# Mechanika analityczna, II r AiR

## Wykład 8

## Twierdzenie Poincaré. Bąk Lagrange'a

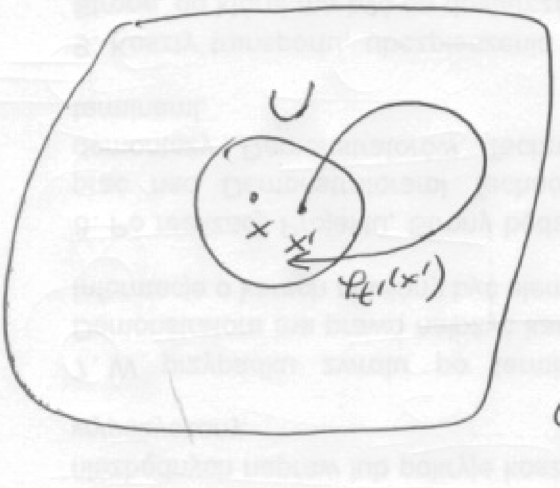
Konsekwencją tw. Liouville'a o dywergencji jest następujące twierdzenie, zwane twierdzeniem Poincaré o powrocie. Twierdzenie to opisuje trajektorie układu hamiltonowskiego.

### Twierdzenie

Załóżmy, że układ $\dot{x}=f(x)$ ma $\operatorname{div} f(x)=0$. Niech $D\subset R^n$ oznacza zbiór niezmienniczy, ograniczony ($\varphi_t(D)\subset D$, $\mathrm{vol}\, D<\infty$). Wówczas, w każdym otoczeniu $U$ punktu $x\in D$ istnieje punkt $x'\in U$, taki że w pewnej chwili $t'$ $\varphi_{t'}(x')\in U$ ($\varphi_{t'}(U)\cap U\neq\emptyset$).

Rysunek:

$D\subset R^n$




Dowód: Weźmy ciąg chwil

$$t_1<t_2<\dots<t_k<\dots\to+\infty$$

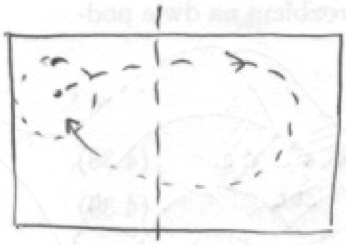
i obliczmy $\varphi_{t_k}(U)$. Z niezmienniczości $D$ wynika, że $\varphi_{t_k}(U)\subset D$. Gdyby $\varphi_{t_i}(U)$ i $\varphi_{t_j}(U)$, dla każdego $t_i$ i $t_j$ były rozłączne, to $\cancel{\sum \varphi_{t_i}(U)}$ $\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{vol}\,\varphi_{t_i}(U)=\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{vol}(U)=\infty$ (zbiór otwarty $U$ ma $\mathrm{vol}\, U>0$).

Zatem, musi być tak, że $\varphi_{t_i}(U)\cap\varphi_{t_j}(U)\neq\emptyset$, czyli

$$\varphi_{\underbrace{t_i-t_j}_{t'}}(U)\cap U\neq 0.$$

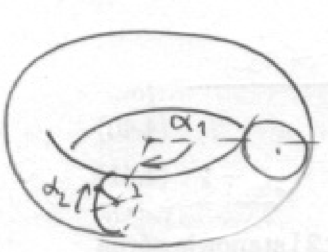
Uwaga:

Twierdzenie zachodzi dla układu hamiltonowskiego, w szczególności określonego na ograniczonym obszarze X.

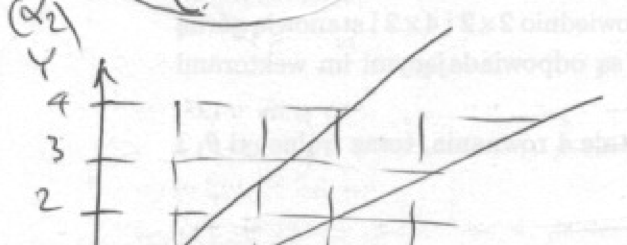


Podobnie z polowaniem na lwy na sawannie.

Przykład układu o zerowej dywergencji na obszarze ograniczonym. Weźmy torus $T^2 = S^1 \times S^1$




Położenie punktu na $T^2$ definiują dwa kąty $\alpha_1$ i $\alpha_2$.




Torus powstaje przez zwinięcie tej siatki wzdłuż osi X i Y = utożsamienie punktów o współrzędnych całkowitych.

Rozważmy stałe pole wektorowe:

$$f(\alpha) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

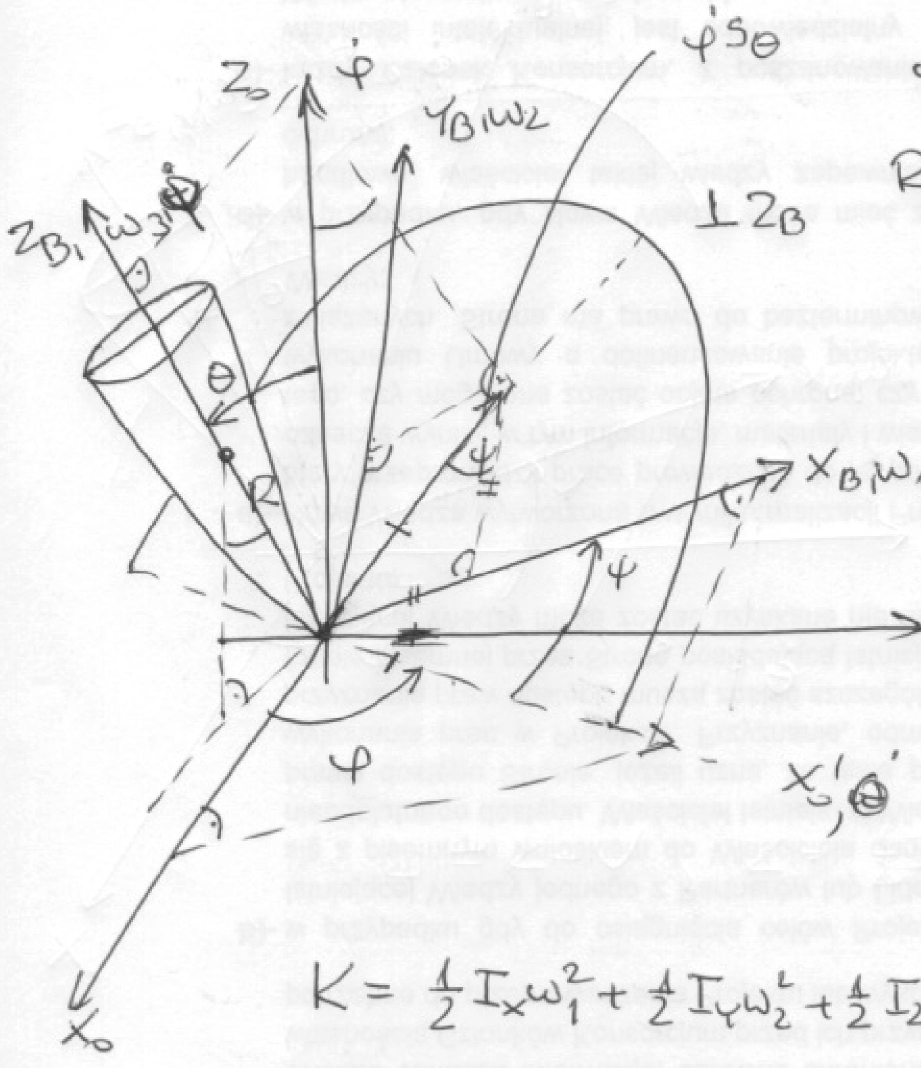
Mamy $\dot{\alpha}_1 = a$, $\dot{\alpha}_2 = b \Rightarrow \boxed{\frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} = \frac{b}{a} \Rightarrow \alpha_2 = \frac{b}{a}\alpha_1}$

$\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = 0$

Jeżeli $\frac{b}{a}$ = liczba wymierna = stosunek liczb całkowitych, to prosta $\alpha_2 = \frac{b}{a}\alpha_1$ przechodzi przez węzeł sieci i trajektoria na torusie zamyka się po pewnej liczbie obiegów. Jeżeli $\frac{b}{a}$ jest liczbą niewymierną, prosta „nawija się" nieograniczenie

= иррациональная обмотка тора =

# Bąk Lagrange'a




$q = (\varphi, \theta, \psi)$

$R(z, \varphi) R(x, \theta) R(z, \psi)$

$L = K - V$

Dane: $m, I_x, I_y, I_z$

$$K = \frac{1}{2} I_x \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_y \omega_2^2 + \frac{1}{2} I_z \omega_3^2$$

$$\omega_1 = \dot\theta c_\psi + \dot\varphi s_\theta s_\psi$$

$$\omega_2 = -\dot\theta s_\psi + \dot\varphi s_\theta c_\psi$$

$$\omega_3 = \dot\psi + \dot\varphi c_\theta$$

Bąk jest symetryczny: $I_x = I_y = I_1, I_z = I_2$

$$\omega_1^2 = \dot\theta^2 c_\psi^2 + \dot\varphi^2 s_\theta^2 s_\psi^2 + 2\dot\theta\dot\varphi s_\theta s_\psi c_\psi$$

$$\omega_2^2 = \dot\theta^2 s_\psi^2 + \dot\varphi^2 s_\theta^2 c_\psi^2 - 2\dot\theta\dot\varphi s_\theta s_\psi c_\psi$$

$$\omega_3^2 = \dot\psi^2 + \dot\varphi^2 c_\theta^2 + 2\dot\psi\dot\varphi c_\theta$$

$$V = mgRc_\theta$$

$$K = \frac{1}{2} I_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2} I_2 \omega_3^2$$

$$L = \frac{1}{2} I_1 (\dot\theta^2 + \dot\varphi^2 s_\theta^2) + \frac{1}{2} I_2 (\dot\psi + \dot\varphi c_\theta)^2 - mgR c_\theta$$

$$Q(q) = \begin{bmatrix} I_1 s_\theta^2 + I_2 c_\theta^2 & 0 & I_2 c_\theta \\ 0 & I_1 & 0 \\ I_2 c_\theta & 0 & I_2 \end{bmatrix}$$

REL: $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot q} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = I_1 \dot\varphi s_\theta^2 + I_2 (\dot\psi + \dot\varphi c_\theta) c_\theta \ , \ \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = I_1 \dot\theta \ , \ \frac{\partial L}{\partial \theta} = I_1 \dot\varphi^2 s_\theta c_\theta - I_2 (\dot\psi + \dot\varphi c_\theta) \dot\varphi s_\theta + mgR s_\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\psi} = I_2 (\dot\psi + \dot\varphi c_\theta) \ , \ \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0$$

$$\begin{cases} (I_1 s_\theta^2 + I_2 c_\theta^2) \dot\varphi + I_2 c_\theta \dot\psi = const \\ I_1 \ddot\theta - (I_1 - I_2) \dot\varphi^2 s_\theta c_\theta + I_2 \dot\varphi \dot\psi s_\theta - mgR s_\theta = 0 \\ \cancel{I_2 \ddot\psi + I_2 \ddot\varphi c_\theta - I_2 \dot\varphi \dot\theta s_\theta} \\ I_2 (\dot\psi + \dot\varphi c_\theta) = const \end{cases}$$

RKH:

Hamiltonian: $H(q, p) = \frac{1}{2} p^T Q^{-1}(q) p + V(q)$

$$\det Q(q) = I_1^2 I_2 s_\theta^2$$

$$Q^{-1}(q) = \frac{1}{I_1^2 I_2 s_\theta^2}\begin{bmatrix} I_1 I_2 & 0 & -I_1 I_2 c_\theta \\ 0 & I_1 I_2 s_\theta^2 & 0 \\ -I_1 I_2 c_\theta & 0 & I_1(I_1 s_\theta^2 + I_2 c_\theta^2) \end{bmatrix}$$

$$H(q,p) = \frac{1}{2}\frac{p_1^2}{I_1 s_\theta^2} + \frac{1}{2}\frac{p_2^2}{I_1} + \frac{1}{2} p_3^2 \frac{I_1 s_\theta^2 + I_2 c_\theta^2}{I_1 I_2 s_\theta^2} -$$

$$- \frac{p_1 p_3 c_\theta}{I_1 s_\theta^2} + mgR c_\theta$$

RKH: $\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{I_1 s_\theta^2} - \frac{p_3 c_\theta}{I_1 s_\theta^2} = \frac{p_1 - p_3 c_\theta}{I_1 s_\theta^2}$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2}{I_1}$$

$$\dot{\psi} = \frac{\partial H}{\partial p_3} = \frac{p_3(I_1 s_\theta^2 + I_2 c_\theta^2)}{I_1 I_2 s_\theta^2} - \frac{p_1 c_\theta}{I_1 s_\theta^2} = \frac{p_3(I_1 s_\theta^2 + I_2 c_\theta^2) - p_1 I_2 c_\theta}{I_1 I_2 s_\theta^2}$$

$$\dot{p}_1 = 0 = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} \Rightarrow p_1 = const$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -\frac{p_1^2 c_\theta + p_3^2 c_\theta + p_1 p_3 (1 + c_\theta^2)}{I_1 s_\theta^3} + mgR s_\theta$$

$$\dot{p}_3 = -\frac{\partial H}{\partial \psi} = 0 \Rightarrow p_3 = const$$

~~NIE~~

Niezmienniki: $p_1, p_3, H$

Twierdzenie Liouville'a: niezależność, inwolucje

$$\text{rank}\begin{bmatrix} \underbrace{\frac{\partial H}{\partial \varphi}}_{=0} & \underbrace{\frac{\partial H}{\partial \theta}}_{=-\dot{p}_2} & \underbrace{\frac{\partial H}{\partial \psi}}_{=0} & \frac{\partial H}{\partial p_1} & \underbrace{\frac{\partial H}{\partial p_2}}_{\dot{\theta}=\frac{p_2}{I_1}} & \frac{\partial H}{\partial p_3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3, \text{ jeżeli } p_2 \neq 0$$

lub $\dot{p}_2 \neq 0$

(oś bąka zmienia nachylenie)

$$\{p_1, p_3\} = \underbrace{\left(\frac{\partial p_1}{\partial \varphi}\right)^T}_{=0} \frac{\partial p_3}{\partial p} - \underbrace{\left(\frac{\partial p_3}{\partial \varphi}\right)^T}_{=0} \frac{\partial p_1}{\partial p} = 0$$

$$\{p_1, H\} = \left(\frac{\partial p_1}{\partial \varphi}\right)^T \frac{\partial H}{\partial p} - \left(\frac{\partial H}{\partial \varphi}\right)^T \underbrace{\frac{\partial p_1}{\partial p}}_{=e_1} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0$$

$$\{p_3, H\} = \underbrace{\left(\frac{\partial p_3}{\partial \varphi}\right)^T}_{=0} \frac{\partial H}{\partial p} - \left(\frac{\partial H}{\partial \varphi}\right)^T \underbrace{\frac{\partial p_3}{\partial p}}_{=e_3} = -\frac{\partial H}{\partial \psi} = 0$$

RKH można rozwiązać przez kwadratury.

<u>Analiza:</u>

Mamy $p_1, p_3 = \text{const}$. Hamiltonian

$$H = \frac{1}{2I_1 s_\theta^2}(p_1 - p_3 c_\theta)^2 + \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 + mgR\,c_\theta + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{p_3^2}{I_2}}_{\text{const}},$$

zatem $H - \frac{1}{2}\frac{p_3^2}{I_2} = E = \frac{(p_1 - p_3 c_\theta)^2}{2I_1 s_\theta^2} + \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 + mgR\,c_\theta$

Wprowadzamy nową współrzędną $u = \cos\theta$

$$\frac{du}{dt} = \dot{u} = -\sin\theta\,\dot{\theta}, \quad \dot{u}^2 = s_\theta^2\dot{\theta}^2 = (1-u^2)\dot{\theta}^2.$$

Z drugiej strony

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2E}{I_1} - \frac{(p_1 - p_3 u)^2}{I_1^2(1-u^2)} - \frac{2mgRu}{I_1},$$

a więc

$$\dot{u}^2 = (1-u^2)\frac{2(E - mgRu)}{I_1} - \frac{(p_1 - p_3 u)^2}{I_1^2} = (\alpha - \beta u)(1-u^2) - (a - bu)^2,$$

gdzie $\alpha = \frac{2E}{I_1}$, $\beta = \frac{2mgR}{I_1}$, $a = \frac{p_1}{I_1}$, $b = \frac{p_3}{I_1}$.

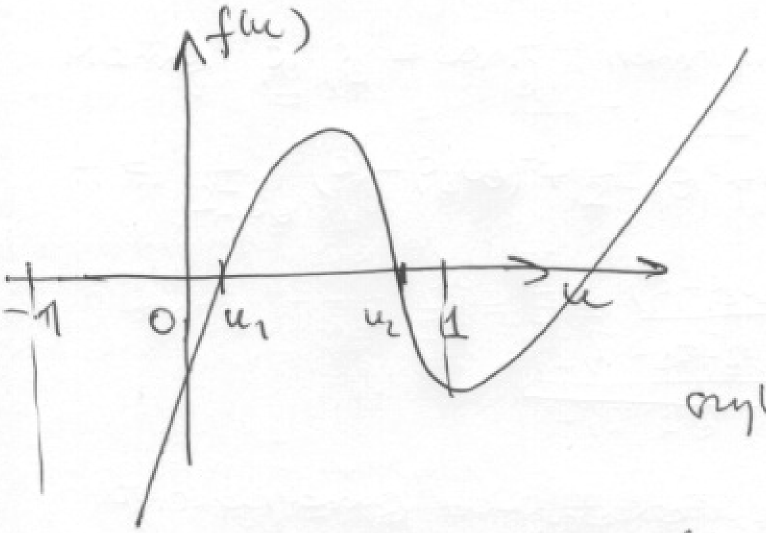
Także

$$\dot{\varphi} = \frac{a-bu}{1-u^2}, \quad \dot{\psi} = \frac{p_3}{I_2} + \frac{(p_3 - p_1 u)u I_2}{I_1 I_2 (1-u^2)}$$

$$\dot{\psi} = c + \frac{(b-au)u}{1-u^2} = \frac{c - cu^2 + bu - au^2}{1-u^2}$$

$$\dot{\psi} = \frac{c + bu - (a+c)u^2}{1-u^2}, \quad c = \frac{p_3}{I_2}.$$

Mamy więc $\quad \dot{u}^2 = f(u) = (\alpha - \beta u)(1-u^2) - (a-bu)^2 \cong u^3$



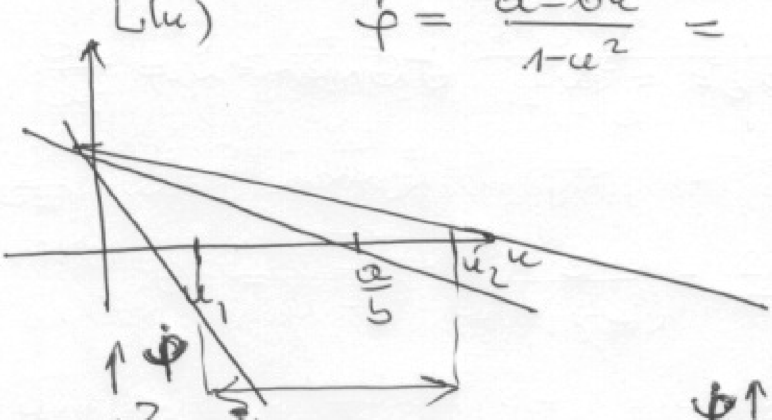

$f(u)$ ma sens jeżeli

$u_1 \leq u \leq u_2$,

czyli

$\underline{\theta_2 \leq \theta \leq \theta_1}$

$$\dot{\varphi} = \frac{a-bu}{1-u^2} = \frac{L(u)}{1-u^2}$$

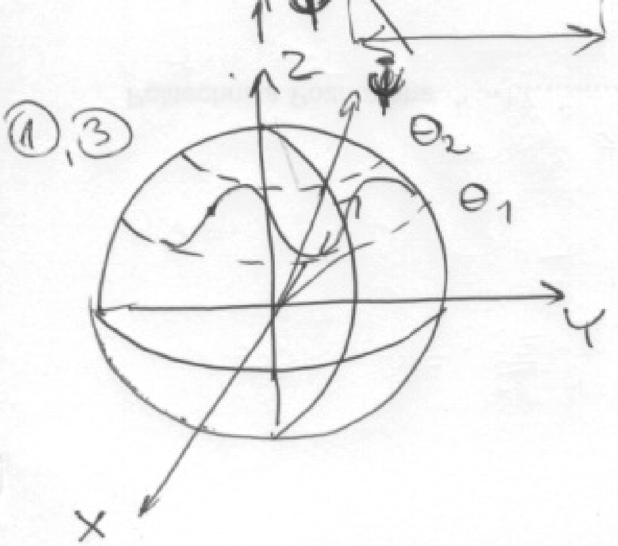


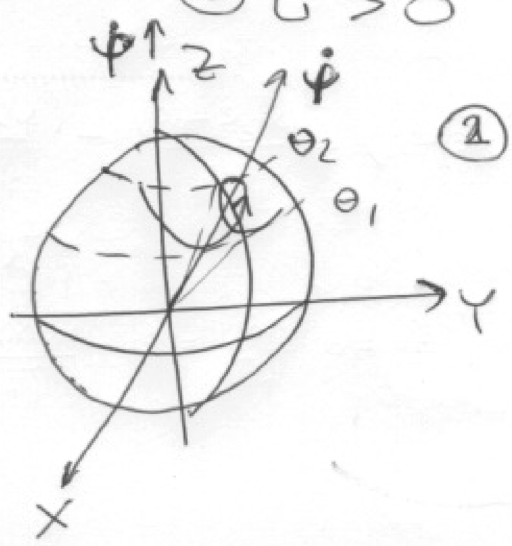

w przedziale $u_1, u_2$

① $L < 0$

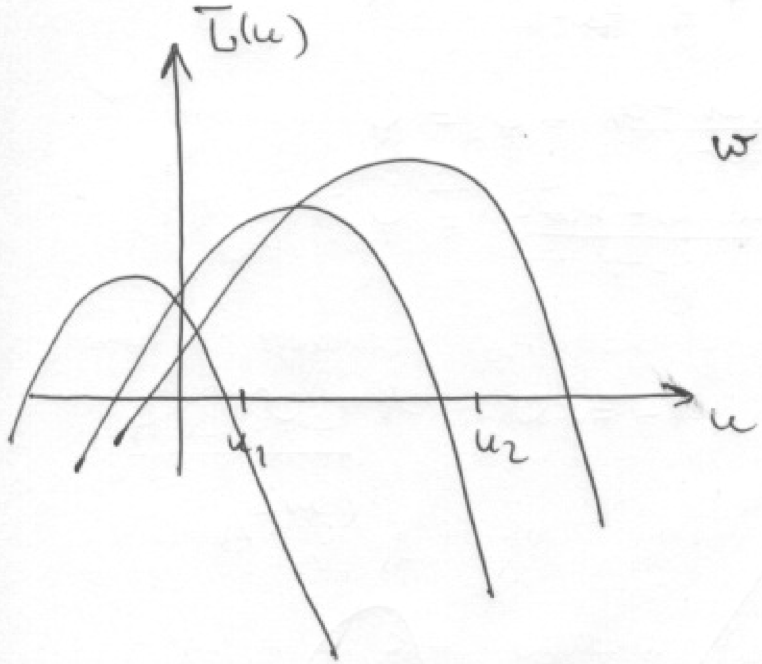
② $L$ zmienia znak

③ $L > 0$



$$\dot{\psi} = \frac{c + bu - (a+c)u^2}{1-u^2} = \frac{\bar{L}(u)}{1-u^2}$$




w przedziale $u_1, u_2$

$\bar{L} < 0$, $\bar{L}$ zmienia znak, $\bar{L} > 0$

Podsumowanie: ruch bąka ma trzy składowe:

$\Theta$ - nutacja, $\varphi$ - precesja, $\psi$ - wirowanie