frac{I}{r^2}\right) \ddot{x}, \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} &= \left(m + \frac{I}{r^2}\right) \dot{y}, & \frac{\partial L}{\partial y} &= 2m\dot{\beta}^2 y + m\dot{\alpha}\dot{\beta}x + m\dot{\alpha}^2 y - mg \sin \beta, \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} &= \left(m + \frac{I}{r^2}\right) \ddot{y}, \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} &= 2m\dot{\alpha}x^2 + mx\dot{\beta}y + m\dot{\alpha}y^2 + I_p\dot{\alpha}, & \frac{\partial L}{\partial \alpha} &= -mgx \cos \alpha, \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} &= 2m\ddot{\alpha}x^2 + 4m\dot{\alpha}x\dot{x} + m\dot{x}\dot{\beta}y + m\ddot{\beta}xy + m\dot{\beta}x\dot{y} + m\ddot{\alpha}y^2 + 2m\dot{\alpha}y\dot{y} + I_p\ddot{\alpha}, \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} &= m\dot{\alpha}xy + 2m\dot{\beta}y^2 + m\dot{\beta}x^2 + I_p\dot{\beta}, & \frac{\partial L}{\partial \beta} &= -mgy \cos \beta, \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} &= m\ddot{\alpha}xy + m\dot{\alpha}\dot{x}y + m\dot{\alpha}x\dot{y} + 2m\ddot{\beta}y^2 + 4m\dot{\beta}y\dot{y} + m\ddot{\beta}x^2 + 2m\dot{\beta}x\dot{x} + I_p\ddot{\beta}.
\end{aligned}$$

Zatem równania ruchu kuli na płaszczyźnie są dane jako

$$\left\{ \begin{aligned}
\left(m + \frac{I}{r^2}\right) \ddot{x} - 2m\dot{\alpha}^2 x - m\dot{\alpha}\dot{\beta}y - m\dot{\beta}^2 x + mg \sin \alpha &= 0 \\
\left(m + \frac{I}{r^2}\right) \ddot{y} - 2m\dot{\beta}^2 y - m\dot{\alpha}\dot{\beta}x - m\dot{\alpha}^2 y + mg \sin \beta &= 0 \\
(I_p + 2mx^2 + my^2) \ddot{\alpha} + 4m\dot{\alpha}x\dot{x} + m\dot{x}\dot{\beta}y + m\ddot{\beta}xy + m\dot{\beta}x\dot{y} + 2m\dot{\alpha}y\dot{y} + mgx \cos \alpha &= 0 \\
(I_p + 2my^2 + mx^2) \ddot{\beta} + 4m\dot{\beta}y\dot{y} + m\dot{\alpha}\dot{x}y + m\ddot{\alpha}xy + m\dot{\alpha}x\dot{y} + 2m\dot{\beta}x\dot{x} + mgy \cos \beta &= 0
\end{aligned} \right. \quad (3.11)$$





# Rozdział 4

## Algorytmy sterowania

Poniżej przedstawione zostały dwie metody sterowania, które zdecydowano się zaimplementować w ramach niniejszej pracy.

### 4.1 Regulator PID

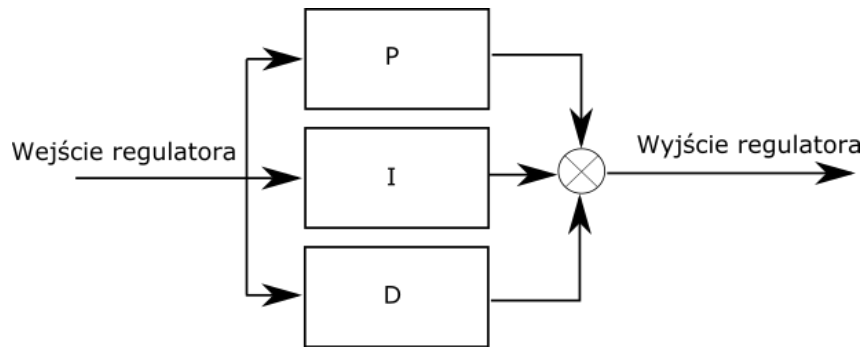
Jedną z najpopularniejszych metod regulacji ze sprzężeniem zwrotnym jest algorytm PID, często wykorzystywany w zastosowaniach przemysłowych, układach automatyki budynkowej, czy napędach [12]. Zadaniem takiego regulatora jest podanie na obiekt takiej wartości sterowania, która pozwoli na uzyskanie i utrzymanie na wyjściu obiektu wartości zadanej. Układ sterowania z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego mierzy różnicę między wartością zadaną i wartością wyjściową obiektu, a następnie na podstawie zaprojektowanego algorytmu oblicza sygnał, który pozwoli tę różnicę zmniejszyć, stąd regulator PID realizuje algorytm

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de(t)}{dt}, \quad (4.1)$$

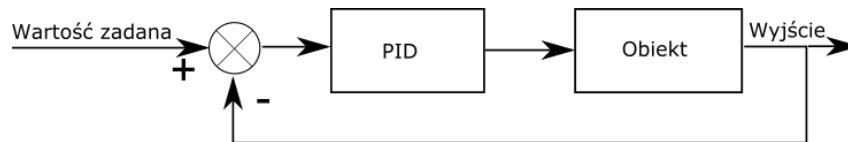
gdzie  $K_p$  – współczynnik wzmocnienia składowej proporcjonalnej,  $K_i$  – współczynnik wzmocnienia składowej całkującej,  $K_d$  – współczynnik wzmocnienia składowej różniczkującej,  $u(t)$  – wartość wyjściowa regulatora,  $e(t)$  – uchyb regulacji.

Jak widać regulator PID składa się z trzech niezależnych członów, suma wyjść tych członów definiowana jest jako sygnał sterujący. Wartość sygnału idealnego regulatora przedstawiona została w równaniu (4.1), a jego schemat widoczny jest na rysunku 4.1. Bieżąca wartość wyjścia obiektu jest odejmowana od wartości zadanej w celu uzyskania uchybu sterowania (rysunek 4.2), który jest przetwarzany przez następujące bloki:

- Blok proporcjonalny (P) jest wzmacniaczem, który w prostych obiektach mógłby być stosowany samodzielnie, ponieważ gdy wartość wyjściowa obiektu jest równa wartości zadanej, uchyb regulacji jest równy zero. Jednak z powodu inercji obiektu, regulator składający się z samego członu proporcjonalnego nie pozwala na osiągnięcie stanu ustalonego w odpowiednio krótkim czasie.
- Blok całkujący (I) kompensuje akumulację uchybów z przeszłości. W przypadku niezerowego uchybu regulacji, powoduje powolną, lecz stałą zmianę sygnału wyjściowego. Ponieważ człon całkujący wprowadza do systemu opóźnienia regulacji, jego zbyt duże wzmocnienie spowoduje powstanie oscylacji o częstotliwości mniejszej od tych spowodowanych członem proporcjonalnym.



Rysunek 4.1 Schemat regulatora PID



Rysunek 4.2 Schemat układu regulacji z pętlą sprzężenia zwrotnego

Dużą wadą członu całkującego jest tzw. wind-up [6]. Zjawisko to występuje w przypadku gdy przy dużej zmianie wartości zadanej człon całkujący zmagazynuje błąd przekraczający wartość maksymalną zmiennej regulowanej, co w skrajnych przypadkach może doprowadzić do zniszczenia urządzenia.

- Blok różniczkujący (D) kompensuje przewidywane wartości uchybów w przyszłości. Jego wyjście jest proporcjonalne do szybkości zmiany uchybu, co pomaga wytłumić oscylacje spowodowane przez bloki całkujący i proporcjonalny.

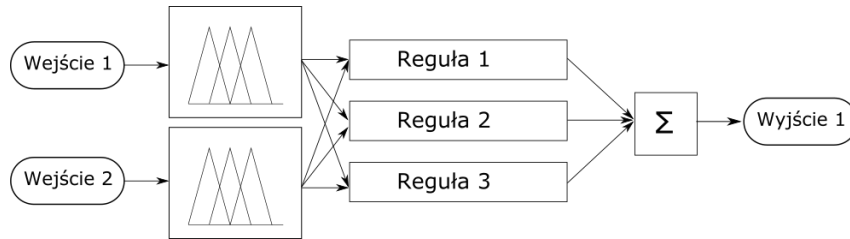
## 4.2 Sterowanie rozmyte

Sterowanie rozmyte opiera się na logice rozmytej, stanowiącej uogólnienie klasycznej logiki dwuwartościowej [7]. W logice rozmytej pomiędzy stanem 0 (fałsz) i 1 (prawda) istnieją stany pośrednie określające stopień przynależności elementu do danego zbioru. Schemat przykładowego regulatora rozmytego został przedstawiony na rysunku 4.3. W klasycznym sterowniku rozmytym wyróżnia się trzy podstawowe etapy pracy:

- rozmywanie (ang. fuzzyfication) – odwzorowywanie konkretnej wartości sygnału wejściowego na zbiór rozmyty, czyli przypisywanie jej stopnia przynależności do danego zbioru,
- wnioskowanie (inferencja) – obliczanie wynikowej funkcji przynależności sygnału wejściowego w oparciu o bazę reguł. Na bazę reguł składa się zbiór instrukcji warunkowych reprezentujących wiedzę projektanta sterownika o możliwych wartościach zmiennych stanu i pożądanym stanie urządzenia. Reguły znajdujące się w bazie przyjmują ogólną postać

$$\begin{aligned} & \text{IF } (x_1 \text{ jest } A_1) \text{ AND } \dots \text{ AND } (x_n \text{ jest } A_n) \text{ THEN} \\ & (y_1 \text{ jest } B_1) \text{ AND } \dots \text{ AND } (y_n \text{ jest } B_n), \end{aligned}$$

gdzie  $A_i$ ,  $B_i$  są zbiorami rozmytymi,  $x_i$  są danymi wejściowymi, a  $y_j$  są zmiennymi wyjściowymi modelu lingwistycznego. Wyrażenia warunkowe bazy reguł mówią nam



Rysunek 4.3 Schemat regulatora rozmytego z dwoma wejściami i jednym wyjściem

jak powinien zachowywać się sterowany obiekt w momencie zajścia konkretnego przypadku na wejściu.

- wyostrzanie (ang. defuzzification) – zamiana wynikowej funkcji przynależności na konkretną wartość liczbową, którą można podać na wejście sterowanego obiektu. Wyróżnia się kilka metod wyostrzania. Do najpopularniejszych należą [8]:
  - a) metoda pierwszego maksimum,
  - b) metoda ostatniego maksimum,
  - c) metoda środkowego maksimum.



# Rozdział 5

## Badania symulacyjne

W celu wybrania modelu, na podstawie którego zaimplementowano algorytm sterowania zdecydowano się porównać trajektorie kuli obu modeli w odpowiedzi na to samo wymuszenie. Ponieważ wszystkie symulacje wykonane zostały w Simulinku należało odpowiednio przekształcić równania (3.6) i (3.11) oraz zdefiniować wejścia systemów. W przypadku modelu pełnego (3.11) jako wymuszenie przyjęto momenty obrotowe  $u_x$  i  $u_y$  wywierające na platformie ruch obrotowy odpowiednio wokół osi  $Y$  i  $X$ , w efekcie czego otrzymano model

$$\begin{cases} \left(m + \frac{I}{r^2}\right) \ddot{x} - 2m\dot{\alpha}^2 x - m\dot{\alpha}\dot{\beta}y - m\dot{\beta}^2 x + mg \sin \alpha = 0 \\ \left(m + \frac{I}{r^2}\right) \ddot{y} - 2m\dot{\beta}^2 y - m\dot{\alpha}\dot{\beta}x - m\dot{\alpha}^2 y + mg \sin \beta = 0 \\ (I_p + 2mx^2 + my^2) \ddot{\alpha} + 4m\dot{\alpha}x\dot{x} + m\dot{x}\dot{\beta}y + m\ddot{\beta}xy + m\dot{\beta}x\dot{y} + 2m\dot{\alpha}y\dot{y} + mgx \cos \alpha = u_x \\ (I_p + 2my^2 + mx^2) \ddot{\beta} + 4m\dot{\beta}y\dot{y} + m\dot{\alpha}x\dot{y} + m\ddot{\alpha}xy + m\dot{\alpha}x\dot{y} + 2m\dot{\beta}x\dot{x} + mgy \cos \beta = u_y \end{cases} \quad (5.1)$$

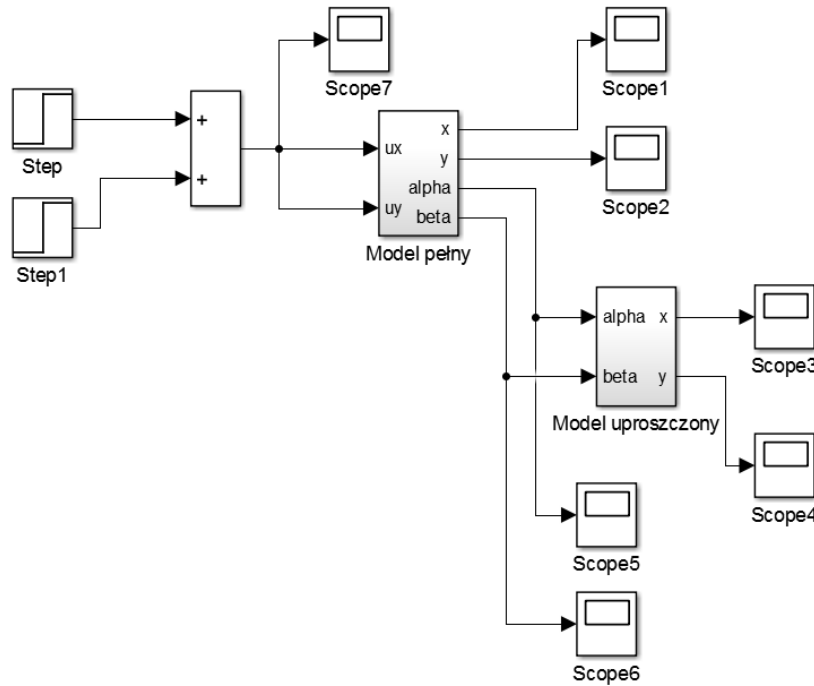
Po przekształceniach równania ruchu (5.1) przyjmują postać

$$\begin{cases} \ddot{x} = \left(\frac{1}{m + \frac{I}{r^2}}\right) (2m\dot{\alpha}^2 x + m\dot{\alpha}\dot{\beta}y + m\dot{\beta}^2 x - mg \sin \alpha) \\ \ddot{y} = \left(\frac{1}{m + \frac{I}{r^2}}\right) (2m\dot{\beta}^2 y + m\dot{\alpha}\dot{\beta}x + m\dot{\alpha}^2 y - mg \sin \beta) \\ \ddot{\alpha} = \frac{u_x - m(4\dot{\alpha}x\dot{x} + \dot{x}\dot{\beta}y + \ddot{\beta}xy + \dot{\beta}x\dot{y} + 2\dot{\alpha}y\dot{y} + gx \cos \alpha)}{I_p + 2mx^2 + my^2} \\ \ddot{\beta} = \frac{u_y - m(4\dot{\beta}y\dot{y} + \dot{\alpha}x\dot{y} + \ddot{\alpha}xy + \dot{\alpha}x\dot{y} + 2\dot{\beta}x\dot{x} + gy \cos \beta)}{I_p + 2my^2 + mx^2} \end{cases} \quad (5.2)$$

Dla modelu uproszczonego zdefiniowano wektor wejść jako  $u = (u_x, u_y)^T = (\alpha, \beta)^T$ , co prowadzi do równań ruchu w postaci

$$\begin{cases} \ddot{x} = \left(\frac{1}{m + \frac{I}{r^2}}\right) (-mg \sin u_x) \\ \ddot{y} = \left(\frac{1}{m + \frac{I}{r^2}}\right) (-mg \sin u_y) \end{cases} \quad (5.3)$$

Ponieważ w przypadku modelu pełnego wejściami systemu są momenty obrotowe, natomiast w przypadku modelu uproszczonego są nimi położenia kątowe, nie można bezpośrednio zadać obu modelom tego samego sygnału wejściowego. Z tego powodu, w celu

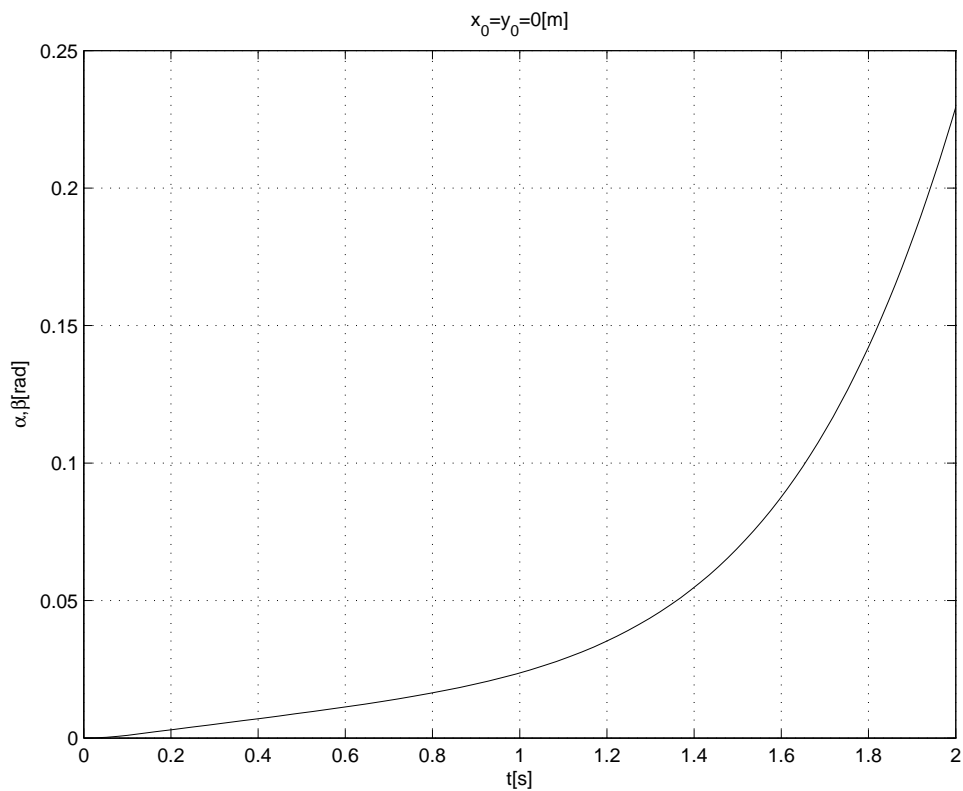


Rysunek 5.1 Model w simulinku wykorzystany do porównania trajektorii kuli obu modeli

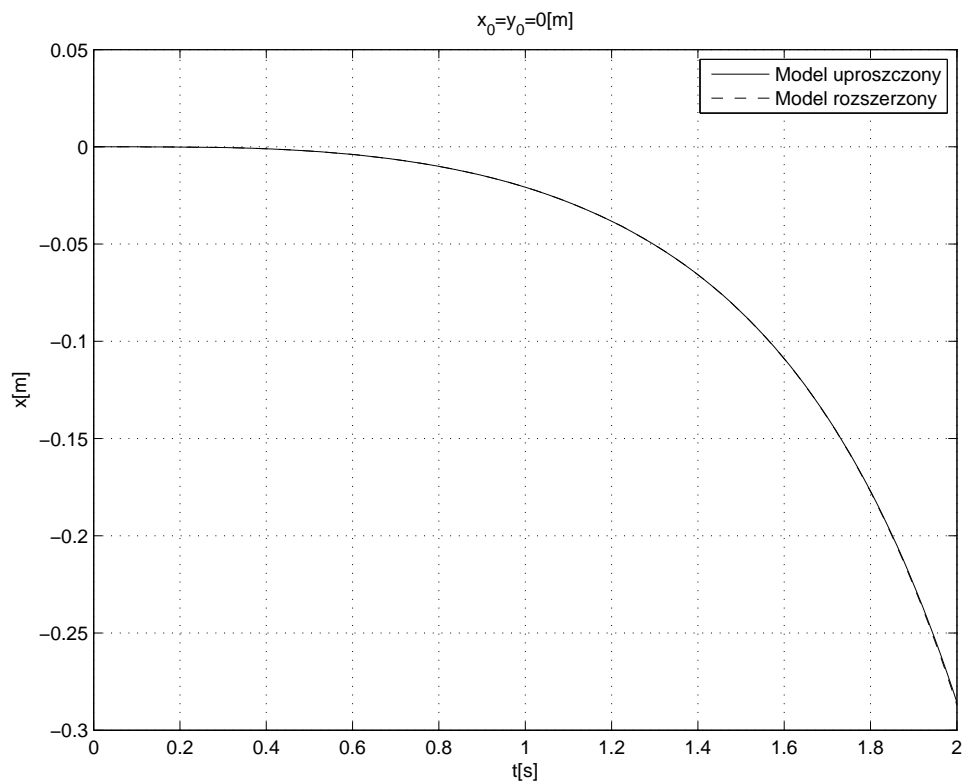
zbadania trajektorii kuli dla obu modeli zadano wymuszenie na model pełny, a następnie otrzymaną trajektorie kątową platformy wykorzystano jako wejście modelu uproszczonego.

Symulacje wykonano dla następujących wartości parametrów układu:  $m = 0.26[kg]$ ,  $r = 0.02[m]$ ,  $I = 4.16 * 10^{-5}[kg * m^2]$ ,  $m_p = 0.1[kg]$ ,  $I_p = 0.5[kg * m^2]$ ,  $g = 9.8[\frac{m}{s^2}]$ . Model w Simulinku, na podstawie którego przeprowadzono badania przedstawiony jest na rysunku 5.1. W oparciu o wyprowadzone równania ruchu (5.2) i (5.3) spodziewano się, że wraz ze wzrostem odległości położenia początkowego kuli od środka układu współrzędnych różnice w trajektoriach kuli dla obu modeli będą się nasilać. Z tego powodu przeprowadzono cykl eksperymentów dla różnych warunków początkowych  $x_0$  i  $y_0$ . Poniżej przedstawiono dwie reprezentatywne trajektorie układów: dla wymuszenia  $u_x = u_y = 1[N * m]$  na okres  $0.1[s]$  i  $(x_0, y_0) = 0$  (rys. 5.2 i 5.3) oraz dla wymuszenia trwającego  $0.4[s]$  i  $(x_0, y_0) = (0.15, 0.15)$  (rys. 5.4 i 5.5).

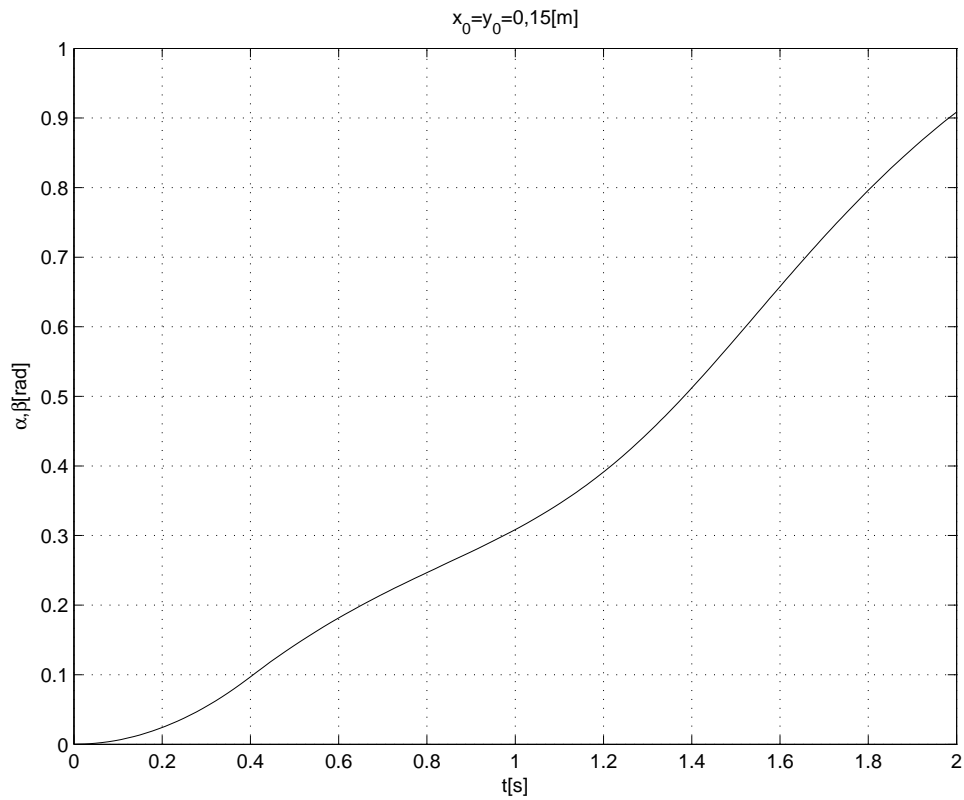
Porównanie wykresów na rysunkach 5.3 i 5.5 dowodzi, że zgodnie z założeniami, w przypadku, gdy kula początkowo znajdowała się blisko początku układu współrzędnych różnice w trajektoriach są znikome. Natomiast, gdy kula znajdowała się daleko od punktu  $(0, 0)$  rozbieżności trajektorii nie były na tyle znaczące, by mieć podstawy do stosowania modelu pełnego. Stąd w dalszych badaniach zdecydowano się wykorzystać równania ruchu (5.3) wyprowadzone na podstawie modelu uproszczonego.



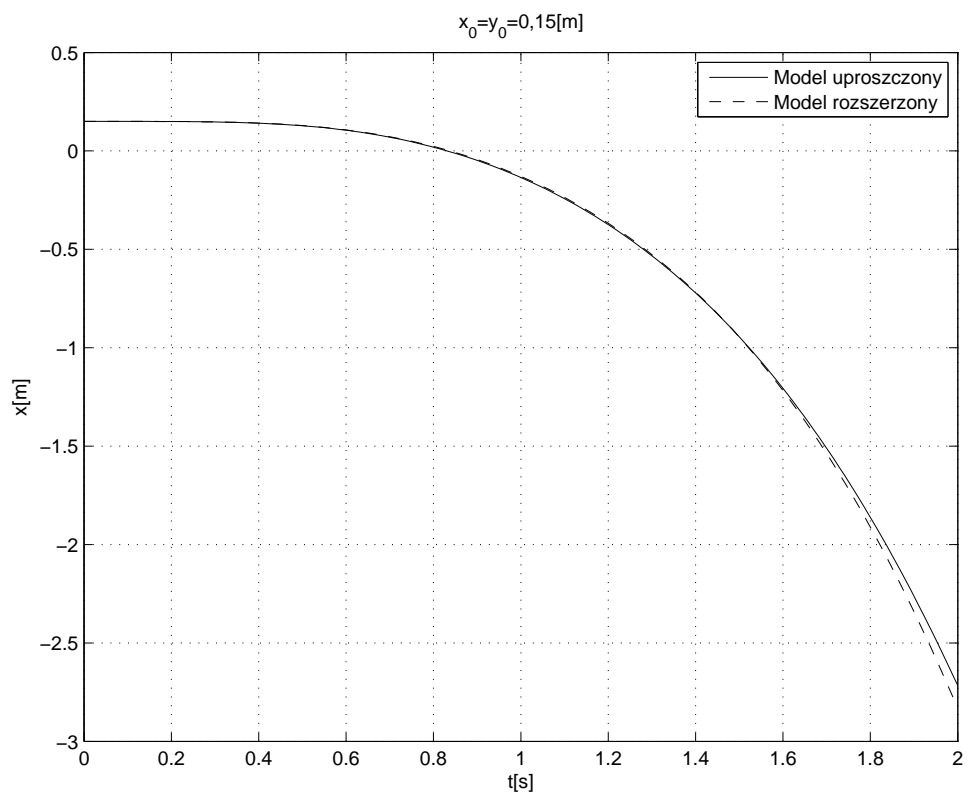
Rysunek 5.2 Trajektoria zmian orientacji platformy dla  $(x_0, y_0) = 0$



Rysunek 5.3 Trajektoria położenia kuli dla  $(x_0, y_0) = 0$



Rysunek 5.4 Trajektoria zmian orientacji platformy dla  $(x_0, y_0) = (0.15, 0.15)$



Rysunek 5.5 Trajektoria położenia kuli dla  $(x_0, y_0) = (0.15, 0.15)$



# Rozdział 6

## Implementacja wybranych sposobów sterowania systemu

Do opracowania sterowników systemu balansującego kulą na płaszczyźnie i przeprowadzenia symulacji jego zachowania posłużono się środowiskiem Matlab/Simulink. W poniższym rozdziale został przedstawiony proces projektowania tych sterowników oraz wyniki przeprowadzonych badań. Dodatkowo zawarto w nim rezultaty weryfikacji opracowanych algorytmów na rzeczywistym modelu systemu.

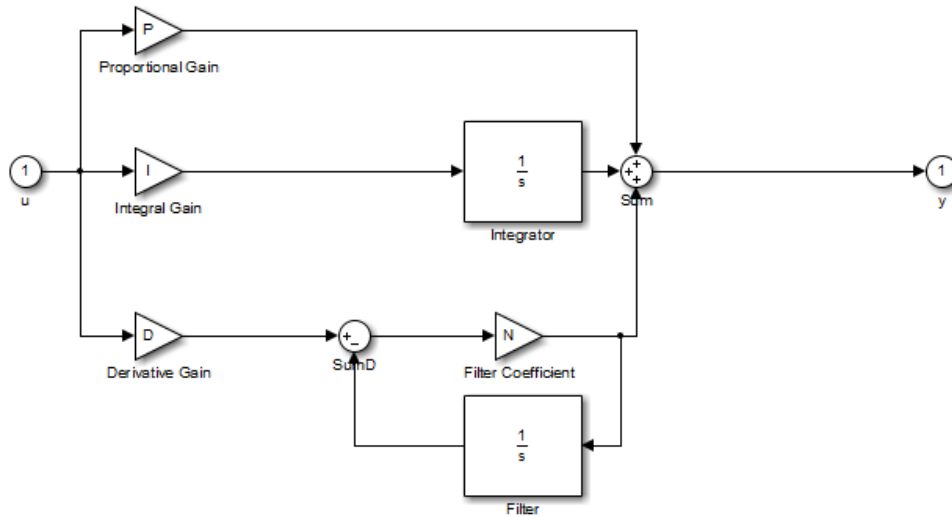
### 6.1 Regulator PID

Blok regulatora PID w środowisku Simulink, wykonuje zadanie sterowania zgodnie ze schematem przedstawionym na rysunku 6.1, gdzie  $N$  – współczynnik filtra bloku różniczkującego. W celu dobrania nastaw posłużono się narzędziem do strojenia dostępnym w pakiecie *Simulink Control Design*, który realizuje swoje zadanie linearyzując model wokół zadanego punktu pracy. Symulacje przeprowadzono dla następujących nastaw regulatora:  $K_p = -1.31 \cdot 10^{-2}$ ,  $K_i = -1.03 \cdot 10^{-4}$ ,  $K_d = -0.151$ ,  $N = 2.12$ . Na wykresach 6.2 i 6.3 został przedstawiony ślad ruchu kuli dla trajektorii zadanej w postaci okręgu oraz warunkach początkowych odpowiednio  $(x_0, y_0) = (0, 0.1)$  i  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ . Trajektoria wygenerowana została za pomocą złożenia dwóch sinusoid o amplitudzie  $A = 0.1[m]$  i częstotliwości  $f = 1[\frac{1}{s}]$  przesuniętych względem siebie w fazie o  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Wykresy 6.4 i 6.5 przedstawiają wyniki symulacji dla warunków początkowych odpowiednio  $(x_0, y_0) = (-0.1, -0.1)$ ,  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  i trajektorii zadanej w postaci kwadratu, która jest wynikiem złożenia czterech punktów definiujących wierzchołki, gdzie czas, w którym wartość zadana przyjmuje współrzędne danego wierzchołka wynosi 4[s].

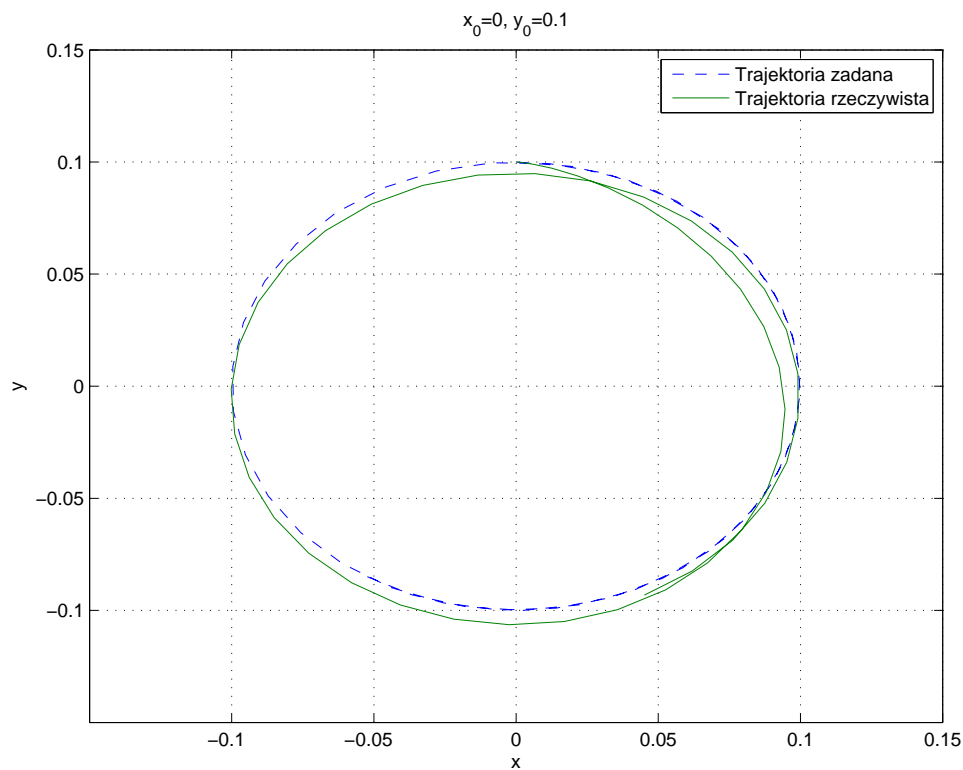
Analizując wykresy 6.2–6.5 stwierdzono, że zaimplementowany regulator PID poprawnie realizuje zadanie sterowania systemem balansującym kulą na płaszczyźnie.

### 6.2 Sterowanie rozmyte

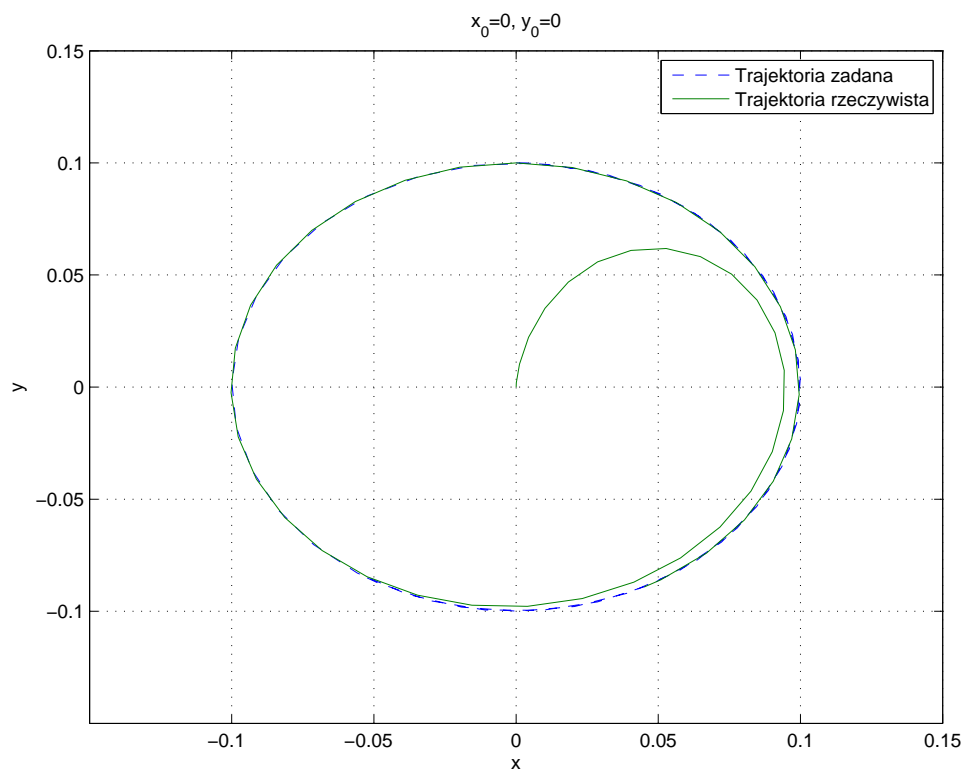
W oparciu o prace dotyczące systemu balansowania kulą na równoważni [9, 10] zdecydowano się zaimplementować regulator rozmyty składający się z dwóch wejść (Error – uchyb regulacji i ErrorDerivative – zmiana uchybu regulacji) oraz jednego wyjścia (Angle – orientacja orczyka serwomechanizmu). Schemat zaimplementowanego regulatora i jego funkcje przynależności zostały przedstawione na rysunkach 6.6–6.9, natomiast baza reguł widoczna jest w tabeli 6.1. Wykres przedstawiający zależność wyjścia regulatora od jego



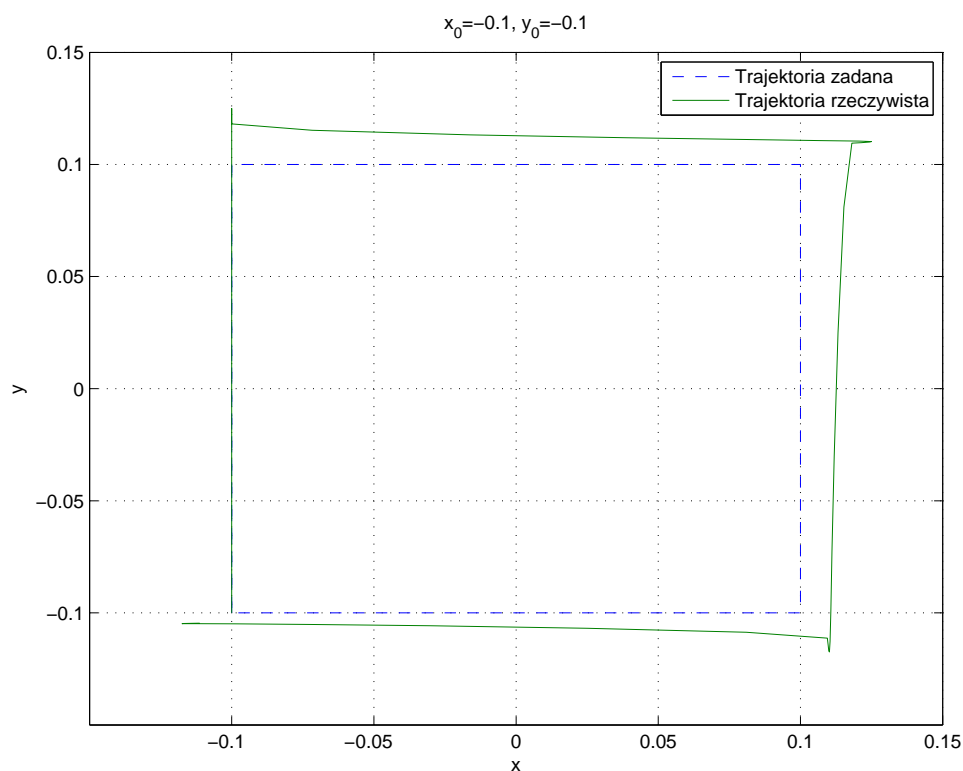
Rysunek 6.1 Schemat regulatora PID zaimplementowanego w środowisku Simulink [13]



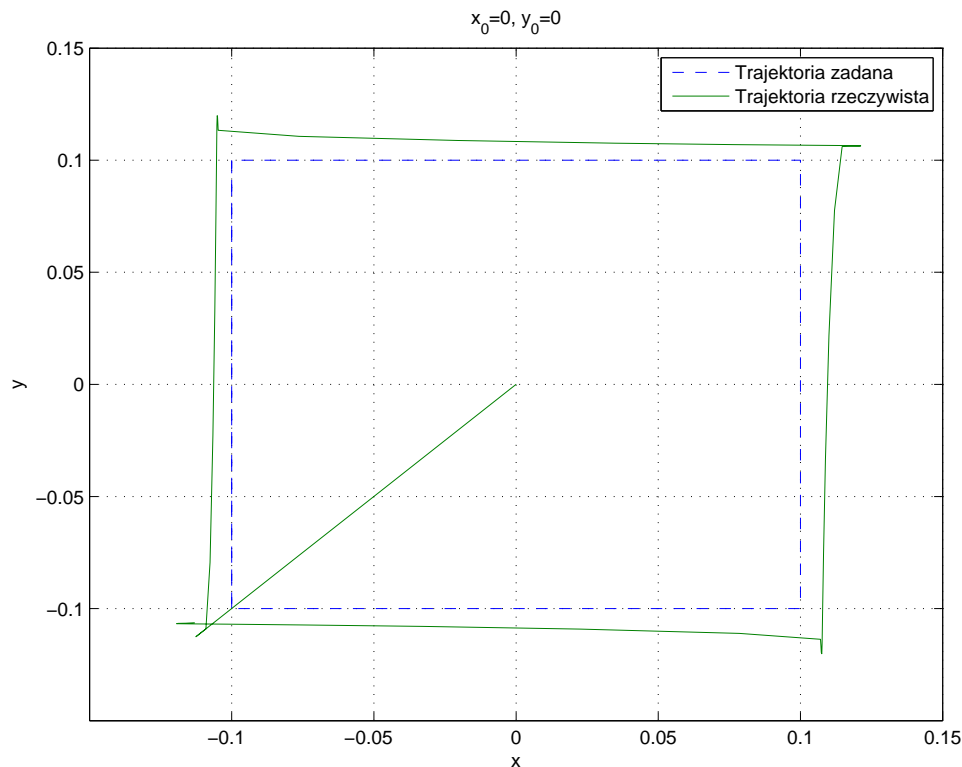
Rysunek 6.2 Trajektoria kuli przy zastosowaniu regulatora PID dla trajektorii zadanej w postaci okręgu i warunków początkowych  $(x_0, y_0) = (0, 0.1)$



Rysunek 6.3 Trajektoria kuli przy zastosowaniu regulatora PID dla trajektorii zadanej w postaci okręgu i warunków początkowych  $(x_0, y_0) = (0, 0)$



Rysunek 6.4 Trajektoria kuli przy zastosowaniu regulatora PID dla trajektorii zadanej w postaci kwadratu i warunków początkowych  $(x_0, y_0) = (-0.1, -0.1)$



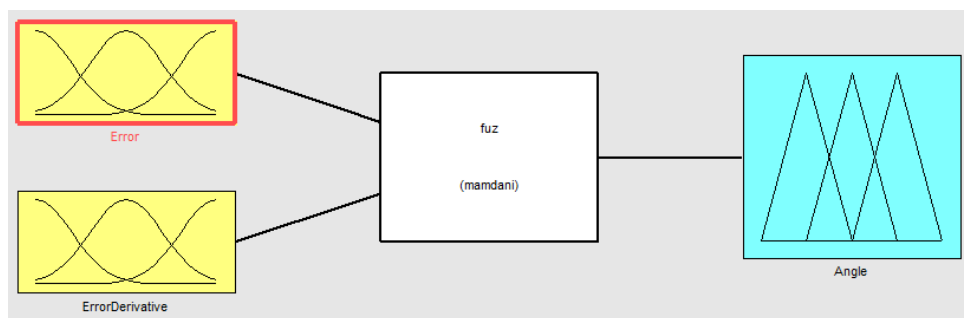
Rysunek 6.5 Trajektoria kuli przy zastosowaniu regulatora PID dla trajektorii zadanej w postaci kwadratu i warunków początkowych  $(x_0, y_0) = (0, 0)$

Tabela 6.1 Baza reguł regulatora rozmytego

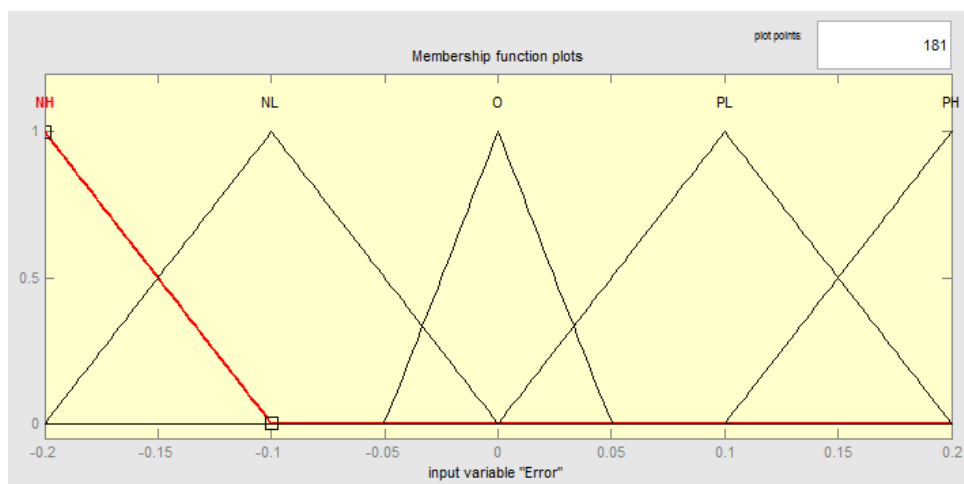
ErrorDerivative \ Error	PH	PL	O	NL	NH
NH	O	PL	PH	PH	PH
NL	NL	O	PL	PH	PH
O	NH	NL	O	PL	PH
PL	NH	NH	NL	O	PL
PH	NH	NH	NH	NL	O

wejść został przedstawiony na rysunku 6.10. Zarówno dla osi  $X$  jak i  $Y$  zastosowano regulator o takich samych własnościach. Wykresy 6.11 i 6.12 przedstawiają ślad ruchu kuli dla trajektorii zadanej w postaci okręgu oraz warunkach początkowych odpowiednio  $(x_0, y_0) = (0, 0.1)$  i  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ . Wyniki symulacji dla zadanego toru ruchu w postaci kwadratu znajdują się na wykresach 6.13 i 6.14. Generowanie trajektorii zadanych odbyło się, tak jak w przypadku regulatora PID.

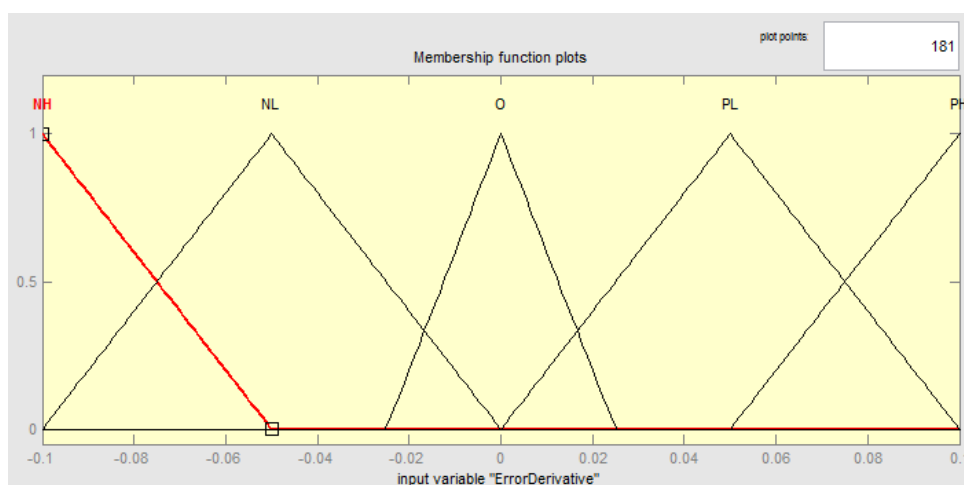
Wyniki przeprowadzonych badań dowodzą, że zarówno regulator PID jak i regulator rozmyty poprawnie realizują zadanie sterowania systemem balansującym kulą na płaszczyźnie. Zauważono, że gdy wartość uchybu  $e(t)$  jest zbliżona do zera w czasie  $t = 0$ , regulator rozmyty osiąga lepsze rezultaty. Natomiast w innym przypadku, system osiąga stan, w którym  $e(t) \approx 0$  znacznie szybciej w przypadku wykorzystania regulatora PID.



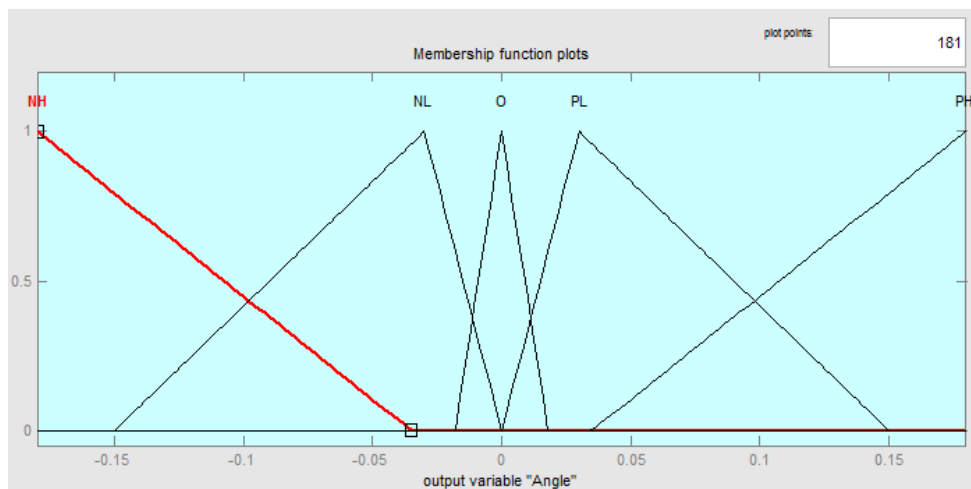
Rysunek 6.6 Schemat zaimplementowanego regulatora rozmytego



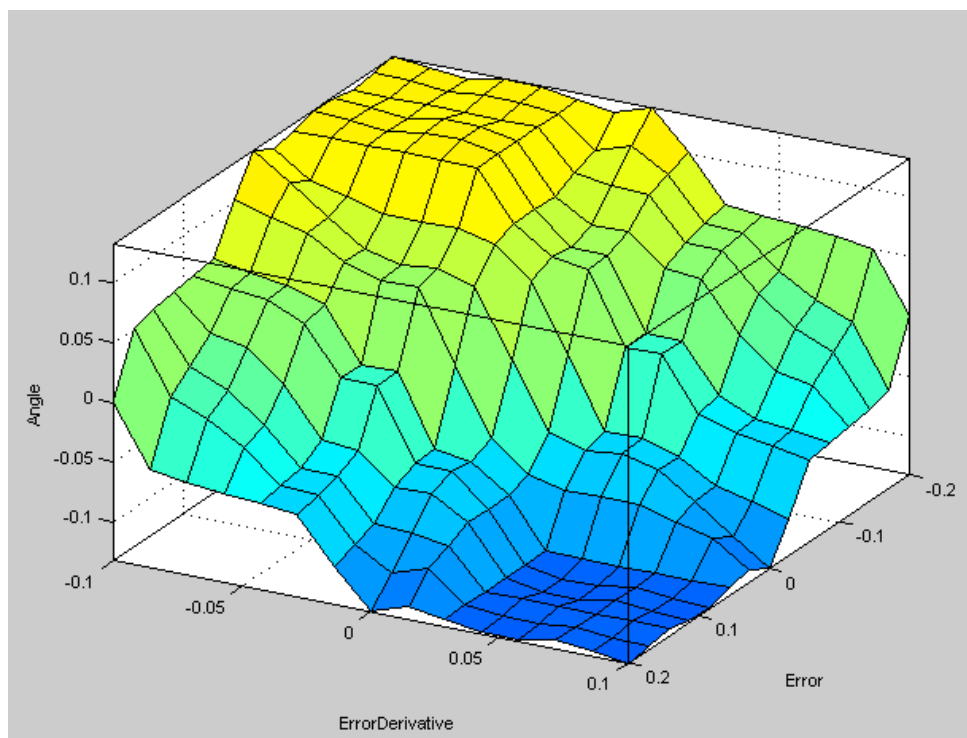
Rysunek 6.7 Funkcja przynależności uchybu



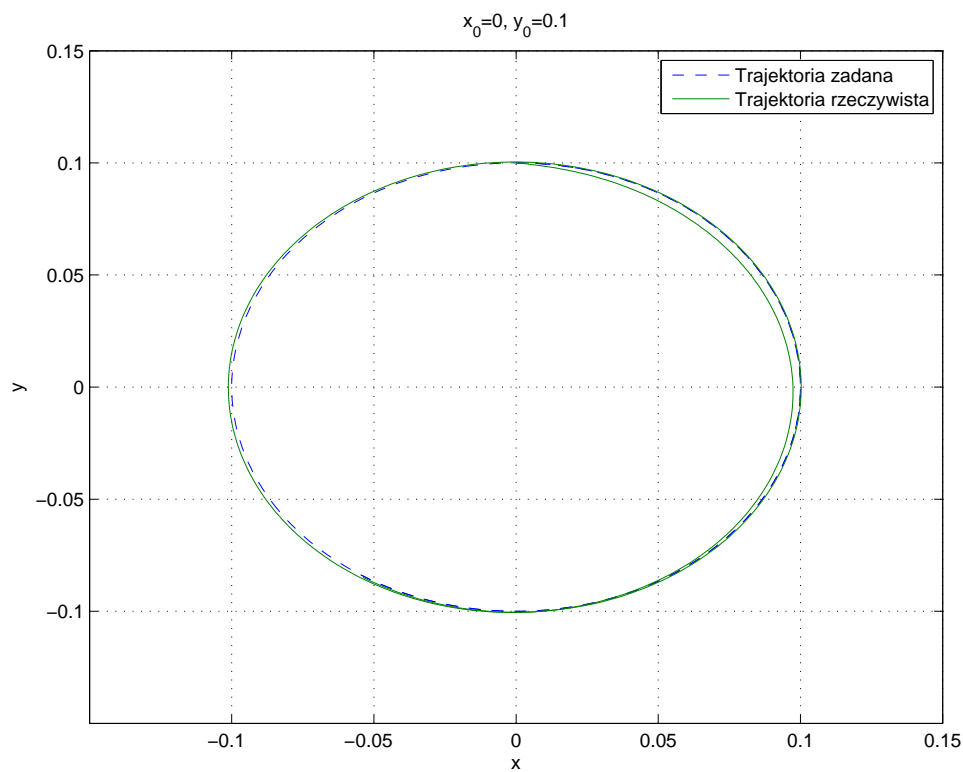
Rysunek 6.8 Funkcja przynależności zmiany uchybu



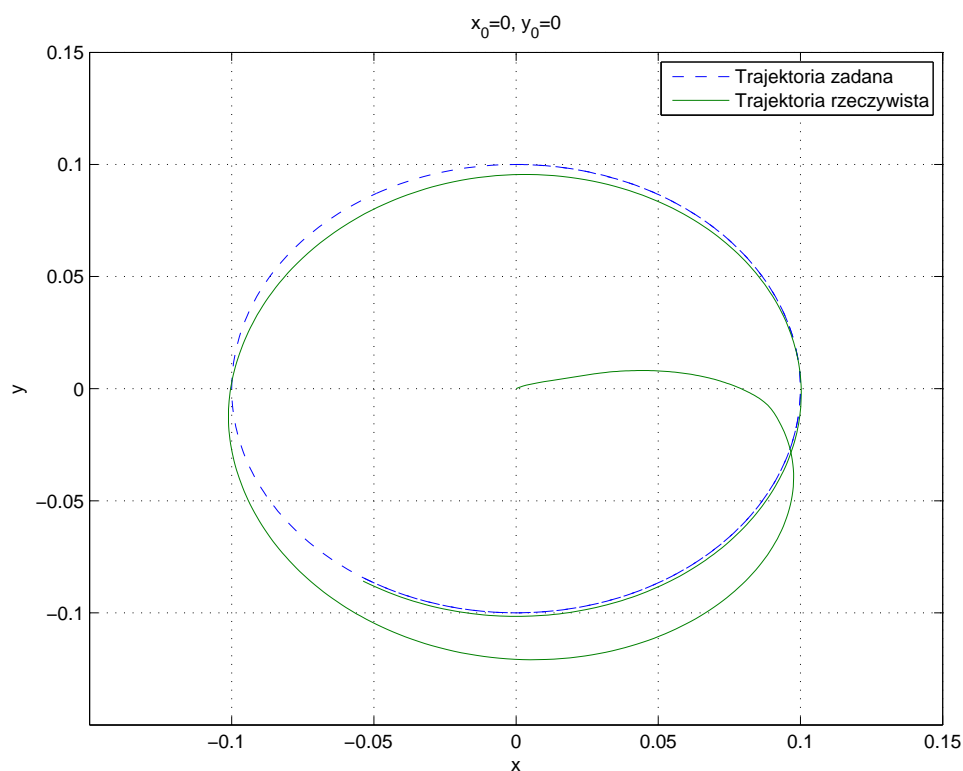
Rysunek 6.9 Funkcja przynależności orientacji orczyka



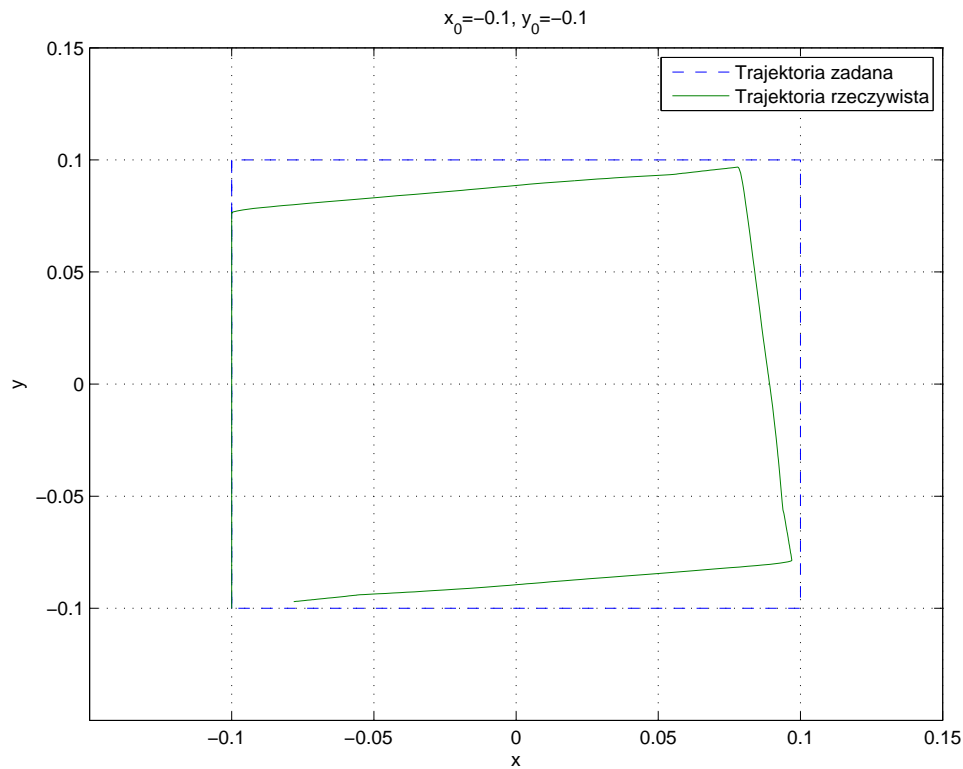
Rysunek 6.10 Graficzna reprezentacja zależności wyjścia regulatora od jego wejść



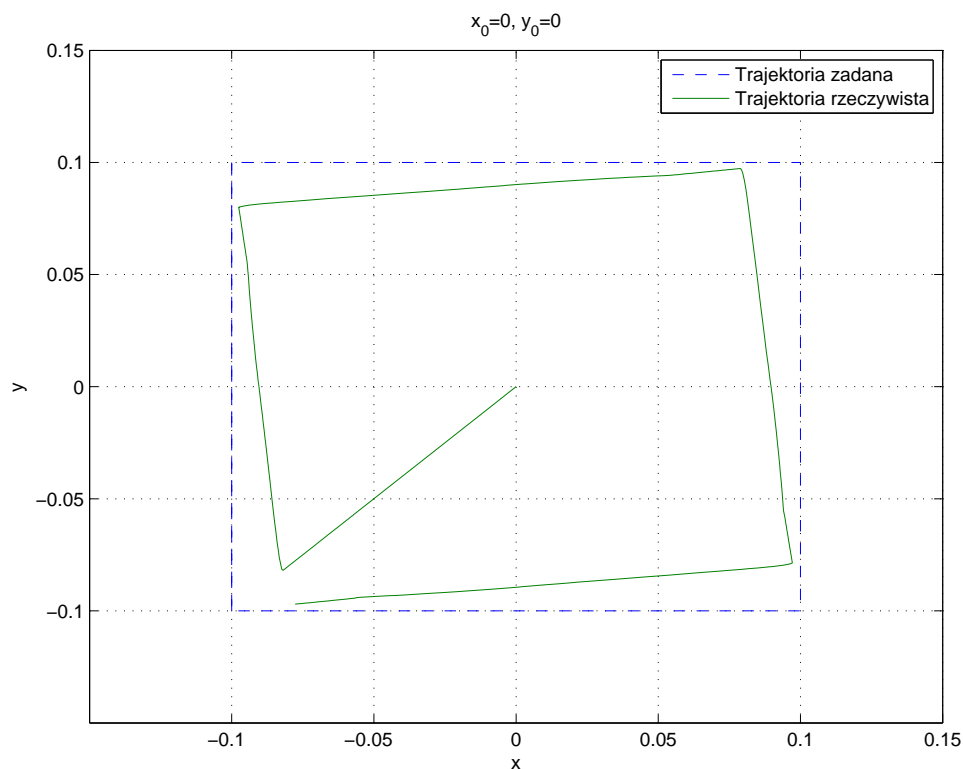
Rysunek 6.11 Trajektoria kuli przy zastosowaniu regulatora rozmytego dla trajektorii zadanej w postaci okręgu i warunków początkowych  $(x_0, y_0) = (0, 0.1)$



Rysunek 6.12 Trajektoria kuli przy zastosowaniu regulatora rozmytego dla trajektorii zadanej w postaci okręgu i warunków początkowych  $(x_0, y_0) = (0, 0)$

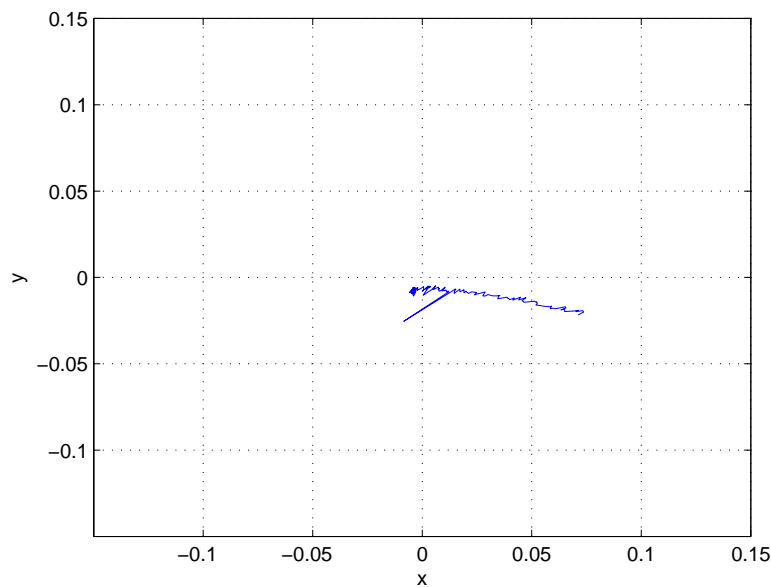


Rysunek 6.13 Trajektoria kuli przy zastosowaniu regulatora rozmytego dla trajektorii zadanej w postaci kwadratu i warunków początkowych  $(x_0, y_0) = (-0.1, -0.1)$



Rysunek 6.14 Trajektoria kuli przy zastosowaniu regulatora rozmytego dla trajektorii zadanej w postaci kwadratu i warunków początkowych  $(x_0, y_0) = (0, 0)$

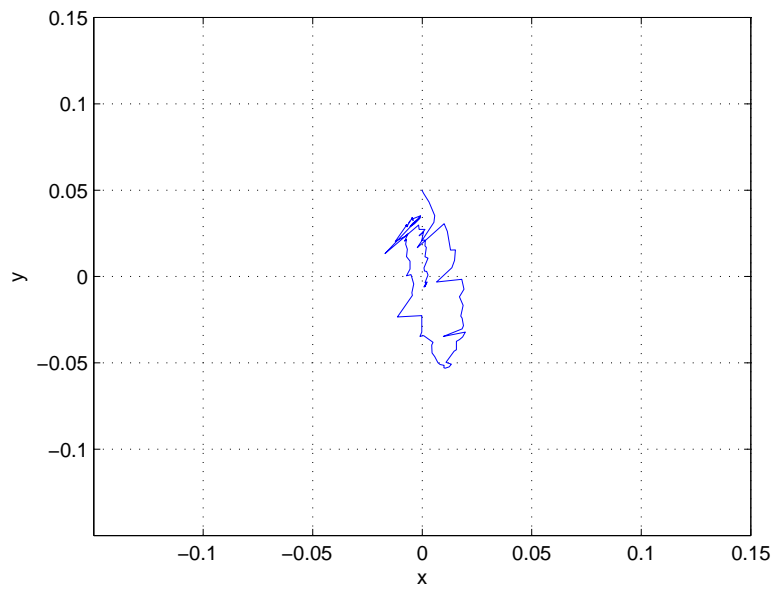




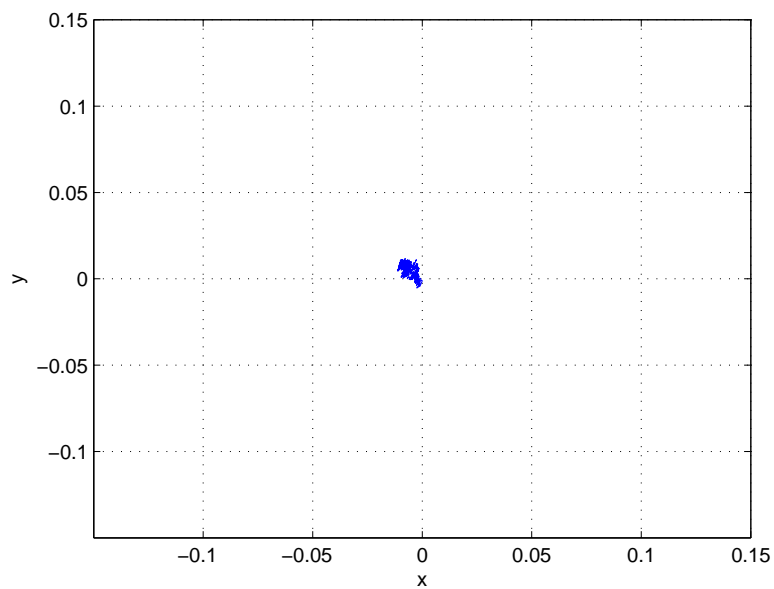
Rysunek 6.15 Ślad ruchu kuli przy zastosowaniu regulatora PID

### 6.3 Rzeczywisty model systemu

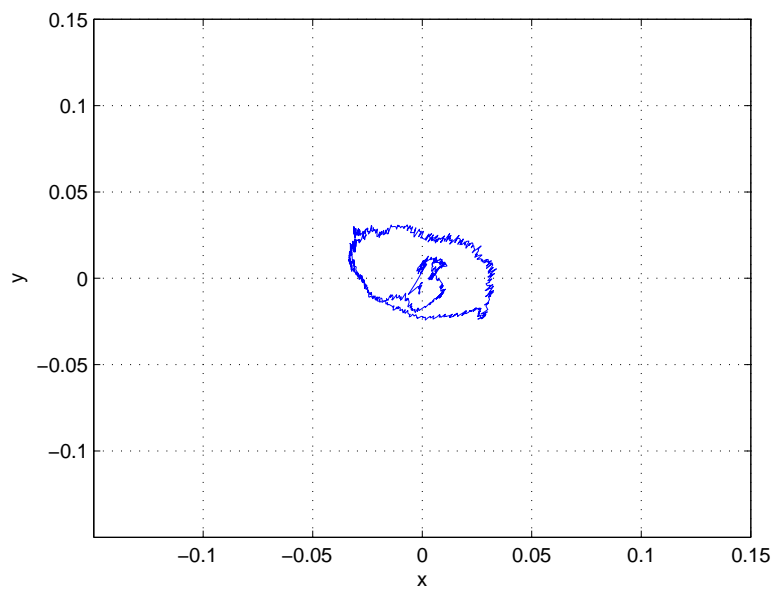
W pierwszej fazie eksperymentów system miał za zadanie utrzymać kulę w pozycji  $(x, y) = (0, 0)$ . Przeprowadzone badania, których wyniki przedstawione zostały na rysunkach 6.15 i 6.16 wykazały, że opracowane algorytmy nie realizują poprawnie zadania sterowania dla skonstruowanego systemu. W przypadku regulatora PID z automatycznie dobranymi nastawami jest to prawdopodobnie spowodowane zbyt małą rozdzielczością, z którą można ustalać pozycję serwomechanizmów, co prowadziło do braku reakcji napędów, gdy wartość na wyjściu regulatora była mniejsza niż  $0.01[rad]$ . Niezgodne z symulacjami zachowanie systemu przy zastosowaniu zaprojektowanego regulatora rozmytego jest przypuszczalnie wynikiem zastosowania bloku różniczkującego w celu uzyskania zmiany uchybu, który mógł generować niepoprawne dane spowodowane szumami sygnału wejściowego. W kolejnym kroku podjęto próbę eksperymentalnego dobrania nastaw regulatora PID, które pozwoliłyby osiągnąć stabilność systemu. Najbardziej satysfakcjonujące efekty, uzyskano dla wartości  $K_p = -1.5$ ,  $K_i = -0.1$ ,  $K_d = -2$ ,  $N = 5$ . Wyniki badań dla tak dobranych nastaw przedstawione zostały na rysunkach 6.17 i 6.18, gdzie trajektorią zadaną były odpowiednio punkt  $(0, 0)$ , a następnie okrąg o promieniu  $1[cm]$ .



Rysunek 6.16 Ślad ruchu kuli przy zastosowaniu regulatora rozmytego



Rysunek 6.17 Ślad ruchu kuli przy zastosowaniu regulatora PID z eksperymentalnie dobranymi nastawami



Rysunek 6.18 Ślad ruchu kuli przy zastosowaniu regulatora PID z eksperymentalnie dobranymi nastawami i trajektorią zadaną w postaci okręgu o promieniu 1[cm]



# Rozdział 7

## Wnioski

W ramach pracy przygotowano stanowisko badawcze pozwalające na implementację dowolnych algorytmów sterowania proponowanych przez eksperymentatora oraz zbadano własności dwóch algorytmów sterowania - regulatora PID i sterownika rozmytego. W celu dokonania wyboru algorytmów wyprowadzono, w oparciu o równania Eulera-Lagrange'a, dwa modele matematyczne kuli przemieszczającej się po ruchomej płaszczyźnie. Różnią się one składowymi energii kinetycznych wykorzystanych do ich wyznaczenia. Na podstawie symulacji wykonanych w środowisku Matlab/Simulink wykazano, że różnice trajektorii kuli obu modeli w odpowiedzi na takie same wymuszenia są nieznaczne. Następnie przeprowadzono przegląd najpopularniejszych metod sterowania systemem balansującym kulą na płaszczyźnie oraz opracowano własne algorytmy. Wykonane badania pozwalają stwierdzić, że w przypadku, gdy wartość uchybu w czasie  $t = 0$  wynosi  $e(0) \approx 0$  zaimplementowany regulator rozmyty osiąga lepsze rezultaty niż regulator PID o nastawach dobranych za pomocą narzędzia do strojenia, udostępnionego w pakiecie *Simulink Control Design*. Natomiast w przypadku gdy uchyb ten jest większy, regulator PID szybciej doprowadza do jego zmniejszenia. Zauważono, że regulatory zaprojektowane do badań symulacyjnych nie realizują poprawnie zadania sterowania w przypadku rzeczywistego obiektu. Podjęta próba eksperymentalnego doboru nastaw regulatora PID przyniosła satysfakcjonujące efekty. Gdy na system nie działały żadne siły zewnętrzne kula pozostawała w zadanej pozycji, natomiast w przypadku wytrącenia jej z położenia równowagi, regulator poprawnie generował wartości sterowania dążące do zmniejszenia uchybu.

Dalsze badania powinny obejmować, między innymi, implementację filtra tłumiącego szumy na wejściu systemu, który pozwoliłby na poprawę działania zaimplementowanego regulatora rozmytego, zwiększenie rozdzielczości, z którą można ustalać pozycję serwo-mechanizmów w celu dokładniejszej weryfikacji poprawności regulatora PID z automatycznie dobranymi nastawami oraz implementację regulatorów w oparciu o równania ruchu (5.1), co pozwoliłoby na dokładniejszą analizę różnic pomiędzy wyprowadzonymi modelami (3.6) i (3.11).



# Bibliografia

- [1] <http://electropark.pl/towerpro-serwa/319-tower-pro-mg-995-mg-996-serwo-modelarskie.html>, (data dostępu 07.12.2016)
- [2] 4-Wire and 8-Wire Resistive Touch-Screen Controller Using the MSP430, <http://www.ti.com/lit/an/slaa384a/slaa384a.pdf>, (data dostępu 07.12.2016)
- [3] A. Jadlovská, Š. Jajčíšin, R. Lonščák, Modelling and PID control design of nonlinear educational model ball & plate, 17th International Conference on Process Control, Slovak University of Technology in Bratislava, 2009
- [4] X. Fan, N. Zhang, S. Teng, Trajectory planning and tracking of ball and plate system using hierarchical fuzzy control scheme, Tsinghua University, 2003
- [5] M. Virseda, Modeling and Control of the Ball and Beam Process, Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology, 2004
- [6] Wikipedia, Regulator PID, [https://pl.wikipedia.org/wiki/Regulator\\_PID](https://pl.wikipedia.org/wiki/Regulator_PID), (data dostępu 07.12.2016)
- [7] Wikipedia, Logika rozmyta, [https://pl.wikipedia.org/wiki/Logika\\_rozmyta](https://pl.wikipedia.org/wiki/Logika_rozmyta), (data dostępu 07.12.2016)
- [8] Signerska J., Bartoszek K.: Logika rozmyta. Wydział Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej, Politechnika Gdańska, Gdańsk 2006
- [9] A. A. Emhemed, Fuzzy control for nonlinear ball and beam system, International Journal of Fuzzy Logic Systems Vol.3, No.1, College of Electronic Technology-BaniWalid, Libya, 2013
- [10] M. Amjad, S. S. Abdullah, Z. Shareef, Fuzzy logic control of ball and beam system, MathWorks, <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/58375-control-of-a-ball-and-beam-system-using-fuzzy-logic-controller-and-q-learning-based-controller>, (data dostępu 22.01.2017)
- [11] R. Wołgajew, Obsługa rezystancyjnych paneli dotykowych w systemach mikroprocesorowych, Elektronik praktyczna 10, 2009
- [12] Podstawy reakcyjnej i predykcyjnej regulacji PID, ElektronikaB2B, <http://elektronikab2b.pl/technika/13255-podstawy-reakcyjnej-i-predykcyjnej-regulacji-pid?limitstart=0#.WIf1q1PhCUM>, (data dostępu 24.01.2017)
- [13] Regulator PID, MathWorks, <https://www.mathworks.com/help/simulink/slref/pidcontroller.html>, (data dostępu 28.01.2017)