Podstawy automatyki i robotyki

Robotyka
Wykład 2

Katarzyna Zadarnowska

Katedra Cybernetyki i Robotyki

17 kwietnia 2024

Wprowadzenie

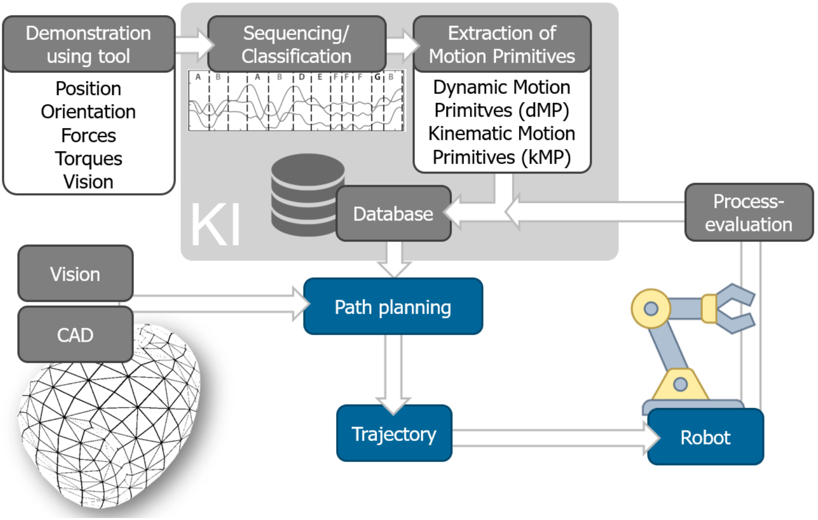
Było...

Rysunek: Źródło: [1]

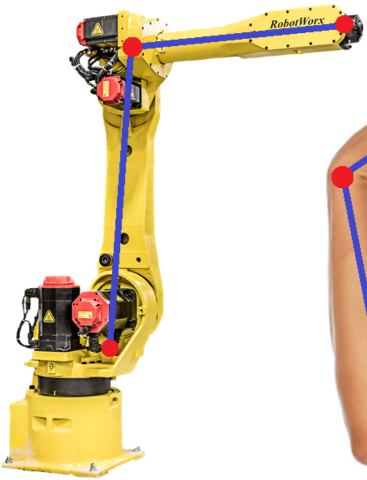
Zakres materiału:

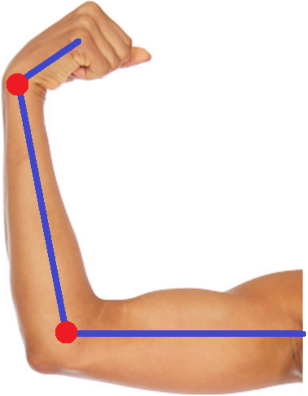
1. Opis kinematyki manipulatora,
2. Opis położenia i orientacji bryły sztywnej,
3. Przekształcenie jednorodne,
4. Notacja Denavita-Hartenberga,
5. Proste i odwrotne zadanie kinematyki

Kinematyka+Dynamika=>Układ sterowania



Opis kinematyki manipulatora
Ogniwa i przeguby



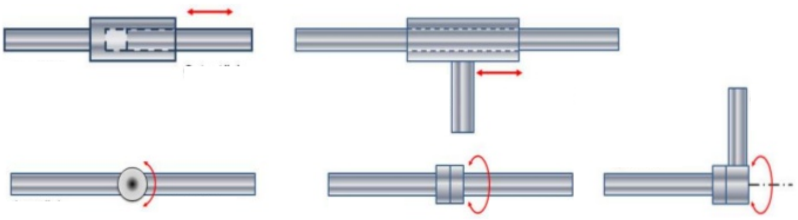


Ogniwa

Przeguby

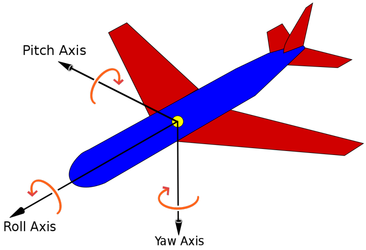
Dwa główne typy przegubów:

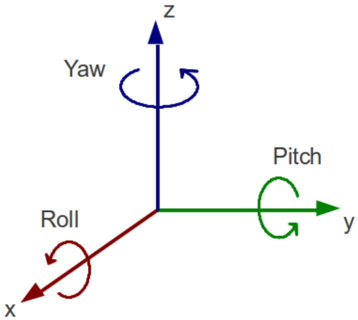
- przesuwne (oznaczenie: T lub P),
- obrotowe (oznaczenie: R lub O)

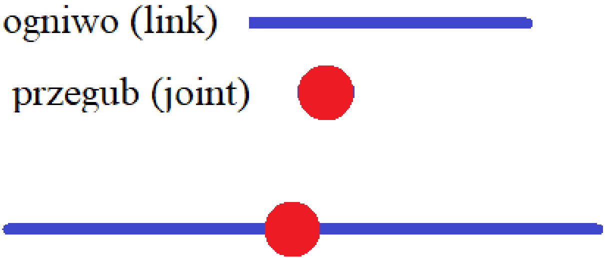


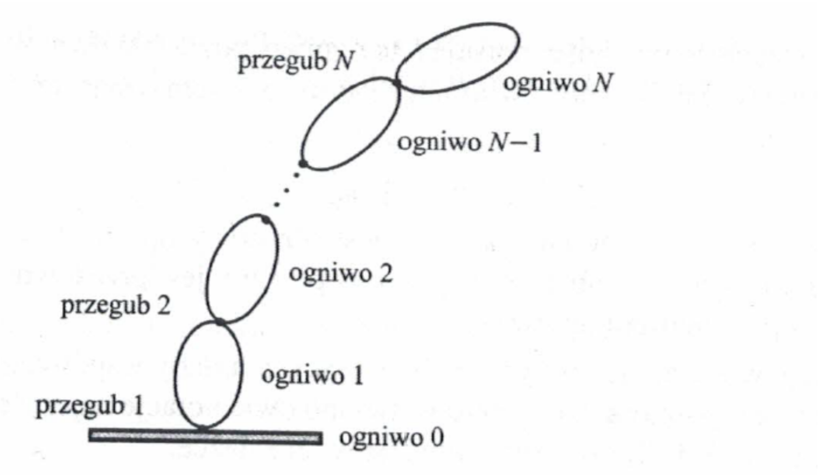
Rodzaje obrotów:

- roll – kołysanie,
- pitch – kiwanie,
- yaw – myszkowanie.



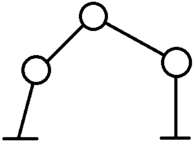


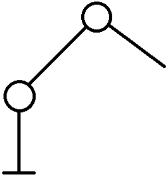

ogniwo (link)
przegub (joint)


przegub N
ogniwo N
ogniwo $N-1$
ogniwo 2
przegub 2
ogniwo 1
przegub 1
ogniwo 0

Opis kinematyki manipulatora

Łańcuch kinematyczny






FANUC Robot M-1iA

Można wyróżnić trzy główne odcinki łańcucha kinematycznego robota:

- odcinek lokalny (L) – odpowiedzialny za zadanie orientowania i chwytania obiektu (mikroruchy efektora),
- odcinek regionalny (R) – odpowiedzialny za podstawowe działania manipulacyjne (makroruchy efektora),
- odcinek globalny (G) – odpowiedzialny za działania lokomocyjne robota (ruch globalny).

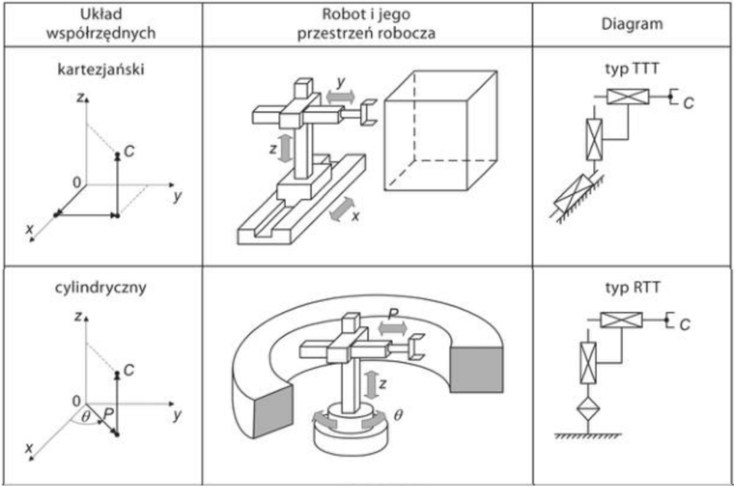
W zależności od konfiguracji odcinka regionalnego (odpowiedzialnego za zadania i działania manipulacyjne) wyróżnia się:

- roboty kartezjańskie,
- roboty cylindryczne,
- roboty sferyczne,
- roboty antropomorficzne,
- roboty typu SCARA,
- roboty typu platforma Stewart'a (hexapody),
- roboty typu tripody.

Kształt i objętość przestrzeni roboczej są uwarunkowane przemieszczeniami członów, które należą do odcinka regionalnego.

Klasyfikacja robotów

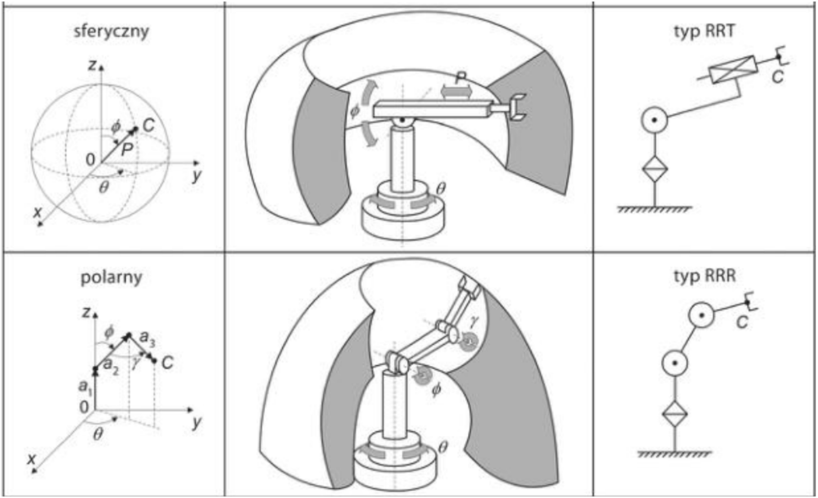
Struktura kinematyczna – otwarty łańcuch kinematyczny



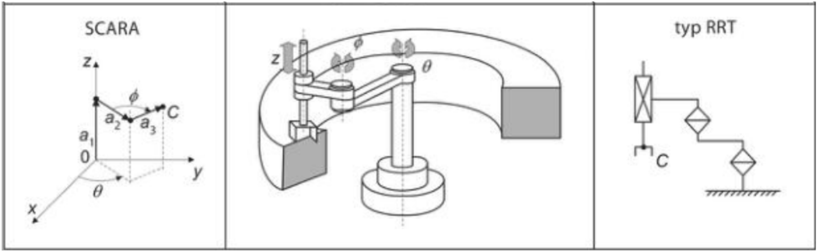
Rysunek: Źródło: [1]

Klasyfikacja robotów

Struktura kinematyczna – otwarty łańcuch kinematyczny



Rysunek: Źródło: [1]



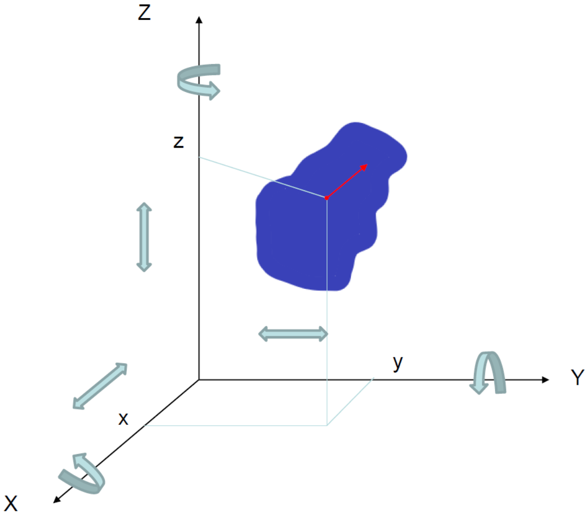
Rysunek: Źródło: [1]

Wyróżniamy następujące rodzaje ruchu bryły sztywnej:

- ruch postępowy – odcinek łączący dwa dowolne punkty bryły sztywnej przemieszcza się równolegle do siebie, zachowując stały kierunek w przestrzeni.
- ruch obrotowy – wszystkie punkty bryły zakreślają okręgi leżące na równoległych płaszczyznach, przy czym środki okręgów leżą na wspólnej prostej, zwanej osią obrotu.

Ruch płaski:

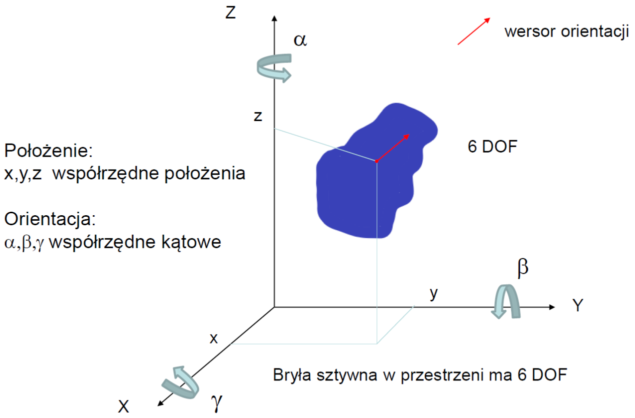
- zachodzi, jeżeli wszystkie punkty bryły poruszają się w płaszczyznach równoległych do pewnej płaszczyzny nieruchomej, zwanej płaszczyzną kierującą.



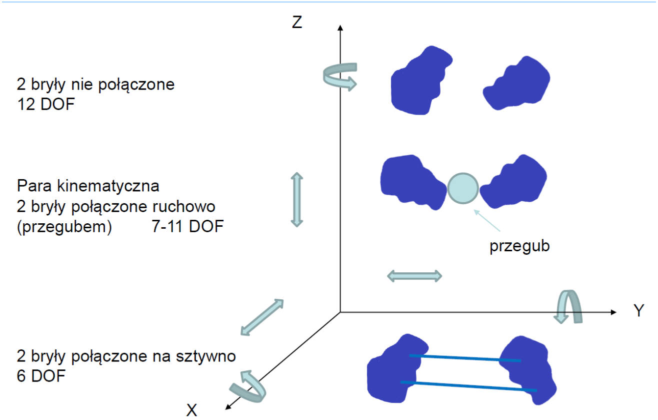
Rysunek: Źródło: [1]

Liczba stopni swobody (DOF – *degrees of freedom*)

- jest równa najmniejszej liczbie niezależnych zmiennych potrzebnych do jednoznacznego opisania stanu układu,
- przykłady:
  - punkt materialny – na płaszczyźnie 2 DOF, w przestrzeni trójwymiarowej 3 DOF,
  - bryła sztywna – w przestrzeni 3D 6 DOF,
  - roboty przemysłowe – najprostsze 3-4 DOF (do zadań Pick&Place), typowe roboty przemysłowe 5-8 DOF (zadania i operacje technologiczne).

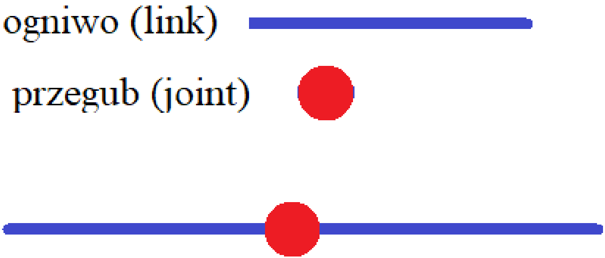


Rysunek: Źródło: [2]

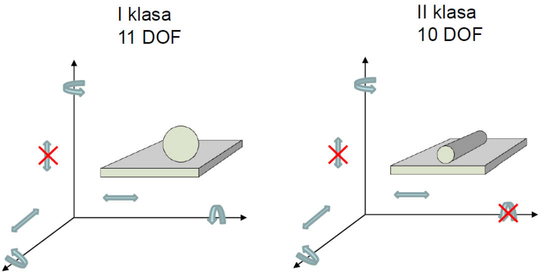


Rysunek: Źródło: [2]

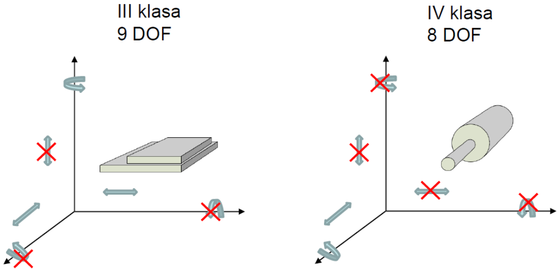
Para kinematyczna to połączenie ruchowe dwóch członów mechanizmu.



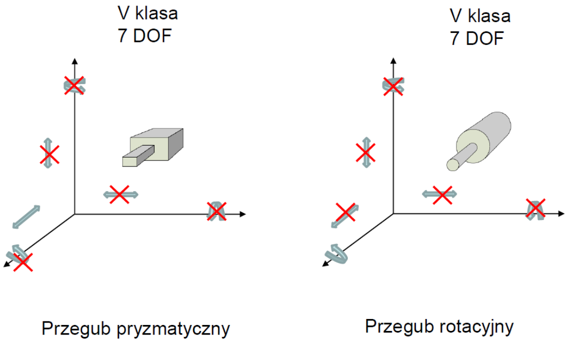
Klasy par kinematycznych
I i II klasa



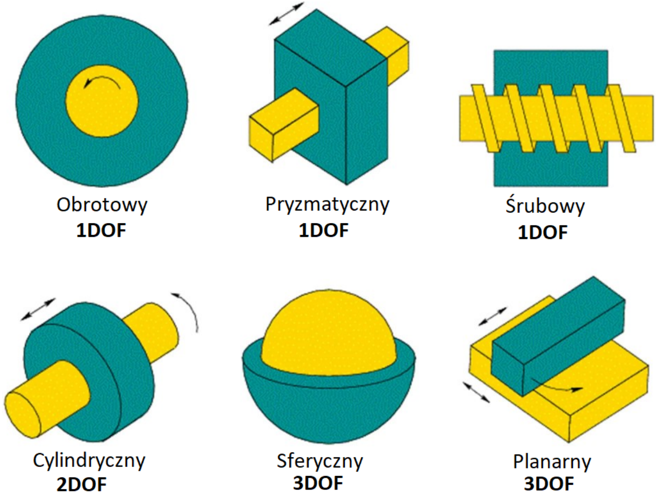
Rysunek: Źródło: [2]



Rysunek: Źródło: [2]



Rysunek: Źródło: [2]



Obrotowy
1DOF
Pryzmatyczny
1DOF
Śrubowy
1DOF
Cylindryczny
2DOF
Sferyczny
3DOF
Planarny
3DOF

Klasy par kinematycznych
Rodzaje przegubów

Klasa	Liczba więzów	Liczba stopni swobody	I postać			II postać			III postać		
p1	1	5	liczba ruchów	obrotowych	posuwistych						
			dopuszczalna	3	2						
			ograniczona	0	1						
p2	2	4	liczba ruchów	obrotowych	posuwistych	liczba ruchów	obrotowych	posuwistych			
			dopuszczalna	3	1	dopuszczalna	2	2			
			ograniczona	0	2	ograniczona	1	1			
p3	3	3	liczba ruchów	obrotowych	posuwistych	liczba ruchów	obrotowych	posuwistych	liczba ruchów	obrotowych	posuwistych
			dopuszczalna	3	0	dopuszczalna	2	1	dopuszczalna	1	2
			ograniczona	0	3	ograniczona	1	2	ograniczona	2	1
p4	4	2	liczba ruchów	obrotowych	posuwistych	liczba ruchów	obrotowych	posuwistych			
			dopuszczalna	2	0	dopuszczalna	1	1			
			ograniczona	1	3	ograniczona	2	2			
p5	5	1	liczba ruchów	obrotowych	posuwistych	liczba ruchów	obrotowych	posuwistych	liczba ruchów	obrotowych	posuwistych
			dopuszczalna	1	0	dopuszczalna	0	1	dopuszczalna	1	1
			ograniczona	2	3	ograniczona	3	2	ograniczona	2	2

Rysunek: Źródło: [2]

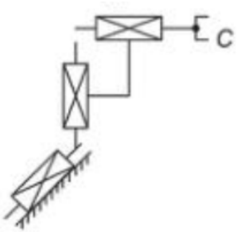
$$w = 6n - \sum_{i=1}^{n} i \cdot p_i$$

gdzie:

- w – liczba stopni swobody,
- n – liczba członów łańcucha kinematycznego,
- p_i – liczba połączeń członów kinematycznych o i-tej klasie.

Robot typu TTT (połączenia kinematyczne klasy V):

- $n = 3$,
- $i = 5$,
- $p_5 = 3$ (trzy przeguby pryzmatyczne)



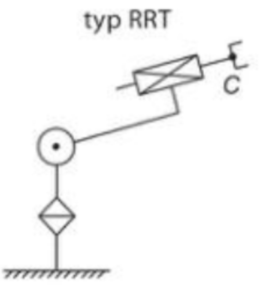
$$w = 6n - \sum_{i=1}^{n} i \cdot p_i = 6 \cdot 3 - (5 \cdot 3) = 3$$

Robot typu RRT (połączenia kinematyczne klasy V):

- $n = 3$,
- $i = 5$,
- $p_5 = 3$ (2 przeguby obrotowe, jeden przegub pryzmatyczny)

$$w = 6n - \sum_{i=1}^{n} i \cdot p_i =$$

$$= 6 \cdot 3 - (5 \cdot 2 + 5 \cdot 1) = 3$$



- **Ruchliwość** – liczba stopni swobody łańcucha kinematycznego z unieruchomionym członem - podstawą:

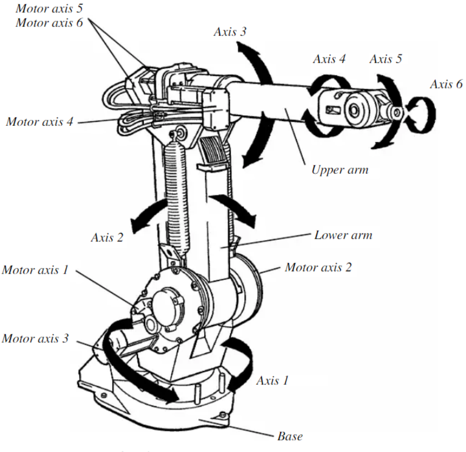
  $r = 6n - p_1 - 2p_2 - 3p_3 - 4p_4 - 5p_5$

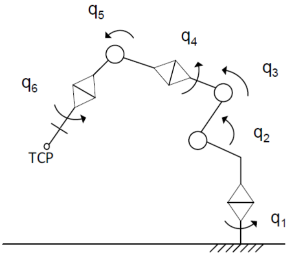
  określa liczbę więzów jaką należałoby nałożyć na układ, aby go całkowicie unieruchomić

- **Manewrowość** – liczba stopni swobody łańcucha kinematycznego z unieruchomionym pierwszym i ostatnim członem:

  $m = r - 6$

  określa liczbę więzów jaką należałoby nałożyć na układ, aby go całkowicie unieruchomić w przypadku gdy np. efektor zajmuje określone położenie.





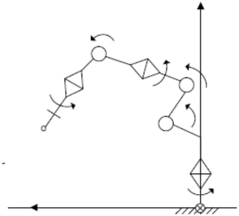
schemat kinematyczny

6 przegubów rotacyjnych V klasy

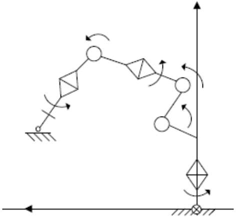
Przykład
Robot IRB 1400 – ruchliwość a manewrowość

Jeśli robot posiada tylko przeguby V klasy, to ma tyle stopni swobody ile przegubów. IRB 1400 – 6 DOF

- ruchliwość
- manewrowość



r=6



m=0

Ruchliwość robota IRB 1400 wynosi 6. Manewrowość wynosi 0.

- Jeżeli $m = 0$ to oznacza, że nie ma możliwości ruchu w żadnym przegubie. Dla danego położenia i orientacji TCP istnieje tylko jedna konfiguracja (jeden wektor) współrzędnych wewnętrznych dająca dane położenie i orientację TCP.
- Jeśli $m > 0$ to manipulator może przyjąć inne konfiguracje dla tego samego TCP. Istnieje więcej niż jedna wartość wektora współrzędnych wewnętrznych dających zadane położenie i orientację TCP.

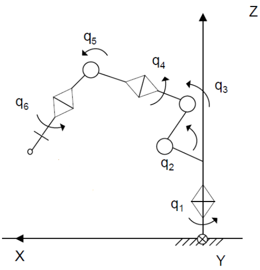
TCP - Tool Center Point – zdefiniowany punkt pracy np. koniec efektora lub punkt pomiędzy palcami chwytaka.
Współrzędne punktu pracy TCP:

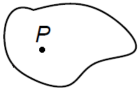
- wektor współrzędnych wewnętrznych (konfiguracyjnych)

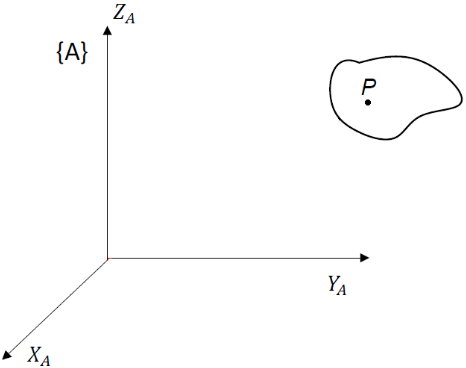
$$\vec{q} = (q_1, ..., q_n)^T$$

- wektor współrzędnych zewnętrznych

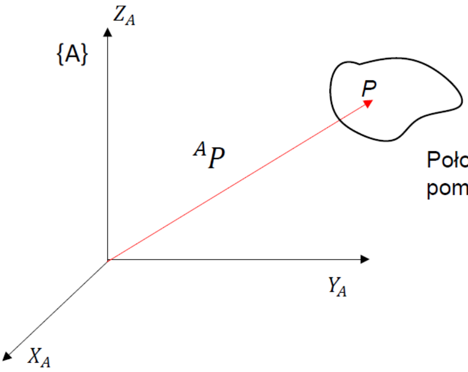
$$\vec{x} = (x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)^T$$




P



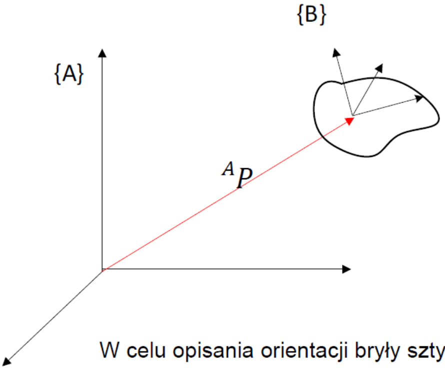
Z_A
{A}
P
Y_A
X_A



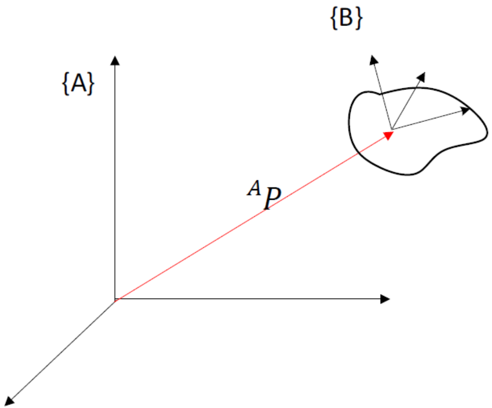
Położenie punktu P opisujemy za pomocą wektora pozycji

$$ {}^{A}P = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \qquad (1) $$

– wektor położenia punktu P w układzie A.



W celu opisania orientacji bryły sztywnej trzeba związać z nią pewien układ współrzędnych {B}, a następnie opisać położenie tego układu względem układu odniesienia {A}



Orientację układu {B} względem {A} opisuje tzw. macierz obrotu ${}^{A}_{B}R$

Orientację układu B względem układu A opisuje tzw. **macierz obrotu** ${}^{A}_{B}R$ postaci

$$ {}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} $$

gdzie r_{ij} to iloczyn skalarny odpowiedniej pary wersorów:

$$ {}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} \widehat{X_B} \cdot \widehat{X_A} & \widehat{Y_B} \cdot \widehat{X_A} & \widehat{Z_B} \cdot \widehat{X_A} \\ \widehat{X_B} \cdot \widehat{Y_A} & \widehat{Y_B} \cdot \widehat{Y_A} & \widehat{Z_B} \cdot \widehat{Y_A} \\ \widehat{X_B} \cdot \widehat{Z_A} & \widehat{Y_B} \cdot \widehat{Z_A} & \widehat{Z_B} \cdot \widehat{Z_A} \end{bmatrix} $$

Orientacja układu B względem układu A:

$$ {}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} \widehat{X_B \cdot X_A} & \widehat{Y_B \cdot X_A} & \widehat{Z_B \cdot X_A} \\ \widehat{X_B \cdot Y_A} & \widehat{Y_B \cdot Y_A} & \widehat{Z_B \cdot Y_A} \\ \widehat{X_B \cdot Z_A} & \widehat{Y_B \cdot Z_A} & \widehat{Z_B \cdot Z_A} \end{bmatrix} $$

Orientacja układu A względem układu B:

$$ {}^{B}_{A}R = \begin{bmatrix} \widehat{X_A \cdot X_B} & \widehat{Y_A \cdot X_B} & \widehat{Z_A \cdot X_B} \\ \widehat{X_A \cdot Y_B} & \widehat{Y_A \cdot Y_B} & \widehat{Z_A \cdot Y_B} \\ \widehat{X_A \cdot Z_B} & \widehat{Y_A \cdot Z_B} & \widehat{Z_A \cdot Z_B} \end{bmatrix}, $$

zatem

$$ {}^{A}_{B}R = {}^{B}_{A}R^{-1} = {}^{B}_{A}R^{T}. $$

Kolumny macierzy obrotu są ortonormalne, czyli odwracanie macierzy jest równoważne transpozycji.

Orientacja układu B względem układu A:

$$ {}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} \widehat{X_B} \cdot \widehat{X_A} & \widehat{Y_B} \cdot \widehat{X_A} & \widehat{Z_B} \cdot \widehat{X_A} \\ \widehat{X_B} \cdot \widehat{Y_A} & \widehat{Y_B} \cdot \widehat{Y_A} & \widehat{Z_B} \cdot \widehat{Y_A} \\ \widehat{X_B} \cdot \widehat{Z_A} & \widehat{Y_B} \cdot \widehat{Z_A} & \widehat{Z_B} \cdot \widehat{Z_A} \end{bmatrix} $$

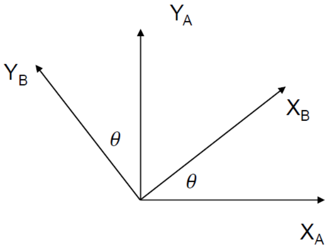
Orientacja układu A względem układu B:

$$ {}^{B}_{A}R = \begin{bmatrix} \widehat{X_A} \cdot \widehat{X_B} & \widehat{Y_A} \cdot \widehat{X_B} & \widehat{Z_A} \cdot \widehat{X_B} \\ \widehat{X_A} \cdot \widehat{Y_B} & \widehat{Y_A} \cdot \widehat{Y_B} & \widehat{Z_A} \cdot \widehat{Y_B} \\ \widehat{X_A} \cdot \widehat{Z_B} & \widehat{Y_A} \cdot \widehat{Z_B} & \widehat{Z_A} \cdot \widehat{Z_B} \end{bmatrix}, $$

zatem

$$ {}^{A}_{B}R = {}^{B}_{A}R^{-1} = {}^{B}_{A}R^{T}. $$

Kolumny macierzy obrotu są ortonormalne, czyli odwracanie macierzy jest równoważne transpozycji.



$$ {}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} \widehat{X_B} \cdot \widehat{X_A} & \widehat{Y_B} \cdot \widehat{X_A} & \widehat{Z_B} \cdot \widehat{X_A} \\ \widehat{X_B} \cdot \widehat{Y_A} & \widehat{Y_B} \cdot \widehat{Y_A} & \widehat{Z_B} \cdot \widehat{Y_A} \\ \widehat{X_B} \cdot \widehat{Z_A} & \widehat{Y_B} \cdot \widehat{Z_A} & \widehat{Z_B} \cdot \widehat{Z_A} \end{bmatrix} $$

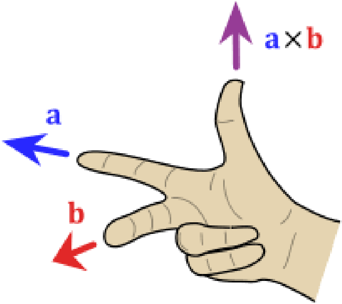
$$ \widehat{X_B} \cdot \widehat{X_A} = 1 \cdot 1 \cdot \cos(\theta), \ \widehat{X_B} \cdot \widehat{Y_A} = \cos(90^\circ - \theta) = \sin(\theta), \ \ldots $$

$$ {}^{A}_{B}R = R_Z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

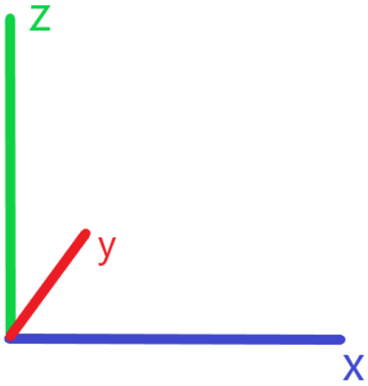
$$R_X(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$R_Y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$R_Z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

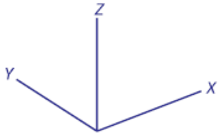

a×b
a
b

Obroty: $rot(x, \frac{\pi}{2})$, $rot(x, \pi)$, $rot(x, -\frac{\pi}{2})$, $rot(y, \frac{\pi}{2})$, $rot(z, \frac{\pi}{2})$,

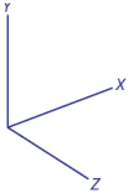


Wybrane zagadnienia kinematyki i dynamiki

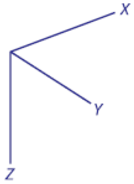
Przykład – rotacja



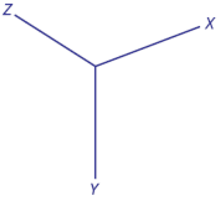
oryginalny układ współrzędnych



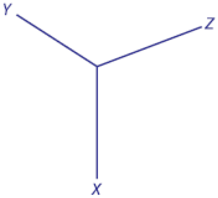
$\frac{\pi}{2}$ wokół osi x



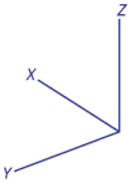
π wokół osi x



$-\frac{\pi}{2}$ wokół osi x

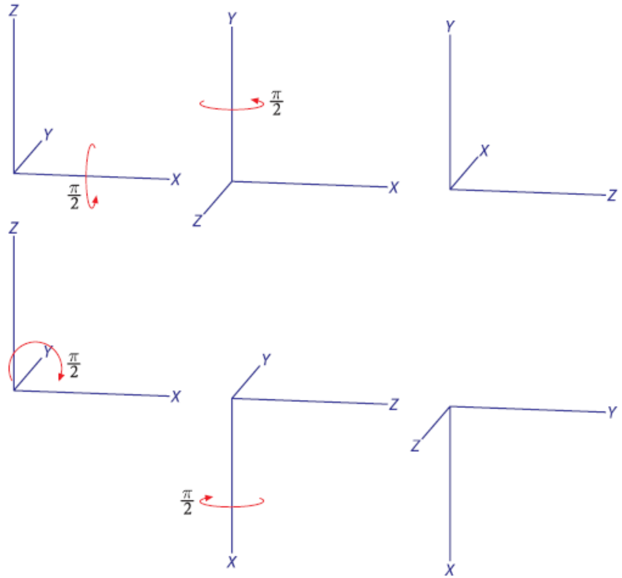


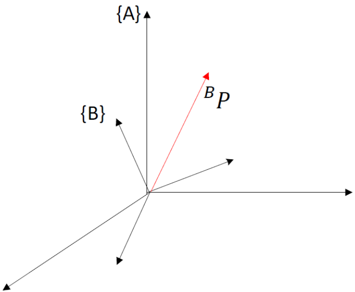
$\frac{\pi}{2}$ wokół osi y



$\frac{\pi}{2}$ wokół osi z

Przykład – złożenie obrotów





^AP – opis wektora względem A,

^BP – opis wektora względem B,

$$^AP = ^A_B R \cdot ^BP$$

Macierz obrotu odpowiada odwzorowaniu tzn. zmianie opisu z postaci ^BP na opis w układzie A czyli ^AP.

Ruch sztywny jako połączenie obrotu oraz przesunięcia:

- obrót można reprezentować za pomocą zdefiniowanej macierzy obrotu R,
- przesunięcie można reprezentować wektorem przesunięcia d,
- grupa wszystkich ruchów sztywnych (d, R) to specjalna grupa euklidesowa $SE(3)$.

Każdy ruch sztywny można reprezentować w postaci macierzowej – za pomocą tzw. przekształcenia jednorodnego.

$$\left[\begin{array}{c} {}^{A}P \\ \hdashline 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc:c} & R & & d \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} {}^{B}P \\ \hdashline 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} R \cdot {}^{B}P + d \\ \hdashline 1 \end{array}\right]$$

$$^{A}P = R \cdot {}^{B}P + d$$

Jeżeli

$$^{A}P = R \cdot ^{B}P + d$$

mnożąc lewostronnie obie strony równania przez R^T otrzymujemy:

$$R^T \cdot ^{A}P = R^T R \cdot ^{B}P + R^T \cdot d$$

zatem

$$R^T \cdot ^{A}P = ^{B}P + R^T \cdot d$$

czyli

$$^{B}P = R^T \cdot ^{A}P - R^T \cdot d$$

$$\left[\begin{array}{c} ^{B}P \\ \hline 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} & R^T & & -R^T d \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} ^{A}P \\ \hline 1 \end{array}\right]$$

$$^{B}P = R^T \cdot ^{A}P - R^T \cdot d$$

$$\left[\begin{array}{c} {}^{A}P \\ \hline 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} & R & & d \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} {}^{B}P \\ \hline 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} R \cdot {}^{B}P + d \\ \hline 1 \end{array}\right]$$

$${}^{A}P = R \cdot {}^{B}P + d$$

$$\left[\begin{array}{c} {}^{B}P \\ \hline 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} & R^{T} & & -R^{T}d \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} {}^{A}P \\ \hline 1 \end{array}\right]$$

$${}^{B}P = R^{T} \cdot {}^{A}P - R^{T} \cdot d$$

$$Trans_{x,a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad Rot_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\alpha & -sin\alpha & 0 \\ 0 & sin\alpha & cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

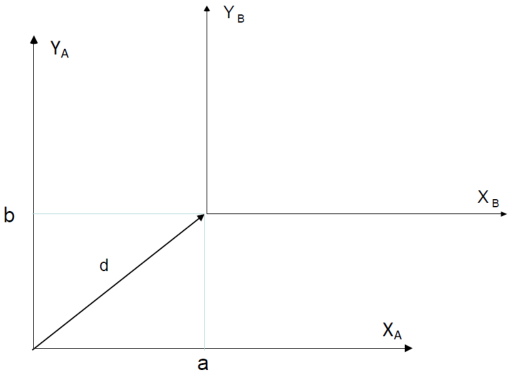
$$Trans_{y,b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad Rot_{y,\beta} = \begin{bmatrix} cos\beta & 0 & sin\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -sin\beta & 0 & cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Trans_{z,c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad Rot_{z,\gamma} = \begin{bmatrix} cos\gamma & -sin\gamma & 0 & 0 \\ sin\gamma & cos\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Trans_{y,b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Trans_{x,a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$d = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix}$$



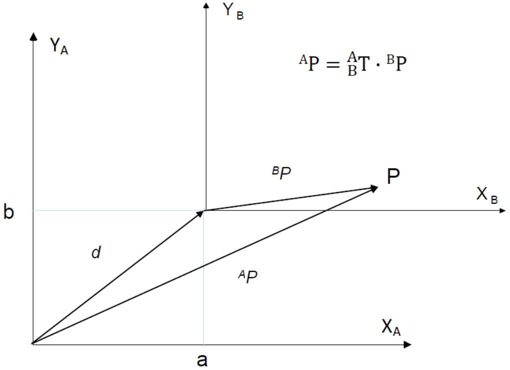
$$Trans_{y,b} \cdot Trans_{x,a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^{A}_{B}T$$

$$Trans_{y,b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Trans_{x,a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$d = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$d + {}^{B}P = {}^{A}P$$

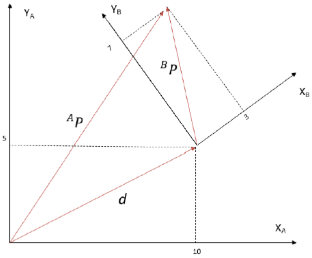


$$Trans_{x,a} Trans_{y,b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^{A}_{B}T$$

$$Trans_{y,b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

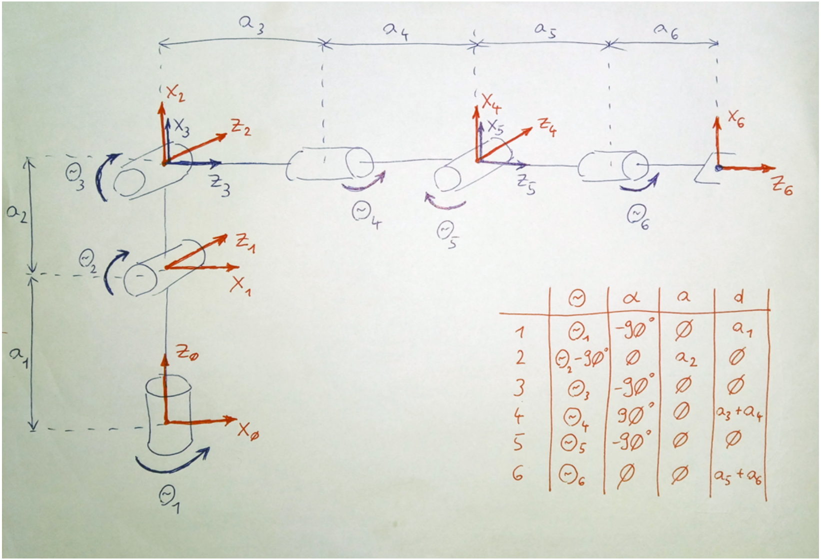
$$Trans_{x,a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Rot_{z,\gamma} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

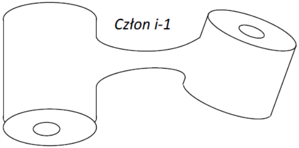


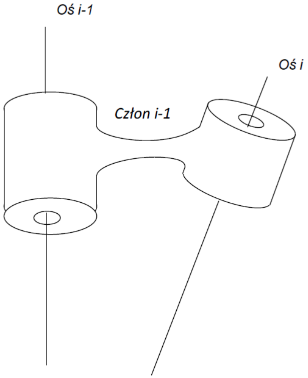
$$^{A}_{B}T = Trans_{x,a}\, Trans_{y,b} Rot_{z,\gamma}$$

$$^{A}_{B}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



	Θ	α	a	d
1	Θ_1	-90°	0	a_1
2	Θ_2-90°	0	a_2	0
3	Θ_3	-90°	0	0
4	Θ_4	90°	0	a_3+a_4
5	Θ_5	-90°	0	0
6	Θ_6	0	0	a_5+a_6

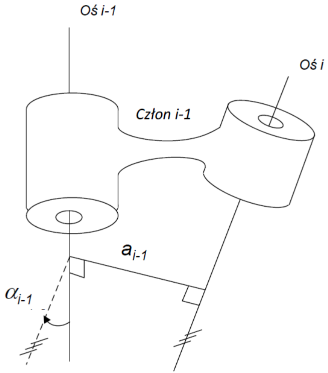

Człon i-1


Oś i-1
Oś i
Człon i-1

Opis ogniwa manipulatora

Parametry

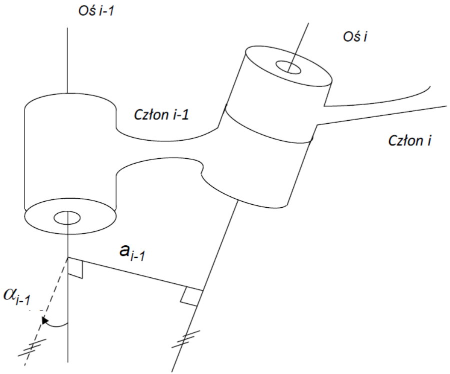
- a_{i-1} – długość członu $(i-1)$ mierzona jako odległość między osiami przegubów $(i-1)$ oraz i,
- α_{i-1} – kąt skręcenia $(i-1)$ przegubu mierzony jako kąt między osiami przegubu $(i-1)$ oraz i



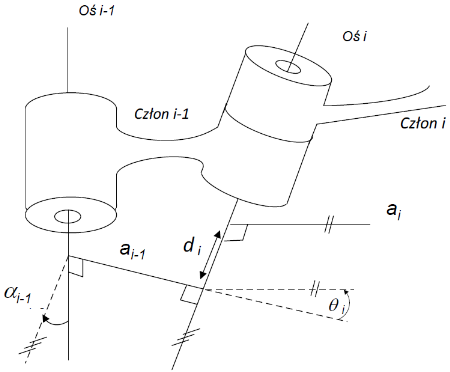
Opis ogniwa manipulatora

Parametry

- a_{i-1} – długość członu
- α_{i-1} – kąt skręcenia

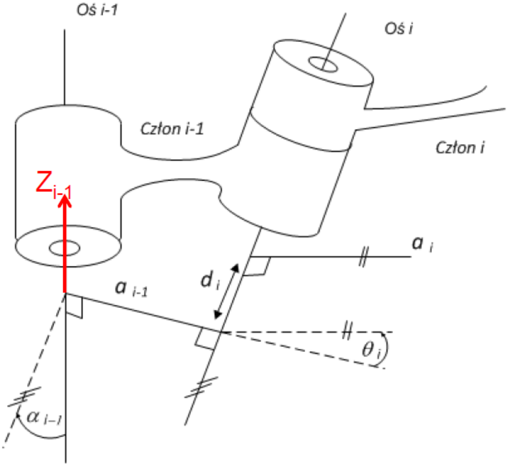


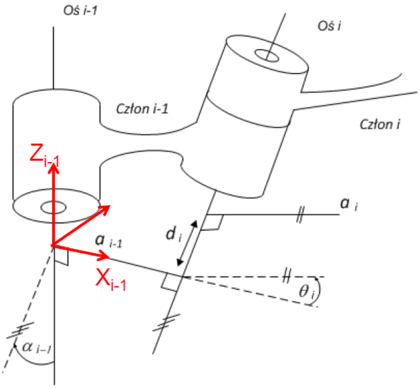
- a_{i-1} – długość członu, α_{i-1} – kąt skręcenia,
- d_i – odsunięcie członu i – odległość mierzona wzdłuż osi i-tego przegubu między a_{i-1} i a_i,
- θ_i – kąt między a_{i-1} i a_i, określony prawoskrętnie wokół $i-tego$ przegubu.



Opis ogniwa manipulatora

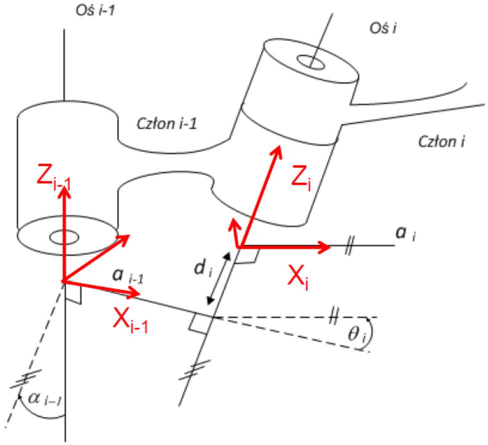
Przypisywanie osi



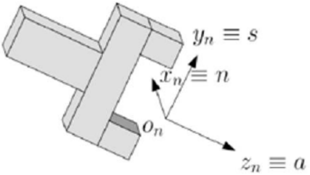


Oś i-1
Oś i
Człon i-1
Człon i
Z i-1
X i-1
a i-1
a i
d i
θ i
α i-1

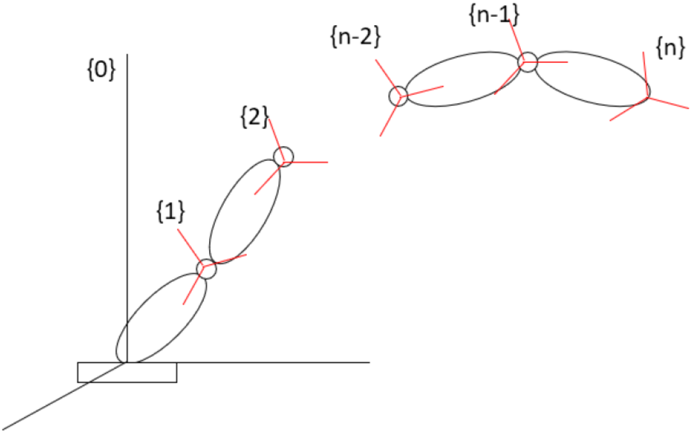
Opis ogniwa manipulatora
Przypisywanie osi



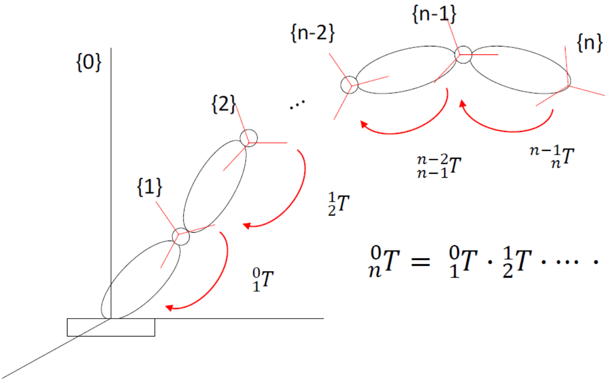
1. Zidentyfikuj oraz narysuj osie przegubów. Dla kroków 2-5 bierz pod uwagę dwie sąsiednie proste (osie i oraz $i+1$).
2. Znajdź prostą obustronnie prostopadłą do nich lub punkt ich przecięcia. Początek układu przyjmij w punkcie przecięcia się osi lub w punkcie przecięcia i-tej osi z prostą obustronnie prostopadłą.
3. Wybierz oś Z_i w osi i-tego przegubu,
4. Wybierz oś X_i wzdłuż prostej obustronnie prostopadłej lub jeśli osie przecinają się wybierz X_i jako normalną do płaszczyzny zawierającej te osie.
5. Wybierz oś Y_i tak, aby układ współrzędnych był prawoskrętny.
6. Należy przyjąć, że układ 0 pokrywa się z układem 1 gdy zmienna pierwszego przegubu jest równa 0. Początek układu n oraz zwrot osi X_n należy tak przyjąć aby spowodować zerowanie się możliwie największej liczby parametrów.



- a – kierunek zbliżania (*ang. approach direction*),
- s – kierunek przesuwania palców typowego chwytaka (*ang. sliding direction*),
- n – kierunek normalnej do płaszczyzny a oraz s.

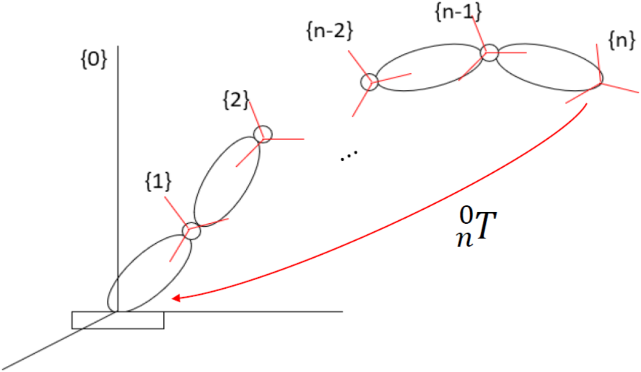


0 – bazowy układ współrzędnych, *i* – układ współrzędnych związany z *i*-tym przegubem.



$$ {}^{0}_{n}T = {}^{0}_{1}T \cdot {}^{1}_{2}T \cdot \dots \cdot {}^{n-2}_{n-1}T \cdot {}^{n-1}_{n}T $$

0 – bazowy układ współrzędnych, *i* – układ współrzędnych związany z *i*-tym przegubem.



$$ {}^{0}_{n}T = {}^{0}_{1}T \cdot {}^{1}_{2}T \cdot \dots \cdot {}^{n-2}_{n-1}T \cdot {}^{n-1}_{n}T = A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_{n-1} \cdot A_n $$

0 – bazowy układ współrzędnych, *i* – układ współrzędnych związany z *i*-tym przegubem.

- a_i – **długość członu**, odległość od osi Z_i do osi Z_{i+1} mierzona wzdłuż osi X_i,
- α_i – **kąt skrętu**, kąt pomiędzy osiami Z_i oraz osi Z_{i+1} mierzony wokół osi X_i,
- d_i – **odsunięcie członu** –odległość od osi X_{i-1} do osi X_i mierzona wzdłuż osi Z_i,
- θ_i – **kąt konfiguracji** – kąt pomiędzy osiami X_{i-1} oraz X_i mierzony wokół osi Z_i.

Uwaga:

- d_i – zmienna dla przegubu translacyjnego,
- θ_i – zmienna dla przegubu rotacyjnego.

Parametry D-H:

- a_i – **długość członu**,
- α_i – **kąt skrętu**,
- d_i – **odsunięcie członu**,
- θ_i – **kąt konfiguracji.**

$$A_i = Rot(Z,\theta_i)Trans(Z,d_i)Trans(X,a_i)Rot(X,\alpha_i)$$

$$A_i = Rot(Z,\theta_i)Trans(Z,d_i)Trans(X,a_i)Rot(X,\alpha_i)$$

$$Trans_{x,a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad Rot_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Trans_{y,b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad Rot_{y,\beta} = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Trans_{z,c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad Rot_{z,\gamma} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_i = Rot(Z, \theta_i)Trans(Z, d_i)Trans(X, a_i)Rot(X, \alpha_i)$$

$$A_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

gdzie $c\theta_i = \cos\theta_i$ itd.

1. Oznacz osie przegubów jako $z_0, ..., z_{n-1}$ (oś z_i jest osią przegubu $i+1$).
2. Przyjmij bazowy układ współrzędnych: początek o_0 umieść dowolnie na z_0 i wybierz x_0 oraz y_0 tak, aby układ był prawoskrêtny.
3. Dla $i = 1 : n-1$
   - Umieść o_i w miejscu, gdzie wspólna normalna do osi z_i i z_{i-1} przecina z_i. Jeśli z_i przecina z_{i-1} to umieść o_i w tym przecięciu. Jeśli z_i i z_{i-1} są równoległe, to umieść o_i na z_i tak, aby zachodziło $d_i = 0$.
   - Przyjąć x_i wzdłuż wspólnej normalnej osi z_i i z_{i-1} przechodzącej przez o_i, lub w kierunku normalnej do płaszczyzny obu tych osi jeśli się one przecinają.
   - Wybrać y_i tak, aby układ był prawoskrętny.

4. Ustal układ końcówki roboczej: wybierz z_n równoległe do z_{n-1}.
5. Dla $i = 1 : n$, wypełnij tabelę parametrów DH.
6. Zbuduj macierze przekształceń jednorodnych A_i.
7. Utwórz macierz T_n^0 opisującą pozycję i orientację układu narzędzia wyrażoną w bazowym układzie współrzędnych.

Proste zadanie kinematyki:

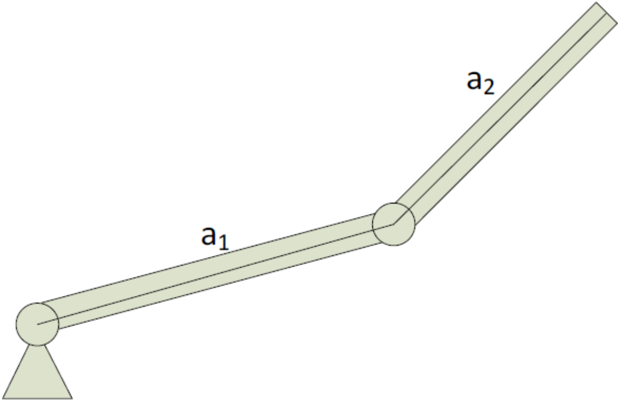
Mając dane wartości zmiennych ruchu w przegubach manipulatora znaleźć pozycję i orientację TCP.

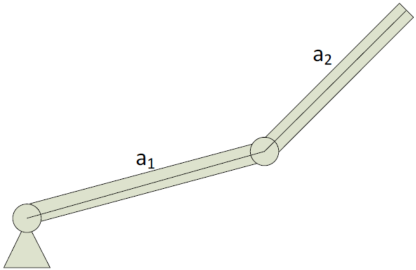
Odwrotne zadanie kinematyki:

Mając dane położenie i orientację TCP w układzie współrzędnych zewnętrznych znaleźć wszystkie możliwe wartości współrzędnych wewnętrznych manipulatora.

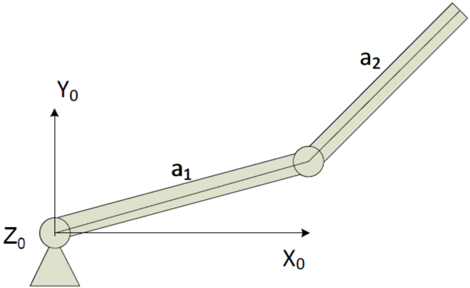
Proste zadanie kinematyki

Manipulator planarny 2R

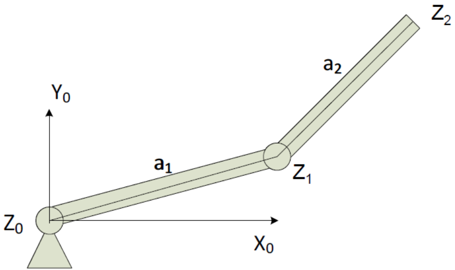




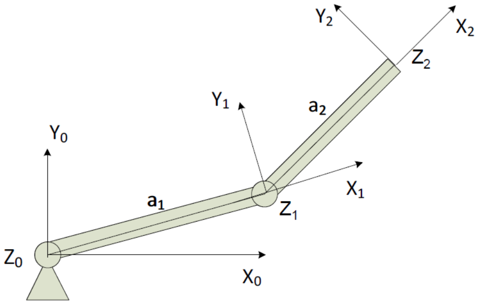
- 2 DOF,
- należy przypisać 3 układy współrzędnych: dwa dla przegubów, jeden dla końcówki ramienia
  - wybrać oś Z_0 – oś przegubu 1, układ bazowy,
  - wybrać oś Z_1 – oś przegubu 2,
  - wybrać oś Z_2 – oś układu końcówki roboczej (brak efektora – wybrano równolegle do poprzednich).



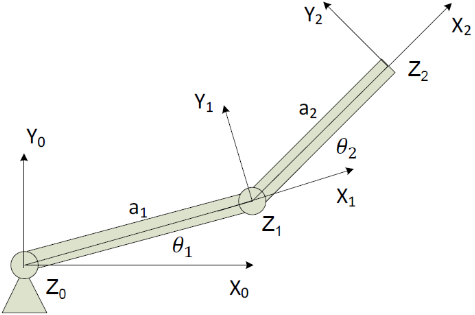
- Ustalamy układ bazowy



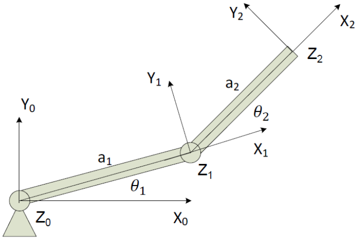
- Ustalamy osie Z_i



- Wybieramy osie X_i
- Uzupełniamy osie Y_i do układu prawoskrętnego



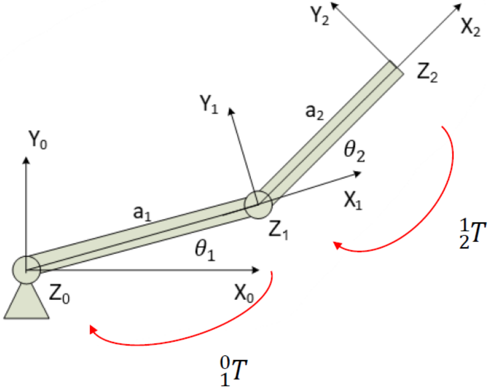
- Ustalenie parametrów DH dla poszczególnych członów oraz końcówki ramienia



człon	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1	0	a_1	0
2	θ_2	0	a_2	0

Tabela: Tabela parametrów Denavita – Hartenberga

$$A_i = Rot(Z, \theta_i) Trans(Z, d_i) Trans(X, a_i) Rot(X, \alpha_i)$$



- Wyliczenie przekształcenia jednorodnego

$$^0_2T = {}^0_1T \cdot {}^1_2T = A_1 \cdot A_2$$

$$A_i = Rot_{Z\theta_i} \cdot Trans_{Zd_i} \cdot Trans_{Xa_i} \cdot Rot_{X\alpha_i}$$

człon	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1	0	a_1	0
2	θ_2	0	a_2	0

Tabela: Tabela parametrów Denavita – Hartenberga

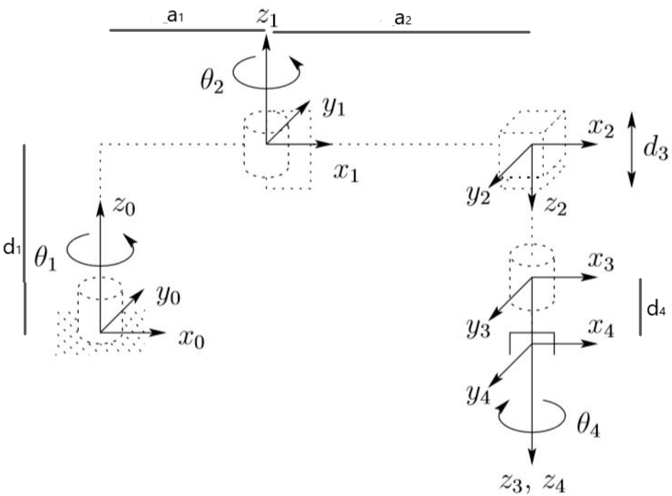
$$A_1 = \begin{pmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & a_1 c\theta_1 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & a_1 s\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & a_2 c\theta_1 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & a_2 s\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_1A_2 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & a_1c\theta_1 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & a_1s\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & a_2c\theta_2 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & a_2s\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

stąd

$$A_1A_2 = \begin{bmatrix} c(\theta_1+\theta_2) & -s(\theta_1+\theta_2) & 0 & a_1c\theta_1 + a_2c(\theta_1+\theta_2) \\ s(\theta_1+\theta_2) & c(\theta_1+\theta_2) & 0 & a_1s\theta_1 + a_2s(\theta_1+\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

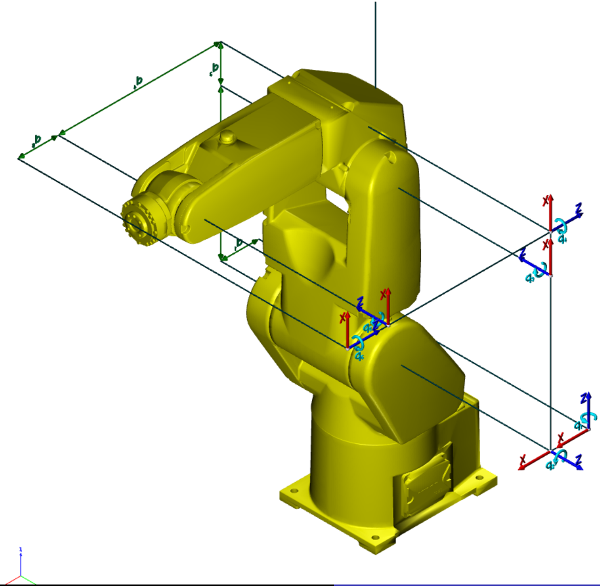


$$A_i = Rot(Z, \theta_i)\,Trans(Z, d_i)\,Trans(X, a_i)\,Rot(X, \alpha_i)$$

Proste zadanie kinematyki

człon	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1	d_1	a_1	0
2	θ_2	0	a_2	180
3	0	d_3	0	0
4	θ_4	d_4	0	0

Tabela: Tabela parametrów Denavita – Hartenberga



Sposoby reprezentacji macierzy obrotu opisującej orientację efektora:

- kąty Eulera (kąty obrotu wokół osi: XYX, XZX, YXY, YZY, ZXZ, ZYZ)
- kąty RPY (kąty obrotu wokół osi: XYZ, XZY, YXZ, YZX, ZXY, ZYX)
- reprezentacja "oś – kąt".

Kinematyka opisuje położenie i orientację efektora w przestrzeni zadaniowej w funkcji zmiennych przegubowych

$$y = k(q).$$

Różniczkując powyższe otrzymamy zależność prędkości zmian współrzędnych zadaniowych od prędkości zmian współrzędnych przegubowych

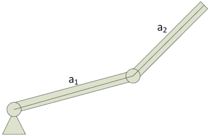
$$\dot{y} = \frac{\partial k}{\partial q}(q)\dot{q} = J(q)\dot{q},$$

przy czym J(q) to macierz Jacobiego opisująca tę zależność.
Konfiguracja regularna

$$det(J(q)) \neq 0,$$

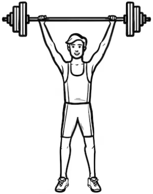
Konfiguracja osobliwa

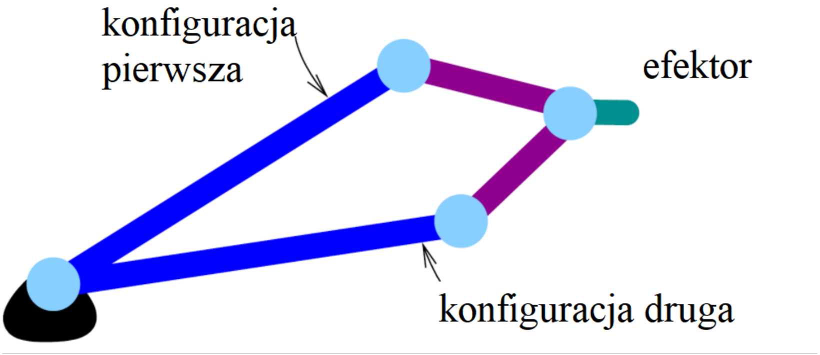
det(J(q))=0.



W otoczeniu osobliwości:

- ruch w pewnych kierunkach w Y jest nieosiągalny;
- pewne ruchy w Q nie wywołują ruchu w Y;
- ograniczone prędkości efektora mogą wymagać nieograniczonych prędkości w przegubach;
- może nie istnieć jednoznaczne rozwiązanie Odwrotnego Zadania Kinematyki;
- duże siły na efektorze mogą powodować niewielkie siły w przegubach;
- istnieją siły działające na efektor, które nie wymagają równoważenia.





konfiguracja pierwsza
efektor
konfiguracja druga

Odwrotne zadanie kinematyki (OZK):
Dla danej trajektorii zewnętrznej efektora $y_d(t) \in SE(3)(\mathbb{R}^6)$ znaleźć trajektorię wewnętrzną $q_d(t)$, która realizuje $y_d(t)$, tzn.

$$y_d(t) = k(q_d(t)).$$

Zadanie można rozwiązać w wersji ciągłej (rozwiązaniem jest trajektoria) lub punktowej ($y_d = k(q_d)$).
Metody rozwiązania OZK:

- bezpośrednie podejście algebraiczne
- rozwiązanie przez odsprzężenie kinematyczne
- metoda geometryczna
- metoda jakobianowa.

- Dla manipulatorów nieredundantnych ($n = m$)

$$\dot{q}(t) = J^{-1}(q(t))\dot{y}(t).$$

- Dla manipulatorów redundantnych ($n \geq m$)

$$\dot{q}(t) = J^{+}(q(t))\dot{y}(t),$$

przy czym $J^{+} = J^{T}(JJ^{T})^{-1}$ to pseudoinwers Moore'a – Penrose'a.

- Dla manipulatorów nieredundantnych ($n = m$)

$$\dot{q}(t) = \gamma J^{-1}(q(t))(y_d - k(q)), \qquad k(q(t_0)) = y(t_0).$$

- Dla manipulatorów redundantnych ($n \geq m$)

$$\dot{q}(t) = \gamma J^{+}(q(t))(y_d - k(q)), \qquad k(q(t_0)) = y(t_0).$$

- Dla manipulatorów nieredundantnych ($n = m$)

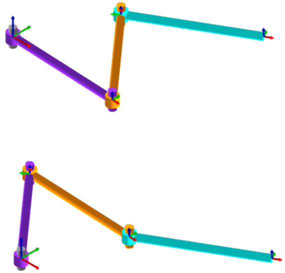
$$q_{k+1} = q_k + \gamma J^{-1}(q(t))(y_d - k(q_k)).$$

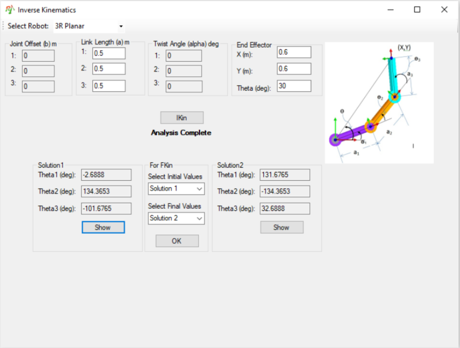
- Dla manipulatorów redundantnych ($n \geq m$)

$$q_{k+1} = q_k + \gamma J^{+}(q(t))(y_d - k(q_k)).$$

Odwrotne zadanie kinematyki

3R – RoboAnalyzer





Dynamika manipulatora stacjonarnego

Wzór na dynamikę uzyskuje się z równań Eulera-Lagrange'a oraz równań Hamiltona. Przyjmuje on postać:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D(q) = F + u,$$

gdzie:
$q, \dot{q}, \ddot{q}$ – położenie, prędkość oraz przyspieszenie przegubów,
$M(q)$ – macierz bezwładności,
$C(q, \dot{q})$ – macierz sił odśrodkowych i Coriolisa,
$D(q)$ – macierz grawitacji,
F – wektor sił i momentów niepotencjalnych działających na układ (tarcia, opory ruchu, więzy),
u - sterowanie.

Podsumowanie

1. Budowa manipulatora,
2. Struktura kinematyczna,
3. Bryła sztywna (położenie i orientacja),
4. Przekształcenie jednorodne,
5. Notacja Denavita-Hartenberga,
6. Proste i odwrotne zadanie kinematyki
7. Proste i odwrotne zadanie dynamiki

Literatura

W oparciu o wykład dr Wojciecha Muszyńskiego *Podstawy Robotyki*

- [1] Kaczmarek W., Panasiuk J. *Robotyzacja procesów produkcyjnych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, 2017
- [2] Muszyński W. *Materiały do wykładu Podstawy automatyki i robotyki*
- [6] materiały firmy FANUC