Mechanika analityczna, II r AiR

Wykład 1

Mechanika newtonowska i kinematyka i dynamika punktu materialnego

Mechanika analityczna zajmuje się matematycznym opisem ruchu. Mechanika newtonowska dostarcza modeli ruchu punktu materialnego lub układu punktów.

Punkt materialny = pojęcie pierwotne, niedefiniowane

Scenerie ruchu: czas, przestrzeń

Czas $\cong \mathbb{R}$ zbiór liczb rzeczywistych

Przestrzeń $\cong \mathbb{R}^3$

Elementami $\mathbb{R}^3$ są trójki liczb rzeczywistych postaci $u=(u_1,u_2,u_3)^T$, $v=(v_1,v_2,v_3)^T$, które można interpretować jako współrzędne kartezjańskie punktu materialnego względem pewnego układu odniesienia. Elementy $u,v,w \in \mathbb{R}^3$ możemy dodawać:

$$u+v = (u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3)^T$$

i mnożyć przez liczby rzeczywiste $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\alpha u = (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3)^T$$

Przestrzeń $\mathbb{R}^3$ jest p. wektorową nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.

Co więcej, wektory $u, v \in \mathbb{R}^3$ możemy mnożyć przez siebie. Mamy

- iloczyn skalarny $(u,v) = u^T v = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i \in \mathbb{R}$
- iloczyn wektorowy $u \times v = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} =$

$$i(u_2 v_3 - v_2 u_3) - j(u_1 v_3 - v_1 u_3) + k(u_1 v_2 - v_1 u_2) \in \mathbb{R}^3$$

Za pomocą iloczynu skalarnego definiujemy normę (długość wektora)

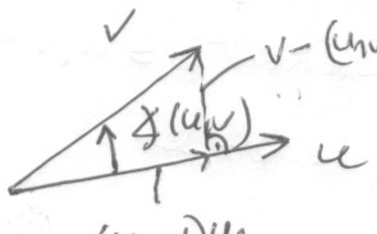
$$\|u\| = (u,u)^{1/2} \text{ – jest to tzw. norma euklidesowa}$$

Przestrzeń $\mathbb{R}^3$ z normą euklidesową nazywamy przestrzenią euklidesową.

Oprócz iloczynu skalarnego i wektorowego definiujemy iloczyn mieszany wektorów $u, v, w \in \mathbb{R}^3$:

$$(u \times v, w) = \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix}.$$

Interpretacje geometryczne:



$$(u,v) = \|u\|\|v\| \cos\sphericalangle(u,v)$$

- jeżeli $\|u\| = 1$, to $(u,v) = \|v\| \cos\sphericalangle(u,v) =$ $=$ rzut v na u
- jeżeli $(u,v) = 0$, to $\|u\| = 0 \vee \|v\| = 0 \vee \cos\sphericalangle(u,v) = 0$ $(u \perp v)$
- (u,v) służy do ortogonalizacji wektorów

Weźmy $u, v \in \mathbb{R}^3$. Definiujemy $u_1 = \frac{u}{\|u\|}$. Mamy $\|u_1\| = 1$. Obliczmy (u_1, v) = rzut v na u. Weźmy $(u_1, v)u_1$ – wektor w kierunku u. Wektor

$$v - (u_1, v)u_1 \text{ jest } \perp \text{ do } u \text{ (czyli do } u_1)$$

Sprawdzenie:

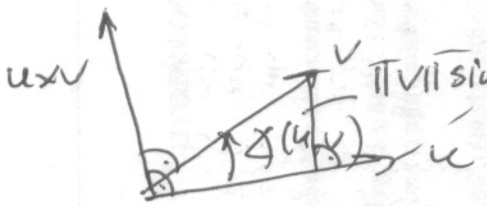
$$(v - (u_1, v)u_1, u_1) = (v, u_1) - (u_1, v)(u_1, u_1) =$$
$$= (v, u_1) - (u_1, v) = 0.$$

- iloczyn skalarny jest przemienny

$$(u, v) = (v, u)$$

- iloczyn skalarny jest dwuliniowy

$$(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) = \alpha_1 (u_1, v) + \alpha_2 (u_2, v)..$$



$$\|u \times v\| = \|u\| \|v\| \sin \measuredangle(u, v)$$

$u \times v$ ma kierunek $\perp$ płaszczyzny rozpiętej przez u i v

Oznacza to, że $\|u \times v\|$ = pole równoległoboku rozpiętego na wektorach u, v

- iloczyn wektorowy ma własności

$u \times u = 0$ – antyzwrotność

$u \times v = - v \times u$ – antysymetria

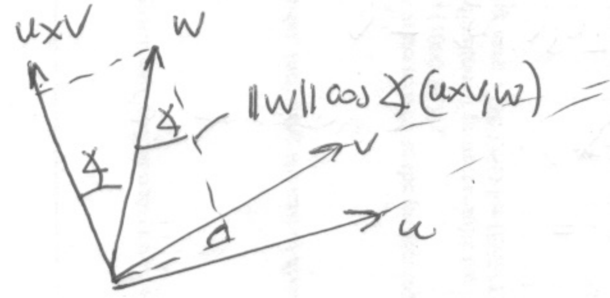
$u \times (v \times w) + v \times (w \times u) + w \times (u \times v) = 0$ –

nie jest łączny, albowiem

$u \times (v \times w) = (u \times v) \times w - v \times (w \times u)$.

Iloczyn mieszany

$$(u\times v, w) = \underbrace{\|u\times v\|}_{\text{pole } \square}\|w\|\cos\measuredangle(u\times v, w)$$

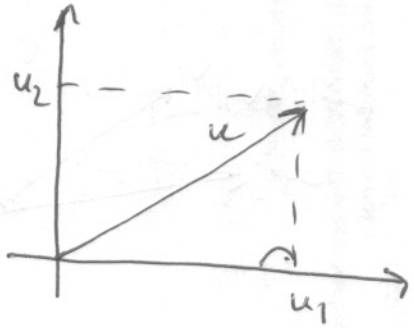


$(u\times v, w)$ – objętość równoległościanu rozpiętego na u, v, w

Własności normy: $\|u\| = 0 \iff u = 0$

$$\|\alpha u\| = |\alpha|\,\|u\|$$

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

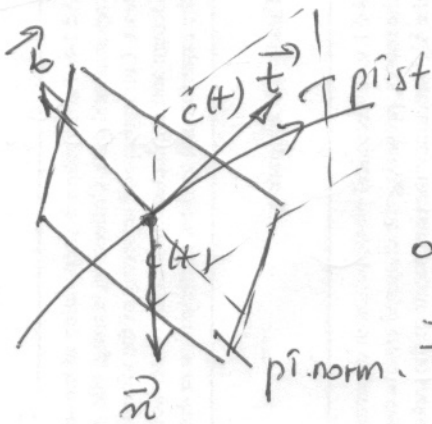


dla normy euklidesowej

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2+u_2^2}$$

Norma euklidesowa jest tzw. 2-normą $\|u\|_2 = \sqrt{u_1^2+u_2^2}$.
Można zdefiniować 1-normę $\|u\|_1 = |u_1|+|u_2|$ lub ∞-normę $\|u\|_\infty = \max_i\{|u_1|,|u_2|\}$.

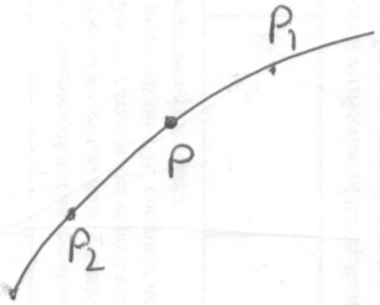
Ruch punktu materialnego $c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ $(c: I \to \mathbb{R}^3)$ $c(t) = (c_1(t), c_2(t), c_3(t))^T$ jest to odwzorowanie czasu w przestrzeń. Wymagamy, żeby $c(t)$ było ciągłe i różniczkowalne odpowiednią liczbę razy. Ruch utożsamiamy z trajektorią ruchu. Własności trajektorii:



$$\dot{c}(t) = (\dot{c}_1(t), \dot{c}_2(t), \dot{c}_3(t))^T$$

definiujemy wektor styczny $\vec{t} = \frac{\dot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|}$

$\vec{t}$ określa płaszczyznę normalną $\perp \vec{t}$



weźmy 3 punkty na trajektorii i poprowadźmy przez nie płaszczyznę, a następnie przejdźmy do granicy przy $P_1, P_2 \to P$

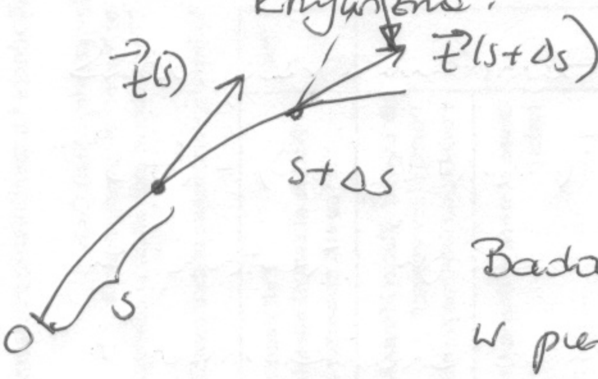
otrzymamy tzw. płaszczyznę styczną do trajektorii; wektor $\vec{t} \in$ pł. stycznej

na przecięciu pł. normalnej i stycznej wprowadzamy wektor normalny $\vec{n}$

wprowadzamy także wektor binormalny $\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}$

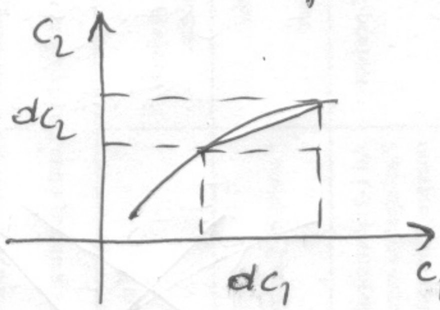
Wektory $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ rozpinają tzw. trójścian Freneta, który podróżuje wraz z punktem $c(t)$ wzdłuż trajektorii.

Krzywizna:



$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\vec{t}(s+\Delta s) - \vec{t}(s)}{\Delta s} = K(s)$$

Badamy wektor styczny wzdłuż trajektorii w punktach odległych od zadanego punktu o s. Mamy $ds = \|\dot{c}\| dt$



$$ds \cong \sqrt{dc_1^2 + dc_2^2} = \sqrt{\dot{c}_1^2 + \dot{c}_2^2}\, dt$$

$$s(t) = \int_0^t ds = \int_0^t \|\dot{c}\| du$$

Krzywizna trajektorii jest zdefiniowana jako

$$K(s) = \left\| \frac{d\vec{t}(s)}{ds} \right\|, \quad \frac{d\vec{t}}{ds} = K\vec{n} \text{ – wektor krzywizny}$$

Promień krzywizny $R = \frac{1}{K}$.

Krzywizna określa jak nieprostoliniowa jest trajektoria.

Obliczmy przyspieszenie:

$$\vec{t} = \frac{\dot{c}}{\|\dot{c}\|} \Rightarrow \dot{c} = \|\dot{c}\| \vec{t}$$

$$\ddot{c} = \dot{\widehat{\|\dot{c}\|}}\, \vec{t} + \|\dot{c}\| \frac{d\vec{t}}{dt} = \dot{\widehat{\|\dot{c}\|}}\, \vec{t} + \|\dot{c}\| \frac{d\vec{t}}{ds} \frac{ds}{dt}$$

$$\boxed{\ddot{c} = \dot{\widehat{\|\dot{c}\|}}\, \vec{t} + \|\dot{c}\|^2 K \vec{n}}$$

Wynika stąd, że wektor przyspieszenia leży na płaszczyźnie stycznej.

Można wyprowadzić następujący wzór na krzywiznę:

$$K(s) = \frac{\sqrt{\|\dot{c}\|^2 \|\ddot{c}\|^2 - (\dot{c}, \ddot{c})^2}}{\|\dot{c}\|^3}$$

Mianowicie :

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{d\vec{t}}{dt}\,\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\|\dot c\|}\,\frac{d\vec{t}}{dt} = \frac{1}{\|\dot c\|}\,\frac{d}{dt}\,\frac{\dot c}{\|\dot c\|} =$$

$$= \frac{1}{\|\dot c\|}\;\frac{\ddot c\,\|\dot c\| - \dot c\,\dot{\overline{\|\dot c\|}}}{\|\dot c\|^2}$$

$$\|\dot c\|^2 = (\dot c, \dot c) \qquad \frac{d}{dt}\|\dot c\|^2 = 2\|\dot c\|\,\dot{\overline{\|\dot c\|}} = 2(\dot c, \ddot c)$$

$$\frac{d}{dt}\|\dot c\| = \frac{(\dot c, \ddot c)}{\|\dot c\|}$$

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{1}{\|\dot c\|^3}\left(\ddot c\,\|\dot c\| - \dot c\,\frac{(\dot c, \ddot c)}{\|\dot c\|}\right) = \frac{1}{\|\dot c\|^4}\left(\ddot c\,\|\dot c\|^2 - \dot c\,(\dot c, \ddot c)\right)$$

$$\left\|\frac{d\vec{t}}{ds}\right\|^2 = \frac{1}{\|\dot c\|^8}\left(\ddot c^T\|\dot c\|^2 - \dot c^T(\dot c, \ddot c),\ \ddot c\,\|\dot c\|^2 - \dot c\,(\dot c, \ddot c)\right) =$$

$$= \frac{1}{\|\dot c\|^8}\left(\|\ddot c\|^2\|\dot c\|^4 - \cancel{\dot c\,\dot c}\,\|\dot c\|^2(\dot c, \ddot c)^2 \cancel{- \|\dot c\|^2(\dot c, \ddot c)^2 + \|\dot c\|^2(\dot c, \ddot c)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{\|\dot c\|^8}\,\|\dot c\|^2\left(\|\dot c\|^2\|\ddot c\|^2 - (\dot c, \ddot c)^2\right).$$

Podobnie definiujemy

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\vec{b}(s+\Delta s) - \vec{b}(s)}{\Delta s} = \frac{d\vec{b}}{ds}$$

$T(s) = \left\|\frac{d\vec{b}}{ds}\right\|$ - skręcenie (torsje) trajektorii.

Skręcenie mówi jak niepłaska jest trajektoria. Trajektorie płaskie leżą na płaszczyźnie stycznej.

Mamy $\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n} = \frac{\dot c}{\|\dot c\|} \times \frac{1}{K}\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{\dot c}{\|\dot c\|^2} \times \frac{1}{K}\frac{d\vec{t}}{dt}.$

Można pokazać, że

$$\vec{b} = \frac{1}{K}\frac{1}{\|\dot{c}\|^3}(\dot{c}\times\ddot{c})$$

oraz, że

$$T(s) = \frac{1}{K^2}\frac{(\dot{c}\times\ddot{c}, c^{(3)})}{\|\dot{c}\|^6}.$$

Równanie Serreta-Freneta:

Trójścian $(\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s))$ porusza się wzdłuż trajektorii. Prędkości ruchu względem bazy $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ można wyrazić jako:

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \alpha_1\vec{t} + \alpha_2\vec{n} + \alpha_3\vec{b}$$

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = \beta_1\vec{t} + \beta_2\vec{n} + \beta_3\vec{b}$$

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = \gamma_1\vec{t} + \gamma_2\vec{n} + \gamma_3\vec{b}$$

Jak obliczyć α, β, γ? Wiemy z definicji, że $\frac{d\vec{t}}{ds} = K\vec{n}$, zatem $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = K$, $\alpha_3 = 0$. Dalej, mamy. $(\vec{t}, \vec{t}) = (\vec{n}, \vec{n}) = (\vec{b}, \vec{b}) = 1$ oraz $(\vec{t}, \vec{n}) = (\vec{t}, \vec{b}) = (\vec{n}, \vec{b}) = 0$. Z pierwszego zestawu otrzymujemy

$$\left(\frac{d\vec{t}}{ds}, \vec{t}\right) = \left(\frac{d\vec{n}}{ds}, \vec{n}\right) = \left(\frac{d\vec{b}}{ds}, \vec{b}\right) = 0,$$

a z drugiego

$$\left(\frac{d\vec{t}}{ds}, \vec{n}\right) + \left(\vec{t}, \frac{d\vec{n}}{ds}\right) = \left(\frac{d\vec{t}}{ds}, \vec{b}\right) + \left(\vec{t}, \frac{d\vec{b}}{ds}\right) = \left(\frac{d\vec{n}}{ds}, \vec{b}\right) + \left(\vec{n}, \frac{d\vec{b}}{ds}\right) = 0.$$

Stąd

$$\left(\frac{d\vec{n}}{ds},\vec{n}\right)=\beta_1\overbrace{(\vec{t},\vec{n})}^{0}+\beta_2(\vec{n},\vec{n})+\beta_3\overbrace{(\vec{b},\vec{n})}^{0}=0\Rightarrow\beta_2=0$$

Podobnie otrzymujemy $\gamma_3=0$.

Mamy zatem

$$\frac{d\vec{t}}{ds}=K\vec{n},\quad \frac{d\vec{n}}{ds}=\beta_1\vec{t}+\beta_3\vec{b},\quad \frac{d\vec{b}}{ds}=\gamma_1\vec{t}+\gamma_2\vec{n}.$$

Obliczamy $\left(\frac{d\vec{t}}{ds},\vec{n}\right)=K=-\left(\frac{d\vec{n}}{ds},\vec{t}\right)=-\beta_1\overbrace{(\vec{t},\vec{t})}^{1}-\beta_3\overbrace{(\vec{b},\vec{t})}^{0},$

zatem $\beta_1=-K$.

Obliczamy $\left(\frac{d\vec{t}}{ds},\vec{b}\right)=0=-\left(\frac{d\vec{b}}{ds},\vec{t}\right)=-\gamma_1\overbrace{(\vec{t},\vec{t})}^{1}-\gamma_2\overbrace{(\vec{n},\vec{t})}^{0},$

zatem $\gamma_1=0$.

Mamy: $\frac{d\vec{t}}{ds}=K\vec{n},\quad \frac{d\vec{n}}{ds}=-K\vec{t}+\beta_3\vec{b},\quad \frac{d\vec{b}}{ds}=\gamma_2\vec{n}.$

Dalej, $\left(\frac{d\vec{n}}{ds},\vec{b}\right)=\beta_3=-\left(\frac{d\vec{b}}{ds},\vec{n}\right)=-\gamma_2\Rightarrow\beta_3=-\gamma_2.$

W końcu $\left(\frac{d\vec{b}}{ds},\frac{d\vec{b}}{ds}\right)=T^2=\gamma_2^2\Rightarrow\gamma_2=\pm T.$

Wybieramy $\gamma_2=-T$ i otrzymujemy równanie ruchu trójścianu Freneta wzdłuż trajektorii:

$$\left[\frac{d\vec{t}}{ds},\frac{d\vec{n}}{ds},\frac{d\vec{b}}{ds}\right]=[\vec{t},\vec{n},\vec{b}]\begin{bmatrix}0 & -K & 0\\ K & 0 & -T\\ 0 & T & 0\end{bmatrix}$$

$$\frac{dR(s)}{ds}=R(s)A(s)$$ – układ liniowych równań różniczkowych

Mając krzywiznę i skręcenie wyliczamy $\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)$.

Z kolei, mając $\vec{t}(s)$ wyznaczamy trajektorię parametryzowaną s, długością łuku:

$$\frac{dc}{ds} = \frac{dc}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\dot{c}}{\|\dot{c}\|} = \vec{t}(s),$$

czyli

$$c(s) - c(0) = \int_0^s \vec{t}(s)\,ds.$$

Wynika stąd, że krzywizna i skręcenie wyznaczają trajektorię z dokładnością do parametryzacji.

Ruch układu n punktów materialnych:

$$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N, \quad N = 3n, \quad c(t) = (c^1(t), \ldots, c^n(t)),$$

$c(t)$ ciągłe i różniczkowalne.