

POLITECHNIKA WROCŁAWSKA
WYDZIAŁ ELEKTRONIKI

KIERUNEK: Automatyka i Robotyka (AIR)
SPECJALNOŚĆ: Robotyka (ARR)

**PRACA DYPLOMOWA
INŻYNIERSKA**

Balansujący robot mobilny z napędem inercyjnym

Mobile Balancing Robot with Inertia Drive

AUTOR:
Adam Prochownik

PROWADZĄCY PRACĘ:
dr. inż. Robert Muszyński

OCENA PRACY:

Spis treści

1	Wstęp	3
2	Modele dynamiki robota	5
2.1	Model 2D	5
2.2	Uproszczony model 3D	7
2.2.1	Model z dwiema tarczami	7
2.2.2	Model z trzema tarczami	10
2.3	Pełny model 3D	14
3	Badania symulacyjne	19
3.1	Zachowanie modelu 2D	19
3.2	Zachowanie uproszczonego modelu 3D	22
3.2.1	Model z dwiema tarczami	22
3.2.2	Model z trzema tarczami	24
3.3	Zachowanie pełnego modelu 3D	25
3.4	Sterowanie modelem 2D	30
3.4.1	Sterowanie przy pełnej znajomości modelu	30
3.4.2	Sterowanie przy parametrycznej nieznajomości modelu	32
4	Podsumowanie	33
	Bibliografia	33

Rozdział 1

Wstęp

Wśród robotów mobilnych zdecydowana większość wykorzystuje koła jezdne (roboty kołowe) albo śmigła (roboty latające) jako element przeniesienia napędu. W odróżnieniu, w robotach z napędem inercyjnym do przeniesienia napędu wykorzystywane są koła zamachowe, których zmiana prędkości generuje moment napędowy, umożliwiając robotowi ruch.

Wśród wielu sposobów konstruowania robotów z napędem inercyjnym można wyróżnić taki, w którym robot przyjmuje postać sześcianu, w którego ścianach zamocowane są obracające się tarcze. To rozwiązanie pozwala na przemieszczanie sześcianu w serii ruchów polegających na zmianie ściany, na której on spoczywa. W tym celu należy znaleźć się w fazie balansowania na krawędzi lub wierzchołku, a następnie w kontrolowany sposób upaść w odpowiednim kierunku.

Wykorzystanie kół zamachowych do przemieszczania robota umożliwia zabudowanie wszystkich mechanizmów i elektroniki w jego wnętrzu. W ten sposób można zbudować robota nieposiadającego żadnych ruchomych elementów na zewnątrz. Otwiera to całkiem nowe perspektywy i możliwości jeżeli chodzi o zabezpieczenie robota przed dostępem wody i innych substancji do wnętrza. Ponadto jak pokazano w pracy [2] stwarza możliwość bezgłównego poruszania się.

Realizacja wyżej wymienionych celów wymaga opracowania odpowiednich algorytmów sterowania. Aby móc je rozwijać niezbędne jest poznanie sposobu zachowania robota, korzystając z ich modeli matematycznych. Następnie, na podstawie modelu, można zaproponować odpowiedni algorytm sterowania.

Celem pracy jest opracowanie modelu dynamiki balansującego robota mobilnego z napędem inercyjnym, analiza jego właściwości oraz zaproponowanie prostego algorytmu sterowania. Robot będzie w kształcie sześcianu z trzema tarczami inercyjnymi umieszczonymi w ścianach, co odpowiada typowej konstrukcji robotów tego rodzaju.

Inspiracją do podjęcia pracy są roboty zbudowane w przeciągu kilku ostatnich lat na takich uczelniach jak ETH [1] czy MIT [4]. Zainteresowanie czołowych uczelni na świecie pokazują, że istnieje zapotrzebowanie na tworzenie tego typu konstrukcji.

Układ pracy jest następujący. W rozdziale 2 przedstawione zostały wyprowadzone w jej ramach modele dynamiki. W rozdziale 3 pokazano efekty symulacyjnego badania zachowania robota. Rozdział 4 podsumowuje całość.

Rozdział 2

Modele dynamiki robota

Równania dynamiki układu robotycznego opisują szybkość zmian jego stanu w funkcji tego stanu. Znając taki model, można symulacyjnie zbadać zachowanie robota a także projektować i testować różnorodne układy sterowania. Przeprowadzenie symulacji z wykorzystaniem parametrów rzeczywistego obiektu (takich jak masa, momenty bezwładności, maksymalne dostępne momenty napędowe silników) pozwala określić, czy projektowany robot będzie w stanie wykonać planowane zadania.

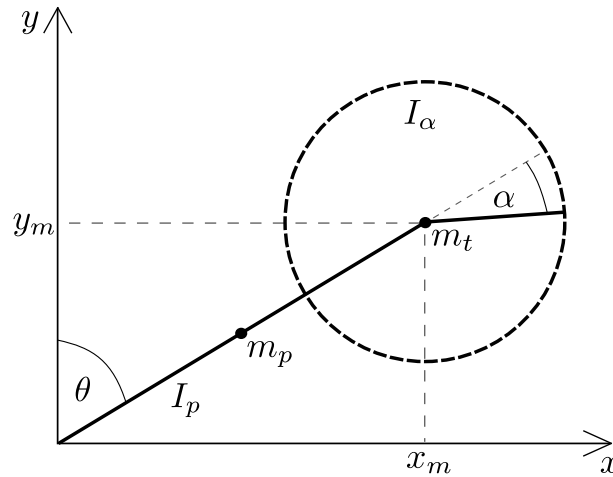
Wyprowadzenie równań dynamiki układu na podstawie analizy występujących w nim sił jest zazwyczaj zadaniem skomplikowanym i czasochłonnym. Dużo prostszym podejściem jest zastosowanie formalizmu Eulera-Lagrange'a [7]. Pozwala on rozpatrywać modelowany obiekt przez pryzmat energii (kinetycznej i potencjalnej), co jest zadaniem stosunkowo prostym i intuicyjnym. Ponadto w literaturze dotyczącej robotów manipulacyjnych prezentowane są ogólne zależności określające ich energię kinetyczną i potencjalną, wymagające jedynie znajomości konfiguracji układów kinematycznych i macierzy pseudo-inercji poszczególnych ogniw manipulatora [6]. Taki stan rzeczy pozwala na opracowanie oprogramowania w wybranym systemie obliczeń symbolicznych, które wyliczy równania dynamiki bazując na wspomnianym powyżej opisie manipulatora.

Opis geometrii robota na potrzeby wyprowadzenia jego modelu dynamiki można uzyskać na dwa sposoby. Pierwszym sposobem jest bezpośrednia analiza geometryczna układu, pozwalająca w efekcie na określenie występujących w nim energii kinetycznych i potencjalnych. Sposób ten będzie w niniejszej pracy nazywany metodą geometryczną. Drugi sposób jest bardziej formalny i polega na wykorzystaniu w tym samym celu algorytmu Denavita-Hartenberga [6] i wyliczeniu z jego użyciem transformacji do układów współrzędnych, związanych z elementami składowymi robota. Taki sposób postępowania będziemy nazywać metodą formalną.

Poniżej wyprowadzono kolejno coraz bardziej rozbudowane modele dynamiki robota balansującego z napędem inercyjnym, poczynając od prostego przypadku dwuwymiarowego, finalnie dochodząc do postaci, którą można uznać za odpowiadającą rzeczywistemu robotowi w kształcie sześcianu.

2.1 Model 2D

Na rysunku 2.1 przedstawiono najprostszy, dwuwymiarowy model balansującego robota z napędem inercyjnym. Można go traktować jako planarny manipulator o dwóch przegubach rotacyjnych w postaci podwójnego wahadła, tak jak pokazano w [5]. Pierwsze ramię robota stanowi jednorodny pręt o długości l , masie m_p i momencie bezwładności I_p



Rysunek 2.1 Model odwróconego wahadła z kołem inercyjnym jako napędem

względem jego środka. W miejsce drugiego standardowego ramienia wahadła zamocowana jest jednorodna tarcza o masie m_t i momencie bezwładności I_α względem swojego środka masy, znajdującego się w punkcie (x_m, y_m) . Współrzędne konfiguracyjne takiej konstrukcji stanowi wektor $q = (\theta, \alpha)^T$. Przyjmujemy, że moment napędowy u przyłożony jest do tarczy.

W celu wyznaczenia modelu matematycznego rozpatrywanego układu zastosowano metodę geometryczną. Położenia i prędkości punktu środka masy tarczy m_t dane są równaniami

$$\begin{cases} x_{m_t} = l \sin \theta \\ y_{m_t} = l \cos \theta, \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_{m_t} = l \cos \theta \dot{\theta} \\ \dot{y}_{m_t} = -l \sin \theta \dot{\theta}, \end{cases} \quad (2.2)$$

$$v_{m_t}^2 = \dot{x}_{m_t}^2 + \dot{y}_{m_t}^2 = l^2 \dot{\theta}^2. \quad (2.3)$$

Na podstawie twierdzenia Steinera [8] moment bezwładności pręta względem punktu $(0, 0)$ ma wartość

$$I_{p_0} = I_p + m_p \left(\frac{l}{2} \right)^2. \quad (2.4)$$

Stąd energia kinetyczna pręta i tarczy wyrażona jest w postaci

$$K_p = \frac{1}{2} I_{p_0} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} I_p \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_p \left(\frac{l}{2} \right)^2 \dot{\theta}^2, \quad (2.5)$$

$$K_t = \frac{1}{2} I_\alpha (\dot{\theta} + \dot{\alpha})^2 + \frac{1}{2} m_t l^2 \dot{\theta}^2. \quad (2.6)$$

Energia potencjalna pręta i tarczy dana jest wzorami

$$V_p = m_p g \frac{l}{2} \cos \theta, \quad (2.7)$$

$$V_t = m_t g l \cos \theta, \quad (2.8)$$

gdzie g oznacza wartość przyspieszenia ziemskiego. Lagranżian całego układu przyjmuje formę

$$L = K_p + K_t - V_p - V_t = \left(\frac{1}{2}I_p + \frac{1}{8}m_p l^2 + \frac{1}{2}m_t l^2 \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_\alpha (\dot{\theta} + \dot{\alpha})^2 - \left(\frac{1}{2}m_p + m_t \right) gl \cos \theta. \quad (2.9)$$

Wyliczając dla lagranżianu (2.9) równanie Eulera-Lagrange'a otrzymujemy model dynamiki rozpatrywanego robota dany jako

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{4}m_p l^2 + m_t l^2 + I_p + I_\alpha \right) \ddot{\theta} + I_\alpha \ddot{\alpha} - \left(m_t + \frac{1}{2}m_p \right) gl \sin \theta = 0 \\ I_\alpha (\ddot{\theta} + \ddot{\alpha}) = 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

Warto zauważyć, że równania (2.10) mają postać ogólną równań dynamiki układu robotycznego

$$Q(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + D(q) = F, \quad (2.11)$$

gdzie $Q(q)$ jest macierzą bezwładności układu, $C(q, \dot{q})$ to macierz sił odśrodkowych i Coriolisa, $D(q)$ stanowi wektor sił grawitacji, zaś F są to wszelakie siły niepotencjalne (sterownia, ograniczenia).

W ramach pracy założono występowanie w analizowanych modelach tarcia lepkiego o wartości proporcjonalnej do prędkości ruchu. Stąd uwzględniając sterowanie, wektor sił niepotencjalnych F przyjmuje postać

$$F = \left(-c_1 \dot{\theta}, u - c_2 \dot{\alpha} \right)^T, \quad (2.12)$$

gdzie c_1 i c_2 to współczynniki tarcia a u jest momentem napędowym tarczy. Ostatecznie, model dynamiki dwuwymiarowego robota balansującego z napędem inercyjnym przyjmuje postać

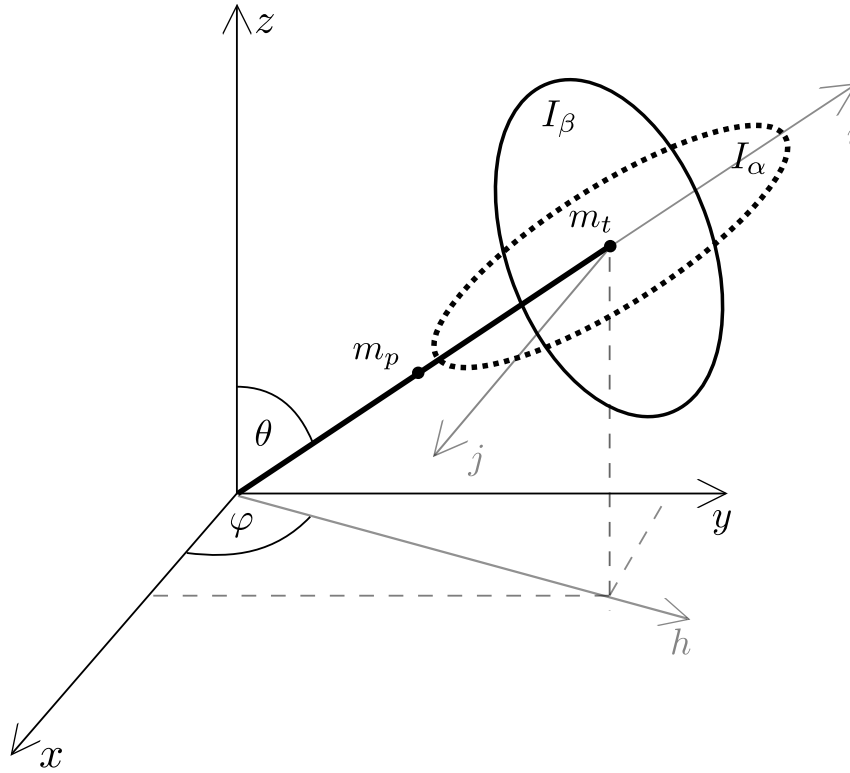
$$\begin{cases} \left(\frac{1}{4}m_p l^2 + m_t l^2 + I_p + I_\alpha \right) \ddot{\theta} + I_\alpha \ddot{\alpha} - \left(m_t + \frac{1}{2}m_p \right) gl \sin \theta = -c_1 \dot{\theta} \\ I_\alpha (\ddot{\theta} + \ddot{\alpha}) = u - c_2 \dot{\alpha}. \end{cases} \quad (2.13)$$

2.2 Uproszczony model 3D

W niniejszym podrozdziale wprowadzono dwa uproszczone, trójwymiarowe modele robota. Pierwszy model posiada dwie napędzane tarcze inercyjne zamontowane na końcu pręta reprezentującego korpus robota i do jego wyprowadzenia zastosowano metodę geometryczną. Drugi model wykorzystuje zamontowane podobnie trzy tarcze inercyjne. Do jego wyprowadzenia zastosowano metodę formalną. Uproszczenie polega tu na zamocowaniu środka tarcz w jednym miejscu, na końcu pręta.

2.2.1 Model z dwiema tarczami

Na rysunku 2.2 przedstawiono model prostego wahadła sferycznego o dwóch stopniach swobody z zamontowanymi dwiema tarczami inercyjnymi. Każda z tarcz umieszczona jest w takiej sposób, by wpływała na jedną zmienną konfiguracyjną pręta, tzn. tarcza umieszczona w płaszczyźnie IJ wpływa na wartość kąta θ , natomiast tarcza umieszczona w płaszczyźnie ZH wpływa na kąt φ , co ilustrują rzuty przedstawione na rysunkach 2.3 i 2.4. Oś i jest osią pręta, natomiast oś j jest to oś prostopadła do osi i oraz równoległa do płaszczyzny XY . Warto zauważyć, że sytuacje przedstawione na rysunkach 2.3 i 2.4



Rysunek 2.2 Model wahadła sferycznego z kołami inercyjnymi jako aktuatorami

są analogiczne do przypadku modelu dwuwymiarowego robota (rysunek 2.1). Położenie takiego układu można opisać wektorem współrzędnych konfiguracyjnych $q = (\varphi, \theta, \alpha, \beta)^T$. Przyjmujemy, że moment napędowy u_1 przyłożony jest do tarczy I_α , natomiast moment u_2 do tarczy I_β .

Postępując w sposób analogiczny do przypadku wahadła dwuwymiarowego otrzymujemy wyrażenie opisujące kwadrat prędkości punktu środka masy m_t w postaci

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = l^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2). \quad (2.14)$$

Energia kinetyczna tarcz I_α i I_β dana jest wyrażeniem

$$K_t = \frac{1}{2} I_\alpha (\dot{\varphi} + \dot{\alpha})^2 + \frac{1}{2} I_\beta (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 + \frac{1}{2} m_t l^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2), \quad (2.15)$$

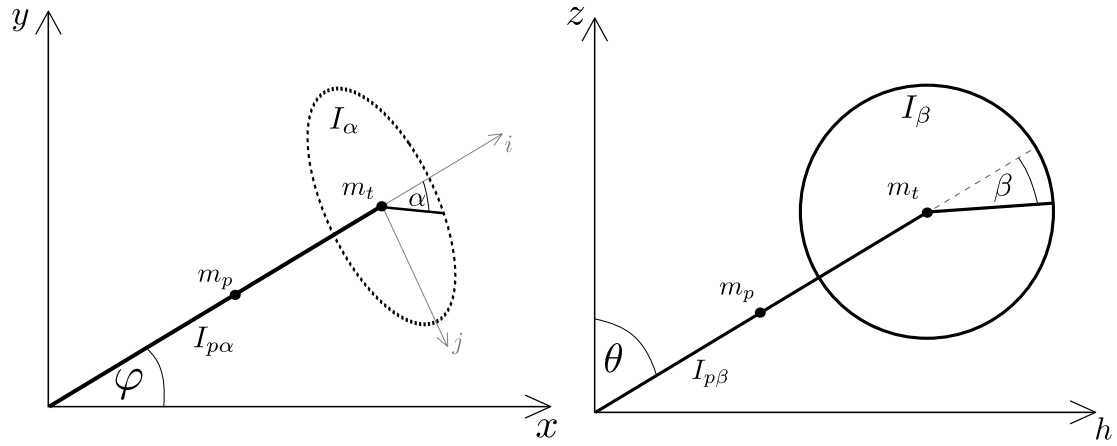
gdzie:

- I_α – moment bezwładności tarczy umieszczonej w płaszczyźnie IJ ,
- I_β – moment bezwładności tarczy umieszczonej w płaszczyźnie ZH ,
- m_t – suma mas obu tarcz,
- l – długość pręta.

Energia kinetyczna pręta przyjmuje postać

$$K_p = \frac{1}{2} I_{p\theta} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_{p\varphi} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_p \left(\frac{l}{2} \right)^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) \quad (2.16)$$

gdzie:



Rysunek 2.3 Rzut wahadła na płaszczy- Rysunek 2.4 Rzut wahadła na płaszczy-
znę XY znę ZH

- $I_{p\beta}$ – moment bezwładności pręta w płaszczyźnie ZH względem punktu m_p ,
- $I_{p\alpha}$ – moment bezwładności pręta w płaszczyźnie IJ względem punktu m_p ,
- m_p – masa pręta.

Energia potencjalna układu wyraża się wzorem

$$V = m_t g l \cos \theta + m_p g \frac{l}{2} \cos \theta \quad (2.17)$$

z g oznaczającym wektor przyspieszenia ziemskiego. Lagranżian całego modelu przyjmuje ogólną formę

$$L = K_t + K_p - V, \quad (2.18)$$

a po podstawieniu wszystkich wyrażeń

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2} I_{t\alpha} (\dot{\varphi} + \dot{\alpha})^2 + \frac{1}{2} I_{t\beta} (\dot{\theta} + \dot{\beta})^2 + \frac{1}{2} I_{p\beta} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_{p\alpha} \dot{\varphi}^2 + \\ & + \frac{1}{2} l^2 \left(m_t + \frac{m_p}{4} \right) (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - \left(m_t + \frac{1}{2} m_p \right) g l \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.19)$$

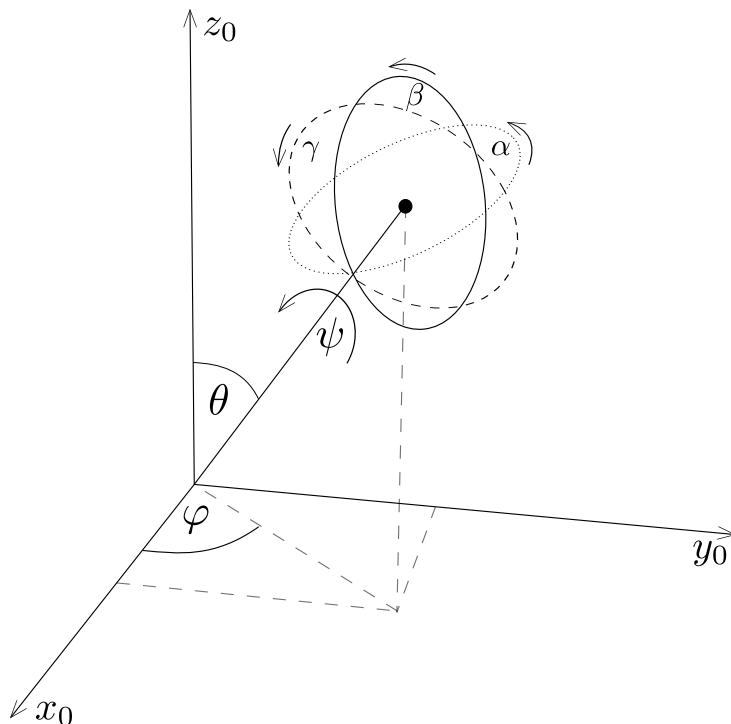
Zakładając ponownie model tarcia proporcjonalnego do prędkości ruchu, wektor sił niepotencjalnych przyjmuje postać

$$F = (-c_1 \dot{\theta}, -c_2 \dot{\varphi}, u_1 - c_3 \dot{\alpha}, u_2 - c_4 \dot{\beta})^T, \quad (2.20)$$

gdzie c_i , $i = 1, \dots, 4$ to współczynniki tarcia, a u_1 i u_2 to momenty napędowe tarcz.

Wyliczając dla lagranżianu (2.19) równanie Eulera-Lagrange'a otrzymujemy model dynamiki rozpatrywanego robota dany jako

$$\begin{cases} \frac{1}{8} l (-4g \sin \theta (m_p + 2m_t) + 2l\ddot{\theta} (m_p + 4m_t) - l \sin (2\theta) \dot{\varphi}^2 (m_p + 4m_t)) + \\ \qquad\qquad\qquad + I_{p\beta} \ddot{\theta} + I_{t\beta} (\ddot{\beta} + \ddot{\theta}) = -c_1 \dot{\theta} \\ \frac{1}{4} (l^2 \sin \theta (m_p + 4m_t) (2\dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \theta + \ddot{\varphi} \sin \theta)) + I_{p\alpha} \ddot{\varphi} + I_{t\alpha} (\ddot{\alpha} + \ddot{\varphi}) = -c_2 \dot{\varphi} \\ I_{t\varphi} (\ddot{\alpha} + \ddot{\varphi}) = u_1 - c_3 \dot{\alpha} \\ I_{t\theta} (\ddot{\beta} + \ddot{\theta}) = u_2 - c_4 \dot{\beta}. \end{cases} \quad (2.21)$$



Rysunek 2.5 Uproszczony robot z trzema tarczami

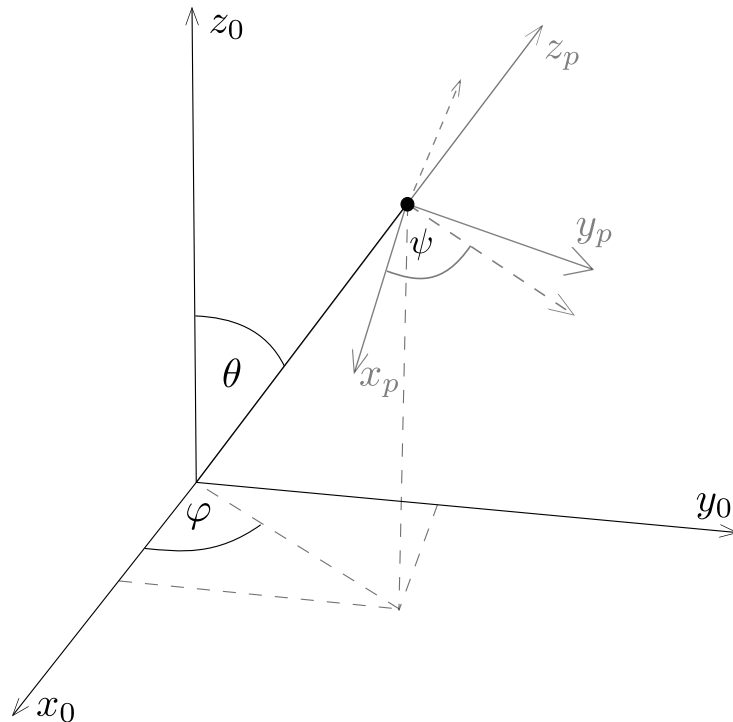
2.2.2 Model z trzema tarczami

Poniżej zostanie przedstawiony sposób wyprowadzenia modelu układu przedstawionego na rysunku 2.5, który odzwierciedla rzeczywistego robota z jednym uproszczeniem: przyjmujemy, że tarcze zamiast być zamocowane w ścianach sześcianu są zamocowane w jego środku. W stosunku do modelu przedstawionego w podrozdziale 2.2.1 dodana została jedna tarcza. Umożliwia ona zmianę orientacji robota, poprzez obrót korpusu robota wokół własnej osi.

Ze względu na docelowe rozmieszczenie tarcz inercyjnych na ścianach sześcianu, wykorzystanie do wyprowadzenia modelu matematycznego metody geometrycznej, staje się zadaniem trudnym. Wymaga ona ręcznego wyprowadzenia równań opisujących położenie i prędkości wszystkich mas w przestrzeni 3D. Dlatego poniżej, do wyprowadzenia modelu matematycznego, wykorzystamy metodę formalną. Ze względu na złożoność otrzymanych wyrażeń przedstawimy jedynie sposób postępowania i wykorzystania w nim formuł, bez szczegółowej postaci uzyskanych wyrażeń. Współrzędne konfiguracyjne rozpatrywanego układu stanowi wektor $q = (\varphi, \theta, \psi, \alpha, \beta, \gamma)^T$. Moment napędowy przyłożony jest do każdej z trzech tarcz.

Pierwszy etap metody formalnej polega na opisanie położenia mas występujących w układzie. Do tego celu wykorzystamy transformacje układów współrzędnych zgodnie z formalizmem Denavita-Hartenberga. Na rysunku 2.6 pokazano układ współrzędnych skojarzony z końcówką pręta. Przekształcenie od podstawowego układu współrzędnych $X_0Y_0Z_0$ do układu $X_pY_pZ_p$ opisane jest zestawem transformacji

$$\begin{aligned}
 A_0^1 &= Rot(z, \varphi) Rot\left(x, -\frac{\pi}{2}\right) \\
 A_1^2 &= Rot(z, \theta) Rot\left(x, \frac{\pi}{2}\right) \\
 A_2^p &= Rot(z, \psi) Trans(z, l).
 \end{aligned} \tag{2.22}$$



Rysunek 2.6 Układ współrzędnych skojarzony z końcówką pręta

Układ $X_p Y_p Z_p$ traktowany będzie jako układ bazowy dla opisu orientacji występujących w modelu tarcz. Punkt $(0, 0, 0)$ tego układu stanowi środek obrotu wszystkich trzech tarcz.

Na rysunku 2.7 przedstawiony jest sposób umieszczenia trzeciej, nowej tarczy. Zrobiono to tak, że jej ruch wpływa na zmienną ψ , czyli kąt obrotu pręta wokół własnej osi. Omawiana tarcza umieszczona jest w płaszczyźnie $X_p Y_p$. Transformacja do układu współrzędnych skojarzonego z tą tarczą z układu $X_p Y_p Z_p$, wyraża się przekształceniem

$$A_p^\alpha = Rot(z, \alpha). \quad (2.23)$$

Pozostałe dwie tarcze umieszczono odpowiednio w płaszczyznach $X_p Z_p$ i $Y_p Z_p$ układu $X_p Y_p Z_p$, co zilustrowano na rysunkach 2.8 i 2.9. Tarcze te wpływają odpowiednio na zmienne θ i φ . Położenie układu współrzędnych tarczy umieszczonej w płaszczyźnie $X_p Z_p$ opisane jest transformacją

$$A_p^\beta = Rot\left(x, \frac{\pi}{2}\right) Rot(z, \beta), \quad (2.24)$$

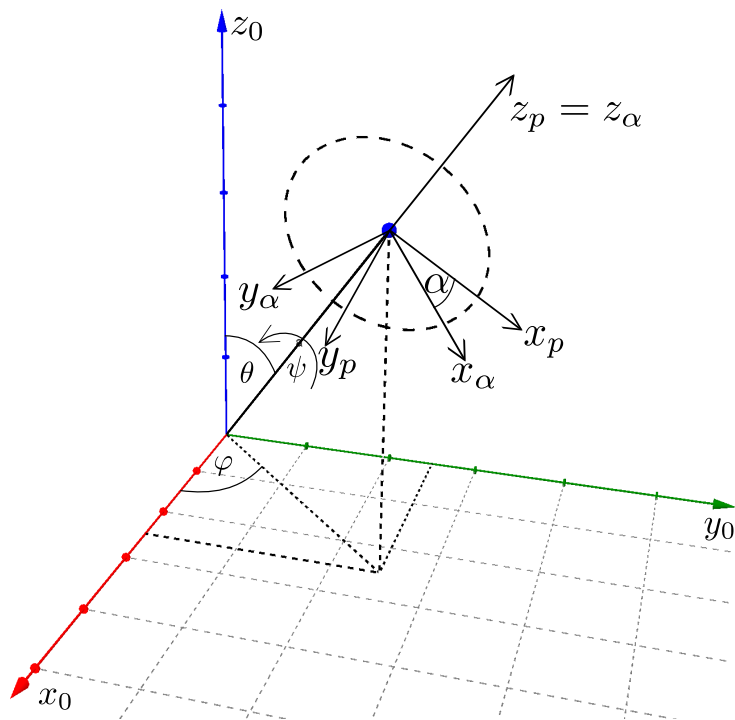
natomiast położenie ostatniej tarczy, umieszczonej w płaszczyźnie $Y_p Z_p$, dane jest przekształceniem

$$A_p^\gamma = Rot\left(z, \frac{\pi}{2}\right) Rot\left(x, \frac{\pi}{2}\right) Rot(z, \gamma). \quad (2.25)$$

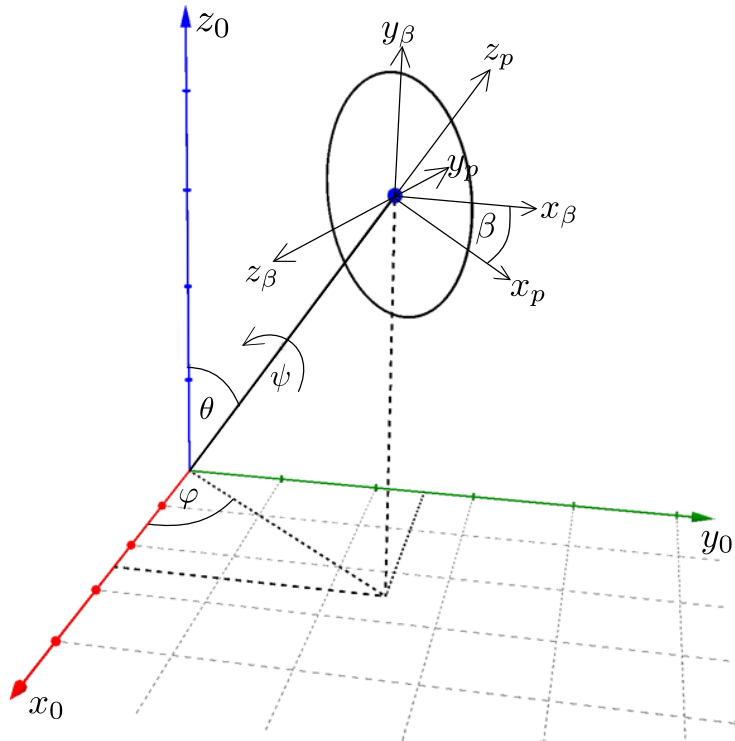
Energię kinetyczną robota balansującego z napędem inercyjnym można przedstawić jako sumę energii kinetycznych trzech manipulatorów szeregowych złożonych z pręta i kolejnych tarcz¹. Wykorzystamy do tego celu sposób podany w [6]. Energia kinetyczna i -tego przegubu manipulatora wyraża się wzorem

$$K_{L_i}(q^i, \dot{q}^i) = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n tr \left(\frac{\partial A_0^i}{\partial q_j}(q^i) J_{L_i} \left(\frac{\partial A_0^i}{\partial q_k}(q^i) \right)^T \right) \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad (2.26)$$

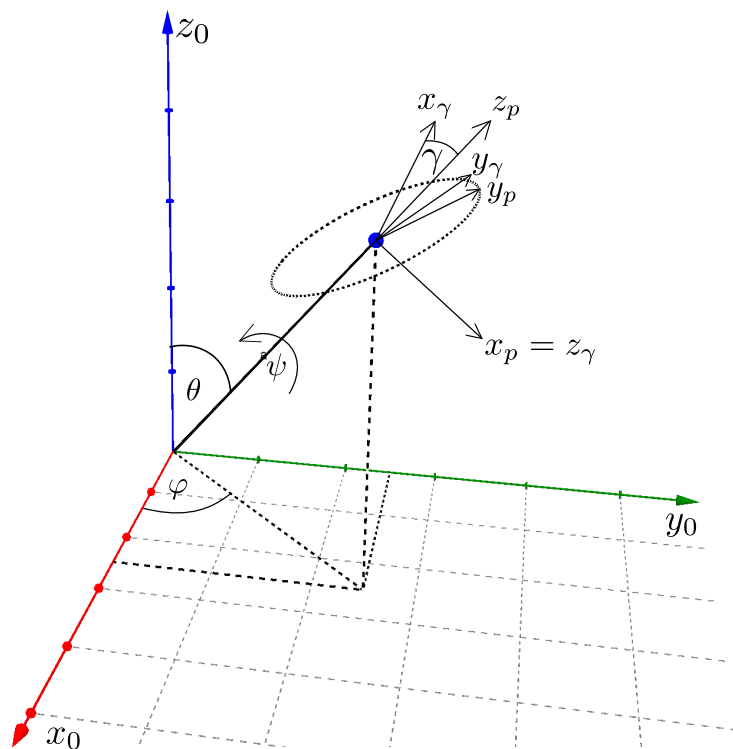
¹Pamiętając o tym, że dynamikę pręta należy uwzględnić jedynie w jednym z nich. W ramach tego rozdziału założono, że cała masa robota zawarta jest w jego tarczach.



Rysunek 2.7 Transformacja do układu tarczy w płaszczyźnie $X_p Y_p$



Rysunek 2.8 Transformacja do układu tarczy w płaszczyźnie $X_p Z_p$

Rysunek 2.9 Transformacja do układu tarczy w płaszczyźnie $Y_p Z_p$

gdzie:

- J_{L_i} – macierz pseudoinercji i -tego ramienia,
- $A_0^i(q^i)$ – macierz transformacji do i -tego układu współrzędnych,
- q_i – współrzędna konfiguracyjna i -tego ramienia,
- $q^i = (q_1, \dots, q_i)^T$.

Ogólna postać macierzy pseudoinercji i -tego ramienia wyraża się wzorem

$$J_{L_i} = \int_{m_i} \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz & x \\ xy & y^2 & yz & y \\ xz & yz & z^2 & z \\ x & y & z & 1 \end{pmatrix} dm. \quad (2.27)$$

Zakładając jednorodność tarcz ich macierz pseudoinercji przyjmuje postać

$$J_{L_i} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (-I_{xx_i} + I_{yy_i} + I_{zz_i}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} (I_{xx_i} - I_{yy_i} + I_{zz_i}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} (I_{xx_i} + I_{yy_i} - I_{zz_i}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_i \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

gdzie:

- I_{zz} – moment bezwładności tarczy względem osi Z (oś obrotu, w której przyłożony jest moment obrotowy silników),

- I_{xx} – moment bezwładności tarczy względem osi X,
- I_{yy} – moment bezwładności tarczy względem osi Y,
- m – masa tarczy.

Energia potencjalna manipulatora wyrażona jest wzorem

$$V(q) = - \sum_{i=1}^n m_i g^T A_0^i(q^i) R_i, \quad (2.29)$$

gdzie:

- m_i – masa i -tego przegubu,
- R_i – współrzędne jednorodnie środka masy,
- g – wektor grawitacji,
- $A_0^i(q^i)$ – macierz transformacji do i -tego układu współrzędnych.

Lagranżian całego modelu przyjmuje ogólną formę

$$L = K - V, \quad (2.30)$$

gdzie K stanowi sumę energii kinetycznych trzech manipulatorów przedstawionych powyżej, natomiast V to suma energii potencjalnych tych manipulatorów.

Wektor sił niepotencjalnych F , dla założonego modelu tarcia, przyjmuje następującą postać

$$F = \begin{pmatrix} -c_1 \dot{\theta} \\ -c_2 \dot{\varphi} \\ -c_3 \dot{\psi} \\ u_1 - c_4 \dot{\alpha} \\ u_2 - c_5 \dot{\beta} \\ u_3 - c_6 \dot{\gamma} \end{pmatrix}, \quad (2.31)$$

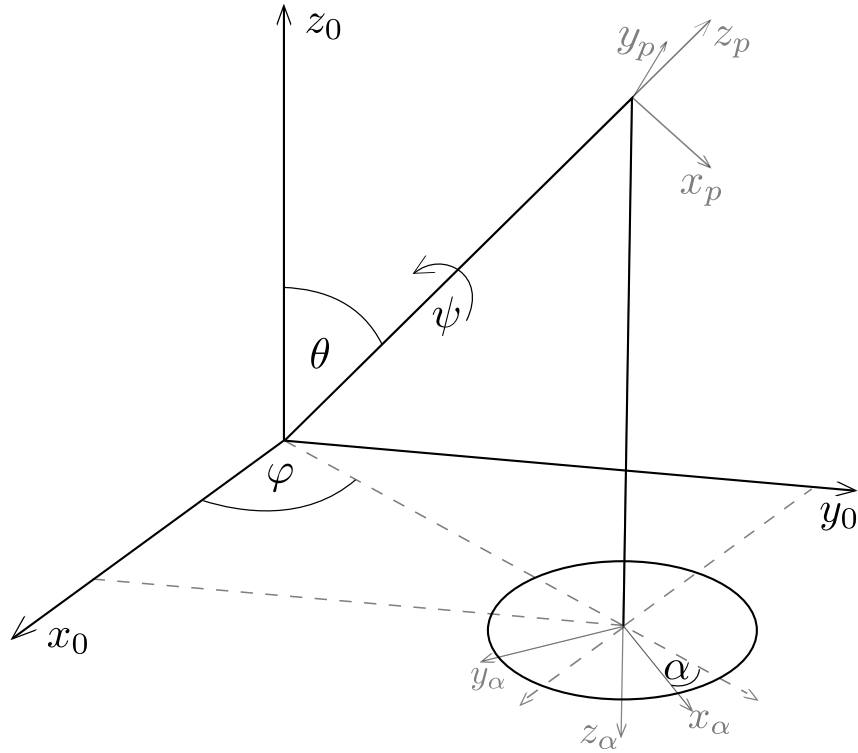
gdzie $c_i, i = 1, \dots, 6$ to współczynniki tarcia, natomiast $u_i, i = 1, \dots, 6$ stanowią momenty napędowe tarcz.

Dla tak wyliczonego lagranżianu wyliczamy równania Eulera-Lagrange'a, otrzymując model dynamiki rozpatrywanego robota w standardowej postaci (2.11), który ze względu na swój rozmiar nie zostanie tutaj przytoczony. Należy zwrócić uwagę na fakt, że przy $\theta = 0$ analizowany manipulator osiąga konfigurację osobliwą.

2.3 Pełny model 3D

Wszystkie modele pojawiające się w poprzednich rozdziałach mają istotne uproszczenie w postaci tarcz umieszczonych w jednym miejscu w przestrzeni. Jest to założenie, którego nie można zrealizować w rzeczywistym robocie. W niniejszym podrozdziale, z wykorzystaniem wyników zamieszczonych w poprzednich podrozdziałach, zostanie wyprowadzony model robota z tarczami rozsuniętymi w przestrzeni, w taki sposób, by znalazły się na ścianach sześcianu, którego formę ma analizowany robot.

W wyprowadzaniu transformacji dla tarcz umieszczonych na ścianach sześcianu można wykorzystać transformację (2.22) do układu końcówki pręta dla uproszczonego



Rysunek 2.10 Transformacja dla tarczy umieszczonej w układzie XY

modelu z trzema taraczami. Gdy reprezentujący korpus uproszczonego robota pręt znajduje się w konfiguracji $\theta = \arctan \sqrt{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\psi = 0$ pokryje się on z przekątną sześcianu o wierzchołku w punkcie $(0, 0, 0)$ i ścianach leżących w płaszczyznach X_0Y_0 , X_0Z_0 , Y_0Z_0 . Korzystając z tej właściwości możemy rozsunać tarcze uproszczonego robota do płaszczyzn X_0Y_0 , X_0Z_0 , Y_0Z_0 względem końcówki pręta, uzyskując model robota w kształcie sześcianu. Przy wyznaczaniu transformacji dla tak przesuniętych tarcz pomocny okazał się program “GUI for Denavit-Hartenberg parameters robot arm design” z pakietu MRPT [3].

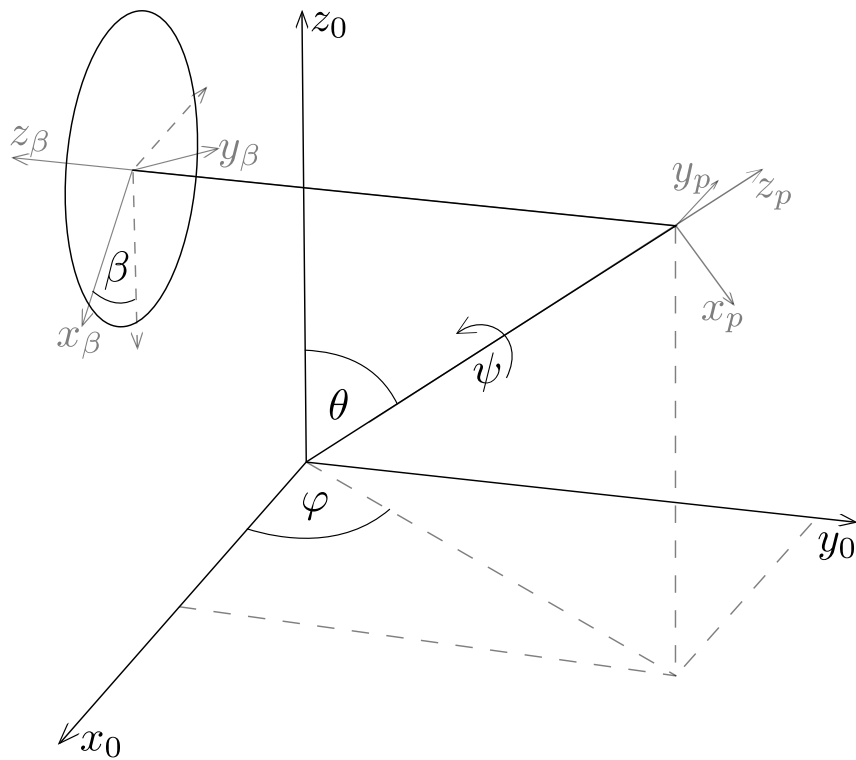
Postępując w zaproponowany sposób, przyjmując chwilową konfigurację pręta równą $\theta = \arctan \sqrt{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\psi = 0$, tarczę przedstawioną na rysunku 2.7 przesuniemy na płaszczyznę X_0Y_0 globalnego układu współrzędnych, czego efekt przedstawiono na rysunku 2.10. Położenie tarczy względem końcówki pręta wyraża przekształcenie

$$A_p^\alpha = Rot\left(x, \frac{\pi}{2}\right) Rot\left(z, \arctan \sqrt{2}\right) Rot\left(x, \frac{\pi}{2}\right) Trans\left(z, \frac{l\sqrt{3}}{3}\right) Rot(z, \alpha). \quad (2.32)$$

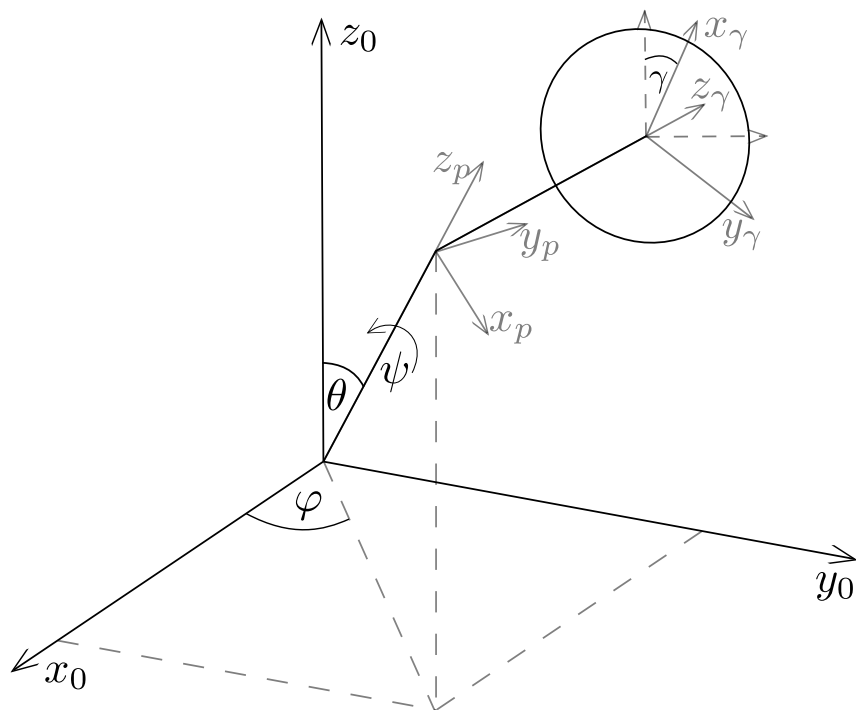
Kolejne dwie tarcze umieszczono w płaszczyznach X_0Z_0 i Y_0Z_0 układu $X_0Y_0Z_0$, co pokazano na rysunkach 2.11 oraz 2.12. Położenie układu współrzędnych tarczy umieszczonej w płaszczyźnie X_0Z_0 opisane jest transformacją

$$A_p^\beta = Rot\left(x, \frac{\pi}{2}\right) Rot\left(z, \arctan \sqrt{2}\right) Rot\left(x, \frac{\pi}{2}\right) Rot\left(z, \frac{3}{4}\pi\right) Trans\left(x, \frac{l\sqrt{3}}{3}\right) Rot\left(z, \frac{\pi}{2}\right) Rot\left(x, \frac{\pi}{2}\right) Rot(z, \beta), \quad (2.33)$$

natomiast położenie ostatniej tarczy, umieszczonej w płaszczyźnie Y_0Z_0 , dane jest przekształceniem



Rysunek 2.11 Transformacja dla tarczy umieszczonej w układzie XZ



Rysunek 2.12 Transformacja dla tarczy umieszczonej w układzie ZY

$$\begin{aligned} A_p^\gamma = & Rot\left(x, \frac{\pi}{2}\right) Rot\left(z, \arctan \sqrt{2}\right) Rot\left(x, -\frac{\pi}{2}\right) Rot\left(z, \frac{3}{4}\pi\right) \\ & Trans\left(x, \frac{l\sqrt{3}}{3}\right) Rot\left(z, \frac{\pi}{2}\right) Rot\left(x, \frac{\pi}{2}\right) Rot\left(z, \gamma\right). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Przy tak zdefiniowanych transformacjach, postępując analogicznie jak w podrozdziale 2.2.2, wyliczamy równania różniczkowe opisujące dynamikę rzeczywistego robota.

Rozdział 3

Badania symulacyjne

Badania symulacyjne obejmowały sprawdzenie zachowania modeli przedstawionych w rozdziale 2. Zostały przeprowadzone w środowisku Mathematica. Badania miały na celu weryfikację poprawności opracowanych modeli, oraz podjęcie próby realizacji zadania sterowania.

3.1 Zachowanie modelu 2D

Podczas badań modelu założono następujące parametry robota

$$m_p = 1, m_t = 0.5, l = 0.1, g = 9.81, I_p = 1, I_t = 20. \quad (3.1)$$

Pierwszym eksperymentem było zbadanie zachowania modelu przedstawionego w rozdziale 2.1 w punktach równowagi ($\theta = 0, \pi$)¹. Położenie robota pozostawało stałe.

Wykres na rysunku 3.1 przedstawia zachowanie balansującego robota wytrąconego z położenia równowagi chwiejnej ($\theta = 0$). Zauważono, że część energii potencjalnej robota przekształca się w energię kinetyczną tarczy.

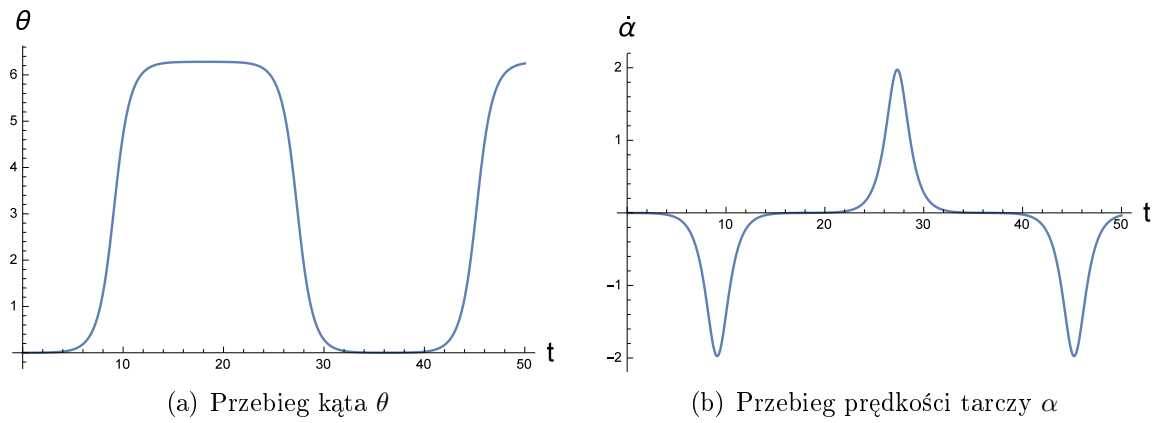
Na rysunku 3.2 przedstawiono zachowanie systemu z przyłożonym momentem napędowym u do tarczy. Dostarczana do układu energia trafia do tarczy, której średnia prędkość stale się zwiększa, natomiast wartość położenia korpusu robota θ oscyluje ze stałą amplitudą.

Następnie zbadano balansującego robota wytrąconego z położenia równowagi, z uwzględnieniem tarcia. Wyniki badania przedstawiono na rysunku 3.3. Jak należało się spodziewać, robot z czasem wytraca energię i dąży do punktu równowagi $\theta = \pi$.

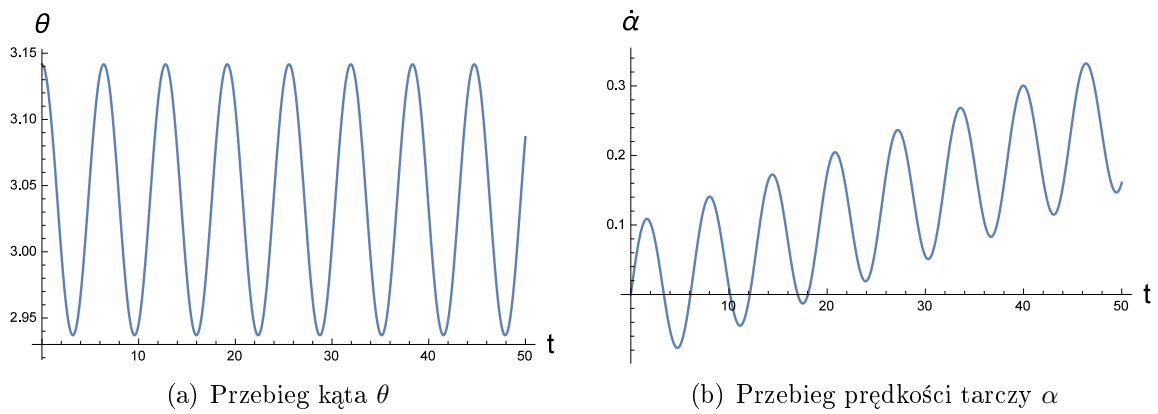
Kolejno przetestowano zachowanie robota z przyłożonym niewielkim momentem napędowym i tarcie w systemie. Rezultat przedstawiony jest na wykresie 3.4. Analizując zachowanie robota obserwujemy wychylenie robota z pozycji „zwisania”, które z czasem się zmniejsza. Wynika to z tego, że aby utrzymać robota w takiej pozycji trzeba ciągle przyspieszać tarcze. Ciągłe przyspieszanie tarczy z kolei powoduje coraz większe straty związane z tarcie, z czasem sprawiając, że całość dostarczanego momentu przeznaczona jest na pokonanie tarcia.

Następnie przyłożono do tarczy odpowiednio duży moment napędowy, czego efekt przedstawiono na wykresie 3.5. Zaobserwowano, że startując w pozycji zwisającej ($\theta = \pi$) i przykładając wystarczająco duży moment, możliwe jest osiągnięcie przez robota pozycji $\theta = 0$.

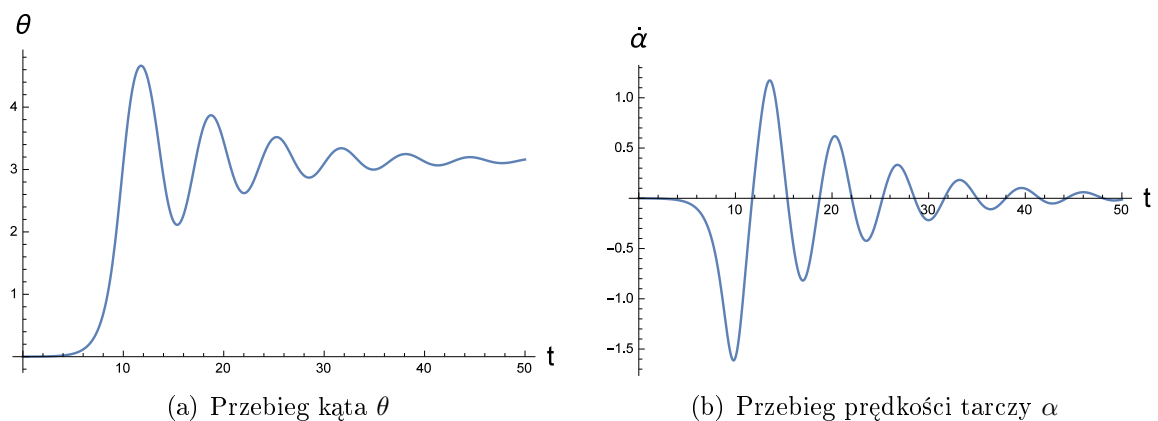
¹W dalszej części rozdziału znalezienie się robota w pierwszej z wymienionych konfiguracji będziemy nazywać balansowaniem, zaś drugiej zwisaniem.



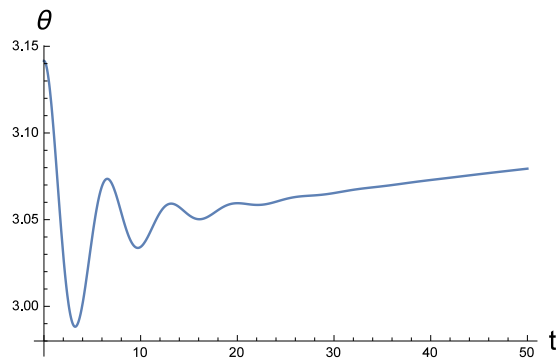
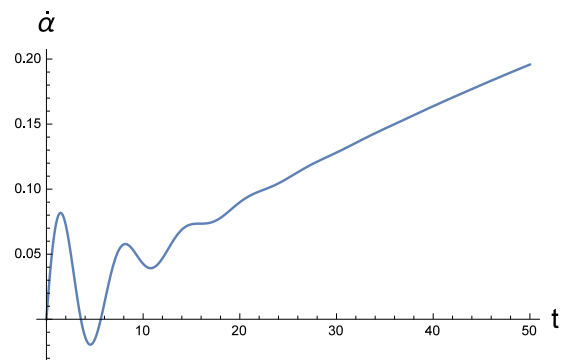
Rysunek 3.1 Zachowanie balansującego robota wytrąconego z położenia równowagi ($\theta(0) = 0.001$), przy warunkach początkowych: $\dot{\theta}(0) = \dot{\alpha}(0) = 0$ oraz bez tarcia w systemie



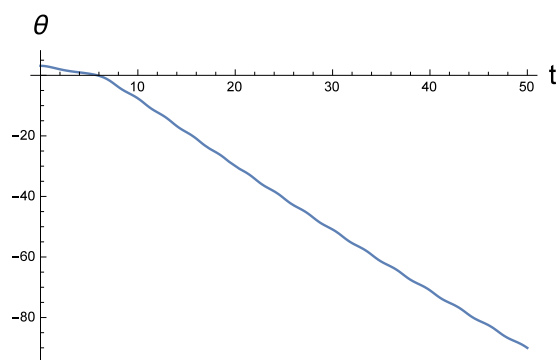
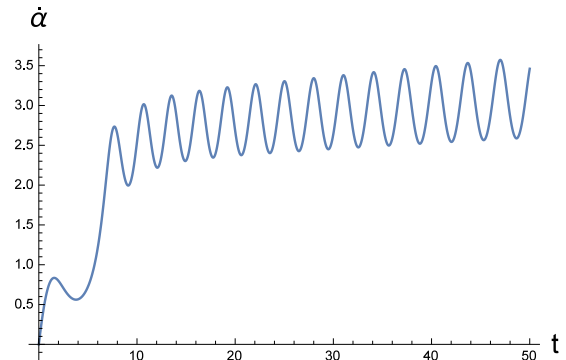
Rysunek 3.2 Zachowanie zwisającego robota ($\theta(0) = \pi$) z przyłożonym momentem $u = 0.1$ do tarczy, przy warunkach początkowych: $\dot{\theta}(0) = \dot{\alpha}(0) = 0$ oraz bez tarcia w systemie



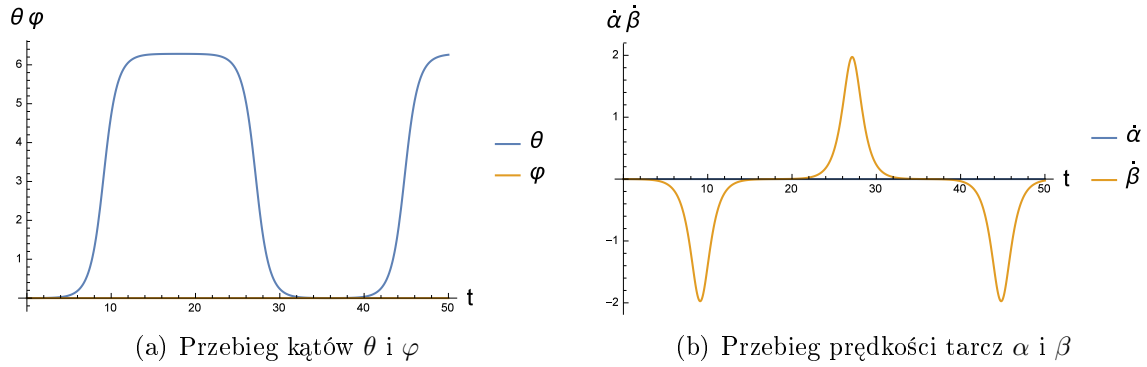
Rysunek 3.3 Zachowanie robota wytrąconego z położenia równowagi ($\theta(0) = 0.001$), przy warunkach początkowych: $\dot{\theta}(0) = \dot{\alpha}(0) = 0$ oraz tarciami $c_1 = c_2 = 0.1$

(a) Przebieg kąta θ (b) Przebieg prędkości tarczy α

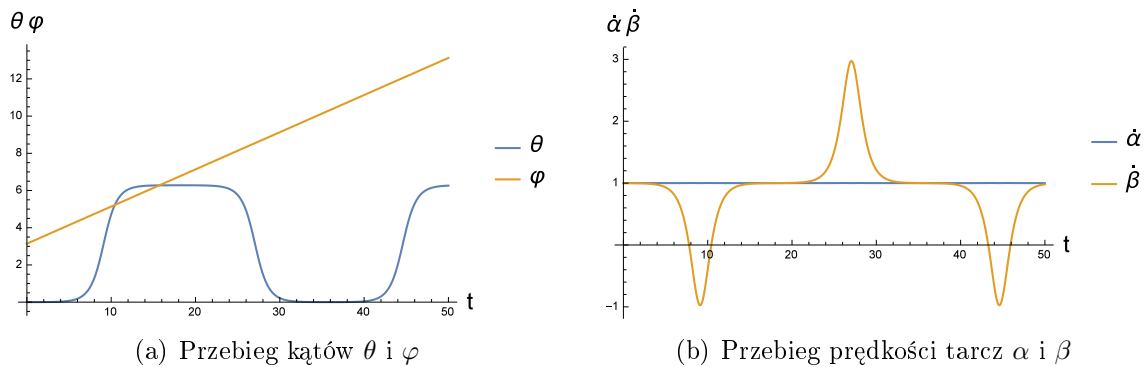
Rysunek 3.4 Zachowanie zwisającego robota ($\theta(0) = \pi$) z przyłożonym momentem $u = 0.1$ do tarczy, przy warunkach początkowych: $\dot{\theta}(0) = \dot{\alpha}(0) = 0$ oraz tarcie $c_1 = c_2 = 0.2$

(a) Przebieg kąta θ (b) Przebieg prędkości tarczy α

Rysunek 3.5 Zachowanie zwisającego robota ($\theta(0) = \pi$) z przyłożonym momentem $u = 1$ do tarczy, przy warunkach początkowych: $\dot{\theta}(0) = \dot{\alpha}(0) = 0$ oraz tarcie $c_1 = c_2 = 0.2$



Rysunek 3.6 Zachowanie robota wytrąconego z położenia równowagi ($\theta(0) = 0.001$, $\varphi(0) = 0$), przy warunkach początkowych: $\dot{\theta}(0) = \dot{\varphi}(0) = \dot{\alpha}(0) = \dot{\beta} = 0$ oraz bez tarcia w systemie



Rysunek 3.7 Zachowanie robota wytrąconego z położenia równowagi ($\theta(0) = 0.001$), przy warunkach początkowych: $\dot{\theta}(0) = \dot{\varphi}(0) = \dot{\alpha}(0) = \dot{\beta} = 0$ oraz bez tarcia w systemie

3.2 Zachowanie uproszczonego modelu 3D

3.2.1 Model z dwiema tarczami

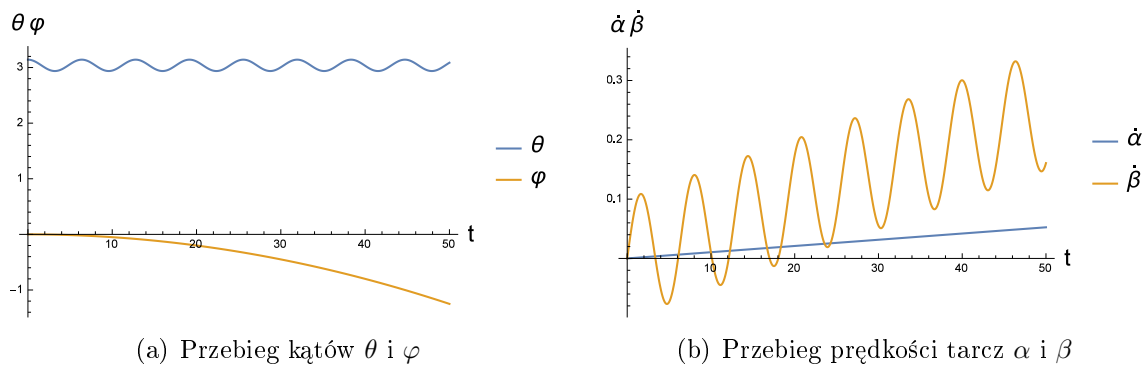
W niniejszym rozdziale zbadane zostało zachowanie modelu przedstawionego w rozdziale 2.2.1. Na wstępie sprawdzono zachowanie robota w pozycji zwisania ($\theta = \pi$) oraz balansowania ($\theta = 0$). Położenie robota pozostało stałe.

Na rysunku 3.6 przedstawiono zachowanie balansującego robota wytrąconego z położenia równowagi. Warto zauważyć, że jego zachowanie jest analogiczne do zachowania modelu 2D z rysunku 3.1.

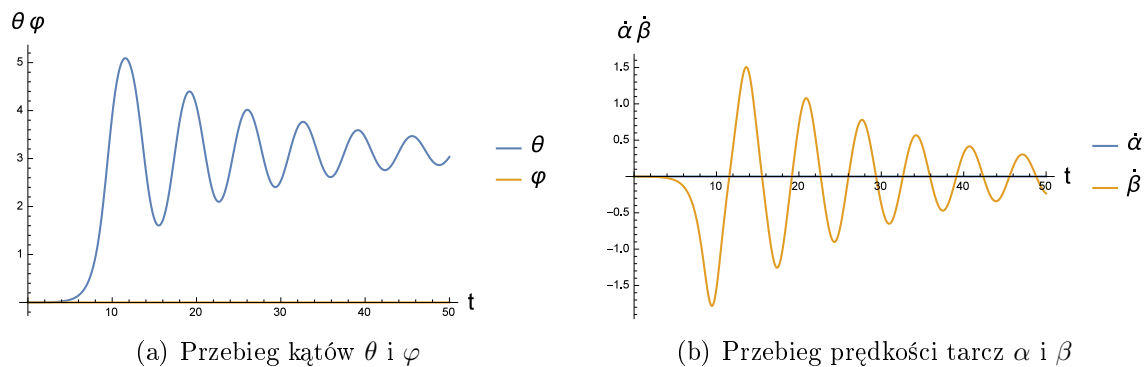
Następnie sprawdzono, czy na zachowanie robota wpływa początkowa prędkość tarcz oraz początkowa wartość i prędkość zmiennej φ . Wyniki symulacji pokazane są na wykresie 3.7. Zaobserwowano, że prędkości początkowe tarcz nie mają wpływu na zachowanie modelu nie uwzględniającego tarcia. Warto zauważyć, że wartość i prędkość początkowa kąta φ nie wpływa na trajektorię kąta θ .

Przykładając moment napędowy do obu tarcz, zbadano wpływ sterownia na zachowanie robota. Efekt przedstawiono na wykresie 3.8. Zauważono, że kąt θ zachowuje się analogicznie jak w modelu 2D (wykres 3.2), natomiast kąt φ cały czas przyspiesza.

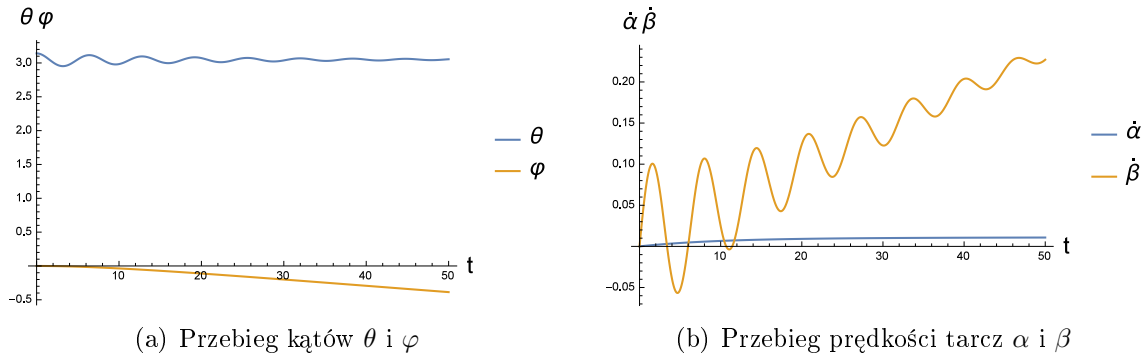
Kolejnym eksperymentem był spadek robota z pozycji balansowania ($\theta = 0$) z uwzględnieniem tarcia w systemie, którego wynik przedstawiono na rysunku 3.9. Zachowanie modelu jest analogiczne do zachowania modelu 2D (rysunek 3.3).

(a) Przebieg kątów θ i φ (b) Przebieg prędkości tarcz α i β

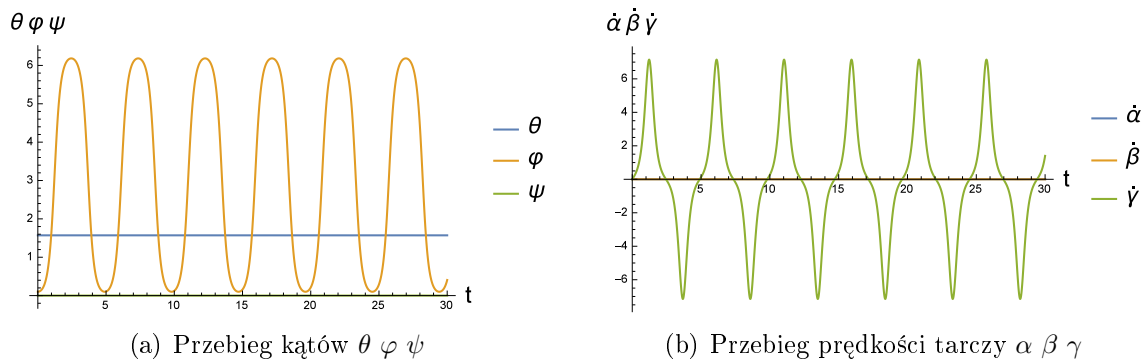
Rysunek 3.8 Zachowanie zwisającego robota ($\theta(0) = \pi$), z przyłożonym momentem $u_1 = 0.001$, $u_2 = 0.1$, przy warunkach początkowych: $\theta(0) = \dot{\varphi}(0) = \dot{\alpha}(0) = \dot{\beta} = 0$ oraz bez tarcia w systemie

(a) Przebieg kątów θ i φ (b) Przebieg prędkości tarcz α i β

Rysunek 3.9 Zachowanie robota wytrąconego z położenia równowagi ($\theta(0) = 0.001$), przy warunkach początkowych: $\dot{\theta}(0) = \dot{\varphi}(0) = \dot{\alpha}(0) = \dot{\beta} = 0$ oraz tarcie $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0.05$



Rysunek 3.10 Zachowanie robota wytrąconego z położenia równowagi ($\theta(0) = 0.001$) z przyłożonym momentem $u_1 = 0.001$, $u_2 = 0.1$, przy warunkach początkowych: $\dot{\theta}(0) = \dot{\varphi}(0) = \dot{\alpha}(0) = \dot{\beta}(0) = 0$ oraz tarciem $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0.05$



Rysunek 3.11 Zachowanie balansującego robota ($\theta(0) = \frac{\pi}{2}$) wytrąconego z położenia równowagi ($\varphi = 0.1$), przy warunkach początkowych: $\dot{\theta}(0) = \dot{\varphi}(0) = \dot{\psi}(0) = \dot{\alpha}(0) = \dot{\beta}(0) = \dot{\gamma}(0) = 0$ oraz bez tarcia w systemie

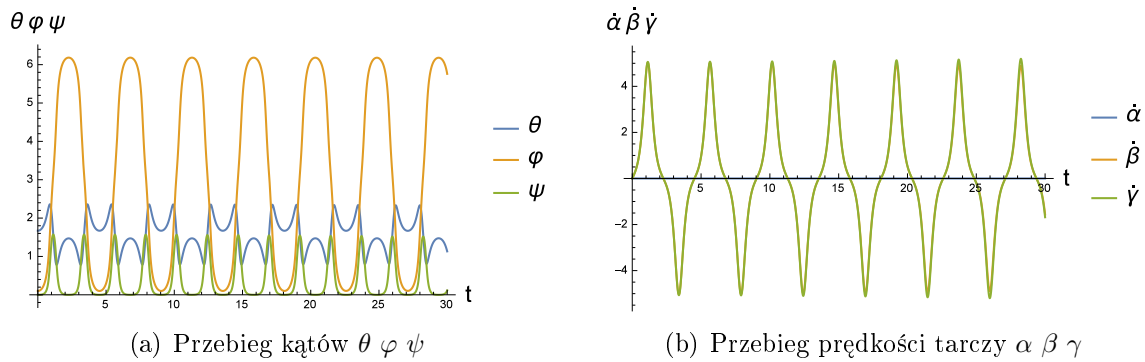
Ustawmy teraz model robota z tarciem w konfiguracji początkowej $\theta(0) = \pi$, $\varphi(0) = 0$ i przyłożmy do tarcz momenty napędowe. Zachowanie zmiennej θ jest analogiczne do zachowania w modelu 2D z tarciem i momentem napędowym. Natomiast przyspieszenie zmiennej φ jest z czasem ograniczone przez tarcie. Wyniki symulacji pokazane są na rysunku 3.10.

3.2.2 Model z trzema tarczami

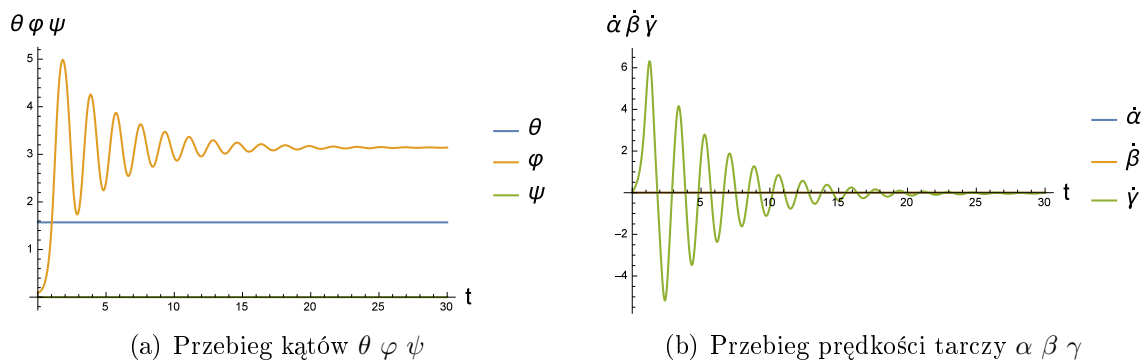
Ze względu na występowanie w modelu osobliwości do symulacji przyjęto wektor grawitacji skierowany wzdłuż osi X $g = (9.81, 0, 0)^T$. W związku z tym robot znajduje się w zwisie dla $\theta = -\frac{\pi}{2}$ zaś balansuje przy $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Ponownie pierwszym eksperymentem było sprawdzenie zachowania robota podczas balansowania ($\theta = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = 0$) oraz zwisu ($\theta = -\frac{\pi}{2}$, $\varphi = 0$). Położenie robota pozostało stałe.

W kolejnym eksperymencie ustawiono robota w pozycji balansowania ($\theta(0) = \frac{\pi}{2}$) i wytrącono z położenia równowagi ($\varphi = 0.1$). Zachowanie robota zilustrowano na wykresie 3.11. Warto zauważyć, że jest ono analogiczne do zachowania modelu z dwiema tarczami (wykres 3.6). Następnie zbadano identyczny przypadek, z tą różnicą, że zmieniona została wartość początkowa zmiennej $\theta(0) = \frac{\pi}{2} + 0.1$. Rezultat został przedstawiony na wykresie 3.12.



Rysunek 3.12 Zachowanie balansującego robota ($\theta(0) = \frac{\pi}{2} + 0.1$) wytrąconego z położenia równowagi ($\varphi = 0.1$), przy warunkach początkowych: $\theta(0) = \dot{\varphi}(0) = \dot{\psi}(0) = \dot{\alpha}(0) = \dot{\beta}(0) = \dot{\gamma}(0) = 0$ oraz bez tarcia w systemie



Rysunek 3.13 Zachowanie balansującego robota ($\theta(0) = \frac{\pi}{2}$) wytrąconego z położenia równowagi ($\varphi = 0.1$), przy warunkach początkowych: $\dot{\theta}(0) = \dot{\varphi}(0) = \dot{\psi}(0) = \dot{\alpha}(0) = \dot{\beta}(0) = \dot{\gamma}(0) = 0$ oraz tarciem $c_1 = \dots = c_6 = 0.05$

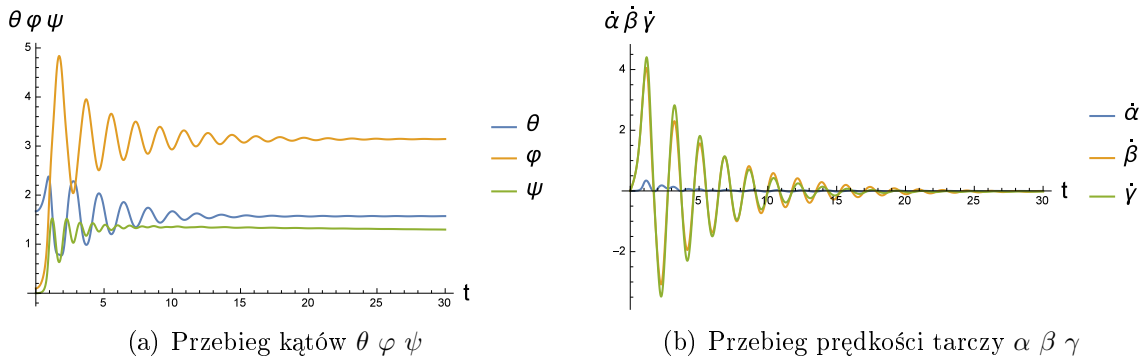
W kolejnym kroku zmodyfikowano poprzednie symulacje uwzględniając w nich tarcie. Rezultat przedstawiono odpowiednio na wykresach 3.13 i 3.14. Po raz kolejny warto zauważyć analogię zachowania przedstawionego na wykresie 3.13 do zachowania modelu z dwiema tarczami (rysunek 3.9).

Na wykresach 3.15, 3.16 i 3.17 przedstawiono zachowanie robota bez tarcia, z przyłożonymi momentami u_1 , u_2 , u_3 , które wpływają odpowiednio na zmienne ψ , θ , φ . Jak należało się spodziewać, przyłożenie momentu u_1 sprawiło, że korpus cały czas przyspiesza. Natomiast momenty u_2 i u_3 spowodowały oscylacje odpowiednio zmiennych θ i φ .

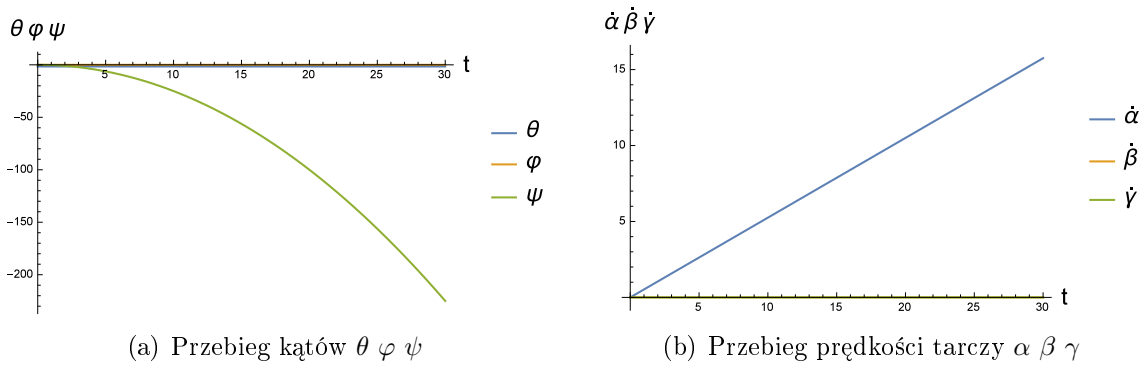
3.3 Zachowanie pełnego modelu 3D

W niniejszym rozdziale przebadane zostanie zachowanie modelu rzeczywistego robota, w porównaniu do uproszczonego modelu robota z trzema tarczami. Wszystkie warunki początkowe symulacji są identyczne z tymi zawartymi w podrozdziale 3.2.1. W pełnym modelu również występuje osobliwość, dlatego ponownie skierowano wektor grawitacji wzdłuż osi X $g = (9.81, 0, 0)^T$. W związku z tym robot znajduje się w zwisie dla $\theta = -\frac{\pi}{2}$ zaś balansuje przy $\theta = \frac{\pi}{2}$.

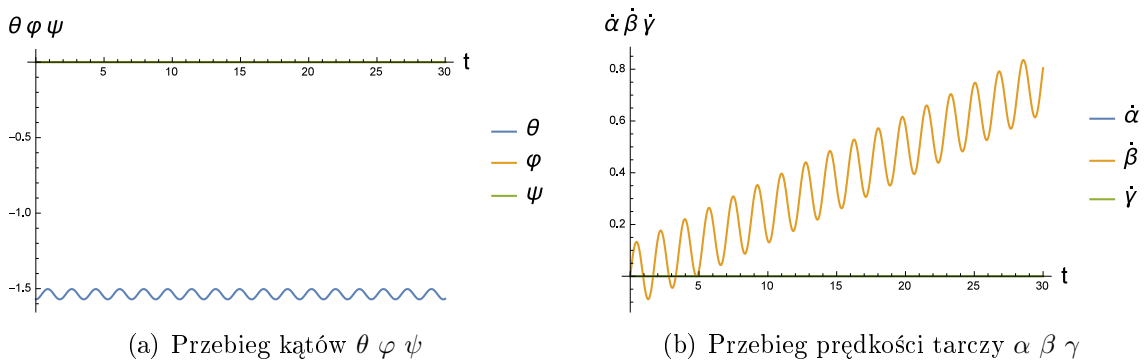
Pierwszym eksperymentem ponownie było sprawdzenie zachowania robota podczas



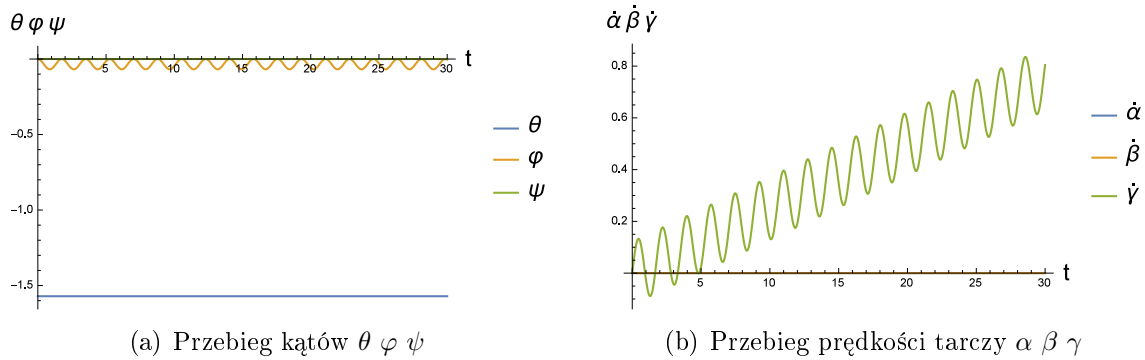
Rysunek 3.14 Zachowanie balansującego robota ($\theta(0) = \frac{\pi}{2} + 0.1$) wytrąconego z położenia równowagi ($\varphi = 0.1$), przy warunkach początkowych: $\dot{\theta}(0) = \dot{\varphi}(0) = \dot{\psi}(0) = \dot{\alpha}(0) = \dot{\beta}(0) = \dot{\gamma}(0) = 0$ oraz tarciem $c_1 = \dots = c_6 = 0.05$



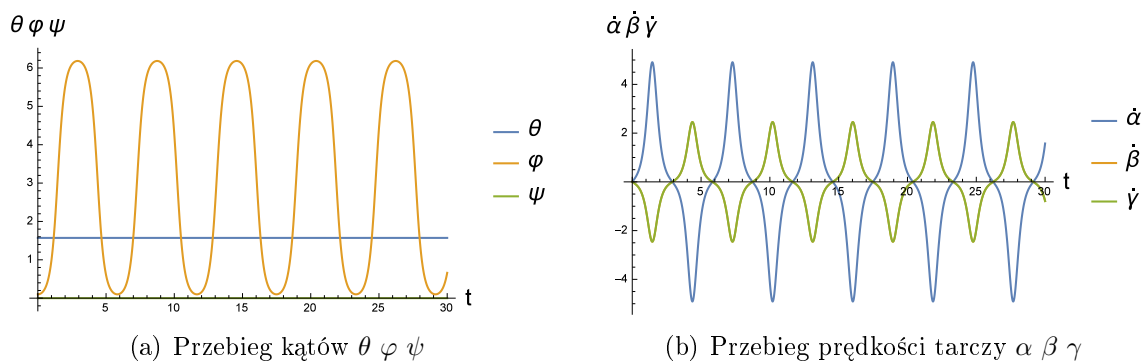
Rysunek 3.15 Zachowanie zwisającego robota ($\theta(0) = -\frac{\pi}{2}, \varphi = 0$) z przyłożonym momentem napędowym $u_1 = 0.1$ do tarczy przy warunkach początkowych: $\dot{\theta}(0) = \dot{\varphi}(0) = \dot{\psi}(0) = \dot{\alpha}(0) = \dot{\beta}(0) = \dot{\gamma}(0) = 0$ oraz bez tarcia w systemie



Rysunek 3.16 Zachowanie zwisającego robota ($\theta(0) = -\frac{\pi}{2}, \varphi = 0$) z przyłożonym momentem napędowym $u_2 = 0.1$ do tarczy, przy warunkach początkowych: $\dot{\theta}(0) = \dot{\varphi}(0) = \dot{\psi}(0) = \dot{\alpha}(0) = \dot{\beta}(0) = \dot{\gamma}(0) = 0$ oraz bez tarcia w systemie



Rysunek 3.17 Zachowanie zwisającego robota ($\theta(0) = -\frac{\pi}{2}$, $\varphi = 0$) z przyłożonym momentem napędowym $u_3 = 0.1$ do tarczy, przy warunkach początkowych: $\dot{\theta}(0) = \dot{\varphi}(0) = \dot{\psi}(0) = \dot{\alpha}(0) = \dot{\beta}(0) = \dot{\gamma}(0) = 0$ oraz bez tarcia w systemie



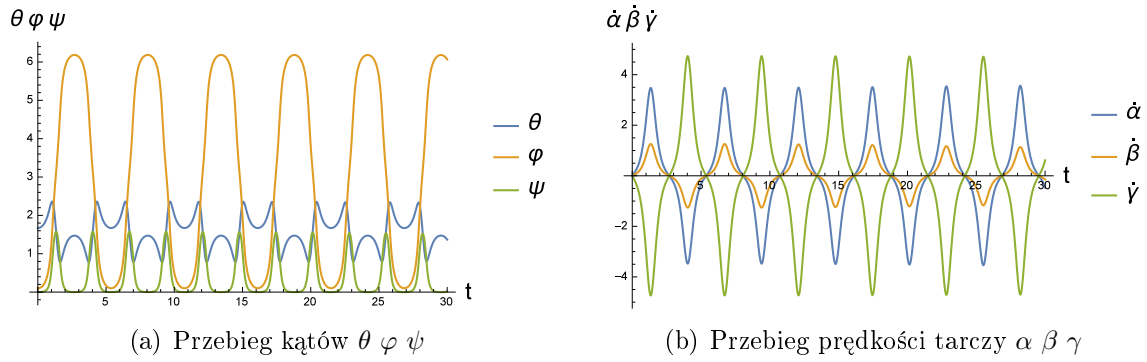
Rysunek 3.18 Zachowanie balansującego rzeczywistego robota ($\theta(0) = \frac{\pi}{2}$) wytrąconego z położenia równowagi ($\varphi = 0.1$), przy warunkach początkowych: $\dot{\theta}(0) = \dot{\varphi}(0) = \dot{\psi}(0) = \dot{\alpha}(0) = \dot{\beta}(0) = \dot{\gamma}(0) = 0$ oraz bez tarcia w systemie

balansowania ($\theta = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = 0$) oraz zwisu ($\theta = -\frac{\pi}{2}$, $\varphi = 0$). Położenie robota pozostało stałe.

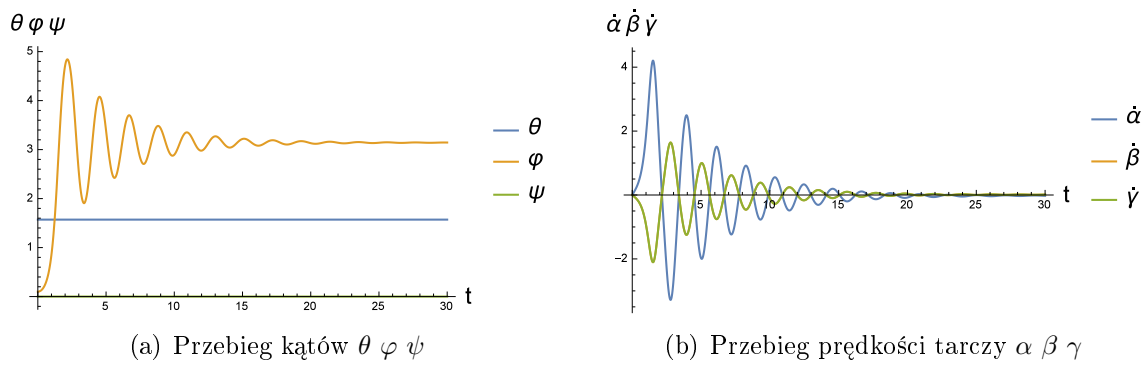
Na rysunkach 3.18 i 3.19 przedstawiono zachowanie balansującego robota wytrąconego z położenia równowagi. Warto zwrócić uwagę na przebieg prędkości tarcz, który jest różny od przebiegu przedstawionego na rysunku 3.11. Pomimo identycznego ruchu całego robota, w przypadku uproszczonego modelu ruch kąta θ wpływa na prędkość jednej tarczy. Natomiast w rzeczywistym modelu ruch kąta θ wpływa jednocześnie na dwie tarcze.

Na rysunkach 3.20 i 3.21 przedstawiono wpływ tarcia na zachowanie spadającego robota. Dodanie tarcia skutkuje podobnymi efektami jak w modelu uproszczonym. Powoduje zbieganie kątów θ , φ , ψ do położenia w którym robot zwisa, oraz zbieganie prędkości tarcz do zera.

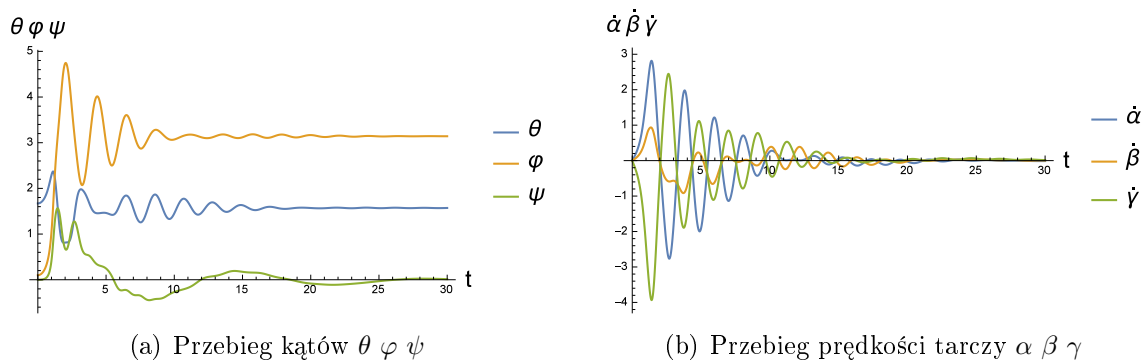
Następnie analogicznie jak w modelu uproszczonym przyłożono napędy do tarcz. Zachowanie rzeczywistego robota przedstawiono na wykresach 3.22, 3.23, i 3.24. W przeciwieństwie do uproszczonego modelu załączenie któregośkolwiek z napędów powoduje obrót korpusu robota (ciągle przyspieszanie zmiennej ψ).



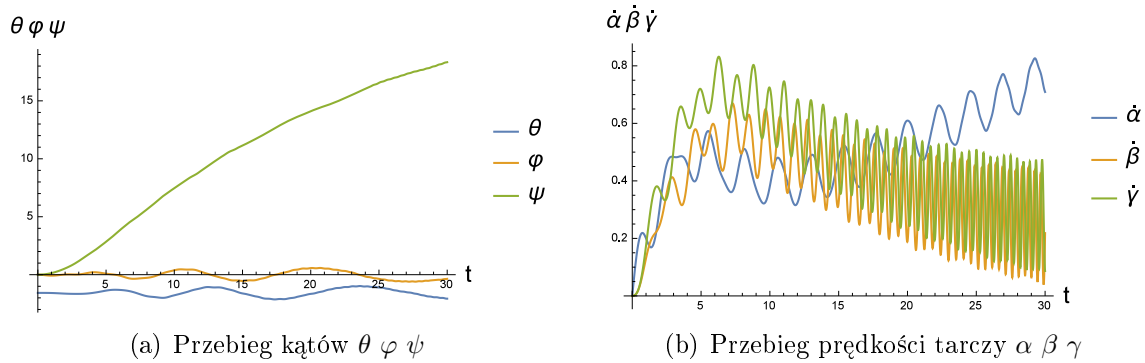
Rysunek 3.19 Zachowanie balansującego rzeczywistego robota ($\theta(0) = \frac{\pi}{2} + 0.1$) wytrąconego z położenia równowagi ($\varphi = 0.1$), przy warunkach początkowych: $\dot{\theta}(0) = \dot{\varphi}(0) = \dot{\psi}(0) = \dot{\alpha}(0) = \dot{\beta}(0) = \dot{\gamma}(0) = 0$ oraz bez tarcia w systemie



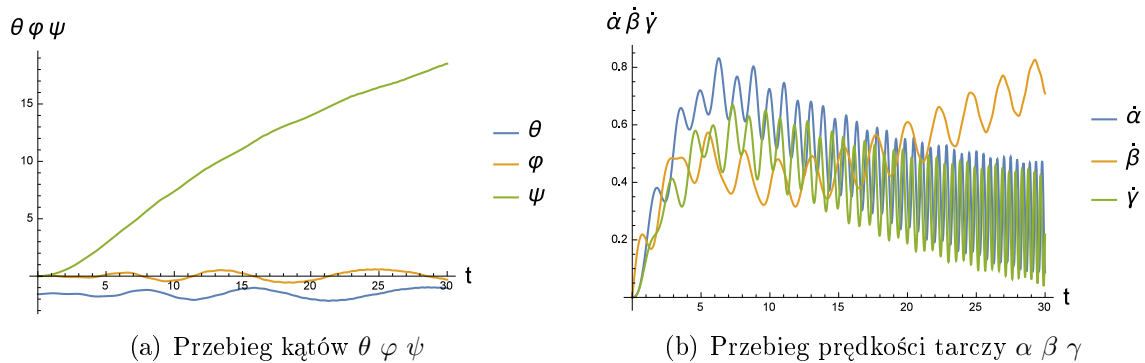
Rysunek 3.20 Zachowanie balansującego rzeczywistego robota ($\theta(0) = \frac{\pi}{2}$) wytrąconego z położenia równowagi ($\varphi = 0.1$), przy warunkach początkowych: $\dot{\theta}(0) = \dot{\varphi}(0) = \dot{\psi}(0) = \dot{\alpha}(0) = \dot{\beta}(0) = \dot{\gamma}(0) = 0$ oraz tarcie $c_{1...6} = 0.05$



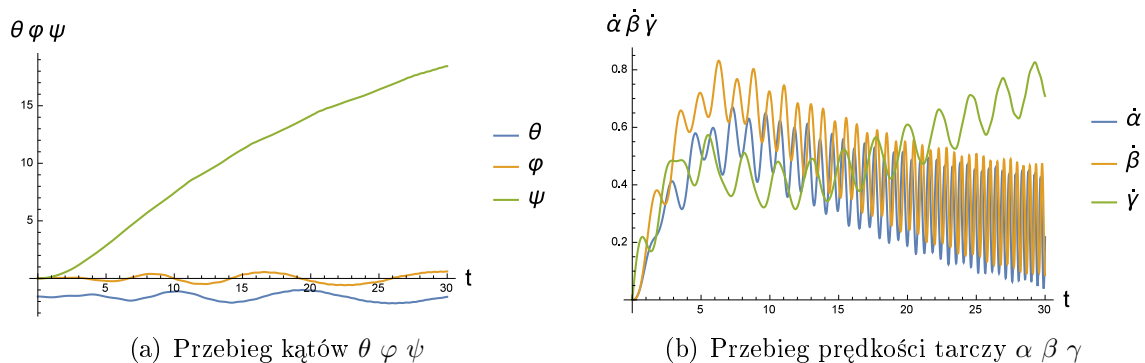
Rysunek 3.21 Zachowanie balansującego rzeczywistego robota ($\theta(0) = \frac{\pi}{2} + 0.1$) wytrąconego z położenia równowagi ($\varphi = 0.1$), przy warunkach początkowych: $\dot{\theta}(0) = \dot{\varphi}(0) = \dot{\psi}(0) = \dot{\alpha}(0) = \dot{\beta}(0) = \dot{\gamma}(0) = 0$ oraz tarcie $c_{1...6} = 0.05$



Rysunek 3.22 Zachowanie zwisającego rzeczywistego robota ($\theta(0) = -\frac{\pi}{2}, \varphi = 0$) z przyłożonym momentem napędowym $u_1 = 0.1$ do tarczy, przy warunkach początkowych: $\dot{\theta}(0) = \dot{\varphi}(0) = \dot{\psi}(0) = \dot{\alpha}(0) = \dot{\beta}(0) = \dot{\gamma}(0) = 0$ oraz bez tarcia w systemie



Rysunek 3.23 Zachowanie zwisającego rzeczywistego robota ($\theta(0) = -\frac{\pi}{2}, \varphi = 0$) z przyłożonym momentem napędowym $u_2 = 0.1$ do tarczy, przy warunkach początkowych: $\dot{\theta}(0) = \dot{\varphi}(0) = \dot{\psi}(0) = \dot{\alpha}(0) = \dot{\beta}(0) = \dot{\gamma}(0) = 0$ oraz bez tarcia w systemie



Rysunek 3.24 Zachowanie zwisającego rzeczywistego robota ($\theta(0) = -\frac{\pi}{2}, \varphi = 0$) z przyłożonym momentem napędowym $u_1 = 0.1$ do tarczy przy warunkach początkowych: $\dot{\theta}(0) = \dot{\varphi}(0) = \dot{\psi}(0) = \dot{\alpha}(0) = \dot{\beta}(0) = \dot{\gamma}(0) = 0$ oraz bez tarcia w systemie

3.4 Sterowanie modelem 2D

Jednym z lepszych algorytmów sterowania manipulatorów w przestrzeni konfiguracyjnej jest algorytm obliczanego momentu, który polega na globalnej linearyzacji z wykorzystaniem sprzężenia zwrotnego [6]. Ze względu na pokrewieństwo struktury omawianego robota do struktury manipulatora szeregowego zbadano działanie takiego algorytmu, na przykładzie modelu robota 2D.

Podstawiając do równania dynamiki (2.11) sterowanie w postaci

$$\begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix} = Q(q)v + C(q, \dot{q})\dot{q} + Dq, \quad (3.2)$$

gdzie v to nowe wejście sterujące, otrzymujemy zlinearyzowany obiekt. Na wejście v tego obiektu podajemy sygnał z regulatora PID, opisanego wzorem

$$v = K_p e + K_d \dot{e} + K_i \int_0^t e dt, \quad (3.3)$$

gdzie $e = \theta_d - \theta$ to uchyb regulacji, θ_d to zadana trajektoria, zaś K_p , K_d , K_i to wzmocnienia regulatora.

3.4.1 Sterowanie przy pełnej znajomości modelu

Jako parametry modelu robota w symulacjach założono wartości

$$m_p = 1, m_t = 0.5, l = 0.1, g = 9.81, I_p = 1, I_t = 20. \quad (3.4)$$

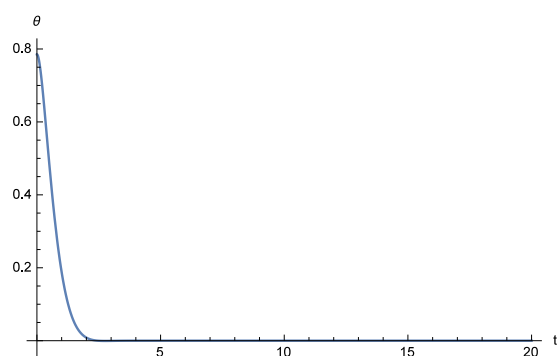
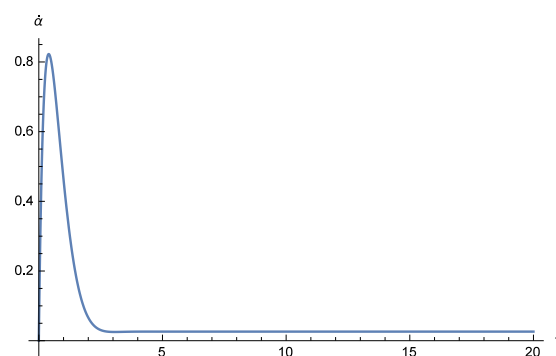
Parametry te dobrano tak, by odpowiadały typowemu robotowi wspomnianemu we wstępie. W ramach tego podrozdziału korzystano z modelu robota bez tarcia. W symulacji wzmocnienia regulatora PID miały wartości $K_p = 1.09$, $K_d = 1.45$, $K_i = 0.51$ i zostały wyznaczone eksperymentalnie. Parametry modelu wykorzystanego w sterowniku przyjęto identyczne z tymi założonymi w modelu robota.

Zadanie polega na utrzymaniu równowagi w punkcie $\theta_d = 0$. Jako warunki początkowe wybrano $\theta(0) = \frac{\pi}{4}$, $\dot{\theta}(0) = \alpha(0) = \dot{\alpha}(0) = 0$. Takie zadanie odpowiada sytuacji w której robot spoczywa na jednej ze swojej ścian i jego celem jest powstanie na wierzchołek.

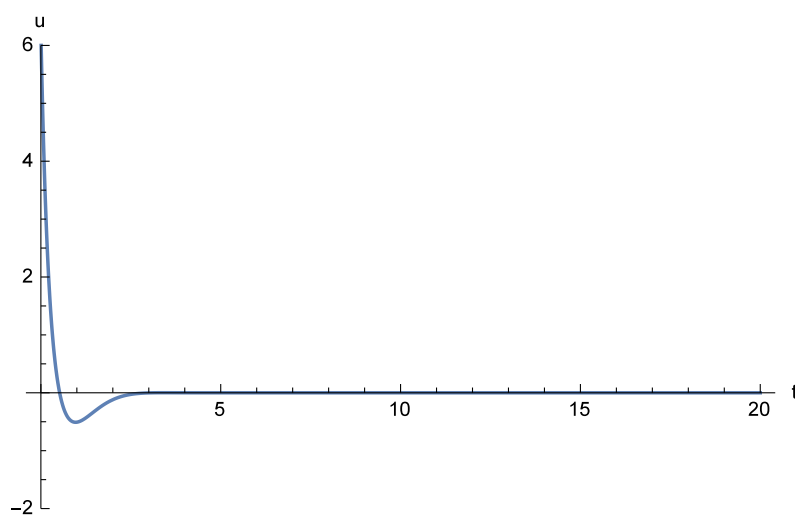
Na rysunku 3.25(a) przedstawiono wykres wartości zmiennej θ . Postawiony cel jest skutecznie realizowany przez sterownik.

Rysunek 3.25(b) przedstawia prędkość jaką osiąga tarcza. Warto zauważyć, że w momencie balansowania na wierzchołku prędkość ta jest niezerowa. Ze względu na występowanie tarcia w rzeczywistym robocie, może wymagać to sporych nakładów energii związanych z koniecznością utrzymania tej prędkości. Warto jednocześnie zauważyć, że odpowiednie ustalenie prędkości początkowej tarczy pozwoli, by prędkość tarczy w stanie ustalonym była zbliżona do zera.

Przedstawiona na rysunku 3.25(c) wartość momentu obrotowego, przyłożonego do tarczy przez sterownik w celu balansowania, jest niestety większa niż momenty, które są w stanie generować silniki elektryczne o masie równej masie całego robota. Dlatego w rzeczywistym robocie może zająć potrzeba zastosowania hamulca pozwalającego na wygenerowanie dużych momentów w efekcie hamowania rozprędzonej tarczy. Podejście takie zostało przedstawione w pracy [1].

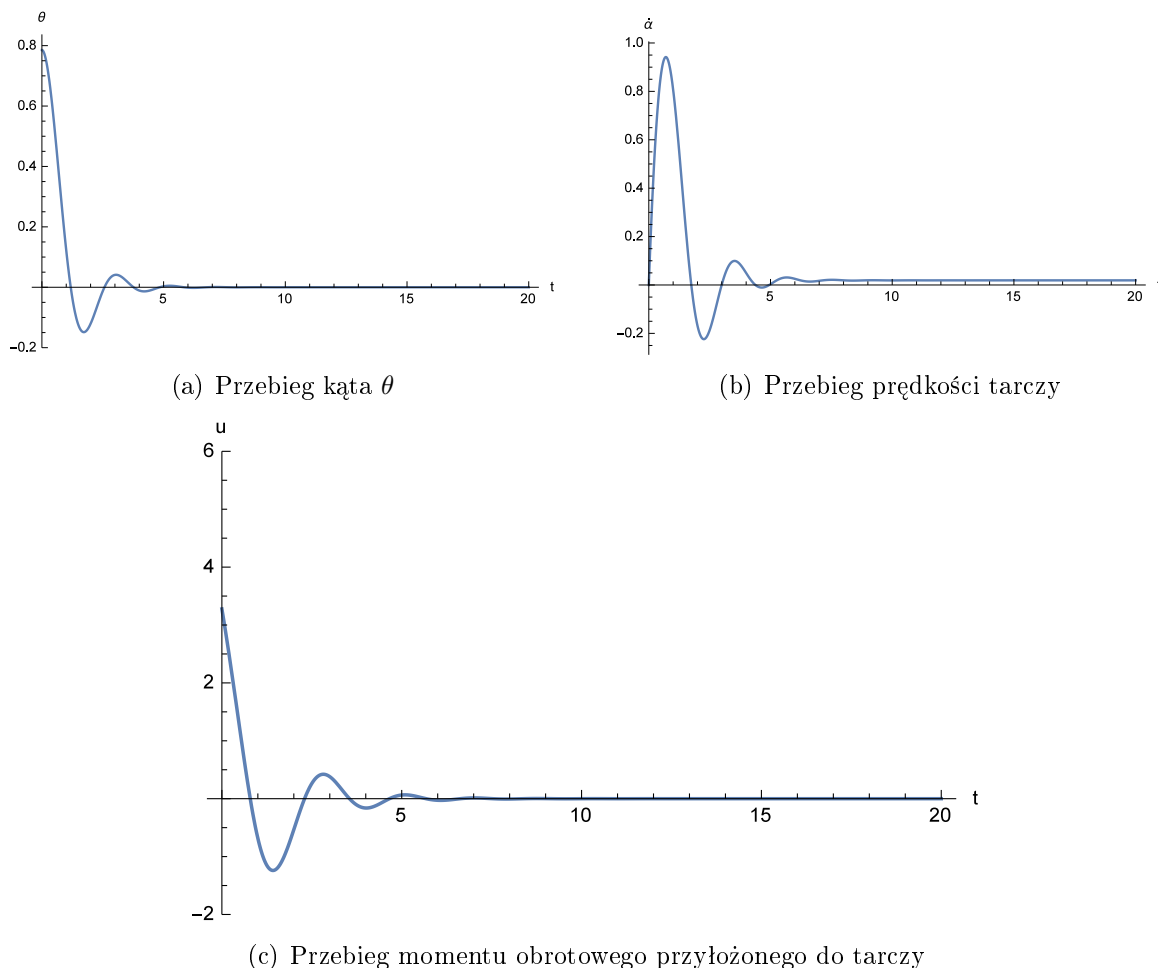
(a) Przebieg kąta θ 

(b) Przebieg prędkości tarczy



(c) Przebieg momentu obrotowego przyłożonego do tarczy

Rysunek 3.25 Sterowanie modelem 2D przy pełnej znajomości modelu



Rysunek 3.26 Sterowanie modelem 2D przy parametrycznej nieznajomości modelu

3.4.2 Sterowanie przy parametrycznej nieznajomości modelu

W rzeczywistości idealna identyfikacja modelu robota nie jest możliwa, dlatego postanowiono zbadać wrażliwość sterowania na nie znajomość wartości parametrów modelu. W symulacjach założono parametry modelu robota identyczne jak w poprzednim podrozdziale, wyrażone w (3.4). Natomiast parametry modelu zastosowane w sterowniku zostały zmienione i przyjmują one wartości

$$m_p = 0.7, m_t = 0.4, l = 0.08, g = 9.81, I_p = 0.8, I_t = 15. \quad (3.5)$$

Następnie ponownie eksperymentalnie nastrojono regulator PID. Nastawy regulatora przyjęły wartości $K_p = 0.63$, $K_d = 0.58$, $K_i = 0.43$. Zadanie ponownie polega na utrzymaniu równowagi w punkcie $\theta_d = 0$. Jako warunki początkowe wybrano jak poprzednio $\theta(0) = \frac{\pi}{4}$, $\dot{\theta}(0) = \alpha(0) = \dot{\alpha}(0) = 0$.

Na rysunku 3.26 przedstawiono wyniki symulacji. W stosunku do przypadku przedstawionego w poprzednim podrozdziale jakość sterowania pogorszyła się, choć nadal postawione zadanie zostało zrealizowane. Występuje delikatne przeregulowanie, którego nie udało się zlikwidować dobierając współczynniki regulatora PID.

Rozdział 4

Podsumowanie

Celem pracy było wyprowadzenie modelu dynamiki robota napędzanego tarczami inercyjnymi oraz symulacyjne zbadanie jego zachowania. Wszystkie postawione cele udało się zrealizować.

Podczas wyprowadzenia modelu pokazano, że podejście formalne dobrze się sprawdza do rozwiązywania skomplikowanych problemów. Kluczowe było wykorzystanie narzędzia "GUI for D-H parametr", gdyż umożliwiło ono weryfikację poprawności wyprowadzonych transformacji układów współrzędnych. Pakiet obliczeń symbolicznych Mathematica umożliwił wykonanie wielu obliczeń, które ręcznie nie byłyby możliwe (uzyskane równania dynamiki w formie symbolicznej mają 5000 wyrazów).

Przeprowadzono liczne symulacje modelu 2D i trzech modeli 3D w celu sprawdzenia, czy zachowanie robota w szczególnych sytuacjach jest zgodne z intuicyjnymi przypuszczeniami. Stwierdzono, że modele zachowują się zgodnie z założeniami.

W pracy zaproponowano również prosty regulator dla modelu 2D robota. Nie uwzględnia on ograniczeń sterowania, ale poprawnie realizuje zadanie balansowania robotem. W przyszłości warto wypróbować algorytm przełączany w celu rozbijania robota i minimalizacji sterowań. Innym podejściem do rozwiązania problemu dużych sterowań jest założenie hamulców na tarcze, tak jak zostało to zrobione w robocie Cubli z ETH. Warto również zbadać sterowanie z rozpędzonymi tarczami, tak aby podczas balansowania prędkości tarcz były bliskie zeru. Taki algorytm powinien być bardziej efektywny energetycznie.

Podczas prac nad modelem, zauważono, że robot z rozważanym napędem może przyjmować inne kształty niż sześciąt. W przyszłości warto zbadać działanie robota o kształcie elipsoidy lub kuli.

Bibliografia

- [1] M. Gajamohan, M. Merz, I. Thommen, R. D'Andrea. The Cubli: A cube that can jump up and balance. *Intelligent Robots and Systems (IROS), 2012 IEEE/RSJ International Conference on*, strony 3722–3727, Oct 2012.
- [2] M. Gomes, K. Ahlin. Quiet (nearly collisionless) robotic walking. *Robotics and Automation (ICRA), 2015 IEEE International Conference on*, strony 5761–5766, May 2015.
- [3] Application: robotic-arm-kinematics. <http://www.mrpt.org/list-of-mrpt-apps/application-robotic-arm-kinematics/>.
- [4] J. Romanishin, K. Gilpin, D. Rus. M-blocks: Momentum-driven, magnetic modular robots. *Intelligent Robots and Systems (IROS), 2013 IEEE/RSJ International Conference on*, strony 4288–4295, Nov 2013.
- [5] M. W. Spong, P. Corke, R. Lozano. Nonlinear control of the inertia wheel pendulum. *Automatica*, 37:1845–1851, 1999.
- [6] K. Tchoń, A. Mazur, I. Duleba, R. Hossa, R. Muszyński. *Manipulatory i roboty mobilne*. Akademicka Oficyna Wydawnicza PLJ, Warszawa, 2000.
- [7] Wikipedia. Równania Eulera-Lagrange'a. https://pl.wikipedia.org/wiki/R%C3%B3wnania_Eulera-Lagrange%E2%80%99a.
- [8] Wikipedia. Twierdzenie Steinera (mechanika). https://pl.wikipedia.org/wiki/Twierdzenie_Steinera_%28mechanika%29.