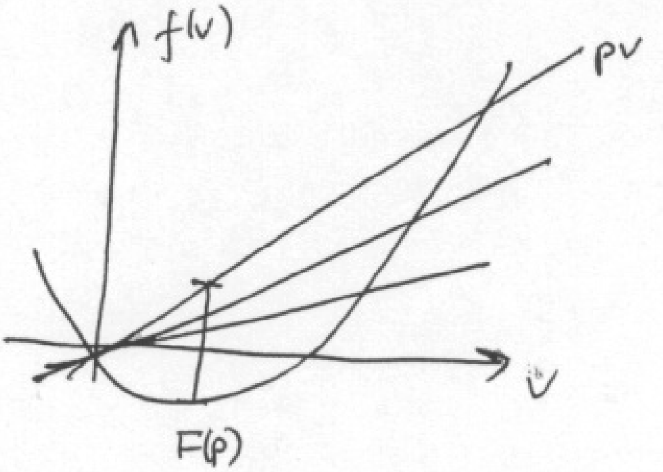
Mechanika analityczna, II r AiR
Wykład 7
Mechanika hamiltonowska. Twierdzenie Liouville'a

Rozważmy funkcję $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $v \mapsto f(v)$. Definiujemy przekształcenie Legendre'a funkcji f:

$$F(p) = \max_v \left(pv - f(v)\right).$$

Warunek: $\frac{d}{dv}\left(pv - f(v)\right) = p - \frac{df}{dv} = 0 \Rightarrow v = v(p)$

$$\boxed{F(p) = p\,v(p) - f(v(p))}$$



Ex: $f(v) = v^2$, obliczamy $p = \frac{df}{dv} = 2v \Rightarrow v(p) = \frac{1}{2}p$

$$F(p) = p \cdot \tfrac{1}{2}p - \left(\tfrac{1}{2}p\right)^2 = \tfrac{1}{4}p^2$$

$f(v) = v^4$, obliczamy $p = \frac{df}{dv} = 4v^3 \Rightarrow v(p) = \left(\frac{p}{4}\right)^{1/3}$.

$$F(p) = p \cdot \left(\frac{p}{4}\right)^{1/3} - \left(\frac{p}{4}\right)^{4/3} = p^{4/3}\left(\frac{1}{4^{1/3}} - \frac{1}{4^{4/3}}\right) = \left(\frac{p}{4}\right)^{4/3} \cdot 3$$

Weźmy teraz lagranżian $L(q,\dot{q}) = L(q,v)$ i obliczmy p. Legendre'a względem v traktując q jako parametr:

$$H(q,p) = \max_{v}\left(p^T v - L(q,v)\right)$$

wektor wierszowy

Warunek $\frac{\partial}{\partial v}\left(p^T v - L(q,v)\right) = p^T - \frac{\partial L}{\partial v} = 0 \Rightarrow v = v(q,p)$

Zatem

$$\boxed{H(q,p) = p^T v(q,p) - L(q, v(q,p))},$$

Funkcję $H(q,p)$ nazywamy hamiltonianem. Niech

$$L(q,v) = K - V = \frac{1}{2} v^T Q(q) v - V(q).$$

Otrzymujemy: $p^T - \frac{\partial L}{\partial v} = p^T - v^T Q = 0 \Rightarrow p = Qv \Rightarrow v = Q^{-1} p.$

Dlatego

$$\underline{H(q,p) = p^T Q^{-1} p - \frac{1}{2} p^T Q^{-1} Q Q^{-1} p + V = \frac{1}{2} p^T Q^{-1} p + V(q)}$$

Hamiltonian jest to całkowita energia układu wyrażona we współrzędnych q,p.

Mechanika lagrangowska

$q, \dot{q} \in \mathbb{R}^n$, $L(q,\dot{q}) = K - V$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \, (F)$$

Mechanika hamiltonowska

$q, p \in \mathbb{R}^n$, położenie + pęd

$$H(q,p) = \max_{v}\left(p^T v - L(q,v)\right)$$

?

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \, (+F)$$

Równanie kanoniczne Hamiltona:

Mamy $H(q,p) = p^T v(q,p) - L(q, v(q,p))$

Obliczmy $\frac{\partial H}{\partial q_i} = p^T \frac{\partial v}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial q_i}$

Ale $p^T = \frac{\partial L}{\partial v}$, stąd

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_i} = -\dot{p}_i \ (+F_i)}$$

Obliczamy $\frac{\partial H}{\partial p_i} = v_i(q,p) + \underbrace{p^T \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial L}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial p_i}}_{=0}$,

stąd $\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i$.

Równanie kanoniczne Hamiltona:

$$\boxed{\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \ i = 1,2,\dots,n}$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \ (+F)$$

wektory kolumnowe

Ex: Ruch Planety wokół Słońca:

$q = (r,\theta), \ \dot{q} = (\dot{r}, \dot{\theta})$

$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2$

$V = -\frac{m}{r}$

$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$

$x = r\cos\theta, \ \dot{x} = \dot{r} c_\theta - r\dot{\theta} s_\theta$

$y = r\sin\theta, \ \dot{y} = \dot{r} s_\theta + r\dot{\theta} c_\theta$

$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$

$L = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{m}{r}$

Równania ruchu:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot r} = m\dot r, \quad \frac{\partial L}{\partial r} = m r\dot\theta^2 - \frac{m}{r^2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = m r^2\dot\theta, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\begin{cases} m\ddot r - m r\dot\theta^2 + \frac{m}{r^2} = 0 \\ m r^2\dot\theta = h = const \end{cases}$$

Hamiltonian: $L(q,v) = \cancel{\frac{1}{2}mv^2 + \frac{m}{r}}\ \frac{1}{2}\dot q^T \overbrace{\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & mr^2 \end{bmatrix}}^{Q} \dot q + \frac{m}{r}$

$$H(q,p) = \frac{1}{2}p^T Q^{-1} p + V(q)$$

$$H(q,p) = \frac{1}{2}\frac{p_1^2}{m} + \frac{1}{2}\frac{p_2^2}{mr^2} - \frac{m}{r}$$

Równanie kanoniczne Hamiltona:

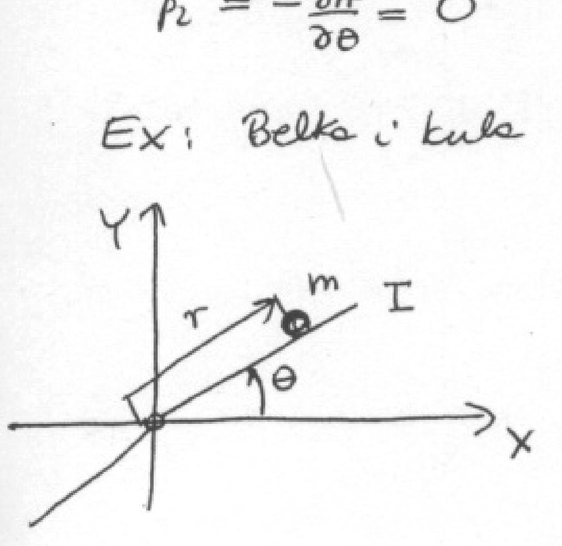
$$\dot q = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot p = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

$$\dot r = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{m}, \quad \dot\theta = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2}{mr^2}$$

$$\dot p_1 = -\frac{\partial H}{\partial r} = -\left(\frac{p_2^2}{2m}(-2)r^{-3} - m(-1)r^{-2}\right) = \frac{p_2^2}{mr^3} - \frac{m}{r^2}$$

$$\dot p_2 = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \quad (22P)$$

Ex: Belka i kula



$$q = (r,\theta), \quad \dot q = (\dot r, \dot\theta)$$

$$L(q,\dot q) = \frac{1}{2}m(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2) + \frac{1}{2}I\dot\theta^2 - mgrs\theta$$

$$= \frac{1}{2}\dot q^T \underbrace{\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & mr^2+I \end{bmatrix}}_{Q} \dot q - mgrs\theta$$

$$H(q,p) = \frac{1}{2} p^T Q^{-1} p + V = \frac{1}{2}\frac{p_1^2}{m} + \frac{1}{2}\frac{p_2^2}{mr^2+I} + mgr\sin\theta$$

Równania kanoniczne Hamiltona:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{m}, \quad \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2}{mr^2+I} \\ \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial r} = -\left(\frac{p_2^2}{\cancel{2}}(-1)\frac{1}{(mr^2+I)^{2}} \cdot \cancel{2}mr + mg\sin\theta \right) \\ \dot{p}_1 = \frac{p_2^2 mr}{(mr^2+I)^2} - mg\sin\theta \\ \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -mgr\cos\theta \end{cases}$$

Własność hamiltonianu:

$$\frac{d}{dt} H(q(t),p(t)) = \left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)^T \dot{q} + \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^T \dot{p} = \left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)^T \frac{\partial H}{\partial p} - \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^T \frac{\partial H}{\partial q} = 0.$$

Hamiltonian jest stałą ruchu (całką pierwszą) RKH.

Nawias Poissona

Niech będzie dana funkcja $F(q,p)$. Obliczmy jej pochodną po czasie, wzdłuż trajektorii RKH:

$$\frac{d}{dt} F(q(t),p(t)) = \left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)^T \dot{q} + \left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)^T \dot{p} = \left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)^T \frac{\partial H}{\partial p} - \left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)^T \frac{\partial H}{\partial q} = \{F, H\}$$

– nawias Poissona F i H.

Nawias możemy zdefiniować dla dwóch dowolnych funkcji $F_1(q,p)$ i $F_2(q,p)$:

$$\{F_1, F_2\}(q,p) = \left(\frac{\partial F_1}{\partial q}\right)^T \frac{\partial F_2}{\partial p} - \left(\frac{\partial F_1}{\partial p}\right)^T \frac{\partial F_2}{\partial q}.$$

Zauważmy, że $F(q,p)$ jest stałą ruchu, jeżeli

$$\{F, H\} = 0.$$

Własności nawiasu Poissona:

1). $\{F, F\} = 0$ – antyzwrotność

2). $\{F_1, F_2\} = -\{F_2, F_1\}$ – antysymetria

3). $\{F_1, \{F_2, F_3\}\} + \{F_2, \{F_3, F_1\}\} + \{F_3, \{F_1, F_2\}\} = 0$ – tożsamość Jacobiego

Nawias Poissona służy do generacji niezmienników:

Twierdzenie

Jeżeli F_1, F_2 – niezmienniki, to $\{F_1, F_2\}$ jest także niezmiennikiem.

$$\{F_1, H\} = \{F_2, H\} = 0$$

$$\{\{F_1, F_2\}, H\} = -\{H, \{F_1, F_2\}\} = -\left(-\{F_1, \overset{0}{\{F_2, H\}}\} - \{F_2, \overset{0}{\{H, F_1\}}\}\right) = 0$$

Stałe ruchu (niezmienniki) są przedmiotem

Twierdzenie (Liouville'a o niezmiennikach)

Załóżmy, że układ hamiltonowski $\dot q = \frac{\partial H}{\partial p}, \dot p = -\frac{\partial H}{\partial q}, q, p \in \mathbb{R}^n$, ma n niezmienników $F_1, F_2, \dots, F_n$, gdzie $F_1 = H$, niezależnych i pozostających w inwolucji (wypasionych). Wówczas:

- trajektoria $(q(t), p(t))$ układu leży na n-wymiarowej rozmaitości

$$M_\alpha = \{(q,p) \in \mathbb{R}^{2n} \mid F_1(q,p) = \alpha_1, \dots, F_n(q,p) = \alpha_n\}$$

- RK H można rozwiązać przez kwadratury

Niezależność:

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial q_1} \cdots \frac{\partial F_1}{\partial q_n} & \frac{\partial F_1}{\partial p_1} \cdots \frac{\partial F_1}{\partial p_n} \\ \vdots & \\ \frac{\partial F_n}{\partial q_1} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial q_n} & \frac{\partial F_n}{\partial p_1} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial p_n} \end{bmatrix}(q,p) = n$$

dla $(q,p) \in M_\alpha$

Inwolucja: $\{F_i, F_j\} = 0 \quad \forall i,j = 1,2,\dots n.$

Ex: Ruch Planety wokół Słońca:

$$H(q,p) = \frac{1}{2}\frac{p_1^2}{m} + \frac{1}{2}\frac{p_2^2}{mr^2} - \frac{m}{r}, \quad q = (r,\theta), \quad n = 2$$

RKH: $$\dot r = \frac{p_1}{m}, \quad \dot\theta = \frac{p_2}{mr^2}, \quad \dot p_2 = 0, \quad \dot p_1 = -\frac{\partial H}{\partial r} = -\left(\frac{p_2^2}{2m}(-2)r^{-3} + \frac{m}{r^2}\right)$$

$$= \frac{p_2^2}{mr^3} - \frac{m}{r^2}$$

Niezmienniki: H, p_2

Niezależność: $$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial r} & \overset{0}{\overset{\|}{\frac{\partial H}{\partial \theta}}} & \frac{\partial H}{\partial p_1} & \frac{\partial H}{\partial p_2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2 \text{ jeśli } \frac{\partial H}{\partial r} = -\dot p_1 \neq 0$$

$$\text{lub } \frac{\partial H}{\partial p_1} = \dot r \neq 0$$

$$\dot r \neq 0 \text{ lub } \dot p_1 = (m\dot r)^{\cdot} = m\ddot r \neq 0 \Rightarrow \dot r \neq 0 \vee \ddot r \neq 0.$$

Inwolucja $$\{H, p_2\} = \left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)^T \frac{\partial p_2}{\partial p} - \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^T \overset{0}{\frac{\partial p_2}{\partial q}} = \frac{\partial H}{\partial \theta} = 0, \text{ OK.}$$

Twierdzenie Liouville'a o dywergencji

RKH: $$\dot q = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot p = -\frac{\partial H}{\partial q} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot q \\ \dot p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p} \\ -\frac{\partial H}{\partial q} \end{pmatrix} \text{ – układ}$$

dynamicznej postaci

$$\dot x = X(x), \quad x \in \mathbb{R}^p$$

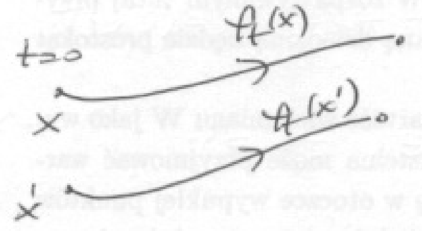
Mając dany stan początkowy x rozwiązujemy układ otrzymując

$x(t) = \varphi_t(x)$ – stan w chwili t, jeśli w $t=0$ stan był x

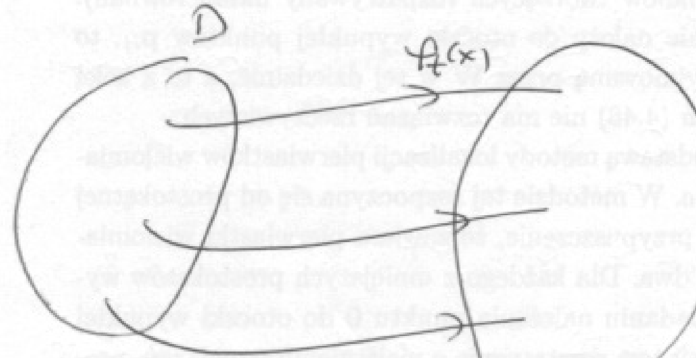
Odwzorowanie ~~$\varphi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ nazywam~~

$$\varphi : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad \varphi(t,x) = \varphi_t(x),$$

nazywamy strumieniem układu. Odwzorowanie $\varphi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest transformacją stanów



Weźmy zbiór stanów początkowych $D \subset \mathbb{R}^n$



$\varphi_t(D)$ – obraz D po czasie t

Pytamy o objętość $vol(\varphi_t(D)) = V_t$. Jeśli ~~$vol\,\varphi_t$~~ $V_t < V_0$ mówimy o kontrakcji, przy $V_t > V_0$ o ekspansji. Miarą zmiany V_t jest dywergencję pola $X(x)$

$$\operatorname{div} X(x) = \operatorname{tr} \frac{\partial X}{\partial x}(x).$$

Ex: wahadło: $\ddot{x} = -\sin x$ $\quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\sin x_1 \end{cases}$

$$X(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\sin x_1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x_1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \operatorname{div} X(x) = \operatorname{tr} \frac{\partial X}{\partial x} = 0$$

Ex: układ

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_1^3 \end{cases} \qquad X(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2^2 \\ x_1^3 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial X}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 & 2x_2 \\ 3x_1^2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\operatorname{div} X(x) = \operatorname{tr} \frac{\partial X}{\partial x} = 1$$

~~Można pokazać, że~~

$$\cancel{\frac{dV_t}{dt} = \int_D \operatorname{div} X(x) \, dx}.$$

Twierdzenie Liouville'a (o dywergencji)

Jeżeli $\operatorname{div} X(x) = 0$, to strumień układu zachowuje objętość, tzn. $V_t = V_0 = \operatorname{vol}(D) = \text{const}$. Strumień układu hamiltonowskiego zachowuje objętość.

Mamy $X(q,p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p} \\ -\frac{\partial H}{\partial q} \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} & \frac{\partial^2 H}{\partial p^2} \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial q^2} & -\frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{div} X(q,p) = \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial q_1} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial q_2} + \dots + \frac{\partial^2 H}{\partial p_n \partial q_n} - \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial p_1} - \dots - \frac{\partial^2 H}{\partial q_n \partial p_n} \right) = 0.$$