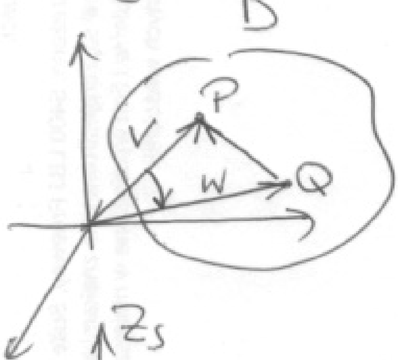
Mechanika analityczna, II r AiR

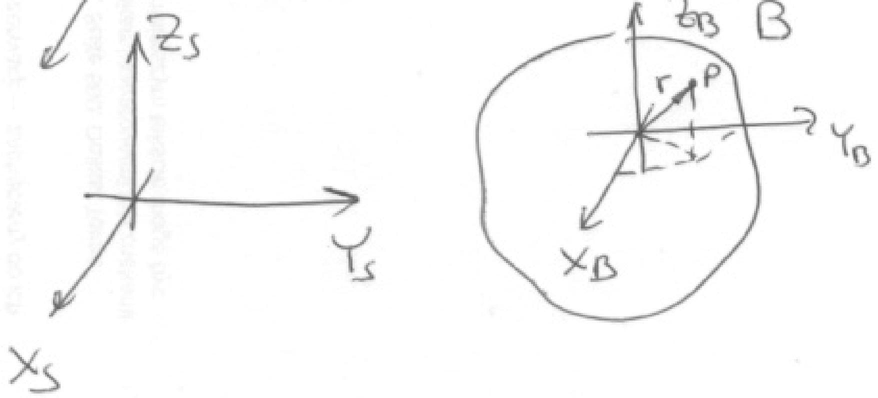
Wykład 12

Kinematyka i dynamika ciała sztywnego

Ciało sztywne = zwarty podzbiór $B \subset \mathbb{R}^3$. Przemieszczenie ciała sztywnego zachowuje odległości między punktami i kąty.



długość wektora $v-w$, $\|v-w\| = \text{const}$
kąt między wektorami v, w, $\sphericalangle(v,w) =$
$= \text{const}$



Przemieszczenie ciała sztywnego opisujemy przekształceniem układu S w układ B, a więc wyznaczamy położenie i orientację B względem S. Służy do tego macierz

$$SE(3) \ni \underset{4\times 4}{A} = \begin{bmatrix} \underset{3\times 3}{R} & \underset{3\times 1}{T} \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

złożona z macierzy ortogonalnej R ($RR^T = R^TR = I_3$, $\det R = +1$) i wektora $T \in \mathbb{R}^3$. Macierz R, zwana macierzą obrotu, opisuje orientację, wektor T – przemieszczenie. Interpretacja: punkt P ciała opisujemy wektorem $\binom{r}{1}$, gdzie r oznacza poło–

żenie P względem B. Współrzędne $\binom{r}{1}$ noszą nazwę jednorodnych. Współrzędne jednorodne $\binom{s}{1}$ punktu P względem S są zadane równaniem

$$\binom{s}{1} = A\binom{r}{1} = \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\binom{r}{1} = \binom{Rr+T}{1}.$$

Ponieważ początek układu B ma $r=0$, $A\binom{0}{1}=\binom{T}{1}$, a zatem T oznacza położenie początku układu B względem układu S. Niech $T=0$. Weźmy $r=e_1, e_2, e_3$ – wektory osi układu B. Wówczas $s_1 = Re_1$, $s_2 = Re_2$, $s_3 = Re_3$, co oznacza, że kolumny macierzy obrotu R opisują współrzędne wersorów układu B w układzie S. W tym sensie R określa orientację B względem S.

Przez ruch ciała sztywnego będziemy rozumieć przekształcenie

$$C: \mathbb{R} \to SE(3),$$

odpowiednio gładkie, takie że $C(t) = \begin{bmatrix} R(t) & T(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

<u>Prędkości ciała sztywnego</u>

Niech $C(t) = R(t)$. Ponieważ $R(t)R^T(t) = R^T(t)R(t) = I_3$, mamy

$$\dot R R^T + R\dot R^T = \dot R^T R + R^T \dot R = 0.$$

Otrzymujemy stąd macierzowe prędkości ciała sztywnego: w przestrzeni $\Omega_S = \dot R R^T$ i w ciele $\Omega_B = R^T \dot R$.

Innymi słowy $\dot R = \Omega_S R = R\Omega_B$, czyli $\Omega_S = R\Omega_B R^T$.

Zauważmy, że każda z prędkości macierzowych Ω spełnia warunek

$\Omega + \Omega^T = 0$, $\Omega^T = -\Omega$, co oznacza,

że Ω jest macierzą 3×3, skośnie symetryczną.

Taka macierz jest całkowicie określona przez wektor

$\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, taki że

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} = [\omega]$$

co daje $\Omega v = \omega \times v$. Mamy zatem

$\Omega_S = [\omega_S]$ i $\Omega_B = [\omega_B]$. Prędkości ω_S i ω_B

nazywamy prędkościami kątowymi w przestrzeni (ω_S)

i w ciele (ω_B). Można pokazać, że

$$\omega_S = R\omega_B .$$

Zależność ta ma charakter ogólny i oznacza,

że prędkości z układu B do układu S transfor-

mują się za pośrednictwem samej macierzy R.

Niech teraz $C(t) = \begin{bmatrix} R(t) & T(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Przez analogię

definiujemy macierzowe prędkości ciała sztywnego

w przestrzeni $V_S = \dot{C}(t)C^{-1}(t)$ i w ciele $V_B = C^{-1}(t)\dot{C}(t)$.

Otrzymujemy

$$V_S = \begin{bmatrix} \dot{R} & \dot{T} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R^T & -R^T T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{R}R^T & \dot{T} - \dot{R}R^T T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_S & \dot{T} - \Omega_S T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} [\omega_S] & \dot{T} - \omega_S \times T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cong \begin{pmatrix} \omega_S \\ \dot{T} - \omega_S \times T \end{pmatrix} \text{ – skrętnik w przestrzeni}$$

$$V_B = \begin{bmatrix} R^T & -R^T T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot R & \dot T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^T \dot R & R^T \dot T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_B & R^T \dot T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

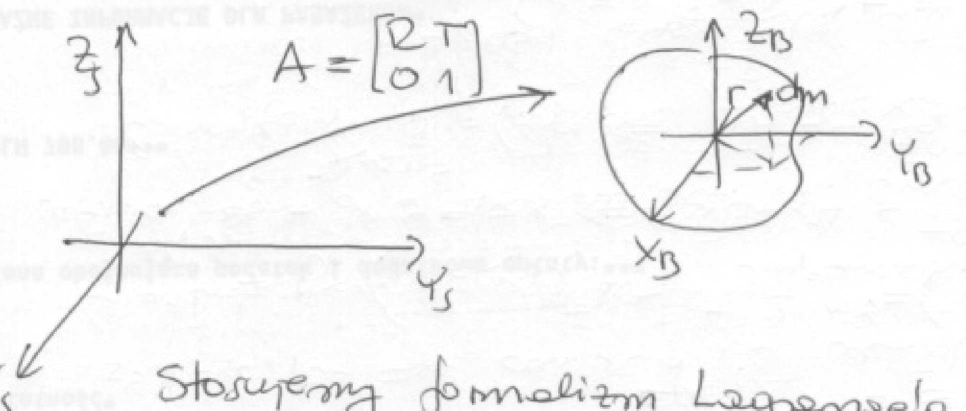
$$= \begin{bmatrix} [\omega_B] & R^T \dot T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cong \begin{pmatrix} \omega_B \\ R^T \dot T \end{pmatrix} \text{ - skrętnik w ciele}$$

Łatwo pokazać, że skrętniki transformują się w następujący sposób

$$V_S = \begin{pmatrix} \omega_S \\ \dot T - \omega_S \times T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_S \\ \dot T + [T]\omega_S \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ [T]R & R \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega_B \\ R^T \dot T \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$V_S = \begin{bmatrix} R & 0 \\ [T]R & R \end{bmatrix} V_B$$

Dynamika ciała sztywnego



Stosujemy formalizm Lagrange'a. Energia kinetyczna elementu dm wynosi

$$dK = \frac{1}{2} dm\, v^T v = \frac{1}{2} dm\, tr(v v^T), \quad tr \text{ - ślad}$$

Mamy

$$s = Rr + T, \quad \dot s = \dot R r + \dot T = v, \quad v^T = r^T \dot R^T + \dot T^T$$

$$dK = \frac{1}{2} dm\, tr\,\cancel{(r^T \dot R^T + \dot T^T)}(\dot R r + \dot T)(r^T \dot R^T + \dot T^T)$$

$$dK = \frac{1}{2} dm\, tr(\dot R r r^T \dot R^T) + \frac{1}{2} dm\, tr(\dot R r \dot T^T) + \frac{1}{2} dm(\dot T r^T \dot R^T) + \\ + \frac{1}{2} dm\, tr(\dot T \dot T^T)$$

Kontynuując

$$dK = \frac{1}{2} dm\, \mathrm{tr}(\dot{R} r r^T \dot{R}^T) + dm\, \mathrm{tr}(\dot{T}^T \dot{R} r) + \frac{1}{2} dm \|\dot{T}\|^2.$$

Energia kinetyczna

$$K = \int_{B} dK = \frac{1}{2} \mathrm{tr}\left(\dot{R} \int_{B} r r^T dm\, \dot{R}^T\right) + \dot{T}^T \dot{R} \int_B r\, dm + \frac{1}{2} m_B \|\dot{T}\|^2$$

Wprowadźmy macierz pseudoinercji ciała B

$$J_B = \int_B r r^T dm = \begin{bmatrix} \int x^2 dm & \int xy\, dm & \int xz\, dm \\ \int yx\, dm & \int y^2 dm & \int yz\, dm \\ \int zx\, dm & \int zy\, dm & \int z^2 dm \end{bmatrix},$$

gdzie $r = (x, y, z)$, a całki liczymy po B,

oraz zauważmy, że $r_B = \frac{1}{m_B} \int_B r\, dm$ – współrzędne

środka masy B względem układu B. Mamy zatem

$$\boxed{K = \frac{1}{2} \mathrm{tr}(\dot{R} J_B \dot{R}^T) + \dot{T}^T \dot{R} m_B r_B + \frac{1}{2} m_B \|\dot{T}\|^2}$$

Mamy $\dot{R} = R\Omega_B$ lub $\dot{R} = \Omega_S R$. Wybieramy

pierwszą zależność. Otrzymujemy

$$K = \frac{1}{2} \mathrm{tr}(R \Omega_B J_B \Omega_B^T R^T) + m_B \dot{T}^T R \Omega_B r_B + \frac{1}{2} m_B \|\dot{T}\|^2,$$

$$\boxed{K = -\frac{1}{2} \mathrm{tr}(J_B \Omega_B^2) + m_B \dot{T}^T R(\omega_B \times r_B) + \frac{1}{2} m_B \|\dot{T}\|^2}$$

Energia potencjalna

$$\boxed{V = -m_B (\vec{g}, s_B) = -m_B(\vec{g}, R r_B + T)}$$

Otrzymaliśmy Lagranżian

$$L = K - V = -\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(J_B \Omega_B^2\right) + m_B \dot{r}^T R\left(\omega_B \times r_B\right) + \frac{1}{2} m_B \|\dot{r}\|^2 + m_B\left(\vec{g}, R r_B + r\right)$$

Jeżeli wprowadzimy macierz inercji I_B ciała B

$$I_B = \begin{bmatrix} J_{B22}+J_{B33}, & -J_{B12}, & -J_{B13} \\ -J_{B21}, & J_{B11}+J_{B33}, & -J_{B23} \\ -J_{B31}, & -J_{B32}, & J_{B11}+J_{B22} \end{bmatrix},$$

wówczas

$$\boxed{L = \frac{1}{2}\omega_B^T I_B \omega_B + m_B \dot{r}^T R \omega_B \times r_B + \frac{1}{2} m_B \|\dot{r}\|^2 + m_B\left(\vec{g}, R r_B + r\right)}$$

Aby móc wykorzystać ten Lagranżian musimy wprowadzić współrzędne opisujące orientację i położenie. Dla położenia bierzemy współrzędne kartezjańskie $r = (r_1, r_2, r_3)$. Do opisu orientacji można wykorzystać kąty Eulera $(\varphi, \theta, \psi) = e$, takie że

$$R = R(Z,\varphi)R(Y,\theta)R(Z,\psi) = \begin{bmatrix} c_\varphi c_\theta c_\psi - s_\varphi s_\psi, & -c_\varphi c_\theta s_\psi - s_\varphi c_\psi, & c_\varphi s_\theta \\ s_\varphi c_\theta c_\psi + c_\varphi s_\psi, & -s_\varphi c_\theta s_\psi + c_\varphi c_\psi, & s_\varphi s_\theta \\ -s_\theta c_\psi, & s_\theta s_\psi, & c_\theta \end{bmatrix}.$$

Mamy wówczas

$$\omega_B = M_E \dot{e} = \begin{bmatrix} -s_\theta c_\psi, & s_\psi, & 0 \\ s_\theta s_\psi, & c_\psi, & 0 \\ c_\theta, & 0, & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}.$$

Załóżmy, dla uproszczenia, że $r_B = 0$. Mamy wtedy

$$L = \frac{1}{2}(\dot\varphi, \dot\theta, \dot\psi) M_E^T I_B M_E \begin{pmatrix} \dot\varphi \\ \dot\theta \\ \dot\psi \end{pmatrix} + \frac{1}{2} m_B(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2) + m_B(\vec{g}, T).$$

Niech jeszcze $I_B = \operatorname{diag}\{I_{B1}, I_{B2}, I_{B3}\}$. Obliczamy

$$M_E^T I_B M_E = \begin{bmatrix} I_{B1} s_\theta^2 c_\psi^2 + I_{B2} s_\theta^2 s_\psi^2 + I_{B3} c_\theta^2, & -I_{B1} s_\theta s_\psi c_\psi + I_{B2} s_\theta s_\psi c_\psi, & I_{B3} c_\theta \\ -I_{B1} s_\theta s_\psi c_\psi + I_{B2} s_\theta s_\psi c_\psi, & I_{B1} s_\psi^2 + I_{B2} c_\psi^2, & 0 \\ I_{B3} c_\theta, & 0, & I_{B3} \end{bmatrix}$$

Jeżeli $\vec{g} = -e_3 g$, otrzymujemy lagranżian

$$L = \frac{1}{2}\left(I_{B1} s_\theta^2 c_\psi^2 + I_{B2} s_\theta^2 s_\psi^2 + I_{B3} c_\theta^2\right)\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}\left(I_{B1} s_\psi^2 + I_{B2} c_\psi^2\right)\dot\theta^2 + \frac{1}{2} I_{B3} \dot\psi^2$$

$$+ \left(-I_{B1} s_\theta s_\psi c_\psi + I_{B2} s_\theta s_\psi c_\psi\right)\dot\varphi\dot\theta + I_{B3} c_\theta \dot\varphi\dot\psi + \frac{1}{2} m_B\left(\dot T_1^2 + \dot T_2^2 + \dot T_3^2\right)$$

$$- m_B g z$$

Stąd można uzyskać równanie Eulera-Lagrange'a, a przy dużym samozaparciu RKH.

Uwaga: Niektóre współrzędne $(T_1, T_2, T_3) = T$ mogą zależeć od współrzędnych orientacji; należy to uwzględnić.

Uwaga: Dla koła pochylonego kąty Eulera są następujące

$$\varphi \mapsto \varphi - 90°, \quad \theta \mapsto \theta - 90°, \quad \psi \mapsto \psi.$$

Sprawdzenie:

Energia kinetyczna ruchu obrotowego:

$$K_R = \frac{1}{2}\left(I_{B_1} s^2_\theta c^2_\psi + I_{B2}\, s^2_\theta s^2_\psi + I_{B3} c^2_\theta\right)\dot{\varphi}^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(I_{B_1} s^2_\psi + I_{B2} c^2_\psi\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_{B3}\dot{\psi}^2 - \left(I_{B_1} s_\theta s_\psi c_\psi + I_{B_2} s_\theta s_\psi c_\psi\right)\dot{\varphi}\dot{\theta} +$$

stąd się równa $I_{B_1} = I_{B_2} = I_{13}$, $I_{B3} = I_2$ $\quad + I_{B_3} c_\theta \dot{\varphi}\dot{\psi}$

$$K_R = \frac{1}{2}\left(I_{B3} c^2_\theta + I_2 s^2_\theta\right)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} I_B \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\psi}^2 + I_2 s_\theta \dot{\varphi}\dot{\psi},$$

co się zgadza z poprzednio otrzymanym wzorem.

Równanie Eulera-Newtona

Niech będzie dany moment pędu ciała B w układzie B: $M_B = I_B \omega_B$ i pęd w układzie B, $P_B = m_B V_B$. Przeliczamy je do układu S:

$$M_S = R M_B = R I_B \omega_B, \quad P_S = R P_B = m_B R V_B.$$

Korzystamy z ZZMP i ZZP w układzie S:

$$\dot{M}_S = \dot{R} I_B \omega_B + R I_B \dot{\omega}_B = 0 \qquad (\tau_S) - \text{m. siły}$$

$$\dot{P}_S = m_B \dot{R} V_B + m_B R \dot{V}_B = 0 \qquad (F_S) - \text{siła}$$

Mamy $\dot{R} = R \Omega_B = R[\omega_B]$, podstawiamy

$$R \Omega_B I_B \omega_B + R I_B \dot{\omega}_B = 0 \quad | R^T$$

$$\begin{cases} I_B \dot{\omega}_B = (I_B \omega_B) \times \omega_B & (+\, R^T \tau_S = \tau_B) - \text{w układzie B} \\ \dot{v}_B = v_B \times \omega_B & (+\, R^T F_S = F_B) - \text{w układzie B} \end{cases}$$