Mechanika analityczna, II r AiR

Wykład 6

Geodezyjne. Przekształcenie Legendre'a. Hamiltonian

Wyprowadziliśmy równanie dynamiki postaci:

$$Q(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + D(q) = O(F),$$

gdzie $\underset{n\times n}{Q(q)} = [Q_{ij}(q)]$ – macierz inercji układu

$\underset{n\times n}{C(q,\dot{q})}$ – macierz sił Coriolisa i odśrodkowych

$\underset{n\times 1}{D(q)}$ – wektor sił grawitacji

$\underset{n\times 1}{F}$ – wektor sił uogólnionych

Macierze występujące w równaniach mają następujące własności:

$$Q(q) = Q^T(q) > 0$$

$$\dot{Q}(q) = C(q,\dot{q}) + C^T(q,\dot{q})$$

Pokażmy, że jeżeli $L(q,\dot{q}) = K = \frac{1}{2}\dot{q}^T Q(q)\dot{q}$, to wzdłuż trajektorii układu

$$Q(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} = 0$$

zachodzi własność

$$\frac{dL(q,\dot{q})}{dt} = 0 \Rightarrow K(q,\dot{q}) = \text{const}$$

②

Otrzymamy

$$\frac{d}{dt} L(q,\dot q) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot q^T Q(q)\dot q\right) = \frac{1}{2}\ddot q^T Q\dot q + \frac{1}{2}\dot q^T Q\ddot q +$$

$$+ \frac{1}{2}\dot q^T \dot Q\dot q = \dot q^T Q\ddot q + \frac{1}{2}\dot q^T \dot Q\dot q$$

Ale $Q\ddot q = -C(q,\dot q)\dot q$, zatem

$$\dot q^T Q\ddot q + \frac{1}{2}\dot q^T \dot Q\dot q = -\dot q^T C(q,\dot q)\dot q + \frac{1}{2}\dot q^T \dot Q\dot q =$$

$$= \frac{1}{2}\dot q^T(\dot Q - 2C(q,\dot q))\dot q = \frac{1}{2}\dot q^T(C^T - C)\dot q$$

Ponieważ forma kwadratowa zbudowana na macierzy skośnie symetrycznej $= 0$, mamy wynik.

Oczywiście, energia $E(q,\dot q) = K(q,\dot q) + V(q)$ jest także zachowana, mianowicie:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dK}{dt} + \frac{\partial V}{\partial q}\dot q = \dot q^T Q\ddot q + \frac{1}{2}\dot q^T \dot Q\dot q + D^T\dot q$$

Ale $Q\ddot q = -C\dot q - D$, dlatego

$$\frac{dE}{dt} = \underbrace{-\dot q^T C\dot q + \frac{1}{2}\dot q^T \dot Q\dot q}_{=0} - \dot q^T D + D^T\dot q = 0.$$

~~Mamy, że trajektorie Q~~

Niech $L = K$. Wiemy, że trajektorie układu

$$Q\ddot q + C(q,\dot q)\dot q = 0$$

minimalizują funkcjonał

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \dot q^T Q(q)\dot q\, dt = \int_{t_0}^{t_1} L(q,\dot q)\, dt$$

Rozważmy funkcjonał

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \left(\dot q^T Q(q)\, \dot q\right)^{1/2} dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{L(q,\dot q)}\, dt.$$

Wyznaczmy REL:

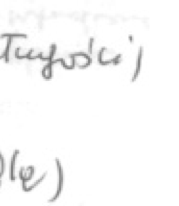
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot q} L^{1/2} - \frac{\partial}{\partial q} L^{1/2} = \frac{d}{dt}\frac{1}{2\sqrt{L}}\frac{\partial L}{\partial \dot q} - \frac{1}{2\sqrt{L}}\frac{\partial L}{\partial q}$$

Ponieważ L jest stałe w czasie, mamy

$$\frac{1}{2\sqrt{L}}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} - \frac{\partial L}{\partial q}\right) = 0,$$ co jest równoważne minimalizacji I. Wniosek: Ekstremale I są ekstremalami J. Dlaczego J jest interesujący?

Obliczmy długość krzywej $q(t)$: $\int_{t_0}^{t_1} \|\dot q(t)\|\, dt =$

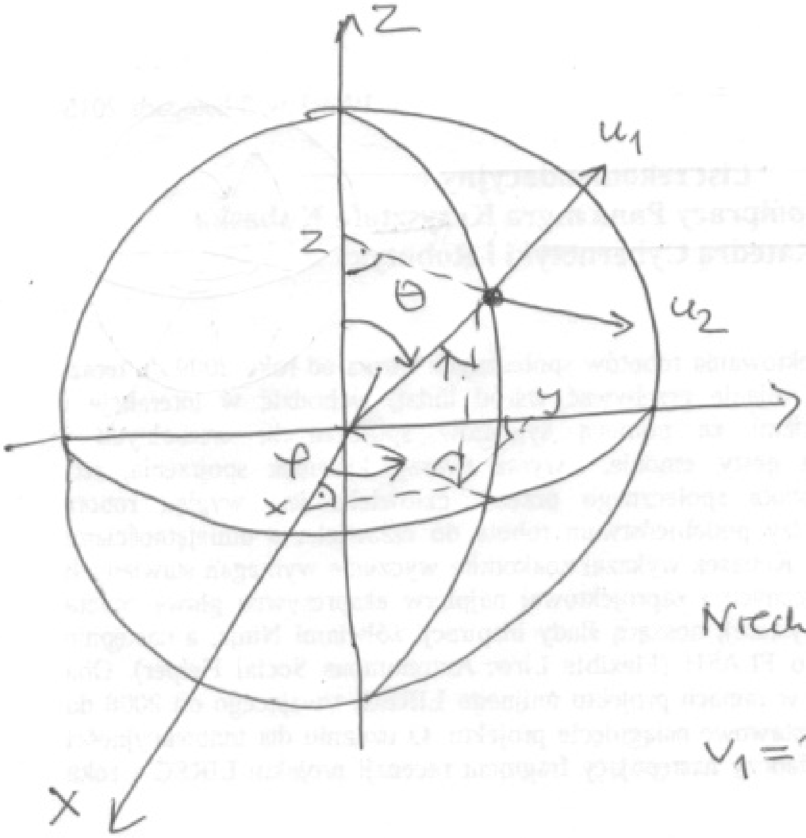
$$= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot q^T \dot q}\, dt.$$ Funkcjonał J różni się od tego funkcjonału sposobem mierzenia długości, mianowicie $\dot q^T \dot q \longmapsto \dot q^T Q(q)\dot q$. Macierz $Q(q)$ definiuje w każdym punkcie $q \in \mathbb{R}^n$ iloczyn skalarny prędkości w tym punkcie



$$(v,w)_Q = v^T Q(q) w.$$

Taki iloczyn skalarny nazywamy metryką Riemanna. ~~W przestrzeni~~ Mówimy, że jeżeli $V(q)=0$, to układ porusza się po geodezyjnych metryki Riemanna wyznaczonej przez energię kinetyczną.

Ex: Metryka Riemanna na S^2



$$\left.\begin{aligned} x &= \sin\theta\cos\varphi \\ y &= \sin\theta\sin\varphi \\ z &= \cos\theta \end{aligned}\right\} F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$F(\varphi,\theta) = (x,y,z)$$

$$DF: \text{p. styczna do } S^2 \to \mathbb{R}^3$$

Niech $u_1, u_2 \in T_{(\varphi,\theta)} S^2$. Obliczamy

$$v_1 = DF(\varphi,\theta)u_1, \quad v_2 = DF(\varphi,\theta)u_2$$

Metryka Riemanna (iloczyn skalarny) na S^2 powinna być zdefiniowana w taki sposób, żeby

$(v_1, v_2) = (u_1, u_2)_Q$, zatem

$$v_1^T v_2 = u_1^T \underbrace{DF^T(\varphi,\theta)\,DF(\varphi,\theta)}_{Q(\varphi,\theta)} u_2$$

Mamy więc

$$Q(\varphi,\theta) = \begin{bmatrix} -s_\theta s_\varphi & s_\theta c_\varphi & 0 \\ c_\theta c_\varphi & c_\theta s_\varphi & -s_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -s_\theta s_\varphi & c_\theta c_\varphi \\ s_\theta c_\varphi & c_\theta s_\varphi \\ 0 & -s_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_\theta^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

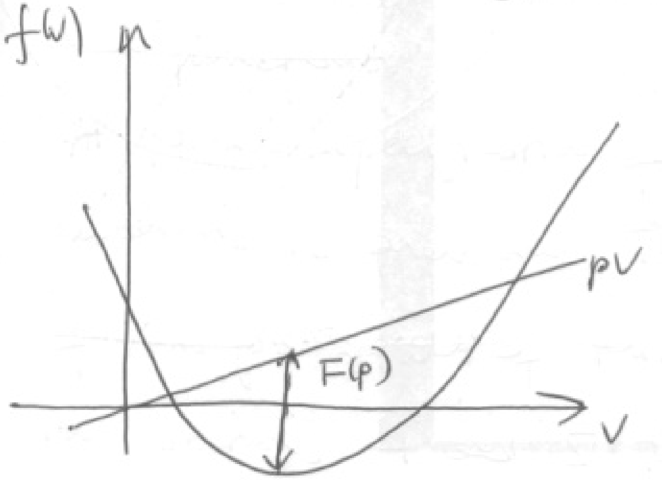
Przekształcenie Legendre'a

Weźmy funkcję $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $v\mapsto f(v)$.

Definiujemy nową funkcję

$$F(p) = \max_v \left(pv - f(v)\right)$$ – p. Legendre'a $f(v)$

Sens geometryczny:



W celu obliczenia $F(p)$ piszemy warunek na maksimum

$$\frac{d}{dv}\left(pv - f(v)\right) = p - \frac{df}{dv} = 0 \Rightarrow p = \frac{df}{dv}.$$

Wyliczamy z tego $v(p)$ i podstawiamy, zatem

$$F(p) = pv(p) - f(v(p)).$$

Ex: $f(v) = \frac{1}{2}v^2$, $p = \frac{df}{dv} = v$, $F(p) = p^2 - \frac{1}{2}p^2 = \frac{1}{2}p^2$

$f(v) = \frac{1}{4}v^4$, $p = \frac{df}{dv} = v^3$, $v(p) = p^{1/3}$, $F(p) = p^{4/3} - \frac{1}{4}p^{4/3}$,

$$F(p) = \frac{3}{4}p^{4/3}.$$

Niech teraz $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(v)$. Definiujemy

$$F(p) = \max_{v} \left(p^T v - f(v)\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(p^T v - f(v)\right) = 0 \Rightarrow p^T = \underset{\uparrow\ \text{wiersz}}{\frac{\partial f}{\partial v}},\ p = \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^T \Rightarrow v(p)$$

$$\boxed{F(p) = p^T v(p) - f(v(p))}$$

Weźmy Lagranżian: $L(q,v)$ i zdefiniujmy przekształcenie Legendre'a przy stałym q:

$$H(q,p) = \max_{v} \left(p^T v - L(q,v)\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(p^T v - L(q,v)\right) = 0 \Rightarrow p^T = \underset{\uparrow\ \text{wiersz}}{\frac{\partial L(q,v)}{\partial v}} \Rightarrow v(q,p)$$

$$\boxed{H(q,p) = p^T v(q,p) - L(q, v(q,p))}$$

Niech $L = \frac{1}{2} v^T Q(q) v - V(q)$. Obliczamy

$$H(q,p) = p^T Q^{-T} p - \frac{1}{2} p^T Q^{-1} Q Q^{-T} v + V(q) = \frac{1}{2} p^T Q^{-1} p + V(q)$$

$$p^T = \frac{\partial L}{\partial v} = v^T Q \Rightarrow p = Q^T v,\ v = Q^{-T} p = Q^{-1} p$$

Otrzymaliśmy $H(q,p) = \frac{1}{2} p^T Q^{-1} p + V(q)$ = całkowita energia układu. Współrzędną $p = \left(\frac{\partial L}{\partial v}(q,v)\right)^T$ nazywamy pędem uogólnionym.