Mechanika analityczna, II r AiR

Wykład 9

Układy z ograniczeniami

Niech będzie dany układ opisany położeniem i prędkością $q, \dot{q} \in \mathbb{R}^n$, z Lagranżianem $L(q,\dot{q})$. W praktyce, na $q, \dot{q}$ są nałożone różnego rodzaju ograniczenia. Dzielimy je na dwie grupy: ograniczenia (więzy) konfiguracyjne i ograniczenia (więzy) fazowe. Naszym celem jest pokazanie, jak uwzględnia się te ograniczenia w formaliźmie Lagranżowskim.

1. Ograniczenia konfiguracyjne:

$$F(q) = (F_1(q), \dots, F_l(q)) = 0 \quad , \quad l \leq n,$$

$F_i(q)$ – gładkie i niezależne ($\operatorname{rank} DF(q) = l$).

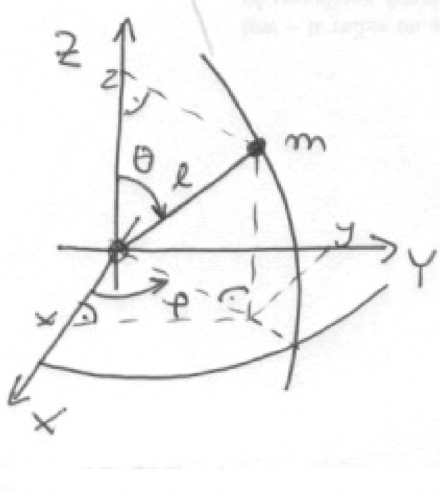
Nałożenie ograniczeń oznacza, że układ nie porusza się w $\mathbb{R}^n$, ale pozostaje w zbiorze

$$M = \{q \in \mathbb{R}^n \,|\, F(q) = 0\},$$

który jest $n-l = m$-wymiarową podrozmaitością $\mathbb{R}^n$.

Ex: $q = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}^2$, $V = mgz$

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) - mgz$$



$$F(q) = x^2+y^2+z^2-l^2 = q^Tq - l^2 = 0$$

– punkt m porusza się po powierzchni sfery o promieniu l

$$M = S^2 = \{(x,y,z) \,|\, x^2+y^2+z^2-l^2 = 0\}$$

Warunek niezależności oznacza, że $dF(q) = 2[x, y, z] \neq 0$; jest to spełnione w każdym punkcie M.

Na S^2 wprowadzamy współrzędne sferyczne, dopasowane do postaci S^2:

$$x = l s_\theta c_\varphi, \quad y = l s_\theta s_\varphi, \quad z = l c_\theta$$

W nowych współrzędnych $\tilde{q} = (\theta, \varphi)$, a lagranżian przyjmuje postać:

$$\dot{x} = l\dot{\theta} c_\theta c_\varphi - l\dot{\varphi} s_\theta s_\varphi, \quad \dot{y} = l\dot{\theta} c_\theta s_\varphi + l\dot{\varphi} s_\theta c_\varphi, \quad \dot{z} = -l\dot{\theta} s_\theta$$

$$\tilde{L} = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m l^2 s_\theta^2 \dot{\varphi}^2 - mgl c_\theta$$

Mając lagranżian w nowych współrzędnych, REL piszemy klasycznie:

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\theta}} = m l^2 \dot{\theta}, \quad \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \theta} = m l^2 s_\theta c_\theta \dot{\varphi}^2 + mgl s_\theta$$

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\varphi}} = m l^2 s_\theta^2 \dot{\varphi}, \quad \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \varphi} = 0$$

$$\text{REL:} \quad \begin{cases} m l^2 \ddot{\theta} - m l^2 s_\theta c_\theta \dot{\varphi}^2 - mgl s_\theta = 0 \\ m l^2 s_\theta^2 \dot{\varphi} = const \end{cases}$$

Z przykładu wynika następująca reguła postępowania. W przypadku ograniczeń konfiguracyjnych $F(q) = 0$

- definiujemy rozmaitość ruchu $M = \{q \in \mathbb{R}^n \mid F(q) = 0\}$
- wprowadzamy współrzędne $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \ldots, \tilde{q}_m$ na rozmaitości
- piszemy lagranżian i REL w nowych współrzędnych.

Należy mieć na uwadze, że współrzędne na rozmaitości mają zwykle charakter lokalny, co oznacza że REL będą obowiązywać poza pewnymi punktami osobliwymi. Dla S^2 takimi punktami są bieguny $(\sin\theta = 0)$.

2. Ograniczenia fazowe

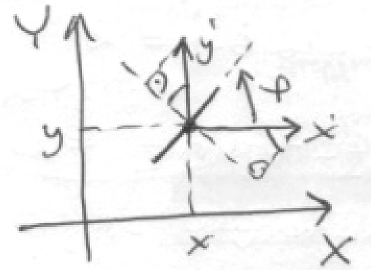
Załóżmy, że ograniczenia fazowe mają postać Pfaffa, tzn.

$$A(q)\dot{q} = 0\ , \quad \text{gdzie} \quad \underset{l\times n}{A(q)} \ \text{jest macierzą}$$

pełnego rzędu, rank $A(q) = l \leq n$.

Przykłady:

Ex1. Koło, łyżwa, narta poruszające się bez poślizgu bocznego



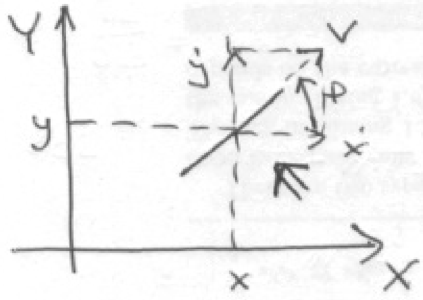
$$q = (x, y, \varphi)$$

warunek: prędkość $\perp$ koła $= 0$

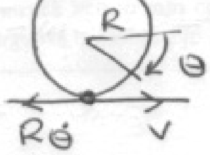
BPP: $\dot{x}\sin\varphi - \dot{y}\cos\varphi = 0 \Rightarrow A(q)\dot{q} = 0$

$$A(q) = [\sin\varphi, -\cos\varphi, 0]\ , \ l = 1, \ \text{rank} A(q) = 1.$$

Ex2. Koło toczące się (brak poślizgu poprzecznego i wzdłużnego)



$$q = (x, y, \varphi, \theta)$$



BPP: $\dot{x}\sin\varphi - \dot{y}\cos\varphi = 0$

BPW: $\dot{x}\cos\varphi + \dot{y}\sin\varphi - R\dot{\theta} = 0$

BPW: $v - R\dot{\theta} = 0$

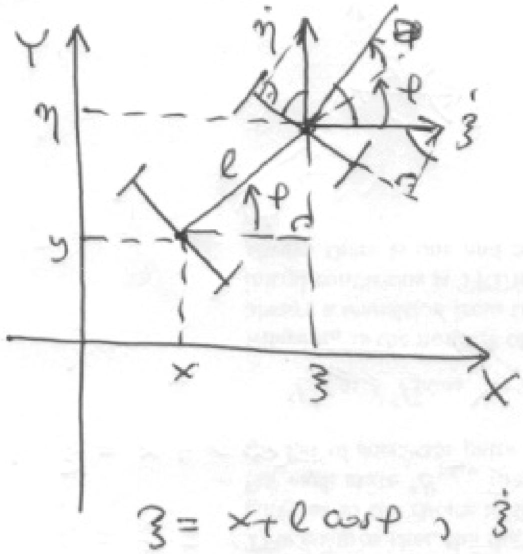
$$v\cos\varphi = \dot{x}, \ v\sin\varphi = \dot{y} \Rightarrow v = \dot{x}\cos\varphi + \dot{y}\sin\varphi$$

Postać Pfaffa: $A(q) = \begin{bmatrix} \sin\varphi, & -\cos\varphi, & 0, & 0 \\ \cos\varphi, & \sin\varphi, & 0, & -R \end{bmatrix}$, $l = 2$,

$$\text{rank } A(q) = 2,$$

$$A(q)\dot{q} = 0.$$

Ex 3: Samochód kinematyczny, rower



$q = (x, y, \varphi, \theta)$

Zakładamy ruch bez poślizgu bocznego kół tylnych i przednich

BPPKT: $\dot{x}\sin\varphi - \dot{y}\cos\varphi = 0$

BPPKP: $\dot{\xi}\sin(\varphi+\theta) - \dot{\eta}\cos(\varphi+\theta) = 0$

$\xi = x + l\cos\varphi, \quad \dot{\xi} = \dot{x} - l\dot{\varphi}\sin\varphi$

$\eta = y + l\sin\varphi, \quad \dot{\eta} = \dot{y} + l\dot{\varphi}\cos\varphi$

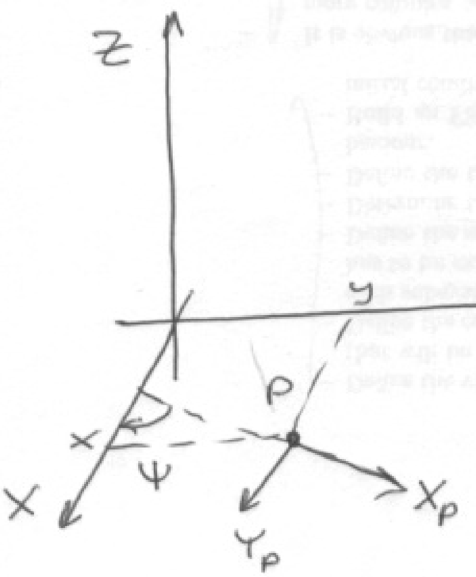
BPPKP: $\dot{x}\sin(\varphi+\theta) - \dot{y}\cos(\varphi+\theta) - l\dot{\varphi}\sin\varphi\sin(\varphi+\theta) - l\dot{\varphi}\cos\varphi\cos(\varphi+\theta) = 0$

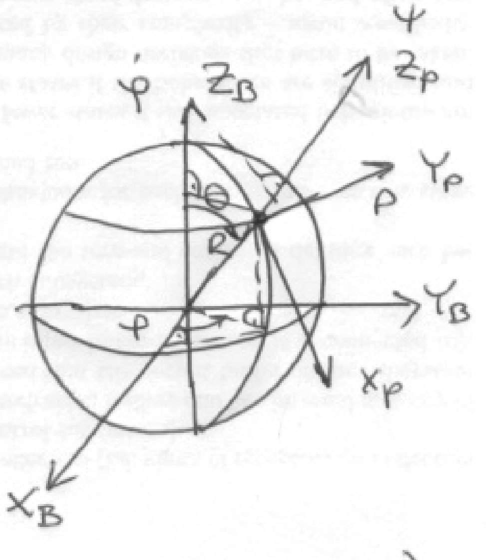
BPPKP: $\dot{x}\sin(\varphi+\theta) - \dot{y}\cos(\varphi+\theta) - l\dot{\varphi}\cos\theta = 0$

Postać Pfaffa:

$$A(q) = \begin{bmatrix} \sin\varphi, & -\cos\varphi, & 0, & 0 \\ \sin(\varphi+\theta), & -\cos(\varphi+\theta), & -l\cos\theta, & 0 \end{bmatrix}.$$

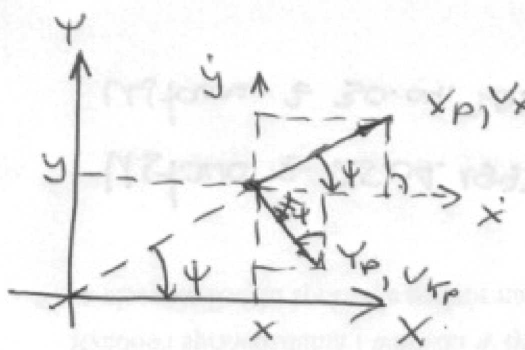
Ex 4: Kula tocząca się





$q = (x, y, \varphi, \theta, \psi)$

Toczenie się polega na braku poślizgu przy ruchu wzdłuż południka i równoleżnika, a także na zakazie wirowania w miejscu.



Obliczamy $v_{x_p} = R\dot\theta$, $v_{y_p} = R\sin\theta\,\dot\varphi$, $\omega_{z_p} = \dot\psi + \dot\varphi\cos\theta$

BPWP + $v_{x_p}\cos\psi + v_{y_p}\sin\psi = \dot x \;\big|\cos\psi \;\big|\sin\psi$

BPWR $v_{x_p}\sin\psi - v_{y_p}\cos\psi = \dot y \;\big|\sin\psi \;\big|-\cos\psi$

$$v_{x_p} = \dot x\cos\psi + \dot y\sin\psi$$
$$v_{y_p} = \dot x\sin\psi - \dot y\cos\psi$$

BPWP : $\dot x\cos\psi + \dot y\sin\psi - R\dot\theta = 0$

BPWR : $\dot x\sin\psi - \dot y\cos\psi - R\sin\theta\,\dot\varphi = 0$

BW : $\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta = 0$

Mamy macierz Pfaffa:

$$A(q) = \begin{bmatrix} \cos\psi, & \sin\psi, & 0, & -R, & 0 \\ \sin\psi, & -\cos\psi, & -R\sin\theta, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & \cos\theta, & 0, & 1 \end{bmatrix}$$

Alternatywnie, możemy wziąć $\tilde A(q)$, takie że

$$\tilde A(q) = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ \sin\psi & -\cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A(q) = \begin{bmatrix} 1, & 0, & -R s_\theta s_\psi, & -R c_\psi, & 0 \\ 0, & 1, & R s_\theta c_\psi, & -R s_\psi, & 0 \\ 0, & 0, & c_\theta, & 0, & 1 \end{bmatrix}.$$

Ograniczenia fazowe dzielimy na holonomiczne (całkowalne) i nieholonomiczne. Weźmy przykład:

$$q = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad A(q) = [x, y, z], \text{ zatem}$$

$$A(q)\dot{q} = x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = 0.$$

Łatwo zauważyć, że prawa strona jest pochodną

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2) = 0,$$

a zatem $A(q)\dot{q} = 0 \iff x^2+y^2+z^2 = \text{const}$ – układ porusza się po sferze S^2.

Ogólnie, ograniczenie w postaci Pfaffa, $A(q)\dot{q} = 0$, nazywamy holonomicznym, jeżeli istnieje nieosobliwa macierz $\underset{l\times l}{M(q)}$ i funkcja $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$, $y = F(q)$, takie że

$$M(q)A(q) = \frac{\partial F(q)}{\partial q} = DF(q).$$

Łatwo zauważyć, że jeżeli tak jest, mamy

$$0 = M(q)A(q)\dot{q} = DF(q)\dot{q} = \frac{d}{dt}F(q(t)) \Rightarrow$$

$$F(q) = \text{const}$$

Sprawdzanie holonomiczności / nieholonomiczności z definicji może być trudne. Pokażmy jednak przykład posztrygalny:

Ex: $A(q) = [\sin\varphi, -\cos\varphi, 0]$ – koło, łyżwa, narta, $q = (x, y, \varphi)$

Załóżmy, że istnieje $m(q) \neq 0$ i $F(q)$, takie że

$$m(q)\sin\varphi = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad m(q)\cos\varphi = -\frac{\partial F}{\partial y}, \quad m(q)\cdot 0 = \frac{\partial F}{\partial \varphi}.$$

Obliczamy $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \varphi} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial \varphi} = 0$, a także

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial m}{\partial \varphi}\sin\varphi + m\cos\varphi &= 0 \\ \frac{\partial m}{\partial \varphi}\cos\varphi - m\sin\varphi &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow m(q) = \frac{\partial m}{\partial \varphi} = 0. \text{ Nieholonomiczność.}$$