

## Wykład 2

Mechanika newtonowska: ruch  
układu punktów

Ruch:  $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ ,  $c(t) = (c^1(t), \dots, c^n(t))$

$$N = 3n$$

$c(t)$  ciągłe i odpowiednio gładkie

Ruch układu podlega:

- Zasady determinizmu
- zasady niezmienniczości (względności)

ZD: ruch jest determinowany przez położenie i prędkość początkową

$$\ddot{c} = F(c, \dot{c}, t) \Rightarrow c(t) = \varphi(t, c(0), \dot{c}(0))$$

ZN: ruch jest niezmienny ze względu na

- przesunięcie w czasie  $F(c, \dot{c}, t) = F(c, \dot{c}, s)$ , zatem

$$\ddot{c} = F(c, \dot{c})$$

- przesunięcie w przestrzeni

$$F(c^1+u, c^2+u, \dots, c^n+u, \dot{c}) = F(c^1, \dots, c^n, \dot{c}), u \in \mathbb{R}^3,$$

w szczególności, ruch zależy od względnych położa-

$$F(c, \dot{c}) = F(c^1 - c^i, c^2 - c^i, \dots, c^n - c^i, \dot{c})$$

- ruch jednostajny  $v$ ,  $v \in \mathbb{R}^3$

$$F(c, \dot{c}^1 + v, \dots, \dot{c}^n + v) = F(c, \dot{c}^1, \dots, \dot{c}^n), \text{ tzn.}$$

ruch zależy od względnych prędkości

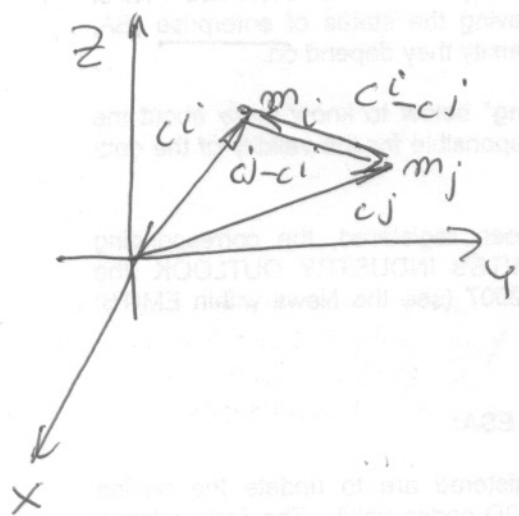
$$F(c, \dot{c}) = F(c, \dot{c}^1 - \dot{c}_i, \dots, \dot{c}^n - \dot{c}_i)$$

- danej w przestrzeni  $u \mapsto Ru$ ,  $R$ -macierz obrotu

$$\ddot{c}_i = F_i(c^1, \dots, c^n, \dot{c}^1, \dots, \dot{c}^n), \text{ mamy}$$

$$F_i(Rc^1, \dots, Rc^n, R\dot{c}^1, \dots, R\dot{c}^n) = R\ddot{c}_i = RF_i(c, \dot{c})$$

Przykładem ruchu spełniającym te warunki jest Przewo Powodzeniowy Ciężarowiec. Weźmy dwa punkty  $m_i, m_j$  o współrzędnych  $c_i, c_j$



$$F_{ij} = \frac{Gm_i m_j}{\|c_i - c_j\|^2} \cdot \frac{c_i - c_j}{\|c_i - c_j\|}$$

$F_{ij}$  nie zależy od czasu

$F_{ij}$  zależy od względnej odległości

$F_{ij}$  (nie) zależy od względnych prędkości

$$c_i \mapsto Rc_i, c_j \mapsto Rc_j, \text{ wtedy}$$

$$\|Rc_i - Rc_j\| = \|c_i - c_j\|, \text{ zatem}$$

$$F_{ij}(Rc_i, Rc_j) = \frac{Gm_i m_j}{\|c_i - c_j\|^3} R(c_i - c_j) = RF_{ij}$$

# Mechanika newtonowska opiera się na trzech zasadach Dynamiki:

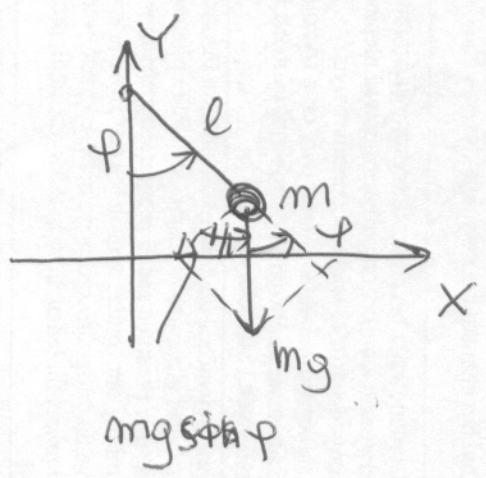
I. Jeżeli na ciało (punkt materialny) nie działają żadne siły, to ciało pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.

II. Przyspieszenie (zmiana ruchu) jest proporcjonalne do wyliczonej siły i zgodne z nią skierowane

$$\ddot{c}_i = \frac{1}{m_i} \cdot f_i, \quad m_i \ddot{c}_i = f_i.$$

III. Każdemu działaniu (sił) odpowiada równe i przeciwnie skierowane przeciwdziałanie

Ex: wahadło matematyczne



II 2DN:  $m l^2 \ddot{\varphi} = -m g l \sin \varphi$   
 $\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin \varphi$   
 $\frac{g}{l} \approx 1$

$$\boxed{\ddot{\varphi} = -\sin \varphi}$$

Podstawiamy

$$q = \varphi, \quad p = \dot{\varphi}$$

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -\sin q \end{cases}$$

Eliminujemy  $\cos$ :

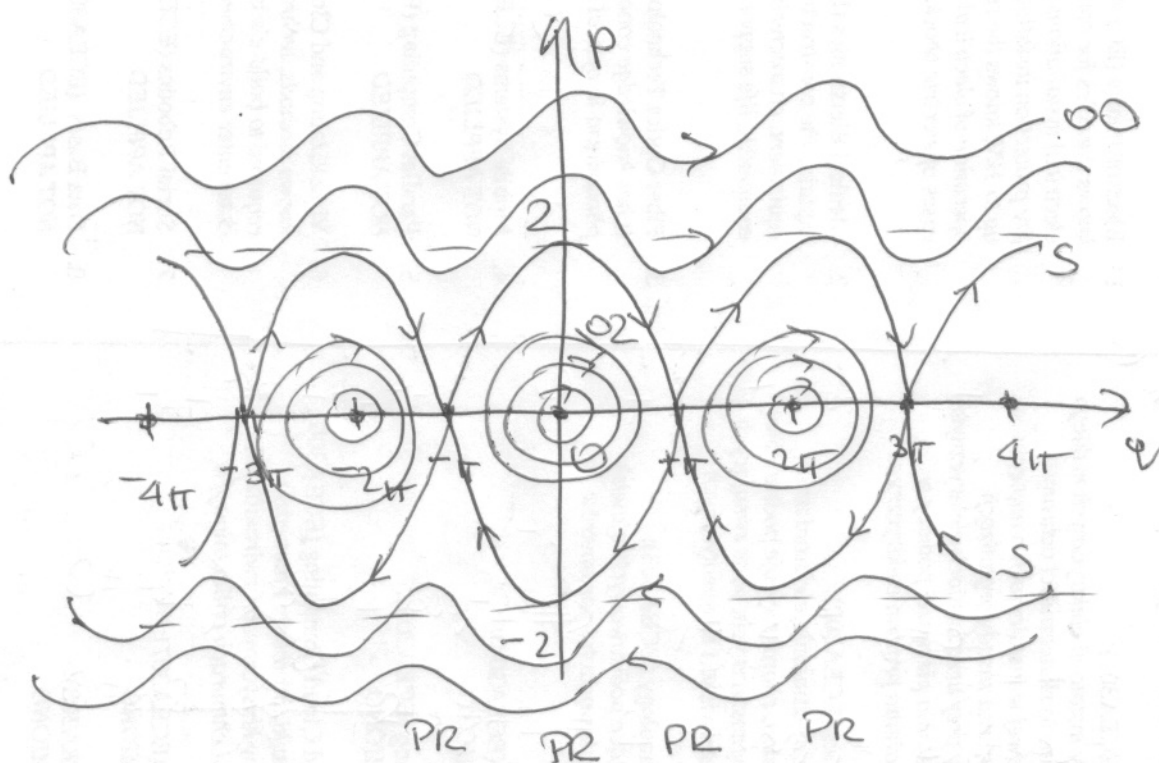
④

$$\frac{dp}{d\psi} = -\frac{\sin\psi}{p} \Rightarrow p dp = -\sin\psi d\psi$$

$$\frac{1}{2} p^2 = \cos\psi + \frac{1}{2} C$$

$$p^2 = 2\cos\psi + C$$

Musi być  $C \geq -2$ . Narysujemy tzw. portret fazowy równania ruchu wahań dla różnych  $C$ .



$$C = -2, \quad p^2 = 2\cos\psi - 2 \Rightarrow \psi = k \cdot 2\pi, \quad p = 0$$

$$C = +2, \quad p^2 = 2\cos\psi + 2 \Rightarrow p^2 = 2(1 + \cos\psi) = 4\cos^2\frac{1}{2}\psi$$

$$p = \pm 2\left|\cos\frac{1}{2}\psi\right|$$

$$\dot{\psi} = p, \quad p > 0 \Rightarrow \psi \nearrow$$

$$C > 2, \quad p^2 = 2\cos\psi + C > 0$$

Portret fazowy pokazuje:

punkty równowagi:  $\psi = k\pi, p = 0$  PR

stabilne:  $\psi = k2\pi, p = 0$

niestabilne:  $\psi = (2k+1)\pi, p = 0$

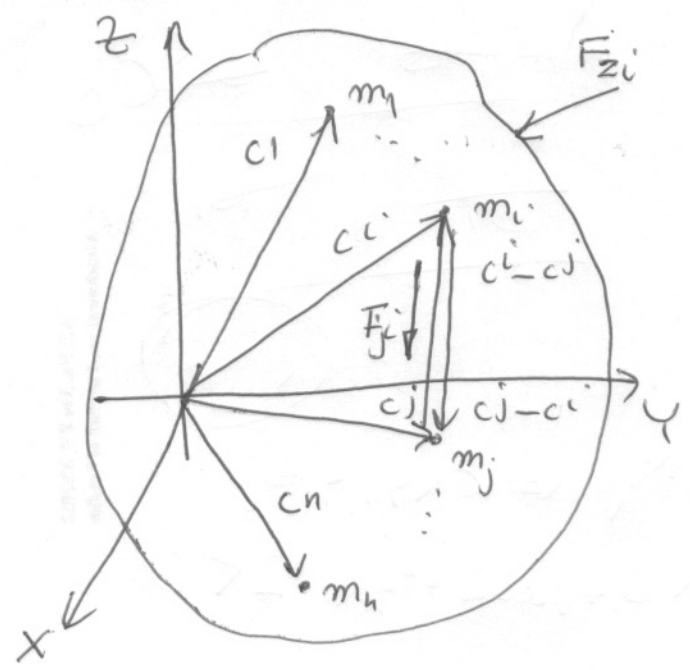
orbity zamknięte (OZ)

orbity otwarte (OO)

separatoryjny (S)

Portret fazowy pozwala dokonać jakościowej analizy ruchu wchałda.

Przy opisie ruchu układu punktów materialnych w ramach mechaniki newtonowskiej przykane jest wprowadzenie pojęć: pęd, moment pędu, energia. Rozważmy układ n punktów oddziaływających na siebie grawitacyjnie i podlegających działaniu sił zewnętrznych



$$m_i \ddot{c}_i = F_i = F_{wi} + F_{zi}$$

$$F_{wi} = \sum_{j \neq i} F_{ji} - \text{siły wewnętrzne}$$

$F_{ji}$  - siła, z jaką  $m_j$  działa na  $m_i$

$$F_{ji} = \frac{G m_j m_i}{\|c_j - c_i\|^2} \frac{c_j - c_i}{\|c_j - c_i\|}$$

$F_{zi}$  - siły zewnętrzne

Pęd punktu  $m_i$ :  $p_i = m_i \dot{c}_i$

Pęd układu:  $P = \sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n m_i \dot{c}_i$

$$\dot{P} = \sum_{i=1}^n m_i \ddot{c}_i = \sum_{i=1}^n \underbrace{\sum_{j=1}^n F_{ji}}_{F_{wi}} + \sum_{i=1}^n F_{zi} = \sum_{i=1}^n F_{zi}$$

$$F_{ji} = -F_{ij}$$

Przebieg zmiany pędu układu jest równa sumie sił zewnętrznych działających na układ. Jeżeli ta suma = 0, to pęd układu jest stały (ZCP).

Moment pędu punktu  $m_i$ :  $M_i = c^i \times p_i = m_i c^i \times \dot{c}_i$

Moment pędu układu:  $M = \sum_{i=1}^n M_i = \sum_{i=1}^n m_i c^i \times \dot{c}_i$

$$M = \sum_{i=1}^n m_i \underbrace{\dot{c}_i \times c^i}_0 + \sum_{i=1}^n m_i c^i \times \ddot{c}_i = \sum_{i=1}^n m_i c^i \times \ddot{c}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^n c^i \times \underbrace{\sum_{j=1}^n F_{ji}}_{F_{wi}} + \sum_{i=1}^n c^i \times F_{zi}$$

$$c^i \times F_{ji} + c^j \times F_{ij} = c^i \times F_{ji} - c^j \times F_{ji} = \underbrace{(c^i - c^j)}_0 \times F_{ji}$$

Przebieg zmiany momentu pędu układu jest równa sumie momentów sił zewnętrznych działających na układ. Jeżeli ta suma = 0, to moment pędu układu jest stały (ZMP).



Energia kinetyczna punktu:  $K_i = \frac{1}{2} m_i (\dot{c}_i, \dot{c}_i)$

Energia kinetyczna układu:  $K = \sum_{i=1}^n K_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{c}_i, \dot{c}_i)$

$$\dot{K} = \sum_{i=1}^n m_i (\dot{c}_i, \ddot{c}_i) = \sum_{i=1}^n (\dot{c}_i, m_i \ddot{c}_i) = \sum_{i=1}^n (\dot{c}_i, F_i) =$$

suma mocy wszystkich sił

Energia całkowita układu:  $E = K + V$

$V(c)$  - energia potencjalna

Siły  $F_i$  mierzony potencjalną, jeżeli  $F_i = -\frac{\partial V}{\partial c_i}$ .

$$\begin{aligned} \dot{E} = \dot{K} + \dot{V} &= \sum_{i=1}^n (\dot{c}_i, F_i) + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial V}{\partial c_i}, \dot{c}_i \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \dot{c}_i, F_i + \frac{\partial V}{\partial c_i} \right) \end{aligned}$$

Jeżeli  $F_i = -\frac{\partial V}{\partial c_i}$ , to  $\dot{E} = 0$ .

Jeżeli wszystkie siły działające w układzie są potencjalne, to energia całkowita układu jest stała (ZTE).